Úloha VI.3 ... utopená čočka

4 body; průměr 2,95; řešilo 20 studentů

Jestliže do vzdálenosti p od tenké čočky vyrobené ze skla o indexu lomu n_s umístíme předmět, podaří se nám zachytit jeho obraz na stínítku ve vzdálenosti d od ní. Čočku a předmět beze změny vzájemné vzdálenosti poté ponoříme do kapaliny o indexu lomu n. Za jakých podmínek budeme nyní schopni zachytit obraz předmětu na stínítko a v jaké vzdálenosti x od čočky to bude?

Pikoš se utopil i s brýlemi.

Za počátečních podmínek jsme předmět, umístěný ve vzdálenosti p od čočky, viděli ve vzdálenosti d. Dopočteme tedy nejprve ohniskovou vzdálenost čočky ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f}\,, \tag{1}$$

kde a je skutečná vzdálenost předmětu od čočky (v našem případě tedy p), a' vzdálenost, ve které vidíme zobrazený předmět (v našem případě tedy d), a f ohnisková vzdálenost naší čočky. Pro tenkou čočku můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit také pomocí poloměrů křivosti lámavých ploch (R_1 a R_2) a indexu lomu čočky n_s. Takto můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit z této rovnice

$$-\frac{1}{f} = (n_\mathrm{s} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\,. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) můžeme tedy určit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d} = (n_\mathrm{s} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (n_\mathrm{s} - 1)\,\sigma\,, \tag{3}$$

kde $\sigma = 1/R_1 - 1/R_2$ je tzv. vypuklost čočky. Vlastnosti čočky se určují ze Snellova zákona

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2\,.$$

Běžně předpokládáme, že se skrz brýle díváme ve vzduchu, jehož index lomu je až na nepatrnou odchylku roven jedné. Snellův zákon můžeme pro čočku ve vzduchu tedy upravit na tvar

$$\sin\alpha_1 = n_\mathrm{s} \sin\alpha_2\,. \tag{4}$$

V kapalině o indexu lomu n bude tato rovnice vypadat následovně

$$n \sin\alpha_1 = n_\mathrm{s} \sin\alpha_2\,.$$

Abychom se dostali znovu do tvaru (4), musíme určit takzvaný relativní index lomu – n_s/n. Výsledek s čočkou v kapalině tedy bude stejný, jako kdybychom měli ve vzduchu čočku s indexem lomu n_s/n. Pokud tedy dosadíme do rovnice (3), získáváme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \left(\frac{n_\mathrm{s}}{n} - 1\right)\sigma\,. \tag{5}$$

Pokud tedy chceme zjistit hodnotu x, musíme vyřešit soustavu dvou rovnic (3) a (5) o dvou neznámých σ a x. Tato soustava má pro x řešení

$$x = \frac{pd\,(n_\mathrm{s} - 1)}{\left(\frac{n_\mathrm{s}}{n} - 1\right)(p + d) - d\,(n_\mathrm{s} - 1)}\,.$$

Z tvaru řešení je zřejmé, že obraz neuvidíme v případě, že bude splněno

$$\left(\frac{n_\mathrm{s}}{n} - 1\right)(p + d) = d\,(n_\mathrm{s} - 1) \ , \tag{6}$$

neboli

$$n = n_\mathrm{s}\frac{p + d}{p + n_\mathrm{s} d}\,.$$

V tomto případě bychom obraz zachytili až v nekonečnu. Dále požadujeme, abychom byli schopni obraz zachytit na stínítku. Vzdálenost x musí být kladné číslo. Požadujeme tedy, aby byl splněn vztah

$$\frac{pd\,(n_\mathrm{s} - 1)}{\left(\frac{n_\mathrm{s}}{n} - 1\right)(p + d) - d\,(n_\mathrm{s} - 1)} > 0\,.$$

Pro splnění podmínky je potřeba, aby čitatel a jmenovatel měli stejné znaménko. Možnost, že obě znaménka budou záporná, můžeme vyloučit, neboť index lomu čočky nemůže být menší než 1. Musíme tedy ověřit, kdy bude kladný čitatel. To bude v případě, kdy bude splněno

$$\left(\frac{n_\mathrm{s}}{n} - 1\right)(p + d) > d\,(n_\mathrm{s} - 1) \quad \Rightarrow \quad p < d\frac{n_\mathrm{s}\,(n - 1)}{n_\mathrm{s} - n}\,.$$

Nahlédnutím vidíme, že toto určitě nebude splněno v případě, kdy index lomu čočky bude nižší než index lomu kapaliny. V tomto případě by se čočka chovala nikoliv jako spojka, nýbrž jako rozptylka.

Tomáš Bárta
`tomas@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.