

Milé řešitelky a řešitelé,

dostává se k vám brožurka obsahující zadání druhé série a vzorová řešení úloh série první. Obvykle byste zde našli i výsledky po první sérii.

Začneme trochu zešíroka. Distribuované systémy jsou závislé na přenosu zpráv. Existují různé způsoby přenosu zpráv, například protokol TCP/IP zaručuje spolehlivé doručení, doba přenosu však teoreticky není nijak omezena. FYKOS je bezesporu distribuovaným systémem a Česká pošta kvalit TCP/IP dosahuje zřídka (vzhledem k fyzickému charakteru zpráv), proto v aktuální brožurce nenaleznete body za vaše řešení, na ty si musíte počkat na webu.

No, ale nyní už s radostí k novým úlohám.

*Organizátoři*

## Aktuálně

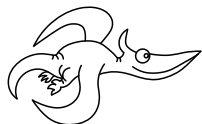
Od druhé půlky října pořádáme nejen pro řešitele sérii přednášek<sup>1</sup> s fyzikální tematikou – ve stručnosti: statistika, kmitavý pohyb a diferenciální rovnice, aproximace. Přednášky se konají v Praze na MFF UK v Troji každý druhý čtvrtek od 1. listopadu do 13. prosince.

Chcete sestavit soutěžní tým a poměřit své fyzikální znalosti s ostatními přímo od klávesnice počítače? Rozhodli jsme se uspořádat **internetovou variantu FYKOSího Fyziklání**. Registraci a další informace hledejte na webu soutěže<sup>2</sup> nebo v přiložených letáčcích. Jeden vyvěste určitě ve škole, jeden dejte kamarádovi a jeden je památeční. Máte-li mnoho kamarádů nebo škol, můžete si o další letáky napsat f(Alešovi).<sup>3</sup>

Uvažujete o studiu na MFF UK? Chcete se s námi setkat? Zveme vás Den otevřených dveří<sup>4</sup> MFF UK ve čtvrtek 29. 11. v Praze.

Týden s aplikovanou fyzikou s hlavním cílem CERNem, který se bude konat 29. 11. až 4. 12., má na webu<sup>5</sup> aktualizovaný program. Přihlášky jsou však již uzavřeny a zájezd je naplněn.

Další informace o akcích a aktuality kolem FYKOSu se dozvíte na webu <http://fykos.cz/> a můžete nás sledovat i na Facebooku na oficiální stránce <http://www.facebook.com/Fykos>.



Zadání II. série



*Termín uploadu: 27. listopadu 2012 20.00*  
*Termín odeslání: 26. listopadu 2012*

## Úloha II.1 ... z Prahy do Brna

2 body

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba  $d = 370$  km vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

<sup>1</sup><http://fykos.cz/akce/prednasky>

<sup>2</sup><http://online.fyziklani.cz/>

<sup>3</sup>[flandera.ales@fykos.cz](mailto:flandera.ales@fykos.cz)

<sup>4</sup><http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/>

<sup>5</sup><http://fykos.cz/archiv/rocnik26/tsaf>

*Nápověda* Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\begin{aligned}\sin \alpha &\approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha &\approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},\end{aligned}$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

### Úloha II.2 ... hollow Earth

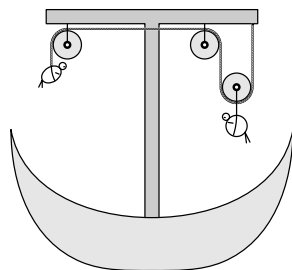
2 body

Kdyby se všechna hmota Země vzala a přemodelovala se na kulovou slupku o tloušťce  $d = 1$  km (se stejnou hustotou), jaký by tato nová „Země“ měla vnější poloměr? Jaké by bylo gravitační zrychlení na jejím vnějším povrchu?

### Úloha II.3 ... Benátčané

4 body

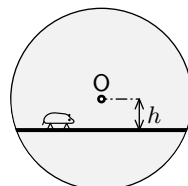
Dva mladí, ale bohužel poněkud prostorově výraznější, Benátčané Paolo a Francesca Muschetti (o hmotnostech  $m_P = 180$  kg a  $m_F = 130$  kg) by se chtěli spolu projet na gondole. Žádný gondoliér je ale nechce vzít na svou loď, protože ví, že by je všechny tři loď neunesla. Chytrý gondoliér Jacopo ale vymyslel rampu, na kterou umístil tři kladky dle obrázku. Skrz kladky provlékl lano a oba mladé Benátčany na ně upevnil (viz obrázek) každého na opačný konec, tak, že nejprve byla nahoře lehčí Francesca a po jisté chvíli ji v této pozici vystřídal těžší Paolo. Jak vysoká musí být rampa, aby gondola stihla přejet přes kanál? Doba jízdy je  $\tau = 60$  s. Předpokládejme, že při použití tohoto zařízení se již gondola nepotopí. Zanedbejte veškeré tření, hmotnost lana a momenty setrvačnosti kladek.



### Úloha II.4 ... křeček

5 bodů

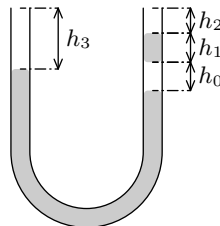
Rado si pro svého křečka Bobka přichystal speciální kolečko. Celá soustava se může otáčet okolo osy procházející bodem  $O$ , který je středem kolečka, a ke kolečku je vodorovně připojená deska ve vzdálenosti  $h$  od osy rotace, viz obrázek. Jak se má křeček Bobek pohybovat po desce, aby deska zůstala po celou dobu pohybu vodorovně? Koeficient tření mezi křečkem a deskou je  $f$ .



**Úloha II.5 ... horko u U-trubice**

5 bodů

V U-trubici je rtuť se vzduchovou bublinou výšky  $h_0$  v jednom rameni, jak můžete vidět na obrázku. Co se stane, pokud se okolní atmosféra změní následujícími způsoby? Předpokládejte, že rtuť při změně teploty nemění objem (hustotu), stejně tak i sklo, ze kterého je U-trubice, a vzduch se chová jako ideální plyn. Původní stav okolní atmosféry je popsán teplotou  $T_0 = 300\text{ K}$ , tlakem  $p_a = 10 \cdot 10^5\text{ Pa}$  a složením je vzduch. Předpokládejte, že celý systém je stále v termodynamické rovnováze, rovněž bublinu považujte za váleček.



- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek a přitom budou ramena U-trubice volná.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před touto změnou pevně uzavřeme oba konce U-trubice.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před zahřátím pevně uzavřeme pouze jeden konec U-trubice.

Pro všechny body zadání určete výsledné rozměry bubliny ve rtuti a výškový rozdíl mezi hladinami v obou částech U-trubice.

*Bonus* Započtete lineární teplotní roztažnost rtuti.

**Úloha II.P ... gravitace si žádá větší slovo**

5 bodů

Co kdyby se „přes noc“ změnila hodnota gravitační konstanty na dvojnásobek a přitom by zůstaly zachovány ostatní fyzikální konstanty na původních hodnotách? A co kdyby se zvětšila stokrát? Rozepište se o různých aspektech – zejména o životě na Zemi a drahách vesmírných objektů.

**Úloha II.E ... listopadová**

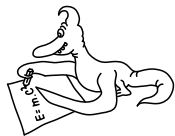
8 bodů

Určete průměrnou plochu listu vámi vybraného stromu (či keře). Nezapomeňte na statistické zpracování vašich dat. Odhadněte, kolik energie ze slunečního záření může váš strom použít pomocí chlorofylu na tvorbu cukrů za jeden den, rok.

**Úloha II.S ... driftujeme**

6 bodů

- Které driftы budeme pozorovat v lineární pasti? Představte si, že je osa pasti vodorovná, bude v pohybu částic hrát významnou roli drift způsobený gravitační silou?
- Odvoďte vztah pro ztrátový kužel a nakreslete originální obrázek, který bude názorně ilustrovat chování částic v lineární pasti.
- Odvoďte vztah pro drift způsobený elektrickým polem, které je kolmé na magnetické pole a má konstantní gradient ve směru svého působení. Diskutujte různé typy pohybu částice v závislosti na velikosti gradientu.



## Řešení I. série

## Úloha I.1 ... tlustý papír

2 body; průměr 1,71; řešilo 140 studentů

Odhadněte tloušťku papíru A4, pokud znáte jeho plošné rozměry, gramáž a hustotu (jak obecně, tak číselně). Potřebné údaje si vyhledejte (či správně odhadněte) pro běžný kancelářský papír.

*Karel žere papír.*

Abychom spočítali tloušťku papíru, budeme se na něj muset podívat na jako opravdu tenký kvádr. Tloušťku označíme  $c$  a ostatní dva rozměry, tedy délku a šířku,  $a$  a  $b$ . Jde o kvádr, takže umíme jednoduše vyjádřit jeho objem

$$V = abc.$$

Objem samotný neznáme, ale zadání nám napovídá, že můžeme použít ještě gramáž, tedy plošnou hustotu (v jednotkách  $\text{g}\cdot\text{m}^{-2}$ ), a hustotu. Pro objem platí

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

a pro plošnou hustotu platí

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{ab}.$$

Vztahy dáme do rovnosti a upravíme do finálního obecného vztahu pro  $c$

$$\sigma = \frac{m}{ab} = \frac{V\rho}{ab} = \frac{abc\rho}{ab} \Rightarrow c = \frac{\sigma}{\rho}.$$

S číselnými hodnotami dopadneme následovně: gramáž může být různá, kancelářský papír má často  $80\text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ . Hustotu běžného kancelářského papíru zjistíme třeba na internetu<sup>6</sup>, zde použitá hodnota je  $0,86\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ . Rozměry papíru nakonec ani nebudeme potřebovat. Po dosazení nám výsledná tloušťka vyjde  $1 \cdot 10^{-4}\text{ m}$ .

**Jana Poledníková**  
janap@fykos.cz

## Úloha I.2 ... odhal svoje vnitřnosti!

2 body; průměr 1,73; řešilo 129 studentů

Odhadněte počet elektronů ve svém těle.

*Karel si hraje s vnitřnostmi.*

Představme si, že průměrná FYKOSačka váží  $m$ . Podle stránky<sup>7</sup> bude její tělo tvořeno přibližně z 65 % kyslíkem, z 18 % uhlíkem, z 10 % vodíkem a z 3 % dusíkem; zbytku je tak málo, že ho můžeme zanedbat.

V periodické tabulce prvků najdeme, kolik jednotlivé prvky mají nukleonů:  ${}^1_1\text{H}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$  a  ${}^{14}_7\text{N}$  (zvlášť si všímáme, jaký je poměr protonů a nukleonů).

<sup>6</sup>[http://wiki.answers.com/Q/What\\_is\\_the\\_density\\_of\\_paper](http://wiki.answers.com/Q/What_is_the_density_of_paper)

<sup>7</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Composition\\_of\\_the\\_human\\_body](http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_of_the_human_body)

Počet protonů v těle je skoro stejný jako počet elektronů, nebudeme uvažovat žádné izotopy a hmotnost elektronu vůči protonu zanedbáme taky – je asi 2000krát menší. Hmotnost protonu i neutronu je přibližně  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg. Z toho už můžeme počet elektronů  $n$  odhadnout

$$n = \frac{0,1 \cdot m}{m_p} + \frac{0,65 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,18 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,03 \cdot m}{2m_p}.$$

Váží-li průměrná FYKOSačka 60 kg, pak její tělo obsahuje asi  $2 \cdot 10^{28}$  elektronů. FYKOSák vážící 80 kg má v sobě přibližně  $3 \cdot 10^{28}$  elektronů.

### Komentář k řešení

Objevily se ještě nějaké způsoby, jak dojít ke správnému řešení, ten ve vzoráku určitě není jediný. Nelíbilo se nám, když někdo člověka považoval jen za vodu nebo jen za kyslík; hodně řešitelů taky zapomnělo na to, že vodík nemá neutron, ale pouze jeden proton. V těchto případech jsme body nestrhávali jenom, když další postup byl správný a dobře popsán a také výsledek vyšel dobře. Mnoho řešitelů zahltilo celé řešení zuřivými tabulkami plnými výpočtů. Když děláte odhad, tak to znamená, že rozumně zanedbáte prvky, kterých je v těle málo; nemusíte uvádět přesně všechny výpočty tabulkou, mnohem lépe uděláte, když uvedete obecný postup. A také nevyepisujete patnáct platných číslic, stačí třeba jedna, dvě!

Rady pro příště těm, kterým se moc nedařilo: svoje řešení řádně komentujte, nepište jej pouze jednou větou a uveďte postup. Když řešení není dobře, ale objeví se alespoň dobrá myšlenka nebo nápad, ráda body dám, ale musí se objevit na papíře.

*Dominika Kalasová*  
dominika@fykos.cz

### Úloha I.3 ... Poledníková

4 body; průměr 2,88; řešilo 80 studentů

*Nechť jsou podél poledníků a rovnoběžek natažené dráty, které jsou v místech křížení spojené. Jaký naměříme odpor mezi body sítě, které odpovídají zemským pólům, pokud víte, že odpor jednoho metru drátu je  $\rho$ ? Poledníky i rovnoběžky uvažujte po  $15^\circ$ .*

*Bonus Jaký by byl odpor mezi dvěma uzly sítě, které leží na rovníku a naproti sobě?*

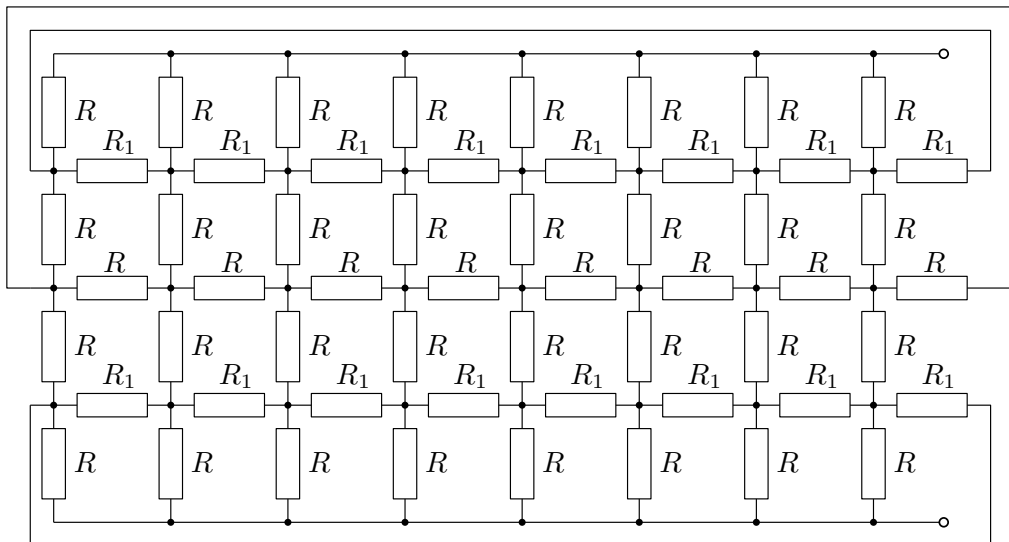
*Honza Hum. honil Janapku po poledníku.*

Při řešení této úlohy využijeme toho, že neteče-li rezistorem žádný proud, chování obvodu nezáleží na jeho odporu. Tedy je-li na rezistoru nulové napětí, můžeme rezistor z obvodu odstranit nebo jej nahradit vodičem.

Pro jednoduchost nakreslíme situaci, kdy jsou poledníky i rovnoběžky po  $45^\circ$ . Sít poledníků a rovnoběžek si překreslíme do obrázku tak, že všechna křížení nahradíme uzly (jelikož jsou dráty v místě spojené) a jednotlivé úseky poledníků a rovnoběžek nakreslíme jako rezistory, viz obrázek 1.

Úseky rovníku mají vždy stejný úhel a poloměr a úseky všech poledníků též, mají tedy všechny stejný odpor, označme jej  $R$ . Odpor úseků rovnoběžek na jedné polokouli je však různý, protože rovnoběžky mají různý poloměr.

Připojíme-li k pólům napětí, proud tekoucí z pólu všemi poledníky musí být stejný, jelikož je celá situace symetrická. Napětí na všech na pólu začínajících úsecích poledníků je tedy podle Ohmova zákona stejné, proto na všech uzlech první rovnoběžky směrem od pólu je stejný potenciál, napětí mezi těmito body je tedy nulové. Proto touto rovnoběžkou neteče žádný proud,

Obr. 1: Překreslené zadání pro úhel  $45^\circ$ .

můžeme ji tedy nahradit vodičem. Takto postupujeme přes všechny rovnoběžky, až získáme síť rezistorů o odporu  $R$ , viz obrázek 2. Jelikož vodiči, kterými jsme nahradili rovnoběžky, neteče žádný proud, můžeme je vynechat. Odpor mezi póly tedy bude stejný, jako by dráty byly nataženy pouze podél poledníků.

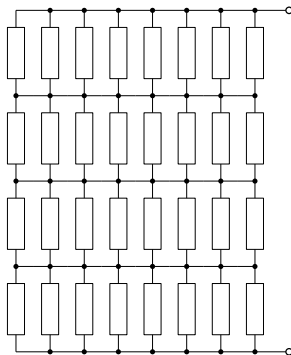
Jsou-li poledníky a rovnoběžky po  $15^\circ$ , pak je celkem 24 poledníků. Je-li poloměr Země  $r$  a měrný elektrický odpor drátu  $\varrho$ , pak odpor jednoho z poledníků je  $\pi r \varrho$ . Odpor 24 paralelně zapojených poledníků je tedy

$$R_Z = \frac{1}{24} \pi r \varrho.$$

Pro vyřešení bonusu můžeme použít např. počítačovou simulaci. Jedním z programů, které toto umožňují, je např. Qucs (viz screenshot na obrázku 3).

Do programu překreslíme síť rezistorů a přiřadíme jim odpory. Jestliže  $R = 2\pi\varrho r \cdot 15^\circ/360^\circ$  je odpor jednoho úseku rovníku, pak  $R$  je i odpor každého úseku všech poledníků (mají stejnou délku i poloměr jako úseky rovníku). Odpor úseku  $i$ -té rovnoběžky od rovníku je pak  $R_i = R \cos(15^\circ i)$ . Z tohoto je zřejmé, že odpor mezi zadanými dvěma body je úměrný měrnému elektrickému odporu drátu  $\varrho$  a poloměru Země  $r$ . Jestliže zvolíme obě tyto veličiny jednotkové, pak odpor zjištěný simulací bude číselně právě konstanta úměrnosti, a můžeme tedy i po provedení simulace zapsat hledaný odpor jako funkci měrného elektrického odporu a poloměru Země.

Pokud použitý program neumožňuje přímo měřit odpor, pak použijeme jednoduchý trik: síť připojíme (v požadovaných bodech) k ideálnímu zdroji proudu, na kterém nastavíme proud 1 A, a měříme napětí na něm. Toto napětí ve voltech se pak podle Ohmova zákona číselně rovná odporu mezi danými dvěma body v ohmech.



Obr. 2: Rezistory, na kterých je nulové napětí, můžeme nahradit vodiči.

Zvolili jsme pro simulaci  $\varrho = 1 \Omega \cdot \text{m}$  a  $r = 1 \text{ m}$ , pak je dle simulace odpor mezi zadanými dvěma body  $0,2824 \Omega$ . Odpor mezi zadanými dvěma body zeměkoule je číselně tedy

$$R'_Z = 0,2824 \varrho r.$$

**Tomáš Pikálek**  
pikos@fykos.cz

### Úloha I.4 ... crash testy

4 body; průměr 3,33; řešilo 101 studentů

Mějme dvě auta o stejné hmotnosti jedoucí proti sobě rychlostí  $v_0$ . V jaké vzdálenosti musí začít brzdít, aby nedošlo ke srážce? Uvažujte dva případy, kdy auta jedou proti sobě na rovině a kdy auta jedou po silnici se sklonem  $\alpha$ . Víte, že oba řidiči začnou brzdít v též okamžik a velikost brzdění síly každého auta je  $f \cdot N$ , kde  $N$  je složka tíhy automobilu kolmá na silnici.

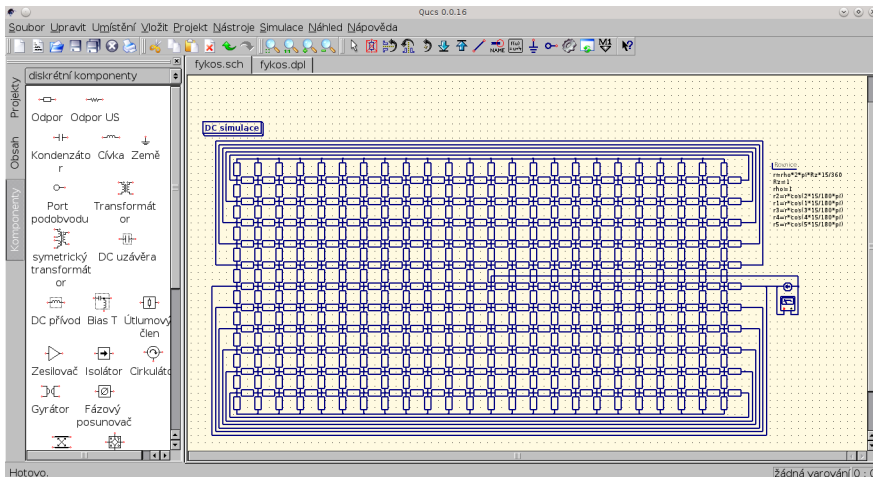
*Analphabet Petr s ryšavými vlasy*

První případ je pouze speciálním případem případu druhého, a to pro  $\alpha = 0$ . Můžeme se tedy rovnou pustit do obecného řešení. Předpokládejme, že jakmile auto zastaví, už zůstane stát. Spočítejme, jak daleko od sebe by auta musela začít brzdít, aby zastavila těsně u sebe. Hledaná vzdálenost tedy bude součtem brzdících drah.

Rozkladem tíhové síly o velikosti  $G = mg$  na složku normálovou k povrchu a složku tečnou k pohybu zjistíme, že  $N = mg \cos \alpha$ . Brzdící síla je tedy  $fmg \cos \alpha$ . Nezapomínejme však, že jede-li auto po nakloněné rovině, je navíc zrychlováno či zpomalováno tečnou složkou tíhy. Celková síla působící na vozidlo ve směru pohybu je tedy  $fmg \cos \alpha \pm mg \sin \alpha$ . Znaménko ve výrazu určuje směr sklonu silnice a právě v něm se budou lišit zkoumaná dvě auta. A zrychlení pak bude  $a = fg \cos \alpha \pm g \sin \alpha$ .

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb zakončený stáním platí vzorec pro výpočet ujeté vzdálenosti

$$s = \frac{1}{2} at^2,$$



Obr. 3: Simulace bonusu programem Qucs.

kde  $t$  je čas potřebný k zastavení. Zároveň  $t = v_0/a$ . Můžeme tedy upravit na

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha \pm \sin \alpha)}.$$

Po sečtení pro obě auta dostáváme celkovou vzdálenost

$$S = \frac{v_0^2}{2g} \left( \frac{1}{f \cos \alpha + \sin \alpha} + \frac{1}{f \cos \alpha - \sin \alpha} \right),$$

což lze upravit na

$$S = \frac{v_0^2}{g} \frac{f \cos \alpha}{(f^2 + 1) \cos^2 \alpha - 1}.$$

Dosažením  $\alpha = 0$  zjistíme, že na rovině je to

$$S = \frac{v_0^2}{gf}.$$

**Jáchym Sýkora**  
jachym@fykos.cz

### Úloha I.5 ... Young cylinder

5 bodů; průměr 2,77; řešilo 30 studentů

Představte si dvoušterbinový Youngův pokus, jen místo klasického plochého stínítka dejte váleček s osou směřující kolmo na spojnici šterbin. Střed válce je ve vzdálenosti  $L$  od šterbin, poloměr válce je  $R = L/2$ , vzdálenost šterbin je  $a$ . Jak bude vypadat difrakční obrazec po rozvinutí pláště válce do roviny? Udejte polohy maxim pomocí souřadnice  $x$  vedené po plášti válce.

*Terka vypočítala úlohu, aby mohla místo schůzky na přednášce.*



Po chvíli zamyšlení nad náčrtkem situace jistě nebyl problém uhádnout, že úloha je opravdu pouze variací na slavný Youngův experiment s trochou té geometrické omáčky. Než ale přikročíme k jádru řešení, dovolíme si stručně odvození notoricky známé podmínky pro interferenční maximum  $k\lambda = a \sin \varphi_k$ , bez které se v dalším povídání neobejdeme.<sup>8</sup> Připomeňme, že  $k \in \mathbb{Z}$  značí řád maxima,  $\lambda$  je vlnová délka koherentního záření použitého v experimentu a  $a$  je vzdálenost štěrbin. Je zřejmé, že zadání nám dovoluje ignorovat 3D povahu problému a lze tedy uvažovat pouze 2D řez kolmý na stínítko. Potom  $\varphi_k$  definují jednotlivé směry jakožto odchylky (počítáme v kladném smyslu) od přímký kolmé na stínítko, která prochází středem O spojnice štěrbin  $S_1$  a  $S_2$  (nazýváme ji dále *osou symetrie*).

Uvažujme nyní dva libovolné paprsky vycházející ze štěrbin. Ty se v obecném případě protnou v bodě P. Označme  $|S_{1,2}P| = s_{1,2}$  a  $|OP| = s$ . Potom (kosinová věta)

$$s_{1,2} = \sqrt{s^2 + \frac{a^2}{4} \pm as \sin \varphi} = s \sqrt{1 + \frac{a^2}{4s^2} \pm \frac{a}{s} \sin \varphi},$$

kde  $\varphi$  je odchylka ve smyslu definice z předchozího odstavce. Uvažujeme-li ale pouze taková  $s$ , že  $s \gg a$ , potom můžeme s chutí aplikovat přibližný vztah

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

pro  $x \ll 1$  a po chvíli zápasení dostaneme požadovaný výsledek

$$s_1 - s_2 = \Delta = a \sin \varphi,$$

neboť aby došlo v P ke konstruktivní interferenci, musí být  $\Delta = k\lambda$ . Vidíme tedy, že veličina  $\varphi$  je plně postačující k popisu problému.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy světlu vystupujícímu ze štěrbin vložíme do cesty válec tak, jak to definuje zadání. K popisu polohy na povrchu válce tedy zavedeme úhel  $\alpha$ , který počítáme v kladném směru od průsečíku osy symetrie s povrchem válce (toho blíže ke štěrbinám), z něhož se na kýženou souřadnici  $x$  dostaneme přepočtem  $x = R\alpha$ . Je vidět, že kromě množiny maxim, co se na povrch válce zobrazí, existuje i neprázdná množina těch, kterým se to nepovede. Poslední hypotetické maximum, které bychom na válci uviděli, je přitom definováno tečnou z O na válec, takže se můžeme omezit pouze na taková  $\varphi$ , která splňují<sup>9</sup>

$$|\sin \varphi| \leq \frac{R}{L} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |k| \leq \frac{a}{2\lambda} \text{ a } |\varphi| \leq \frac{\pi}{6},$$

což mimochodem znamená, že  $|\alpha| \leq \pi/3$ . Dále, ze sinové věty můžeme napsat

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{L}{2 \sin \varphi},$$

kde (pro změnu z kosinové věty)

$$s = L \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha}.$$

<sup>8</sup>Jako jednoduché cvičení se čtenář může přesvědčit, že v obecnější situaci, kdy na štěrbinu dopadají paprsky pod úhlem  $\psi$ , můžeme psát

$$k\lambda = a (\sin \varphi_k - \sin \psi).$$

<sup>9</sup>Je jedno, jestli vzdálenost  $L$  bereme od štěrbin nebo od bodu O, neboť za předpokladu  $L \gg a$  obě tyto varianty splývají.

Označme nyní  $f \equiv f(k) = a/(2k\lambda)$ . Potom

$$\frac{L\sqrt{5/4 - \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{L}{2 \sin \varphi} = \frac{La}{2k\lambda} = Lf,$$

a tedy

$$f^2 \sin^2 \alpha = \frac{5}{4} - \cos \alpha.$$

To vede (po použití  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ) na kvadratickou rovnici ( $y = \cos \alpha$ )

$$f^2 y^2 - y + \left(\frac{5}{4} - f^2\right) \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{(f^2 - 1)(f^2 - 1/4)}}{2f^2}$$

a dostáváme se k důležité povinnosti vybrat to správné řešení. Víme, že pro kladná  $k$  je  $k \leq a/(2\lambda)$ , a tedy  $f \geq 1$ , takže můžeme s klidnou hlavou zkoumat ku příkladu hodnotu  $y_{1,2}$  pro  $f = 10$ , neboť funkce  $y(f)$  by byla pro  $f \in \mathbb{R}$  zřejmě spojitá na intervalu  $\langle 1, \infty \rangle$ . Zkoumaná hodnota je ale pro případ znaménka mínus evidentně záporná, i když  $\forall k \in \langle 0, a/(2\lambda) \rangle : \alpha \in \langle 0, \pi/3 \rangle$ , a tedy  $\cos \alpha \geq 0$  a to je jasný spor. Správně je tedy znaménko plus. Rekapitulace na závěr: získali jsme posloupnost  $y_k \equiv y[f(k)]$ , která pro  $|\alpha| \leq \pi/3$  udává polohy  $\alpha_k = x_k/R$  na povrchu válce pro  $|k| \leq a/(2\lambda)$  (připomeňme, že  $y_k = \cos \alpha_k$ ).

Tot tedy k řešení zadaného úkolu. Samozřejmě bychom se mohli pokusit analyticky vyjádřit samotné rozložení intenzity na povrchu válce, ale již při pohledu na výsledek „pouhého“ snažení se o udání polohy maxim nám musí být zřejmé, že pravděpodobně nepůjde o nic elegantně zapsatelného, zvláště pokud se neomezíme na standardní aproximace a přidáme si tomu například ubývání intenzity se vzdáleností od zdroje.

**Jakub Vošmera**  
kuba@fykos.cz

## Úloha I.P ... větroplach!

5 bodů; průměr 3,24; řešilo 75 studentů

*Odhadněte, jakou minimální rychlostí musí foukat vítr, aby odnesl papír ležící na stole.*

*Karloví lítaly papíry ze stolu.*

Důfam, že ste si pokus s papierom tiež vyskúšali. Dobre sa realizuje napríklad s ľahkou podložkou pod papierom, ktorú ťaháte viac-menej rovnomerne. Papier sa pri istej rýchlosti zrazu ohne a poletí preč.

Podobne, ako to pri podobných aerodynamických úlohách býva, do hry vstupuje množstvo exotických javov. Napríklad, vzduch naráža na hranu papiera, obteká ju a tým papier čiastočne podvihuje. Takisto nie je papier úplne rovný, ale má nejaké pokrčenia a ohyby. Vzduch takéto ohyby rád kopíruje<sup>10</sup> a vytvára tým ďalšie sily dvíhajúce papier. Podobný efekt nadnáša krídlo lietadla.

Pekný a jednoduchý spôsob, ako sa problému postaviť, je spomenúť si na Bernoulliho rovnicu. Vzduch pod papierom má atmosférický tlak  $p_0$ . Vzduch nad papierom sa však hýbe rýchlos-

<sup>10</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Coand%C4%83\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Coand%C4%83_effect)

tou  $v$ , čo spôsobí pokles tlaku.<sup>11</sup> Napíšeme teda Bernoulliho rovnicu, pričom člen s gravitáciou zanedbáme (na výšku papiera sa potenciál veru veľmi nemení)

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Tu zavádzame ešte hustotu vzduchu  $\rho$  a tlak nad papierom  $p$ . Podmienku rovnováhy vertikálnych síl napíšeme v tvare tlakov

$$\frac{F_g}{S} + p = p_0 = p + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

kde zjednodušíme gravitačný tlak pomocou plošnej hustoty papiera  $\lambda$

$$\lambda g = \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Po vyjadrení dostaneme rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2\lambda g}{\rho}},$$

čo po dosadení typických hodnôt (kancelársky papier má  $\lambda = 80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$ ) dáva rýchlosti vetra približne  $4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Takáto hodnota je celkom reálna, keďže podobne rýchlo kráčame.

**Ján Pulmann**  
janci@fykos.cz

## Úloha I.E ... tři šedé vlasy dědy Aleše 8 bodů; průměr 4,28; řešilo 50 studentů

*Pokuste se určit některé napěťové charakteristiky v tahu u lidského vlasu. Z vašeho pokusu sestavte co nejpodrobnější graf závislosti použité síly na prodloužení vlasu; z něj potom určete graf závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení. Pokuste se z něj vyčíst/odhadnout mez pevnosti, případně i jiné charakteristiky. Měření opakujte alespoň na 3 vlasech stejné osoby. Nápovědy Vhodné jsou hodně dlouhé vlasy – pokud sami takové nemáte, určitě není problém takové sehnat. Průměr vlasu můžete změřit ve škole pomocí mikrometru nebo pomocí laseru. Jako závaží můžete použít mince, které mají docela dobře definované hodnoty hmotnosti.*

*Karel čerstvě ostrůhán.*

### Teorie

Pro určení napětí v tahu je vhodná jednoosá napjatost vlasu, která vznikne působením síly  $F$  na vlas v potřebném směru. Přijatelnou silou z hlediska nenáročnosti vybavení a určení její velikosti a směru působení je síla tíhová  $F_G$ . Vlas délky  $l_0$  se při zatížení závažím o hmotnosti  $m$ , tedy při působení síly  $F_G = mg$ , prodlouží na délku  $l_n$ , přičemž se taktéž původní průřez vlasu  $S_0$  zmenší na  $S_n$ . Hodnotu prodloužení vlasu  $\Delta l$  získáme rozdílem jeho délky při daném zatížení  $l_n$  a jeho původní délky  $l_0$ ,  $\Delta l = l_n - l_0$ . Pro zjištění závislosti napětí  $\sigma_p$  na relativním prodloužení vlasu  $\varepsilon$  je nutno tyto dvě veličiny určit. V praxi se v podobných tahových zkouškách používá takzvané smluvní napětí  $\sigma_p$ , které vyjadřuje vztah  $\sigma_p = F/S_0$ , jeho hodnota může i klesat (často u kovů a jejich slitin), ačkoliv skutečné napětí se zvětšující se silou

<sup>11</sup>Zvedavejším odporúčam zamyslieť sa nad tým, ako je to s prúdniciami. Bernoulliho zákon platí totiž len na jednej prúdnici. Treba teda premyslieť, kde sa dve prúdnice, nad a pod papierom, stretávajú a či tam majú rovnaký tlak a rýchlosť.

až do okamžiku prasknutí roste, neboť nezohledňuje změnu (zmenšování) průřezu na  $S_n$ , ale vztahuje se k průřezu původnímu  $S_0$ . Relativní prodloužení  $\varepsilon$  lze získat ze vztahu  $\varepsilon = \Delta l/l_0$ . Ze získaného tahového diagramu (závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení) lze poté pozorovat, zda a do jaké hodnoty napětí se u napínaného vlasu uplatňuje Hookeův zákon.

Abychom však tahový diagram získali, je nutné před samotným experimentem změřit další potřebnou veličinu, průřez vlasu  $S_0$ . Jeho hodnotu lze získat na základě měření mikrometrem nebo pomocí laseru za předpokladu, že považujeme vlas za válec. Vzhledem ke zkušenostem z dřívějšího experimentu byl upřednostněn laser, neboť výsledky mikrometru se od těch získaných pomocí laseru poměrně výrazně lišily, což bylo pravděpodobně způsobeno větší invazivností vůči vzorku při měření mikrometrem (vlas se zmáčkne, čímž se jeho skutečný průměr zmenší). Využít k tomuto účelu laseru je navíc fyzikálně mnohem zajímavější. Svítíme-li laserem přes vlas na stínítko, pak pro svazek laseru dopadající pod úhlem  $\alpha$  platí

$$\sin \alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d} = \frac{l_k}{\sqrt{h^2 + l_k^2}},$$

kde  $d$  je tloušťka (průměr) vlasu,  $k$ ,  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , je číslo maxima vzniklého difrakčního obrazce,  $h$  je vzdálenost vlasu od stínítka,  $l_k$  je vzdálenost  $k$ -tého maxima od hlavního maxima a  $\lambda$  je vlnová délka použitého laseru. Pro výpočet tloušťky vlasu  $d$  tedy platí

$$d = \frac{\sqrt{h^2 + l_k^2}}{l_k} \cdot k \cdot \lambda.$$

### Měření

K experimentu bylo použito pěti delších rovných vlasů stejné osoby, u kterých byla nejdříve zjišťována jejich tloušťka  $d$ , respektive průřez  $S_0$ . Krátký kousek každého z vlasů byl lepící páskou připevněn do pěti „okýnek“ z kartonu tak, aby možné přes něj posvítit laserem ( $\lambda = 532$  nm, zelený) bez interakce laseru s jinými objekty. Laser byl položen na zvýšené místo (parapet) a podložen tak, aby svítil přibližně do středu délky vlasu upevněného v kartonu, který byl postaven do těsné blízkosti před něj a stabilizován kuličky na prádlo. Poté byl laser zapnut a u difrakčního obrazce vzniklého na stínítku byly změřeny vzdálenosti vedlejších maxim od maxima hlavního, jejichž hodnoty jsou zapsány v tabulce 1. Byla také změřena vzdálenost od měřeného vzorku vlasu ke stínítku  $h = 309$  cm. S využitím naměřených údajů byly dopočítány tloušťky vlasů  $d_n$  ze všech změřených maxim a jako tloušťka vlasu  $d$  byl určen jejich aritmetický průměr, poté byl z této veličiny dopočítán průřez vlasu  $S_0$ ,  $S_0 = \pi d^2/4$ , a taktéž zapsán do tabulky.

Dále se pokračovalo samotnou tahovou zkouškou všech pěti vlasů, každý z nich byl postupně přilepen lepící páskou k okraji stolu, poté byl malý kousek izolepy přilepen přibližně do poloviny délky visícího vlasu a byla změřena délka nezatíženého vlasu (hmotnost izolepy byla zanedbána) od okraje stolu k danému kousku izolepy. Posléze byly do místa vlasu s izolepou jednotlivě přilepovány jednorozměrné mince o hmotnosti  $m = 3,6$  g jako závaží a po každém přidání mince byla měřena aktuální délka vlasu. Takto bylo postupováno až do chvíle, kdy vlas po přidání další mince prasknul (délku už tedy nebylo možno změřit), mez pevnosti vlasu lze proto hledat v intervalu smluvních napětí vyvolaného tíhovou silou po přidání předposlední mince a tíhovou silou po přidání poslední mince, která vyvolala prasknutí vlasu (příslušné napětí již není uvedeno v tabulce).

Tabulka 1: Určení průřezů vlasů  $S_0$ 

vlas č.	1.	2.	3.	4.	5.	$d$ μm	$S_0$ mm <sup>2</sup>
	maximum cm						
1	3,2	5,4	7,5	9,8	11,9	76,3	$4,57 \cdot 10^{-3}$
2	2,4	3,7	5,2	6,6	8,6	108,4	$9,24 \cdot 10^{-3}$
3	2,8	5,0	7,1	9,0	11,1	84,2	$5,57 \cdot 10^{-3}$
4	3,7	5,8	8,2	10,5	12,7	69,9	$3,84 \cdot 10^{-3}$
5	3,4	5,6	8,0	10,3	12,5	72,4	$4,12 \cdot 10^{-3}$

### Výsledky

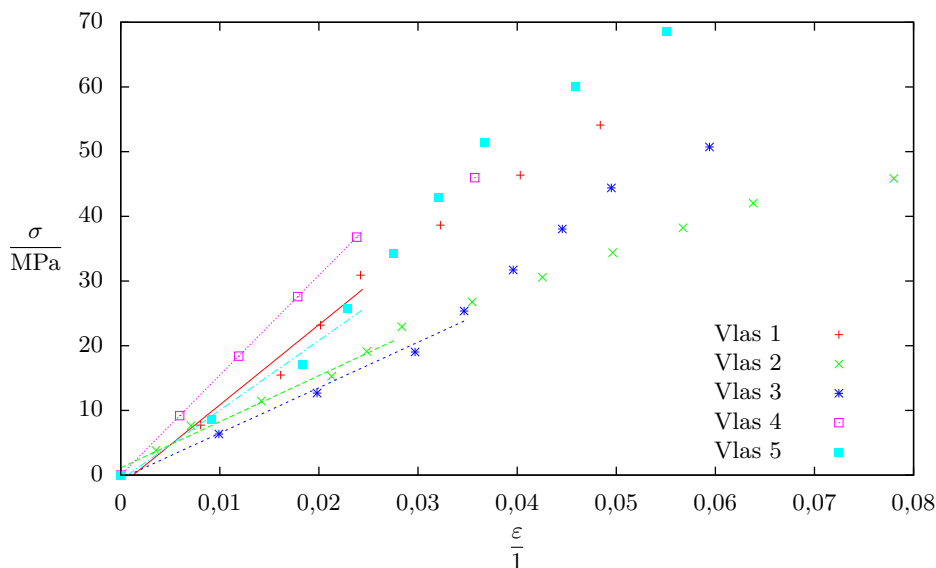
Ze zjištěných hodnot byly pro každý vlas vytvořeny tahové diagramy (obrázek 4), u nichž lze zpočátku s trochou fantazie pozorovat uplatnění Hookeova zákona, proto lze lineární regresí několika prvních bodů získat Hookeovy přímky. Youngův modul pružnosti  $E$  lze určit ze směrnice u rovnice dané přímkou získané regresí pro každý vlas. Meze pevnosti vlasů  $\sigma_p$  jsou stanovovány podle napětí, při kterém vlas prasknul (k prasknutí došlo při zatížení daným počtem mincí téměř okamžitě, proto není možné určit konkrétní hodnotu meze pevnosti  $\sigma_p$ , neboť napětí se měnilo velmi skokově, lze však říci, že mez pevnosti  $\sigma_p$  lze hledat v intervalu ohraničeného hodnotou napětí, které vyvolalo prasknutí vlasu, a hodnotou napětí, které mu předcházelo), výsledky jsou v tabulce 2.

Tabulka 2: Výsledky pro jednotlivé vlasy (pro  $\sigma_p$  je uveden interval odhadu)

vlas č.	$E$	$\sigma_p$
	MPa	MPa
1	1 200	(54; 62)
2	700	(45; 50)
3	700	(50; 58)
4	1 500	(45; 56)
5	1 100	(68; 78)

### Diskuze

Je dobré zmínit, že naše provizorní tahová zkouška se liší od standardních zkoušek tahem, a to v tom, že u skutečné zkoušky tahem se mění prodloužení a měří se síla, zatímco zde byla měněna síla a měřeno prodloužení, čili bylo postupováno zcela opačně. Standardní zkouška tahem také patří do skupiny statických zkoušek materiálů, u kterých se prodloužení mění velmi pomalu, zatěžování je tedy kvazistatické, kdežto u naší zkoušky částečně dynamické, kvůli postupnému přidávání mincí. Dále také stojí za povšimnutí, že ačkoliv se jedná o vlasy stejné osoby, výsledné Youngovy moduly pružnosti  $E$  a meze pevnosti  $\sigma_p$  se pro jednotlivé vlasy poměrně výrazně liší, což může být způsobeno různou kvalitou vlasů, eliptickým tvarem průřezu vlasů u evropské populace či jinými faktory.



Obr. 4: Závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení vlasu

### Závěr

Ze získaných tahových diagramů lze usuzovat na platnost Hookeova zákona pro lidské vlasy v počátcích tahového diagramu. Dále se podařilo přibližně určit Youngův modul pružnosti a intervaly meze pevnosti pro jednotlivé použité vlasy.

Tabulka 3: Výsledky měření postupně pro jednotlivé vlasy.

počet mincí	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{F}{\text{N}}$	$\frac{\sigma}{\text{MPa}}$	$\epsilon$
0	124	0	0	0	0
1	125	1	0,035	7,73	0,008
2	126	2	0,071	15,45	0,016
3	126,5	2,5	0,106	23,18	0,020
4	127	3	0,141	30,91	0,024
5	128	4	0,177	38,64	0,032
6	129	5	0,212	46,37	0,040
7	130	6	0,247	54,10	0,048
0	141	0	0	0	0
1	141,5	0,5	0,035	3,82	0,004
2	142	1	0,071	7,64	0,007
3	143	2	0,106	11,47	0,014
4	144	3	0,141	15,29	0,021

5	144,5	3,5	0,177	19,11	0,025
6	145	4	0,212	22,93	0,028
7	146	5	0,247	26,75	0,036
8	146,5	5,5	0,283	30,58	0,043
9	147	6	0,318	34,40	0,050
10	148	7	0,353	38,22	0,057
11	149	8	0,388	42,04	0,064
12	151	10	0,424	45,86	0,078
0	101	0	0	0	0
1	102	1	0,035	6,34	0,001
2	103	2	0,071	12,68	0,020
3	104	3	0,106	19,02	0,030
4	104,5	3,5	0,141	25,36	0,035
5	105	4	0,177	31,70	0,040
6	105,5	4,5	0,212	38,04	0,045
7	106	5	0,247	44,38	0,050
8	107	6	0,283	50,72	0,059
0	84	0	0	0	0
1	84,5	0,5	0,035	9,20	0,006
2	85	1	0,071	18,39	0,012
3	85,5	1,5	0,106	27,59	0,018
4	86	2	0,141	36,79	0,024
5	87	3	0,177	45,98	0,036
0	109	0	0	0	0
1	110	1	0,035	8,57	0,009
2	111	2	0,071	17,14	0,018
3	111,5	2,5	0,106	25,72	0,023
4	112	3	0,141	34,29	0,028
5	112,5	4,5	0,177	42,86	0,032
6	113	4	0,212	51,43	0,037
7	114	5	0,247	60,00	0,046
8	115	6	0,283	68,57	0,055

*Kristína Nešporová*  
kiki@fykos.cz

## Úloha I.S ... seriálová

6 bodů; průměr 2,78; řešilo 32 studentů

- a) Vyhledejte z dostupných zdrojů typické vlastnosti plazmatu ve slunečním větru, centru tokamaku a doutnavém výboji a spočítejte příslušnou velikost  $\lambda_D$ .
- b) Spočítejte vztah pro velikost Debyeovy délky pro plazma tvořené elektrony o teplotě  $T_e$  a ionty o teplotě  $T_i$  bez předpokladu nehybných iontů.
- c) Spočítejte rozložení potenciálu mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými vodivými deskami vzdálenými od sebe na vzdálenost  $d$ , které jsou drženy na potenciálu  $\varphi = 0$ . Prostor mezi deskami je rovnoměrně vyplněný plynem nabitých částic o náboji  $q$  a koncentraci  $n$ .

Robin.

## Vlastnosti plazmatu

Parametry plazmatu ve slunečním větru mají poměrně široké rozpětí v závislosti na událostech, které v něm probíhají. Jako typické hodnoty ve vzdálenosti od Slunce odpovídající oběžné dráze Země můžeme uvažovat  $T_e = T_i = 100 \text{ eV}$  a  $n = 6 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$ . Tomu odpovídá Debyeova délka  $\lambda_D \approx 100 \text{ m}$ . V centru tokamaku je  $T_e = T_i = 10 \text{ keV}$  a  $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , tj.  $\lambda_D \approx 1 \mu\text{m}$ . V doutnavém výboji pak  $T_e = 10 \text{ eV}$  a  $n = 10^{15} \text{ m}^{-3}$ , tj.  $\lambda_D \approx 1 \text{ mm}$ .

## Debyeova délka

Vydeme z jednorozměrné Poissonovy rovnice, kam za hustoty iontů a elektronů dosadíme

$$n_i = n_\infty e^{-\frac{e\varphi}{kT_i}} \quad \text{a} \quad n_e = n_\infty e^{\frac{e\varphi}{kT_e}},$$

následně použijeme stejný postup jako při prvním odvození Debyeovy délky. Dostaneme se k rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{\varepsilon_0(kT_e + kT_i)} \varphi,$$

z čehož získáme novou Debyeovu délku

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0(kT_e + kT_i)}{ne^2}}.$$

## Mezi deskami

Vydeme z jednorozměrné Poissonovy rovnice, kam dosadíme konstantní nábojovou hustotu

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{qn}{\varepsilon_0}.$$

První integrací získáme nejprve průběh elektrického pole

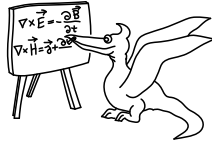
$$\frac{d\varphi}{dx} = -E(x) = \frac{qn}{\varepsilon_0} x,$$

druhou integrací s použitím okrajových podmínek  $\varphi(-d/2) = 0$  a  $\varphi(d/2) = 0$  dostaneme žádaný profil potenciálu

$$\varphi(x) = \frac{qn}{\varepsilon_0} (d^2 - x^2).$$

Michael Komm  
robin@fykos.cz





## Seriál: Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích

Abychom pochopili chování plazmatu jako celku, je zapotřebí se seznámit s procesy, které probíhají na úrovni jednotlivých částic. V této kapitole se budeme zabývat pohybem nabitých částic v magnetizovaném plazmatu, což nás dovede k principu udržení plazmatu za pomoci magnetických polí.

Nejprve uvažujme nabitou částici pohybující se v homogenním statickém magnetickém poli paralelním s osou  $z$ , na kterou nepůsobí žádné další síly. Pohybová rovnice této částice bude obecně

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

v našem jednoduchém případě můžeme rozepsat pohybovou rovnici do složek a získat tak systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} v_x B, \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Pohyb ve směru magnetického pole zůstává rovnoměrný přímočarý, kolmé složky lze separovat pomocí derivace

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dv_y}{dt} B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x.$$

To je známý typ diferenciální rovnice – lineární harmonický oscilátor, s řešením

$$\begin{aligned} x(t) &= -r_L \sin(\Omega_L t + \varphi_0) + x_s, \\ y(t) &= r_L \cos(\Omega_L t + \varphi_0) + y_s, \end{aligned}$$

kde  $x_s$  a  $y_s$  jsou souřadnice středu obíhané kružnice a  $\varphi_0$  je fáze, kterou můžeme položit rovnu nule, tj. částice se bude pohybovat po šroubovici o poloměru  $r_L$  s úhlovou frekvencí  $\Omega_L$ , kde

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \frac{qB}{m}, \\ r_L &= \frac{v_{\perp}}{\Omega_L}, \\ v_{\perp} &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \end{aligned}$$

Tento pohyb se nazývá Larmorova rotace,  $r_L$  je obvykle označován jako Larmorův poloměr a  $\Omega_L$  Larmorova frekvence. Z povahy pohybu je zřejmé, že zatímco podél siločar se částice může pohybovat volně, ve směru kolmém na magnetické siločáry je její pohyb omezený.

Jako druhý případ budeme uvažovat přítomnost statického homogenního elektrického pole  $\mathbf{E}$ , jehož směr bude kolmý na pole magnetické – bude mít nenulovou složku ve směru  $y$ . Soustava pohybových rovnic se tedy změní na

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} (E + v_x B), \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Stejným postupem jako v předchozím případě dojdeme k diferenciální rovnici pro  $v_x$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dv_y}{dt} B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 \left(v_x - \frac{E}{B}\right).$$

Tato rovnice má tedy oproti předchozímu případu ještě partikulární řešení

$$v_x = v_{\perp} \cos(\Omega_L t + \varphi_0) + \frac{E}{B},$$

kde konstantní člen se nazývá *driftová rychlost* a tento drift se obvykle označuje jako  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift. Všimněte si, že driftová rychlost vůbec nezávisí na hmotnosti či náboji částice, jen na velikosti elektromagnetických polí. Její směr je kolmý na magnetické i elektrické pole. Pro elektrické pole v obecném směru na pole magnetické se dá dojít k výrazu

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Místo elektrické síly můžeme do pohybové rovnice dosadit libovolnou jinou sílu (např. gravitační) a dospět tak k formulaci pro obecný driftový pohyb

$$\mathbf{v}_{\mathbf{F}} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Všechny drifty, které nejsou vyvolané elektrickou silou, mají směr závislý na náboji částic, proto v plazmatu budou driftovat elektrony jedním směrem a ionty opačným, což povede k separaci náboje. Prostorový náboj způsobuje vznik elektrického pole (viz poslední úloha předchozího dílu seriálu), které v konečném důsledku nastartuje  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift a umožní částicím pohyb napříč siločarami magnetického pole. Tento nepříjemný mechanismus značně znesnadňuje udržení plazmatu v magnetických pastích.

Zvláště zajímavé jsou drifty způsobené gradienty a zakřivením magnetického pole. Pokud je magnetické pole zakřivené s poloměrem zakřivení  $R_k$ , působí na částice pohybující se podél siločar odstředivá síla, která způsobuje drift

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{od}} &= \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \mathbf{r} = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}_k}{R_k^2}, \\ \mathbf{v}_R &= \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{R_k^2}.\end{aligned}$$

Pokud má velikost magnetického pole gradient (např. ve směru  $y$ ) kolmý na směr pole, musíme zvolit jiný postup k získání driftové rychlosti. Vyjdeme z neporušené trajektorie částice a gradient budeme považovat za poruchu. Spočtíme sílu, která působí na částici

$$F_y = -qv_x B(y) = -qv_{\perp} \cos \Omega_L t \left( B_0 + q \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \cos \Omega_L t \frac{\partial B}{\partial y} \right).$$

Zde jsme použili Taylorova rozvoje magnetického pole

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}.$$

Nyní musíme tuto sílu vystředovat přes jeden Larmorův oběh. První člen s  $\cos \Omega_L t$  bude po vystředování nulový (odpovídá neporušenému pohybu), střední hodnota  $\cos^2 \Omega_L t$  je  $1/2$ , získáme tedy sílu

$$\overline{F}_y = \mp \frac{1}{2} q r_L v_{\perp} \frac{\partial B}{\partial y},$$

čemuž odpovídá drift

$$\overline{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} q r_L v_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}.$$

Tento drift je opět kolmý jak na magnetické pole, tak na jeho gradient, který samotný drift způsobuje.

Posledním pohybem, kterým se budeme zabývat, je pohyb způsobený gradientem magnetického pole, který je rovnoběžný s jeho směrem. Vzhledem k typické vlastnosti driftu, tj. že je vždy kolmý na působící sílu i magnetické pole, bychom žádný drift neočekávali, přesto zde dochází k zajímavému jevu. Nejprve uvedeme definici magnetického momentu částice

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.$$

Tento moment se při pohybu částice nemění, tj. je to invariant pohybu. Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme, protože je poněkud zdouhavý. Zvědavý čtenář tak alespoň není ochuzen o možnost odvodit si ho sám. Pokud se částice pohybuje mezi místy, kde se mění velikost magnetického pole, musí se měnit i velikost jeho paralelní rychlosti, má-li být  $\mu$  konstantní. Vzhledem k tomu, že magnetické pole nekoná práci, a tedy nemění celkovou kinetickou energii částice, dochází tak k přesunu energie mezi složkou kinetické energie odpovídající kolmé rychlosti a odpovídající paralelní rychlosti. Touto úvahou docházíme ke vztahu pro paralelní rychlost

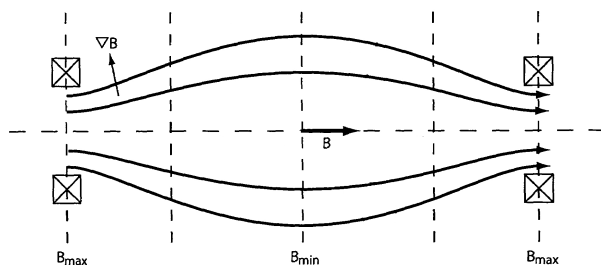
$$\frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B = \text{konst.}$$

Pokud se tedy částice bude pohybovat z místa se slabým magnetickým polem do oblasti s vyšším magnetickým polem, bude se postupně snižovat její paralelní rychlost. Může se dostat do bodu, kdy její paralelní rychlost klesne na nulu, protože veškerou svoji kinetickou energii transformuje do kolmé složky. Částice se díky tomu odrazí a bude se vracet zpět do oblasti s nízkým magnetickým polem. Tomuto jevu se říká magnetické zrcadlo a je principem jednoduchých lineárních magnetických pastí, které se dají realizovat pomocí dvou sousedních magnetů (viz. obr. 5). Taková past ovšem není schopná zachytit všechny částice, ale pouze ty, které mají vhodný poměr paralelní a kolmé rychlosti. Kvalita pasti je daná parametry  $B_{\max}$  a  $B_{\min}$ ,

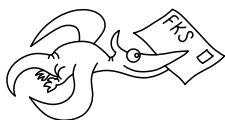
tj. velikostí magnetického pole na kraji a uprostřed pastí. Částice se v pasti zachytí, pokud splní podmínku

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \leq \frac{B_{\min}}{B_{\max}},$$

kde dané rychlosti jsou rychlostmi uprostřed pastí, tj. v místě s nejmenším magnetickým polem. Částice, která tuto podmínku nesplní (tj. nachází se ve *ztrátovém kuželu* rychlostního prostoru), dokáže překonat past a nezůstane v ní zachycena. Bohužel, tím, jak se nabité částice mezi sebou srážejí, migrují v rychlostním prostoru a postupně se dostanou až do ztrátového kuželu. To je hlavní slabina lineárních pastí, která obvykle způsobuje rychlý únik částic.



Obr. 5: Magnetické zrcadlo tvořené dvěma magnety se společnou osou



**FYKOS**  
**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>  
 e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

FYKOS je také na Facebooku   
<http://www.facebook.com/Fykos>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.