

K. KOLÁŘ, A. FLANDERA A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXVI. ročník – 2012/13



Copyright © Karel Kolář, Aleš Flandera, 2013
Copyright © **MATFYZPRESS**, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze, 2013

ISBN 978-80-7378-237-5



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	13
Zadání experimentálních úloh	76
Řešení experimentálních úloh	78
Seriál o plazmatu	106
Kapitola 1: Úvod do fyziky plazmatu a termojaderné fúze	106
Kapitola 2: Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích	108
Kapitola 3: Udržení plazmatu v TOKAMAKu	112
Kapitola 4: Transport částic	115
Kapitola 5: Sondová diagnostika plazmatu	117
Kapitola 6: Tokamak jako fúzní reaktor	120
Řešení úloh ze seriálu	124
Akce FYKOSu	132
Podzimní soustředění v Dlouhých Rzech	132
Jarní soustředění v Heřmanicích v Podještědí	133
Týden s aplikovanou fyzikou	134
Den s experimentální fyzikou 2013	137
FYKOSí Fyziklání 2013	138
Fyziklání Online	139
Cyklus přednášek pro středoškoláky 2012/2013	140
Pořadí řešitelů	141



Předmluva

Milá čtenářko či milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala knížka, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXVI. ročníku, který probíhal ve školním roce 2012/13.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „rozvíčkové“, jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídká je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení, ať už klasickou poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblíbenějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí atraktivní program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních hrách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

V tomto ročníku se FYKOS po šesti letech vrátil v rámci Týdne s aplikovanou fyzikou do CERNu.

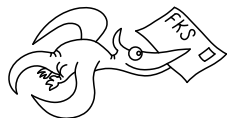
Proběhl již šestý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pětičlenných týmů v řešení zajímavých úloh na čas. Vyhrává ten nejrychlejší počtář. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 76 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o fyziku a přírodní vědy mezi mladými lidmi stále ještě existuje.

V návaznosti na FYKOSí Fyziklání jsme se rozhodli uspořádat již druhý ročník internetové týmové soutěže Fyziklání online, která, stejně jako minulý rok, zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro zejména které byla vytvořena. Druhého ročníku se zúčastnilo 159 středoškolských a 45 jiných týmů. To svědčí o zajímavosti soutěže, a proto se z ní stane nejspíše další tradiční FYKOSí akce.

Úspěšně se rozvíjí i náš bratrský fyzikální korespondenční seminář pro základní školy – Výfuk. Letos proběhl druhý ročník. Zúčastnily se jej téměř tři stovky žáků. Mladší sourozenec FYKOSu má zřejmě co nabídnout (nejen) mladším sourozencům našich řešitelů.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXVI. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o plazmatu, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



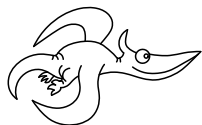
FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXVI. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 170 studentů z 92 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 1 895 došlých řešení a udělili 5 490 bodů.

Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Ludovíta Štúra, Trenčín	5	51	255
G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	4	63	253
G B. Němcové, Hradec Králové	3	78	233
G, Dubnica n. Váhom	2	116	231
G J. Vrchlického, Klatovy	4	52	208
G PdC, Piešťany	2	101	201
G, Česká Lípa	1	184	184
G Poštová, Košice	3	60	180
G, P. Horova, Michalovce	1	161	161



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... tlustý papír

2 body

Odhadněte tloušťku papíru A4, pokud znáte jeho plošné rozměry, gramáž a hustotu (jak obecně, tak číselně). Potřebné údaje si vyhledejte (či správně odhadněte) pro běžný kancelářský papír. *(řešení str. 13)*

Úloha I.2 ... odhal svoje vnitřnosti!

2 body

Odhadněte počet elektronů ve svém těle. *(řešení str. 13)*

Úloha I.3 ... Poledniková

4 body

Nechť jsou podél poledníků a rovnoběžek natažené dráty, které jsou v místech křížení spojené. Jaký naměříme odpor mezi body sítě, které odpovídají zemským pólům, pokud víte, že odpor jednoho metru drátu je ϱ ? Poledníky i rovnoběžky uvažujte po 15° .

Bonus Jaký by byl odpor mezi dvěma uzly sítě, které leží na rovníku a naproti sobě? *(řešení str. 14)*

Úloha I.4 ... crash testy

4 body

Mějme dvě auta o stejné hmotnosti jedoucí proti sobě rychlostí v_0 . V jaké vzdálenosti musí začít brzdit, aby nedošlo ke srážce? Uvažujte dva případy, kdy auta jedou proti sobě na rovině a kdy auta jedou po silnici se sklonem α . Víte, že oba řidiči začnou brzdit v též okamžik a velikost brzdě síly každého auta je $f \cdot N$, kde N je složka tíhy automobilu kolmá na silnici. *(řešení str. 16)*

Úloha I.5 ... Young cylinder

5 bodů

Představte si dvoušterbinový Youngův pokus, jen místo klasického plochého stínítka dejte válec s osou směřující kolmo na spojnici šterbin. Střed válce je ve vzdálenosti L od šterbin, poloměr válce je $R = L/2$, vzdálenost šterbin je a . Jak bude vypadat difrakční obrazec po rozvinutí pláště válce do roviny? Udejte polohy maxim pomocí souřadnice x vedené po plášti válce. *(řešení str. 17)*

Úloha I.P ... větroplach!

5 bodů

Odhadněte, jakou minimální rychlostí musí foukat vítr, aby odnesl papír ležící na stole. *(řešení str. 19)*

Úloha II.1 ... z Prahy do Brna

2 body

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370$ km vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci. *(řešení str. 20)*

Úloha II.2 ... hollow Earth

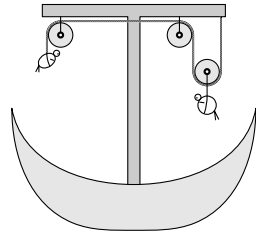
2 body

Kdyby se všechna hmota Země vzala a přemodelovala se na kulovou slupku o tloušťce $d = 1$ km (se stejnou hustotou), jaký by tato nová „Země“ měla vnější poloměr? Jaké by bylo gravitační zrychlení na jejím vnějším povrchu? *(řešení str. 21)*

Úloha II.3 ... Benátčané

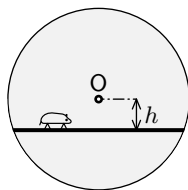
4 body

Dva mladí, ale bohužel poněkud prostorově výraznější, Benátčané Paolo a Francesca Muschetti (o hmotnostech $m_P = 180$ kg a $m_F = 130$ kg) by se chtěli spolu projet na gondole. Žádný gondoliér je ale nechce vzít na svou loď, protože ví, že by je všechny tři loď neunesla. Chytrý gondoliér Jacopo ale vymyslel rampu, na kterou umístil tři kladky dle obrázku. Skrz kladky provlékl lana a oba mladé Benátčany na ně upevnil (viz obrázek) každého na opačný konec, tak, že nejprve byla nahore lehčí Francesca a po jisté chvíli ji v této pozici vystřídal těžší Paolo. Jak vysoká musí být rampa, aby gondola stihla přejet přes kanál? Doba jízdy je $\tau = 60$ s. Předpokládejme, že při použití tohoto zařízení se již gondola nepotopí. Zanedbejte veškeré tření, hmotnost lana a momenty setrvačnosti kladek. *(řešení str. 22)*



Úloha II.4 ... křeček

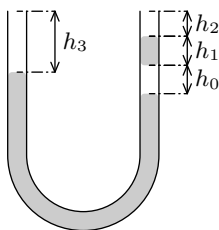
5 bodů



Rado si pro svého křečka Bobka přichystal speciální kolečko. Celá soustava se může otáčet okolo osy procházející bodem O, který je středem kolečka, a ke kolečku je vodorovně připojená deska ve vzdálenosti h od osy rotace, viz obrázek. Jak se má křeček Bobek pohybovat po desce, aby deska zůstala po celou dobu pohybu vodorovně? Koeficient tření mezi křečkem a deskou je f . (řešení str. 24)

Úloha II.5 ... horko u U-trubice

5 bodů



V U-trubici je rtuť se vzduchovou bublinou výšky h_0 v jednom rameni, jak můžete vidět na obrázku. Co se stane, pokud se okolní atmosféra změní následujícími způsoby? Předpokládejte, že rtuť při změně teploty nemění objem (hustotu), stejně tak i sklo, ze kterého je U-trubice, a vzduch se chová jako ideální plyn. Původní stav okolní atmosféry je popsán teplotou $T_0 = 300$ K, tlakem $p_a = 10 \cdot 10^5$ Pa a složením je vzduch. Předpokládejte, že celý systém je stále v termodynamické rovnováze, rovněž bublinu považujte za váleček.

linu považujte za váleček.

- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek a přitom budou ramena U-trubice volná.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před touto změnou pevně uzavřeme oba konce U-trubice.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před zahřátím pevně uzavřeme pouze jeden konec U-trubice.

Pro všechny body zadání určete výsledné rozměry bubliny ve rtuti a výškový rozdíl mezi hladinami v obou částech U-trubice.

Bonus Započtete lineární teplotní roztažnost rtuti. (řešení str. 25)

Úloha II.P ... gravitace si žádá větší slovo

5 bodů

Co kdyby se „přes noc“ změnila hodnota gravitační konstanty na dvojnásobek a přitom by zůstaly zachovány ostatní fyzikální konstanty na původních hodnotách? A co kdyby se zvětšila stokrát? Rozepište se o různých aspektech – zejména o životě na Zemi a drahách vesmírných objektů. (řešení str. 28)

Úloha III.1 ... konjunkce

2 body

Oblíbeným tématem proroků kosmických katastrof jsou konjunkce planet. Představte si, že je poledne a jedna taková konjunkce zrovna nastala. O kolik nejvíce procent můžete být lehčí, pokud uvažujeme, že Země je počátkem polopřímky, na které leží všechny velké planety a Slunce, vůči situaci bez ostatních planet a Slunce? (řešení str. 32)

Úloha III.2 ... padni komu padni

2 body

Pustíme z klidu z ruky kuličku o průměru r ze střechy dolů. Předpokládejme, že můžeme zanedbat odpor vzduchu. Jaký se nám bude jevit poloměr této kuličky v závislosti na čase? Předpokládejme, že se na kuličku díváme přímo ze shora a že v okamžiku upuštění kuličky byla x_0 pod našima očima. (řešení str. 35)

Úloha III.3 ... upečené brzdy

4 body

Jakou rychlostí máme jet autem z kopce, abychom co nejvíce zahřívali brzdy? Uvažujte, že rozdíl teploty vzduchu a teploty brzd je úměrný brzdnému výkonu. (řešení str. 36)

Úloha III.4 ... nadzvuková nebo podzvuková?

4 body

Uvažujte bombu padající volným pádem svisle dolů na cíl. Po celou dobu pohybu, který začíná z klidu, vydává vlivem tření o vzduch zvuk, který se šíří rychlostí $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaká je maximální možná rychlost dopadu, aby ti, na které bomba dopadne, ji ještě za živa slyšeli? (řešení str. 38)

Úloha III.5 ... Gazprom

5 bodů

Na plynovodu na daleké Sibiři, kterým teče zkapalněný zemní plyn, došlo k havárii a bylo nutné jej uzavřít. Spočítejte, jakou práci musel vykonat Váňa Vasilijevič, který byl vyslán k zásobníku zavřít výborně promazaný deskový ventil na příslušné lince. Jakou sílu musel během tohoto aktu vynakládat (vyjádřete ji v závislosti na rozumně vybrané veličině)? Ventil si představte jako desku, která je postupně vsouvána ze strany napříč do potrubí. Ve velkém rezervoáru, který je na linku připojen, je tlak $p = 2 \text{ MPa}$, deskový ventil má tloušťku $d = 10 \text{ cm}$, potrubí má čtvercový průřez o straně $a = 1 \text{ m}$ a zkapalněný plyn o hustotě $\rho = 480 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ jím protéká s průtokem $q = 20 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$. (řešení str. 40)

Úloha III.P ... protikonspirační

5 bodů

Zamyslete se nad tím, na kterých parametrech a jak může záviset délka kondenzační čáry za letadlem. Tyto parametry se pokuste odhadnout či vyhledat a určete možné délky čar. Na základě vašich úvah vyvráťte internetový mýtus o tzv. chemtrails, práškovacích letadlech, která na obyvatele sypou jedovaté látky. (řešení str. 42)

Úloha IV.1 ... antieinsteinovská

2 body

Napište nám, jaký je váš nejoblíbenější fyzik/fyzička, kromě Einsteina. Co udělal/a? Proč je podle vás tak skvělý/á? Proč by měl/a být známý/á? Rozepište se o jeho/jejích objevech a životě. (řešení str. 44)

Úloha IV.2 ... vesmírná skleróza

2 body

Jaký je poměr objemu Země ku objemu Měsíce? Vypočítejte jej pouze ze znalosti, že poměr jejich hmotností je přibližně 81 a že intenzita gravitačního pole je na povrchu Země přibližně šestkrát vyšší než na povrchu Měsíce. (řešení str. 45)

Úloha IV.3 ... kačenka ve vaně

3 body

Na trajektu máme nezabrzděné auto, které stojí rovnoběžně s jeho osou. Trajekt se houpe harmonicky na vlnách, tj. $\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)$. Maximální úhlová výchylka trajektu je Φ . Jak daleko od kraje můžeme zaparkovat auto, aby nám nemohlo spadnout do moře? Uvažujte, že maximální výchylka se pomalu zvětšuje z nuly na hodnotu Φ . (řešení str. 46)

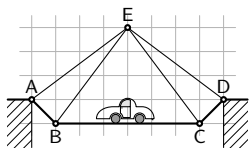
Úloha IV.4 ... rána kladivem

4 body

Pokud udeříte kladivem do jednoho konce kovové tyče (jejíž průměr je mnohem menší než její délka), začnou se okolo ní šířit zvukové vlny. Narýsujte a co nejpřesněji popište, jak se bude s časem měnit tvar vlnoploch v rovině tyče. Mezi vašimi obrázky by měly být znázorněny vlnoplochy, a to v okamžicích, kdy se vlna dostala na druhý konec tyče a kdy se po odrazu vrátila opět do místa úderu. Nezapomeňte konstrukci popsat. Uvažujte pouze podélné kmity tyče. Poměr rychlosti šíření zvuku v tyči a ve vzduchu je $\beta = v_{\text{tyč}}/v_{\text{vzduch}} \approx 10$. (řešení str. 48)

Úloha IV.5 ... stavme mosty

4 body



Mějme dvourozměrnou část jednoduché mostní konstrukce jako na obrázku tvořenou z tyčí spojených v bodech A, B, C, D a E. Zjistěte, které tyče jsou namáhány tlakem a které tahem a jak velkými silami, pokud jsou tyče nehmotné a na tyči BC stojí autíčko o hmotnosti m . Délky tyčí určete z obrázku.

Bonus Uvažujte, že všechny tyče mají konstantní délkovou hustotu λ .

(řešení str. 50)

Úloha IV.P ... Mrazík

5 bodů

V pohádce Mrazík vyhodil Ivan loupežníkům kyje do takové výšky, že spadly až za půl roku. Jak vysoko by je musel vyhodit, aby dopadly za takovou dobu? Vytvořte první a druhý hrubý odhad. Zdůvodněte, proč jsou tyto odhady nejspíš řádově špatné. Co jste všechno zanedbali? Z jakých důvodů je celkově nesmyslné, aby kyje dopadly na prakticky stejné místo po půl roce? Nebraňte se proudu kritiky na tuto klasickou pohádku! (řešení str. 52)

Úloha V.1 ... vaříme oceány

2 body

Odhadněte, kolik energie by bylo potřeba na odpaření všech pozemských oceánů. (řešení str. 55)

Úloha V.2 ... molekuly

2 body

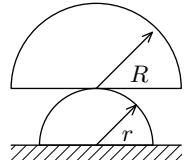
Předpokládejme, že při vypaření kapalinového tělesa o povrchu S dochází k jeho přeměně na jednotlivé molekuly, které lze považovat za elementární kapalinová tělíska, jejichž úhrnný povrch je ale podstatně větší než povrch původního tělesa. Znáte-li skupenské teplo vypařování vody $L = 2,1 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ a povrchové napětí vody (energie připadající na plošnou jednotku povrchu kapaliny) $\alpha = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, odhadněte velikost jejich molekul. (řešení str. 56)

Úloha V.3 ... plážové válení

4 body

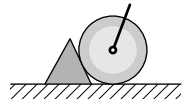
Mějme dva půlválce ležící na sobě jako na obrázku. Spodní má poloměr r a horní poloměr R . Pro jaký poloměr R s pevným r je soustava stabilní?

Bonus V případech, kdy je soustava stabilní (pokud vychýlíme vrchní válec z rovnovážné polohy, tak začne provádět malé kmity), s jakou periodou bude kmitat? (řešení str. 57)

**Úloha V.4 ... zašpalkovat**

4 body

Může zašpalkované letadlo pustit motory na zemi na plný tah a zůstat na místě? Pokuste se o obecné vyjádření uvažující různé materiály kola, špalku i podlahy. Změní se to, bude-li špalek vysoký akorát na dotek kola? (řešení str. 60)

**Úloha V.5 ... skladník Boba**

4 body

Skladník **BOBA** měl ve svém sibiřském příbytku přímotop s příkonem 2 kW po pradědečkovi jako jediný zdroj vytápění. Když se na podzim začalo trochu ochlazovat, rozhodl se po dlouhé době přímotop zapnout, ale zjistil, že již nefunguje. **BOBA** byl celý nešťastný, protože se mu nechtělo utrácet celé své úspory za nový přímotop. Když si pak dal něco na zahřátí a zahrnutí deprese, napadl ho geniální nápad: ve skladu, kde pracuje, se válejí tuny hřejivého plutonia 237. Kolik plutonia si má **BOBA** odnést do svého příbytku, aby nahradil doslouživší přímotop a v následující zimě neumrzl? Předpokládejte, že plutonium je téměř čisté a má doma dost olověného nádobí po praprapraprababičce, takže dokáže zachytit veškerou vycházející energii. (řešení str. 63)

Úloha V.P ... Praha pod vodou

4 body

Vzpomeňte si na velké povodně z roku 2002. Odhadněte, kolik vody pojme pražské metro při povodních. Důležité rozměry jako velikosti souprav, počet stanic, celkovou délku tubusů metra a další si najdete na internetu. (řešení str. 64)

Úloha VI.1 ... ne zcela chutné pití vody

2 body

Pták Fykosák jednoho dne vypil 2 dcl vody. Uběhlo milénium a všechna voda na Zemi se stihla mezitím promíchat. Když teď pták znovu vypije 2 dcl vody, kolik molekul z vody, co vypil právě před milénium, v nich bude? (řešení str. 66)

Úloha VI.2 ... roztržitý drát

2 body

Jak by musel být minimálně dlouhý ocelový drát ve stočeném stavu, aby se při volném zavěšení za jeho jeden konec přetrhl? Používáme ocelový drát o hustotě $\rho = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, průměru $D = 1 \text{ mm}$ a mezi pevnosti $\sigma_{\max} = 400 \text{ MPa}$. Uvažujte, že jsme v homogenním tíhovém poli o intenzitě $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Bonus Uvažujte teď nejdelší drát, který se ještě nepřetrhne. O kolik procent se protáhne po zavěšení? Youngův modul pružnosti v tahu použité oceli je $E = 200 \text{ GPa}$. (řešení str. 67)

Úloha VI.3 ... utopená čočka

4 body

Jestliže do vzdálenosti p od tenké čočky vyrobené ze skla o indexu lomu n_s umístíme předmět, podaří se nám zachytit jeho obraz na stínítku ve vzdálenosti d od ní. Čočku a předmět beze změny vzájemné vzdálenosti poté ponoříme do kapaliny o indexu lomu n . Za jakých podmínek budeme nyní schopni zachytit obraz předmětu na stínítku a v jaké vzdálenosti x od čočky to bude? (řešení str. 71)

Úloha VI.4 ... nalévání čaje do várnice v menze

4 body

O kolik se zvýší rychlost čepování čaje v_0 , pokud je do várnice právě doléván? Průměr várnice je D , průměr proudu dolévaného čaje je d právě při dopadu na hladinu. Čaj naléváme z výšky h nad hladinou, která je ve výšce H nad středem otvoru. Průměr otvoru, jímž čaj vytéká, je mnohem menší než D . Zanedbejte veškeré tření. (řešení str. 72)

Úloha VI.5 ... problémy baseballistů

4 body

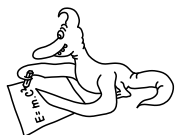
Mějme hráče baseballu, který drží v ruce baseballovou pálku délky L a hmotnosti m a chystá se na odpal míčku. Jako vhodné přiblížení se držíme toho, že hráč může otáčet pálkou jen okolo fixované osy, která je kolmá na osu páčky a prochází na jejím konci rukama odpalujícího hráče. Pálkou otáčí úhlovou rychlostí ω . V jaké vzdálenosti l od konce páčky má hráč odpálit míček, aby nárazová síla na hráčovy ruce byla co nejmenší? Pálka je tenká homogenní tyč. (řešení str. 73)

Úloha VI.P ... vyplni to – nejde to

5 bodů

Kolik lidí dokáže za sekundu usmrtit nestíněný jaderný reaktor?

(řešení str. 74)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... tlustý papír

Odhadněte tloušťku papíru A4, pokud znáte jeho plošné rozměry, gramáž a hustotu (jak obecně, tak číselně). Potřebné údaje si vyhledejte (či správně odhadněte) pro běžný kancelářský papír.

Abychom spočítali tloušťku papíru, budeme se na něj muset podívat na jako opravdu tenký kvádr. Tloušťku označíme c a ostatní dva rozměry, tedy délku a šířku, a a b . Jde o kvádr, takže umíme jednoduše vyjádřit jeho objem

$$V = abc.$$

Objem samotný neznáme, ale zadání nám napovídá, že můžeme použít ještě gramáž, tedy plošnou hustotu (v jednotkách $\text{g}\cdot\text{m}^{-2}$), a hustotu. Pro objem platí

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

a pro plošnou hustotu platí

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{ab}.$$

Vztahy dáme do rovnosti a upravíme do finálního obecného vztahu pro c

$$\sigma = \frac{m}{ab} = \frac{V\rho}{ab} = \frac{abc\rho}{ab} \Rightarrow c = \frac{\sigma}{\rho}.$$

S číselnými hodnotami dopadneme následovně: gramáž může být různá, kancelářský papír má často $80\text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$. Hustotu běžného kancelářského papíru zjistíme třeba na internetu¹, zde použitá hodnota je $0,86\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Rozměry papíru nakonec ani nebudeme potřebovat. Po dosazení nám výsledná tloušťka vyjde $1 \cdot 10^{-4}\text{ m}$.

Úloha I.2 ... odhal svoje vnitřnosti!

Odhadněte počet elektronů ve svém těle.

Představme si, že průměrná FYKOSačka váží m . Podle stránky² bude její tělo tvořeno přibližně z 65 % kyslíkem, z 18 % uhlíkem, z 10 % vodíkem a z 3 % dusíkem; zbytku je tak málo, že ho můžeme zanedbat.

V periodické tabulce prvků najdeme, kolik jednotlivé prvky mají nukleonů: ${}^1_1\text{H}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{12}_6\text{C}$ a ${}^{14}_7\text{N}$ (zvlášť si všimáme, jaký je poměr protonů a nukleonů).

¹http://wiki.answers.com/Q/What_is_the_density_of_paper

²http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_of_the_human_body

Počet protonů v těle je skoro stejný jako počet elektronů, nebudeme uvažovat žádné izotopy a hmotnost elektronu vůči protonu zanedbáme taky – je asi 2000krát menší. Hmotnost protonu i neutronu je přibližně $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Z toho už můžeme počet elektronů n odhadnout

$$n = \frac{0,1 \cdot m}{m_p} + \frac{0,65 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,18 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,03 \cdot m}{2m_p}.$$

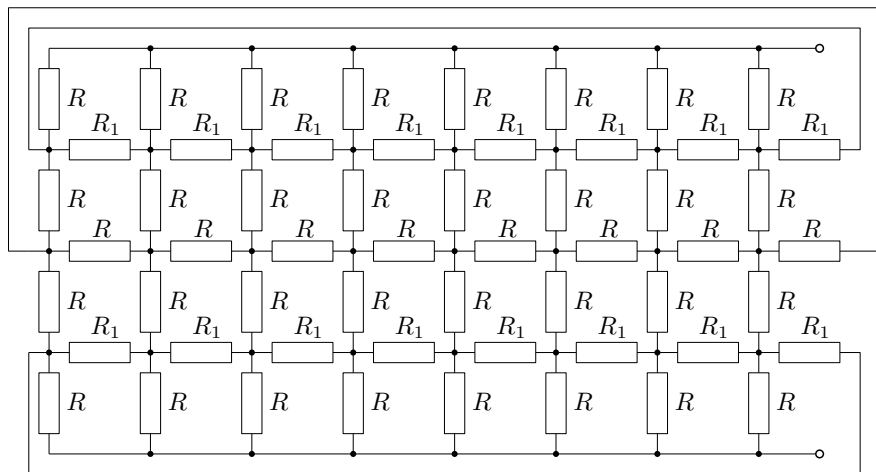
Váží-li průměrná FYKOSačka 60 kg, pak její tělo obsahuje asi $2 \cdot 10^{28}$ elektronů. FYKOSák vážící 80 kg má v sobě přibližně $3 \cdot 10^{28}$ elektronů.

Úloha I.3 ... Poledníková

Nechť jsou podél poledníků a rovnoběžek natažené dráty, které jsou v místech křížení spojené. Jaký naměříme odpor mezi body sítě, které odpovídají zemským pólům, pokud víte, že odpor jednoho metru drátu je ρ ? Poledníky i rovnoběžky uvažujte po 15° .

Bonus Jaký by byl odpor mezi dvěma uzly sítě, které leží na rovníku a naproti sobě?

Při řešení této úlohy využijeme toho, že neteče-li rezistorem žádný proud, chování obvodu nezáleží na jeho odporu. Tedy je-li na rezistoru nulové napětí, můžeme rezistor z obvodu odstranit nebo jej nahradit vodičem.



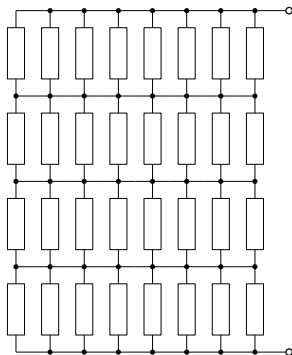
Obr. 1: Překreslené zadání pro úhel 45° .

Pro jednoduchost nakreslíme situaci, kdy jsou poledníky i rovnoběžky po 45° . Sít poledníků a rovnoběžek si překreslíme do obrázku tak, že všechna křížení na-

hradíme uzly (jelikož jsou dráty v místě spojené) a jednotlivé úseky poledníků a rovnoběžek nakreslíme jako rezistory, viz obrázek 1.

Úseky rovníku mají vždy stejný úhel a poloměr a úseky všech poledníků též, mají tedy všechny stejný odpor, označme jej R . Odpor úseků rovnoběžek na jedné polokouli je však různý, protože rovnoběžky mají různý poloměr.

Připojíme-li k pólům napětí, proud tekoucí z pólu všemi poledníky musí být stejný, jelikož je celá situace symetrická. Napětí na všech na pólu začínajících úsecích poledníků je tedy podle Ohmova zákona stejné, proto na všech uzlech první rovnoběžky směrem od pólu je stejný potenciál, napětí mezi těmito body je tedy nulové. Proto touto rovnoběžkou neteče žádný proud, můžeme ji tedy nahradit vodičem. Takto postupujeme přes všechny rovnoběžky, až získáme síť rezistorů o odporu R , viz obrázek 2. Jelikož vodiči, kterými jsme nahradili rovnoběžky, neteče žádný proud, můžeme je vynechat. Odpor mezi póly tedy bude stejný, jako by dráty byly nataženy pouze podél poledníků.



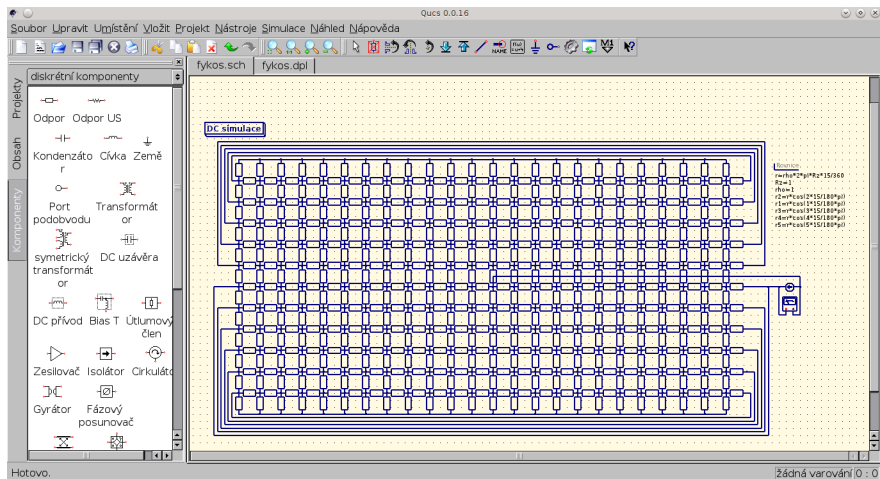
Obr. 2: Rezistory, na kterých je nulové napětí, můžeme nahradit vodiči.

Jsou-li poledníky a rovnoběžky po 15° , pak je celkem 24 poledníků. Je-li poloměr Země r a měrný elektrický odpor drátu ϱ , pak odpor jednoho z poledníků je $\pi r \varrho$. Odpor 24 paralelně zapojených poledníků je tedy

$$R_Z = \frac{1}{24} \pi r \varrho.$$

Pro vyřešení bonusu můžeme použít např. počítačovou simulaci. Jedním z programů, které toto umožňují, je např. Qucs (viz screenshot na obrázku 3).

Do programu překreslíme síť rezistorů a přiřadíme jim odpory. Jestliže $R = 2\pi\varrho r \cdot 15^\circ/360^\circ$ je odpor jednoho úseku rovníku, pak R je i odpor každého úseku všech poledníků (mají stejnou délku i poloměr jako úseky rovníku). Odpor úseku i -té rovnoběžky od rovníku je pak $R_i = R \cos(15^\circ i)$. Z tohoto je zřejmé, že odpor mezi zadanými dvěma body je úměrný měrnému elektrickému odporu drátu ϱ a poloměru Země r . Jestliže zvolíme obě tyto veličiny jednotkové, pak odpor zjištěný simulací bude číselně právě konstanta úměrnosti, a můžeme tedy



Obr. 3: Simulace bonusu programem Qucs.

i po provedení simulace zapsat hledaný odpor jako funkci měrného elektrického odporu a poloměru Země.

Pokud použitý program neumožňuje přímo měřit odpor, pak použijeme jednoduchý trik: síť připojíme (v požadovaných bodech) k ideálnímu zdroji proudu, na kterém nastavíme proud 1 A, a měříme napětí na něm. Toto napětí ve voltech se pak podle Ohmova zákona číselně rovná odporu mezi danými dvěma body v ohmech.

Zvolili jsme pro simulaci $\rho = 1 \Omega \cdot \text{m}$ a $r = 1 \text{ m}$, pak je dle simulace odpor mezi zadanými dvěma body $0,2824 \Omega$. Odpor mezi zadanými dvěma body zeměkoule je číselně tedy

$$R'_Z = 0,2824 \rho r .$$

Úloha I.4 ... crash testy

Mějme dvě auta o stejné hmotnosti jedoucí proti sobě rychlostí v_0 . V jaké vzdálenosti musí začít brzdit, aby nedošlo ke srážce? Uvažujte dva případy, kdy auta jedou proti sobě na rovině a kdy auta jedou po silnici se sklonem α . Víte, že oba řidiči začnou brzdit v týž okamžik a velikost brzdné síly každého auta je $f \cdot N$, kde N je složka tíhy automobilu kolmá na silnici.

První případ je pouze speciálním případem případu druhého, a to pro $\alpha = 0$. Můžeme se tedy rovnou pustit do obecného řešení. Předpokládejme, že jakmile auto zastaví, už zůstane stát. Spočítejme, jak daleko od sebe by auta musela začít brzdit, aby zastavila těsně u sebe. Hledaná vzdálenost tedy bude součtem brzdných drah.

Rozkladem tíhové síly o velikosti $G = mg$ na složku normálovou k povrchu a složku tečnou k pohybu zjistíme, že $N = mg \cos \alpha$. Brzdná síla je tedy $fmg \cos \alpha$. Nezapomínejme však, že jede-li auto po nakloněné rovině, je navíc zrychlováno či zpomalováno tečnou složkou tíhy. Celková síla působící na vozidlo ve směru pohybu je tedy $fmg \cos \alpha \pm mg \sin \alpha$. Znaménko ve výrazu určuje směr sklonu silnice a právě v něm se budou lišit zkoumaná dvě auta. A zrychlení pak bude $a = fg \cos \alpha \pm g \sin \alpha$.

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb zakončený stáním platí vzorec pro výpočet ujeté vzdálenosti

$$s = \frac{1}{2}at^2,$$

kde t je čas potřebný k zastavení. Zároveň $t = v_0/a$. Můžeme tedy upravit na

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha \pm \sin \alpha)}.$$

Po sečtení pro obě auta dostáváme celkovou vzdálenost

$$S = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{1}{f \cos \alpha + \sin \alpha} + \frac{1}{f \cos \alpha - \sin \alpha} \right),$$

což lze upravit na

$$S = \frac{v_0^2}{g} \frac{f \cos \alpha}{(f^2 + 1) \cos^2 \alpha - 1}.$$

Dosazením $\alpha = 0$ zjistíme, že na rovině je to

$$S = \frac{v_0^2}{gf}.$$

Úloha 1.5 ... Young cylinder

Představte si dvouštěrbinový Youngův pokus, jen místo klasického plochého stínítka dejte válec s osou směřující kolmo na spojnici štěrbin. Střed válce je ve vzdálenosti L od štěrbin, poloměr válce je $R = L/2$, vzdálenost štěrbin je a . Jak bude vypadat difrakční obrazec po rozvinutí pláště válce do roviny? Udejte polohy maxim pomocí souřadnice x vedené po plášti válce.

Po chvíli zamyšlení nad náčrtem situace jistě nebyl problém uhádnout, že úloha je opravdu pouze variací na slavný Youngův experiment s trochou té geometrické omáčky. Než ale přikročíme k jádru řešení, dovolíme si stručně odvození notoricky známé podmínky pro interferenční maximum $k\lambda = a \sin \varphi_k$, bez které se v dalším povídání neobejdeme.³ Připomeňme, že $k \in \mathbb{Z}$ značí řád maxima, λ je vlnová

³Jako jednoduché cvičení se čtenář může přesvědčit, že v obecnější situaci, kdy na štěrbinu dopadají paprsky pod úhlem ψ , můžeme psát

$$k\lambda = a (\sin \varphi_k - \sin \psi).$$

délka koherentního záření použitého v experimentu a a je vzdálenost štěrbin. Je zřejmé, že zadání nám dovoluje ignorovat 3D povahu problému a lze tedy uvažovat pouze 2D řez kolmý na stínítko. Potom φ_k definují jednotlivé směry jakožto odchylky (počítáme v kladném smyslu) od přímky kolmé na stínítko, která prochází středem O spojnice štěrbin S_1 a S_2 (nazýváme ji dále *osou symetrie*).

Uvažujme nyní dva libovolné paprsky vycházející ze štěrbin. Ty se v obecném případě protnou v bodě P. Označme $|S_{1,2}P| = s_{1,2}$ a $|OP| = s$. Potom (kosinová věta)

$$s_{1,2} = \sqrt{s^2 + \frac{a^2}{4} \pm as \sin \varphi} = s \sqrt{1 + \frac{a^2}{4s^2} \pm \frac{a}{s} \sin \varphi},$$

kde φ je odchylka ve smyslu definice z předchozího odstavce. Uvažujeme-li ale pouze taková s , že $s \gg a$, potom můžeme s chutí aplikovat přibližný vztah

$$(1+x)^n \approx 1+nx, \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

pro $x \ll 1$ a po chvíli zápasení dostaneme požadovaný výsledek

$$s_1 - s_2 = \Delta = a \sin \varphi,$$

neboť aby došlo v P ke konstruktivní interferenci, musí být $\Delta = k\lambda$. Vidíme tedy, že veličina φ je plně postačující k popisu problému.

Nyní se budeme zabývat případem, kdy světlu vystupujícímu ze štěrbin vložíme do cesty válec tak, jak to definuje zadání. K popisu polohy na povrchu válce tedy zavedeme úhel α , který počítáme v kladném směru od průsečíku osy symetrie s povrchem válce (toho blíže ke štěrbinám), z něhož se na kýženou souřadnici x dostaneme přepočtem $x = R\alpha$. Je vidět, že kromě množiny maxim, co se na povrch válce zobrazí, existuje i neprázdná množina těch, kterým se to nepovede. Poslední hypotetické maximum, které bychom na válci uviděli, je přitom definováno tečnou z O na válec, takže se můžeme omezit pouze na taková φ , která splňují⁴

$$|\sin \varphi| \leq \frac{R}{L} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |k| \leq \frac{a}{2\lambda} \text{ a } |\varphi| \leq \frac{\pi}{6},$$

což mimochodem znamená, že $|\alpha| \leq \pi/3$. Dále, ze sinové věty můžeme napsat

$$\frac{s}{\sin \alpha} = \frac{L}{2 \sin \varphi},$$

kde (pro změnu z kosinové věty)

$$s = L \sqrt{\frac{5}{4} - \cos \alpha}.$$

Označme nyní $f \equiv f(k) = a/(2k\lambda)$. Potom

$$\frac{L \sqrt{5/4 - \cos \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{L}{2 \sin \varphi} = \frac{La}{2k\lambda} = Lf,$$

⁴Je jedno, jestli vzdálenost L bereme od štěrbin nebo od bodu O, neboť za předpokladu $L \gg a$ obě tyto varianty splývají.

a tedy

$$f^2 \sin^2 \alpha = \frac{5}{4} - \cos \alpha.$$

To vede (po použití $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) na kvadratickou rovnici ($y = \cos \alpha$)

$$f^2 y^2 - y + \left(\frac{5}{4} - f^2\right) \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{(f^2 - 1)(f^2 - 1/4)}}{2f^2}$$

a dostáváme se k důležité povinnosti vybrat to správné řešení. Víme, že pro kladná k je $k \leq a/(2\lambda)$, a tedy $f \geq 1$, takže můžeme s klidnou hlavou zkoumat ku příkladu hodnotu $y_{1,2}$ pro $f = 10$, neboť funkce $y(f)$ by byla pro $f \in \mathbb{R}$ zřejmě spojitá na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$. Zkoumaná hodnota je ale pro případ znaménka mínus evidentně záporná, i když $\forall k \in \langle 0, a/(2\lambda) \rangle : \alpha \in \langle 0, \pi/3 \rangle$, a tedy $\cos \alpha \geq 0$ a to je jasný spor. Správně je tedy znaménko plus. Rekapitulace na závěr: získali jsme posloupnost $y_k \equiv y[f(k)]$, která pro $|\alpha| \leq \pi/3$ udává polohy $\alpha_k = x_k/R$ na povrchu válce pro $|k| \leq a/(2\lambda)$ (připomeňme, že $y_k = \cos \alpha_k$).

Toť tedy k řešení zadaného úkolu. Samozřejmě bychom se mohli pokusit analyticky vyjádřit samotné rozložení intenzity na povrchu válce, ale již při pohledu na výsledek „pouhého“ snažení se o udání polohy maxim nám musí být zřejmé, že pravděpodobně nepůjde o nic elegantně zapsatelného, zvláště pokud se neomezíme na standardní aproximace a přidáme si tomu například ubývání intenzity se vzdáleností od zdroje.

Úloha I.P . . . větroplach!

Odhadněte, jakou minimální rychlostí musí foukat vítr, aby odnesl papír ležící na stole.

Důfam, že ste si pokus s papierom tiež vyskúšali. Dobre sa realizuje napríklad s ľahkou podložkou pod papierom, ktorú ťaháte viac-menej rovnomerne. Papier sa pri istej rýchlosti zrazu ohne a poletí preč.

Podobne, ako to pri podobných aerodynamických úlohách býva, do hry vstupuje množstvo exotických javov. Napríklad, vzduch naráža na hranu papiera, obteká ju a tým papier čiastočne podvihuje. Takisto nie je papier úplne rovný, ale má nejaké pokrčenia a ohyby. Vzduch takéto ohyby rád kopíruje⁵ a vytvára tým ďalšie sily dvíhajúce papier. Podobný efekt nadnáša krídlo lietadla.

Pekný a jednoduchý spôsob, ako sa problému postaviť, je spomenúť si na Bernoulliho rovnicu. Vzduch pod papierom má atmosférický tlak p_0 . Vzduch nad papierom sa však hýbe rýchlosťou v , čo spôsobí pokles tlaku.⁶ Napíšeme teda Bernoulliho rovnicu, pričom člen s gravitáciou zanedbáme (na výšku papiera sa potenciál veru veľmi nemení)

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2.$$

⁵http://en.wikipedia.org/wiki/Coand%C4%83_effect

⁶Zvedavejším odporúčam zamyslieť sa nad tým, ako je to s prúdnicami. Bernoulliho zákon platí totiž len na jednej prúdnici. Treba teda premyslieť, kde sa dve prúdnice, nad a pod papierom, stretávajú a či tam majú rovnaký tlak a rýchlosť.

Tu zavádzame ešte hustotu vzduchu ϱ a tlak nad papierom p . Podmienku rovnováhy vertikálnych síl napíšeme v tvare tlakov

$$\frac{F_g}{S} + p = p_0 = p + \frac{1}{2}\varrho v^2,$$

kde zjednodušíme gravitačný tlak pomocou plošnej hustoty papiera λ

$$\lambda g = \frac{1}{2}\varrho v^2.$$

Po vyjadrení dostaneme rýchlosť

$$v = \sqrt{\frac{2\lambda g}{\varrho}},$$

čo po dosadení typických hodnôt (kancelársky papier má $\lambda = 80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$) dáva rýchlosti vetra približne $4 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Takáto hodnota je celkom reálna, keďže podobne rýchlo kráčať.

Úloha II.1 . . . z Prahy do Brna

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370 \text{ km}$ vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

Nápověda Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\begin{aligned}\sin \alpha &\approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \\ \text{tg } \alpha &\approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3},\end{aligned}$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

Vzdálenost měst s_p po povrchu lze vyjádřit pomocí vzorce pro délku kruhového oblouku

$$s_p = R_z \alpha,$$

kde R_z je poloměr Země a α je úhel, který vytínají spojnice měst se středem Země. Z tohoto vztahu můžeme snadno vyjádřit

$$\alpha = \frac{s_p}{R_z}.$$

Vzdálenost měst s_t při cestě hypotetickým tunelem lze za znalosti úhlu α vyjádřit jako (viz obrázek 4)

$$s_t = 2R_z \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Pro zjednodušení můžeme pro malé úhly aproximovat sinus prvními dvěma členy Taylorovy řady, tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48}.$$

Po dosazení této aproximace do vztahu (1) vychází

$$s_t \approx 2R_z \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{48} \right) = R_z \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{24} \right) = R_z \left(\frac{s_p}{R_z} - \frac{s_p^3}{24R_z^3} \right) = s_p - \frac{s_p^3}{24R_z^2},$$

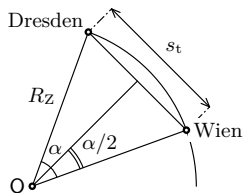
a tedy

$$\Delta s = s_p - s_t = \frac{s_p^3}{24R_z^2}.$$

Po dosazení $s_p = 370$ km a $R_z = 6\,378$ km vychází $\Delta s = 52$ m.

Odhadnout dobu cesty mezi těmito dvěma městy je základné, neboť je potřeba znát průměrnou rychlost jízdy. Co ale můžeme snadno vyjádřit, je relativní změna doby jízdy při jízdě tunelem za předpokladu, že průměrná rychlost jízdy na povrchu je stejná jako průměrná rychlost jízdy tunelem

$$\frac{\Delta t}{t_p} = \frac{\frac{\Delta s}{v}}{\frac{s_p}{v}} = \frac{\Delta s}{s_p}.$$



Obr. 4: Tulel z Dráždan do Vídně

Po dosazení vychází $\Delta t/t_p = 0,014\%$, což je naprosto zanedbatelná hodnota. Pokud by průměrná rychlost činila např. $v = 100$ km·h⁻¹, pak by rozdíl doby jízdy při cestě po povrchu a tunelem činil zhruba $\Delta t = 1,9$ s, což při celkové době jízdy 3 hodiny 42 minut nehraje opravdu žádnou roli.

Nakonec můžeme srovnat vzdálenost měst při cestě tunelem se vzdáleností měst při cestě po silnici. Podle webu <http://mapy.cz> je nejkratší cesta z Dráždan do Vídně dlouhá 438 km. Zjišťujeme tedy, že „klikatost“ silnice má na délku cesty mnohem větší vliv než to, že je Země kulatá.

Úloha II.2 ... hollow Earth

Kdyby se všechna hmota Země vzala a přemodelovala se na kulovou slupku o tloušťce $d = 1$ km (se stejnou hustotou), jaký by tato nová „Země“ měla vnější poloměr? Jaké by bylo gravitační zrychlení na jejím vnějším povrchu?

Uvažujme poloměr Země $R_z = 6\,378$ km. Objem koule s tímto poloměrem je

$$V_z = \frac{4}{3} \pi R_z^3.$$

Objem kulové slupky o vnějším poloměru R_S a tloušťce d lze přesně vyjádřit jako

$$V_S = \frac{4}{3}\pi [R_S^3 - (R_S - d)^3] = \frac{4}{3}\pi (3R_S^2d - 3R_Sd^2 + d^3).$$

Pro $d \ll R_S$ lze zanedbat členy d v druhé a vyšší mocnině. Požadujeme, aby se objem slupky a objem Země rovnaly. Dostáváme tedy rovnost

$$R_Z^3 \approx 3R_S^2d,$$

$$R_S \approx \sqrt{\frac{R_Z^3}{3d}} \doteq 2,9 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Jelikož Země bude stále sféricky symetrická, bude tvořit sféricky symetrické, tedy centrální, silové pole. V takovémto poli je zrychlení nepřímo úměrné druhé mocnině vzdálenosti od středu symetrie, tedy od středu koule.⁷ Ta je v našem případě R_S . Pokud si uvědomíme, že zrychlení na povrchu Země je nyní

$$g = G \frac{M_Z}{R_Z^2},$$

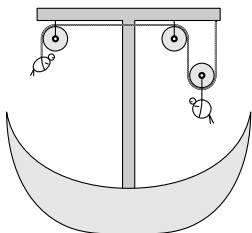
můžeme pomocí tohoto vyjádřit i nové gravitační zrychlení

$$g' = G \frac{M_Z}{R_S^2},$$

$$g' = g \frac{R_Z^2}{R_S^2} \approx 3G \frac{d}{R_Z} \doteq 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zrychlení na povrchu takovéto Země by tedy bylo asi 2000krát slabší než na naší Zemi.

Úloha II.3 ... Benátčané



Dva mladí, ale bohužel poněkud prostorově výrazněji, Benátčané Paolo a Francesca Muschetti (o hmotnostech $m_P = 180 \text{ kg}$ a $m_F = 130 \text{ kg}$) by se chtěli spolu projet na gondole. Žádný gondoliér je ale nechce vzít na svou loď, protože ví, že by je všechny tři loď neunesla. Chytrý gondoliér Jacopo ale vymyslel rampu, na kterou umístil tři kladky dle obrázku. Skrz kladky provlékl lana a oba mladé Benátčany na ně upevnil (viz obrázek) každého na opačný konec, tak, že nejprve byla nahoře

lehčí Francesca a po jisté chvíli ji v této pozici vystřídal těžší Paolo. Jak vysoká musí být rampa, aby gondola stihla přejet přes kanál? Doba jízdy je $\tau = 60 \text{ s}$. Předpokládejme, že při použití tohoto zařízení se již gondola nepotopí. Zanedbejte veškeré tření, hmotnost lana a momenty setrvačnosti kladek.

⁷A to díky tomu, že tok gravitačního pole libovolnou uzavřenou plochou splňuje podmínku, které říkáme *Gaussova věta*.

Úloha má dvě řešení, v závislosti na tom, jak budou Paolo a Francesca uchyceni. Oběma řešením je společná strategie výpočtu. Jak Paolo, tak Francesca se budou na kladkách pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem a tato zrychlení budou jednoznačně dána jejich hmotnostmi a geometrií úlohy. Budeme-li tedy chtít spočítat nejnižší možnou výšku rampy, aby se gondola nepotopila, hledáme ve skutečnosti dráhu, kterou Francesca, resp. Paolo urazí za určitý čas $-\tau$, nebo $\tau/2$. Podívejme se tedy na oba případy zvlášť.

Nejprve případ, kdy Francesca je na levé kladce, Paolo na pravé – viz obrázek. Rozborem sil, které na Benátčany působí, získáváme rovnice:

$$\begin{aligned}m_P a_P &= m_P g - 2T, \\m_F a_F &= m_F g - T, \\a_F &= -2a_P.\end{aligned}$$

První rovnice je pohybová rovnice Paola: síla, která na něj působí, je rozdílem tíhové síly a dvojnásobku napěťové síly lana T . Za kladný směr uvažujeme směr působení tíhové síly. Druhá rovnice je pohybová rovnice Francesky. Rovnice třetí je vazební podmínka, dává do souvislosti zrychlení Francesky a_F a Paola a_P . Jednoduchými úpravami dostáváme $a_P = -1,12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a $a_F = 2,24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Paolo se tedy pohybuje vzhůru – znaménko zrychlení je záporné.

Vzhledem k tomu, že Francesca je na začátku nahoře a Paolo v půlce výšky rampy l , gondoliér Jacopo nemůže ani jednomu z nich udělit počáteční rychlost, která by efektivně zmenšila nároky na výšku rampy. Její minimální výšku tak získáme jako

$$l = \frac{a_F t^2}{2},$$

neboť víme, že Francesca je na začátku nahoře a po uplynutí doby $t = \tau = 60 \text{ s}$ bude právě dopadat na palubu gondoly. Číselně získáváme závratnou hodnotu $l = 4032 \text{ m}$.

Nyní rozebereme případ, kdy Francesca je na pravé kladce, Paolo na levé. Analogickou úvahou získáme soustavu lineárních rovnic

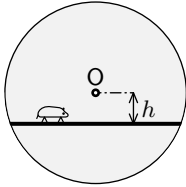
$$\begin{aligned}m_P a_P &= m_P g - T, \\m_F a_F &= m_F g - 2T, \\a_P &= -2a_F,\end{aligned}$$

jejímž řešením je $a_P = 5,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a $a_F = -2,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Vidíme, že zrychlení Paola a_P má kladné znaménko, v momentě, kdy je Paolo na palubě gondoly a Francesca ve výšce l , může gondoliér udělit Paolovi určitou počáteční rychlost (zkuste si explicitně spočítat její velikost!) takovou, že se v půlce plavby bude nacházet přesně v maximální výšce l s nulovou rychlostí. Minimální výšku gondoly l tak získáme jako

$$l = \frac{a_P t^2}{2},$$

kde $t = \tau/2 = 30$ s. Číselně vychází $l = 2385$ m, tedy nižší hodnota než v prvém prípade. Paolo a Francesca tak nejspíš budú nakoniec muset íť pešky...

Úloha II.4 ... křeček



Rado si pro svého křečka Bobka přichystal speciální kolečko. Celá soustava se může otáčet okolo osy procházející bodem O, který je středem kolečka, a ke kolečku je vodorovně připojená deska ve vzdálenosti h od osy rotace, viz obrázek. Jak se má křeček Bobek pohybovat po desce, aby deska zůstala po celou dobu pohybu vodorovně? Koeficient tření mezi křečkem a deskou je f .

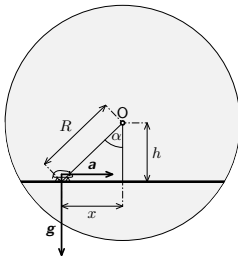
Najprv sa pozrime na celú situáciu bez škrečka, kedy doska stojí vodorovne. Ťažisko dosky je presne v jej strede, takže nevytvára žiadny moment sily vzhľadom na os prechádzajúcu stredom O. Celá sústava je v pokoji, nič sa neotáča.

Položíme teraz škrečka na dosku (ak škrečka položíme do stredu dosky, tak nastane predchádzajúci prípad) a pozorujme, čo sa deje. Škrečok teraz vytvára nenulový moment sily

$$M_1 = mg(\sin \alpha)R = mgx,$$

pôsobiaci na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom O. Celé kolečko sa teraz otáča proti smeru hodinových ručičiek.

Na to, aby sa kolečko neotáčalo, musí platiť rovnováha momentov síl pôsobiacich na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom O.



Odkiaľ sa teda musí zobrať ďalší moment sily, ktorý zabezpečí, aby sa kolečko neotáčalo? Nech sa teda škrečok rozběhne napravo so zrychlením a . Škrečok sa po doske dokáže pohybovať vďaka treniu medzi ním a doskou. Zároveň však podľa zákona akcie a reakcie ale pôsobí škrečok na dosku silou $F = -ma$, teda vytvára moment sily

$$M_2 = mgf(\cos \alpha)R = -maf(\cos \alpha)R = -mah,$$

pôsobiaci na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu stredom O. Z rovnováhy momentov síl $M_1 = M_2$ pôsobiacich na dosku vzhľadom na os prechádzajúcu bodom O dostávame

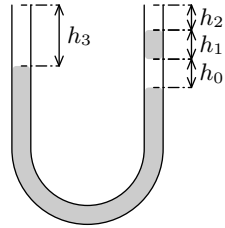
$$a = -\frac{g}{h}x,$$

kde vidíme, že na to, aby bol celý systém stále v klude je potrebné, aby sa škrečok pohyboval harmonickým pohybom s uhlovou frekvenciou $\omega^2 = g/h$.

Pár záverenných poznámok. Prečo sme dostali práve $a \sim -x$, a nie $a \sim x$? Na to si však musíme uvedomiť, že a je zrychlenie škrečka, nie dosky. Ďalej pre koeficient trenia f medzi doskou a škrečkom platí, že veľkosť $gf \leq a$, z čoho dostávame, že maximálna výchylka škrečka nemôže byť hociaká, ale môže nadobúdať iba hodnoty z intervalu $(-fh, fh)$.

Úloha II.5 . . . horko u U-trubice

V U-trubici je rtuť se vzduchovou bublinou výšky h_0 v jednom rameni, jak můžete vidět na obrázku. Co se stane, pokud se okolní atmosféra změní následujícími způsoby? Předpokládejte, že rtuť při změně teploty nemění objem (hustotu), stejně tak i sklo, ze kterého je U-trubice, a vzduch se chová jako ideální plyn. Původní stav okolní atmosféry je popsán teplotou $T_0 = 300\text{ K}$, tlakem $p_a = 10 \cdot 10^5\text{ Pa}$ a složením je vzduch. Předpokládejte, že celý systém je stále v termodynamické rovnováze, rovněž bublinu považujte za válec.



- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek a přitom budou ramena U-trubice volná.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před touto změnou pevně uzavřeme oba konce U-trubice.
- Okolní teplota se zvýší na dvojnásobek, ale před zahřátím pevně uzavřeme pouze jeden konec U-trubice.

Pro všechny body zadání určete výsledné rozměry bubliny ve rtuti a výškový rozdíl mezi hladinami v obou částech U-trubice.

Bonus Započtete lineární teplotní roztažnost rtuti.

Nejdříve se podíváme na to, co nám říká zadání, co budeme uvažovat a co můžeme zanedbat. Dle zadání máme zanedbat teplotní roztažnost rtuti a skla, proto se nebude měnit „délka“ jednotlivých částí rtuťového sloupce, viz Guldinova věta.⁸ Ale určitě máme uvažovat vlastnosti atmosféry. Protože vzduch má deset tisíckrát menší hustotu než rtuť, zanedbáme jeho hustotu proti hustotě rtuti, což znamená, že nebudeme uvažovat změnu tlaku vzduchu zapříčiněnou okolní gravitací. U rtuti ale již gravitační interakci započítat musíme. Dále je v zadání uvedeno, že je vše v termodynamické rovnováze, což znamená, že teplota vzduchu uvnitř U-trubice je stejná jako teplota vzduchu okolo.

Rovnováha

Budou-li oba konce volné, tak na horních hladinách rtuti bude atmosférický tlak a musíme z hydrostatické rovnováhy určit rozdíl $h_2^0 - h_3^0$ v závislosti na h_0^0 , h_1^0 a $h_2^0 + h_3^0$ (celkové množství rtuti v trubici).

Napišeme proto rovnici pro hydrostatický tlak ve spodní části trubice

$$p_a + (H - h_3^0)\rho_{Hg}g = p_a + (H - h_2^0)\rho_{Hg}g - h_0^0\rho_{Hg}g,$$

kde jsme označili H celkovou výšku trubice. Jednoduchou algebraickou úpravou dostáváme

$$h_3^0 - h_2^0 = h_0^0, \quad (2)$$

kde horní index nula značí *rovnovážný stav*, nikoli umocňování. Protože jde o počáteční stav, nemá cenu se zajímat o velikost bubliny, její výška je stále h_0 . Ještě si

⁸http://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinova_věta

dopočítáme, jaký bude tlak v bublině. Protože na bublinu tlačí jednak atmosféra, jednak rtuť výšky h_1 , bude tlak uvnitř roven

$$p_{b_0} = p_a + h_1 \rho_{Hg} g.$$

Volné konce

Pokud zvýšíme teplotu na dvojnásobek, jediná část našeho systému, které se to dotkne, je bublina. Její tlak se nezmění, protože stále je nad ní atmosférický tlak a kapka výšky h_1 , proto bude tlak uvnitř p_{b_0} . Vzhledem k platnosti stavové rovnice pro ideální plyn platí $h_0 = 2h_0^0$, protože jsme teplotu zvýšili na dvojnásobek za zachovávacího se tlaku. Můžeme užít stejného postupu jako v předešlém případě a dostáváme podmínku pro rovnováhu, tj. rozdíl hladin ve tvaru

$$\Delta = h_3 - h_2 = h_0 = 2h_0^0,$$

který je stejný jako velikost bubliny.

Oba konce uzavřené

Nyní již bude do hry vstupovat kromě hydrostatiky též termodynamika, protože budeme muset uvažovat změny tlaku jednotlivých částí plynu. Napíšeme soustavu rovnic popisující danou situaci, jednak to budou stavové rovnice pro ideální plyn, kde označíme $\Lambda = \rho_{Hg} g$, jednak rovnice rovnováhy tlaků pro oba kusy rtuťi, nakonec také podmínku neměnné délky trubice, resp. rtuťi v ní

$$p_3 + (H - h_3)\Lambda = p_2 + h_1\Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda, \quad (3)$$

$$p_0 = p_2 + h_1\Lambda, \quad (4)$$

$$\frac{(p_a + h_1\Lambda)h_0^0}{T_0} = \frac{p_0 h_0}{T},$$

$$\frac{p_a h_2^0}{T_0} = \frac{p_2 h_2}{T},$$

$$\frac{p_a h_3^0}{T_0} = \frac{p_3 h_3}{T},$$

$$h_0 + h_2 + h_3 = h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0, \quad (5)$$

kde horní index 0 označuje klidovou délku, která byla určena v předchozím bodu. Toto je soustava rovnic pro neznámé h_0, h_2, h_3, p_0, p_2 a p_3 .

Nejdříve zavedeme substituce $p_i = \alpha_i/h_i$ pro $i = 0, 2, 3$, kde α_i jsou číselné konstanty. Dále v rovnici (3) zjistíme, že při použití rovnice (5) vymizí všechny členy obsahující h až na h_3 a dále zbudou členy obsahující tlak. Do rovnice (4) pouze dosadíme z naší substituce za p_i . Dostáváme

$$\frac{\alpha_3}{h_3} = \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 + 2h_3)\Lambda,$$

$$\frac{\alpha_0}{h_0} = \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1\Lambda,$$

$$h_3 = L_0 - h_0 - h_2.$$

V našem případě po dosazení za α_0/h_0 do první rovnice, patřičným roznásobením a dosazením $h_3 = L_0 - h_0 - h_2$, dostáváme

$$\begin{aligned}\alpha_3 h_2 &= 2\alpha_2(h_0 + h_2) + (h_1 + L_0 - 2h_0 - 2h_2)h_2(L_0 - h_0 - h_2)\Lambda, \\ \alpha_0 h_2 &= \alpha_2 h_0 + h_0 h_1 h_2 \Lambda,\end{aligned}$$

což můžeme upravit na

$$\begin{aligned}0 &= 2h_2^3 \Lambda + h_2^2(-3L_0 + 4h_0 - h_1)\Lambda + h_2(2h_0^2 - h_0(h_1 + 3L_0) - \\ &\quad - \alpha_3 + 2\alpha_2 + h_1 L_0 + L_0^2) + 2\alpha_2 h_0, \\ 0 &= h_2 h_0 h_1 \Lambda - h_2 \alpha_0 + h_0 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{h_2 \alpha_0}{h_2 h_1 \Lambda + \alpha_2}.\end{aligned}$$

Dosadíme do první rovnice za h_0 . Získáme tím analyticky neřešitelnou rovnici pátého stupně pro h_2 , h_0 a h_3 získáme pomocí zpětných substitucí. Tím také určíme rozdíl hladin $\Delta = h_3 - h_2$ a velikost bubliny je h_0 .

Jeden konec uzavřený

Je-li jeden z konců uzavřený, tak řešení bude vypadat obdobně jako v předešlém případě, kdy jsme studovali oba konce uzavřené, ale víme, že p_2 resp. p_3 bude atmosférický tlak a také odpadne jedna ze stavových rovnic, která vázala vzdálenost od konce trubice s tlakem. Zde si ukážeme řešení pro případ, kdy je uzavřen pouze pravý konec trubice a levý je volný.

Sepíšeme si stejnou soustavu rovnic jako v úkolu b)

$$\begin{aligned}p_a + (H - h_3)\Lambda &= p_2 + h_1 \Lambda + p_0 + (H - h_0 - h_1 - h_2)\Lambda, \\ p_0 &= p_2 + h_1 \Lambda, \\ \frac{(p_a + h_1 \Lambda)h_0^0}{T_0} &= \frac{p_0 h_0}{T}, \\ \frac{p_a h_2^0}{T_0} &= \frac{p_2 h_2}{T}, \\ h_0 + h_2 + h_3 &= h_0^0 + h_2^0 + h_3^0 = L_0,\end{aligned}$$

Opět provedeme substituci za p_i pomocí α_i a využijeme poslední rovnice pro zjednodušení rovnice první.

$$\begin{aligned}p_a &= \frac{\alpha_2}{h_2} + \frac{\alpha_0}{h_0} + (L_0 - 2h_0 - 2h_2)\Lambda, \\ \frac{\alpha_0}{h_0} &= \frac{\alpha_2}{h_2} + h_1 \Lambda \quad \Rightarrow \quad h_0 = \frac{\alpha_0 h_2}{\alpha_2 + h_1 h_2 \Lambda}, \\ h_3 &= h_0 + h_2.\end{aligned}$$

V tomto případě budeme postupovat analogicky dosazovací metodou. Obdržíme polynom čtvrtého stupně v h_2 , h_0 a h_3 opět získáme zpětnou substitucí. A rozdíl hladin je pak $\Delta = h_3 - h_2$, velikosti bubliny je h_1 .

Započtení teplotní roztažnosti rtuti

Myšlenka pro řešení této části je stejná jako v případech předešlých. Jediný rozdíl je v tom, že se změní velikost kapky rtuti dle vztahu

$$h_1 = \Gamma h_1^0,$$

kde opět horní index 0 značí klidovou délku a $\Gamma = 1 + \alpha\Delta T$ je relativní změna délky rtuti. Dále budeme muset zavést parametr L , jenž označuje celkovou délku trubice. Podmínka pro neměnnost délky trubice a rtuti v ní se změní na

$$L - (h_0^0 + h_2^0 + h_3^0) = (L - (h_0 + h_2 + h_3))\Gamma.$$

Dále bude postup řešení stejný. Musíme akorát dát pozor na to, že se hustota rtuti sníží v poměru odpovídajícím objemové roztažnosti, a proto se změní též hodnota konstanty Λ .

Započtení teplotní roztažnosti skla

Pokud bychom chtěli započíst též teplotní roztažnost skla, postup bude naprosto stejný jako při započtení pouze teplotní roztažnosti rtuti, akorát budeme uvažovat Γ' . Nejdříve uvažujme, že má rtuť stejnou roztažnost jako sklo, potom se celá aparatura pouze transformuje podobnostní transformací a výsledek bude stejný. Pokud bude teplotní roztažnost rtuti jiná, můžeme nechat rtuť roztáhnout „nadvakrát“ – nejdříve stejně jako sklo a pak ten zbytek, což je opět ekvivalentní případu, kdy se zanedbá roztažnost skla, pouze nakonec uvažovaná roztažnost rtuti musí být jiná než tabulková.

Úloha II.P ... gravitace si žádá větší slovo

Co kdyby se „přes noc“ změnila hodnota gravitační konstanty na dvojnásobek a přitom by zůstaly zachovány ostatní fyzikální konstanty na původních hodnotách? A co kdyby se zvětšila stokrát? Rozepište se o různých aspektech – zejména o životě na Zemi a drahách vesmírných objektů.

Základnom riešenia bolo uvedomiť si, kde všade (v ktorých javoch) sa objavuje gravitačná konštanta G , či už priamo alebo nepriamo. Napríklad v gravitačnom zákone sa vyskytuje priamo, kde

$$|\mathbf{F}_G| = G \frac{M_1 M_2}{r_{21}^2}$$

a v rovniciach pre šikmý vrh je nepriamo zahrnutá v gravitačnom zrýchlení g , kde

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0,x}t, \\ y &= y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned}$$

kde

$$g = \frac{GM_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2}.$$

Skôr než začneme rozoberať konkrétne prípady treba povedať ešte dve veci. Javy, ktoré sme tu uviedli, zďaleka nebudú všetky. Pôjde o najvýznamnejšie, ktoré nás napadli. Druhá vec, v pátraní súboru základných konštánt, ktoré priamo určujú konštanty vo všetkých zákonoch známej fyziky, sa zúžil počet na zopár konštánt (medzi nimi je napríklad rýchlosť svetla, Planckova konštanta i gravitačná konštanta), medzi ktorými sa zatiaľ nepodarila nájsť previazanosť, čo však nezvylučuje, žeby sa časom mohla nájsť. Budeme predpokladať, že sú nezávislé.

Uvažujme zmenu gravitačnej konštanty k -násobkom

$$G' = kG,$$

kde G je pôvodná gravitačná konštanta, G' je nová gravitačná konštanta a k je bezrozmerné číslo.

Prvá zjavná vec, ktorá zo zmenou G prichádza, je zmena gravitácie a už spomínaný šikmý vrh na povrchu Zeme. Zo vzťahu pre gravitačné zrýchlenie dostaneme, že sa k -násobne zväčší

$$g' = \frac{G' M_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2} = \frac{kGM_{\text{Zem}}}{R_{\text{Zem}}^2} = kg.$$

Predstavme si malý kanón, ktorý strieľa gule priamo nad seba (vojensky neúčinný kanón). Deň pred zmenou letela guľa do výšky h a celý pád jej trval čas t . Keď riešime tento jednoduchý problém, tak dostaneme v závislosti od počiatkových podmienok vzťahy

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad t = \frac{2v_0}{g}.$$

Na druhý deň nastala zmena konštanty. Síce kanón dodal guľi rovnakú kinetickú energiu (a tým pádom i hybnosť a rýchlosť), ale namerali sme výšku h' a čas t'

$$h' = \frac{v_0^2}{2g'} = \frac{h}{k}, \quad t' = \frac{2v_0}{g'} = \frac{t}{k}.$$

Pri šikmom vrhu kanónom je maximálny dostrel dosiahnutý pod uhlom 45° a dostrel d je

$$d = \frac{v_0^2}{g}.$$

Asi už nikoho neprekvapí, že po zmene konštanty bude nový dostrel d' k -násobne kratší

$$d' = \frac{v_0^2}{g'} = \frac{d}{k}.$$

Tak vidíme, že pri hodoch sa k -násobne skrátia časy hodov, maximálne výšky i dostrely pod konštantným uhlom.

Zábavnejšie to však je v prípade vesmírnych obežníc, a to či už sa týka nášho Mesiaca alebo planét Slnčnej sústavy. Vo všeobecnosti podľa 1. Keplerovho zákona sa objekty v radiálnom gravitačnom poli pohybujú po kuželosečkách. Pohyb po kružniciach je iba jeden špeciálny prípad rýchlosti a vzdialenosti od Slnka

a prakticky nedosiahnuteľný, keďže zo všetkých možných rýchlostí tomu zodpovedá práve jediná hodnota rýchlosti. Pohyby planét sú síce približne kružnicové, ale fakticky ide o elipsy s malou výstrednosťou/excentricitou (sploštenosťou dráhy). Pre jednoduchosť však môžeme predpokladať pred zmenou gravitačnej konštanty pohyb planét po kružniciach. Pred zmenu je potom vzťah medzi rýchlosťou planéty v_1 a vzdialenosťou od Slnka r_1 (z rovnosti gravitačnej a dostredivej sily)

$$v_1^2 = \frac{GM_S}{r_1}.$$

Po zmene gravitačnej konštanty majú všetky planéty pôvodné rýchlosti (to znamená rovnaká veľkosť i smer = kolmé na spojnicu so Slnkom) a v novom poli sa budú pohybovať všeobecne po kuželosečkách. Ak sa gravitačná konštantka zväčší, začne na ne pôsobiť väčšia dostredivá sila, ako je potrebná na udržanie na kruhovej dráhe, a preto sa budú pohybovať po elipsách. Jeden vrchol (afélium) bude v mieste, kde sa nachádzali, keď nastala zmena konštanty (lebo rýchlosť je kolmá na spojnicu so Slnkom iba vo vrcholoch elipsy a od tohto bodu sa planéty pohybujú bližšie k Slnku). Je jasné, že potom druhý vrchol (perihélium) je najbližšia vzdialenosť, na ktorú sa dostali k Slnku. Zo zákona zachovania momentu hybnosti a energie vieme túto vzdialenosť vypočítať

$$mv_1r_1 = mv_kr_k,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{G'M_Sm}{r_1} = \frac{mv_k^2}{2} - \frac{G'M_Sm}{r_k}.$$

Po dosadení dostaneme takúto kvadratickú rovnicu

$$\frac{r_k^2}{r_1^2}(2k-1) + \frac{r_k}{r_1}(-2k) + 1 = 0.$$

Okrem afélia dostávame aj druhé riešenie

$$r_k = \frac{r_1}{2k-1}.$$

Teraz na základe tohto výsledku môžeme povedať tieto skutočnosti. Ak by klesla gravitačná konštantka na viac ako polovicu ($0 < k < 0,5$), tak všetky planéty budú mať dostatočnú rýchlosť na odlet od Slnka. V tabuľke 1 je vidno pre rôzne k rôzne najmenšie vzdialenosti planét od Slnka.

Najskôr si budú v dráhe prekrývať susedné planéty. Pri zvyšovaní už pri $k = 1,19$ nastáva prekryv možných oblastí stretnutia medzi Zemou a Venušou. Pre $k = 2$ sa jedine neprekrývajú dráhy Jupitera a Marsu. O zábavu sa postará pásma planétok, ktoré je pekne rozložené medzi Marsom a Jupiterom a ktoré bude mať perihélium približne 0,6 AU. To znamená, že by sme sa mohli pripraviť na deštruktívnu vesmírnu prestrelku. Pri eliptických dráhach sa pohybujú planéty v podstatne väčšom rozsahu vzdialeností od Slnka, čím sa podstatne zvýši vplyv vzájomnej gravitačnej interakcie planét. Takže by sme mohli byť skôr, či neskôr svedkom zrážky planét alebo vyhodenia planéty zo Slnčnej sústavy niektorou z väčších planét. Tak či

planéta	Merkúr	Venuša	Zem	Mars	Jupiter	Saturn	Urán
r_1 [AU]	0,39	0,72	1,0	1,52	5,20	9,54	19,18
r_2 [AU]	0,13	0,24	0,33	0,51	1,73	3,18	6,39
r_{100} [AU]	0,002	0,004	0,005	0,008	0,026	0,048	0,096

Tabulka 1: Najmenšie vzdialenosti planét od Slnka pre rôzne k .

onak by to boli pre Zem časy nepekné (pekelné alebo mrazivé). Pri pôvodnej gravitačnej konštante je polomer Slnka je 0,0046 AU. Zvýšením gravitačnej konštanty sa polomer Slnka zmenší, ale stále bude mať Slnko so svojou pre Zem nebezpečnou atmosférou rozmer rádovo tisícky astronomickej jednotky. Pre $k = 100$ už je jasné, že planéty Merkúr, Venuša a Zem budú míňať Slnko v tesnej blízkosti alebo narazia na jeho povrch. V perihéliu by sa Zem usmažila pri teplote cca 3700 °C (už by sme sa nemohli sťažovať na slabé leto), deň by trval 18 hodín a noc 6 hodín. Pri takej teplote by bola Zem úplne roztopená (až na diamanty a grafit, ktoré by čoskoro zhoreli vo vzduchu) a bola by to lietajúca kvapka magmy (vhodnejší výraz kvapa magmy). Kolízia s inými planétami by bola otázka času.

Dalším javom, ktorý by gravitačná konštanta skomplikovala život na zemi sú kapilárne javy. Výška h , do ktorej vystúpi kvapalina v kapiláre, je

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r\rho g},$$

kde σ je povrchové napätie, α je styčný uhol, r je polomer kapiláry, ρ je hustota kvapaliny a g je gravitačné zrýchlenie. Čiastočne funguje transport vody v pôde, a potom i v úzkych cievnych zväzkoch, na základe kapilarity, čím sa zabezpečuje transport látok. Zmenou gravitačnej konštanty sa zníži výška vztlínania na

$$h' = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r\rho g'} = \frac{h}{k}.$$

Tým sa značne skomplikuje transport látok najmä vysokým rastlinám, stromom.

Keďže aspektov, kde sa to odrazí, je skutočne veľa, uvedieme iba zopár príkladov bez podrobnejšej analýzy.

- Zmenou gravitačnej konštanty bude vzduch priťahovaný silnejšie, čím sa zvýši hustota a tlak vzduchu pri povrchu Zeme.
- Aby mohla byť voda v potrubí vytlačená do vyšších poschodí, potrebujeme na to podľa Bernoulliho rovnice tlak. Zmenou gravitačnej konštanty potrebujeme dodať vode väčšiu potenciálnu energiu, teda budeme potrebovať väčší tlak, ktorý by vykonával prácu.
- Stavby sú síce navrhnuté tak, aby vydržali viac ako maximálnu záťaž (takže $k = 2$ by asi prežili), ale pri určitej hranici sa prekročí medza pevnosti materiálu a stavby sa zrúti (budovy, mosty, ...).

Úloha III.1 . . . konjunkce

Oblíbeným tématem proroků kosmických katastrof jsou konjunkce planet. Představte si, že je poledne a jedna taková konjunkce zrovna nastala. O kolik nejvíce procent můžete být lehčí, pokud uvažujeme, že Země je počátkem polopřímky, na které leží všechny velké planety a Slunce, vůči situaci bez ostatních planet a Slunce?

Hned ze začátku je třeba zmínit, že úloha nebude jen o pouhém dosažení do vzorečku, jak by to mohlo na první pohled vypadat. Naopak, budeme muset vynaložit trochu mentálního úsilí, abychom došli ke správnému výsledku a přitom bezděčně nahlédneme, jak se věci mají v případě slapového působení.⁹

Začněme rozbořem situace. Zadání nám říká, že v okamžiku konjunkce Země leží v počátku polopřímky, na které se nachází další planety a Slunce. Mohlo by nás zajímat, jak jsou tyto objekty na polopřímce uspořádány. Přirozeně, příroda nám nedovolí žádné psi kusy a zachováme-li tedy přirozené pořadí planet ve sluneční soustavě, zbývá nám akorát rozhodnout, jestli se Merkur a Venuše nachází mezi Sluncem a Zemí nebo až za Sluncem. Zde bychom si mohli říct, že v tom nám jednoznačně pomůže klausule ze zadání „o kolik *nejvíce* procent můžete být lehčí“. Ale zas tak jednoznačné to není, protože, jak dále uvidíme, naše zlehčení nezávisí na intenzitě gravitačního pole jako spíše na jejím gradientu (jinými slovy na tom, jak moc se intenzita mění se vzdáleností). Rovněž si ale povšimneme toho, že máme uvažovat pouze velké planety (Jupiter, Saturn, Uran a Neptun) a Merkur s Venuší tedy budeme nakonec stejně ignorovat.

Uvažujme nejdřív, že se Země (a my) nachází v obecném gravitačním poli se zrychlením \mathbf{a}_g ve směru polopřímky, na které leží planety. Zvolíme-li počátek jednorozměrných souřadnic orientovaných ve směru polopřímky šikovně ve středu Slunce a označíme-li r_z vzdálenost Země od Slunce, můžeme pak pro sílu působící na Zemi psát $\mathbf{F}_z = m_z \mathbf{a}_g(-r_z)$, kde m_z je hmotnost Země.

Nyní se na situaci podívejme z pozice pozorovatele na povrchu Země. Uvažujme, že situace nastala v pravé poledne, a, pro zjednodušení, na rovníku v den rovnodennosti, takže Slunce (a planety) máme v nadhlavníku. Za prvé je nutné si uvědomit, co vlastně počítáme, tedy co znamená to „zlehčení“. Určitě to neznamená změnu naší setrvačné ani gravitační hmotnosti, které jsou v rámci klasické fyziky konstantní ve všech vztažných soustavách. Definujeme-li si ale naši hmotnost jako to, co naměříme na osobních vahách, pak už má smysl se o nějakém zlehčení bavit. Osobní váhy totiž nejsou nic jiného než sofistikovaný siloměr, který měří tlakovou sílu, kterou působíme na podložku. O co nám tedy půjde je relativní změna této síly mezi jednotlivými případy (konjunkce a izolovaná Země bez Slunce a planet).

Dále je nutné si uvědomit, že soustava našeho pozorovatele není inerciální. Jednak proto, že Země rotuje kolem své osy, a taky proto, že v případě konjunkce se díky silovému působení ostatních objektů pohybuje se zrychlením o velikosti $a_g(-r_z)$ směrem ke Slunci a k planetám (ať už je zrychlení lineární nebo do-

⁹To můžeme obecně charakterizovat jako silové působení na objekt v důsledku přítomnosti nehomogenního silového pole, které má často deformační účinky.

středivé, je to jedno). Působí zde tedy řada fiktivních sil, což se nám promítne do pohybové rovnice našeho pozorovatele v soustavě spojené s jeho pozorovacím místem. Dále také víme, že v této soustavě je pozorovatel v klidu, tedy výslednice sil na něho působících je nulový vektor, a dostáváme následující podmínku pro velikosti sil

$$R + ma_g(-r_z + R_z) + F_o - m \frac{Gm_z}{R_z^2} - F_s = 0,$$

kde m je hmotnost pozorovatele-proroka, R je velikost reakce podložky (ta nás velice zajímá, neboť je rovna velikosti tlakové síly, kterou působíme na podložku, viz výše), R_z je poloměr Země, $a_g(-r_z + R_z)$ je velikost gravitačního zrychlení způsobeného planetami a Sluncem (všimněme si, že se liší od hodnoty pro střed Země, což bude klíčové), $F_o = m\omega^2 R_z$ je velikost odstředivé síly způsobené rotací Země úhlovou rychlostí ω , G je Newtonova gravitační konstanta a, konečně, F_s je velikost setrvačné síly způsobené zrychlující Zemí se zrychlením $a_g(-r_z)$, takže $F_s = ma_g(-r_z)$. Přesuneme-li pak Zemí do velké vzdálenosti ode všech planet a Slunce (ale ponecháme-li ji rotovat kolem vlastní osy), odpadnou nám členy $ma_g(-r_z + R_z)$ a F_s a pro novou velikost reakce R_0 můžeme psát rovnici

$$R_0 + F_o - m \frac{Gm_z}{R_z^2} = 0.$$

Označíme-li hledanou relativní změnu reakce (a tedy i tlakové síly na kryt vah) $\chi = (R - R_0)/R_0$ ($\chi < 0$ pokud se jedná o zlehčení, $\chi > 0$ pokud o ztěžknutí), můžeme psát

$$\chi = \frac{ma_g(-r_z) - ma_g(-r_z + R_z)}{m \frac{GM_z}{R_z^2} - F_o} = \frac{a_g(-r_z) - a_g(-r_z + R_z)}{Gm_z - \omega^2 R_z^3} R_z^2.$$

Jak jsme již avizovali, tato relativní změna závisí na rozdílu gravitačního zrychlení od Slunce a planet mezi povrchem a středem Země, tedy na tom, jak rychle se zrychlení mění se vzdáleností.

Poslední, co musíme udělat, je explicitně vyjádřit $a_g(-r_z) - a_g(-r_z + R_z)$, což už bude to slibované dosazení do vzorečku. Užijeme-li Newtonova zákona všeobecné gravitace, máme pro $a_g(-r_z)$ a $a_g(-r_z + R_z)$ vztahy

$$a_g(-r_z) = G \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(r_z + r_j)^2}, \quad a_g(-r_z + R_z) = G \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(r_z - R_z + r_j)^2},$$

kde indexy 1 až 5 značí veličiny příslušející po řadě Slunci, Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu (r_j jsou vzdálenosti objektů od Slunce, m_j jsou jejich hmotnosti – r_1 je tedy zřejmě nula, neboť se jedná o vzdálenost Slunce od Slunce). Kdybychom se nestarali o eleganci našeho výsledku, mohli bychom teď klidně vzít číselné hodnoty všech veličin a dosadit. Dosazování by to ale bylo úmorné, tak si to nejdříve trochu usnadníme. Všimněme si totiž, že $R_z \ll r_j$ pro všechny možné indexy j , které jsou k máni, a tedy, že $R_z/r_j \ll 1$. Nic nám tedy nebrání, abychom

ve velkém nasadili aproximaci $(1+x)^r \approx 1+rx$ pro $x, r \in \mathbb{R} : x \ll 1$. Povytkáme jmenovatele zlomků a dostaneme

$$a_g(-r_z + R_z) \approx G \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(r_z + r_j)^2} \left(1 + 2 \frac{R_z}{r_z + r_j} \right),$$

čímž nahlédneme, že po odečtení od $a_g(-r_z)$ se nám vše náramně zjednoduší na

$$a_g(-r_z) - a_g(-r_z + R_z) \approx -2GR_z \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(r_z + r_j)^3},$$

a tedy konečně

$$\chi \approx \frac{-2GR_z^3}{Gm_z - \omega^2 R_z^3} \sum_{j=1}^5 \frac{m_j}{(r_z + r_j)^3}.$$

Tot náš obecný výsledek. Vidíme, že zřejmě $\chi < 0$ a jde tedy opravdu o zlehčení, neboť pokud by byl jmenovatel rovněž záporný, tak by důsledky tohoto faktu byly zřejmě daleko destruktivnější než prorokovaná konjunkce. Dále upoutejme naši pozornost na třetí mocniny ve jmenovatelích – to nám říká, že zlehčení závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti planet a Slunce od nás, což jsme již prorokovali, když jsme tvrdili, že χ bude záviset na gradientu pole. To je totiž úměrné $1/r^2$ vzdálenosti od gravitujícího objektu a ti pokročilejší z vás už ví, že derivováním této závislosti opravdu dostaneme úměru $1/r^3$.

Důležitou lekcí tedy je, že naše zlehčení nezávisí tolik přímo na intenzitě rušícího gravitačního pole planet jako spíše na míře jeho nehomogenity, čímž se dostáváme ke slapovému působení, které jsme zmínili na začátku. V obecném případě pak vždy platí, že jeho intenzita je vždy úměrná gradientu daného pole, což nás ve třech rozměrech přivádí ke studiu tenzorů. Jako cvičení si dovolíme čtenáři přenechat důkaz možná poněkud překvapivého tvrzení, že uvažíme-li situaci pro stejné podmínky, akorát o půlnoci místo v poledne, dostaneme opět *zlehčení*, které bude přibližně stejné, jako to, co jsme právě spočetli. A pokud bychom chtěli být v našich výpočtech naopak ještě přesnější, je třeba zahrnout efekt způsobený nebodovostí Země, což což se projeví efektivní změnou její hmotnosti v Newtonově vztahu pro gravitační sílu, kterou na ní Slunce působí. Ukazuje se, že tento efekt není až zas tak zanedbatelný, jak by se mohlo zdát, řádově odpovídá zlehčení, které je způsobené Jupiterem a je větší než zlehčení způsobené ostatními planetami. To nás ale nakonec stejně příliš netrápí.

Abychom totiž nezapomněli, zajímá nás rovněž číselná hodnota χ . Ještě jednou a naposledy si ušetříme čas a všimneme si, že nejtěžší planeta Jupiter je skoro přesně tisíckrát lehčí než Slunce. Také je od nás v dané konfiguraci asi šestkrát dále než Slunce (ostatní planety jsou ještě lehčí a ještě vzdálenější). A jelikož výsledný efekt závisí na mínus třetí mocnině vzdálenosti, bude zlehčení způsobené Jupiterem řádově 10^5 krát menší než zlehčení způsobené Sluncem. Vliv Jupiteru a všech planet lze tedy naprosto bezpečně ignorovat. A konečně, snadno ověříme,

že relativní chyba způsobená zanedbáním korekce na odstředivou sílu způsobenou zemskou rotací je řádu 10^{-3} , a tak řekneme, že nám příliš nevadí. Tím se dostáváme k opravdu finálnímu a krásnému vztahu

$$\chi \approx -2 \frac{m_{\text{sol}}}{m_z} \frac{R_z^3}{r_z^3},$$

který po dosazení dává $\chi \approx -5 \cdot 10^{-8}$, a my tedy budeme lehčí řádově o 10^{-6} procent. Jelikož jsme ale oprávněně vymazali vliv ostatních planet, musíme se smířit s tím, že k této katastrofě dochází každou rovnodennost (a v menší míře de facto každý den).

Úloha III.2 ... padni komu padni

Pustíme z klidu z ruky kuličku o průměru r ze střechy dolů. Předpokládejme, že můžeme zanedbat odpor vzduchu. Jaký se nám bude jevit poloměr této kuličky v závislosti na čase? Předpokládejme, že se na kuličku díváme přímo ze shora a že v okamžiku upuštění kuličky byla x_0 pod našima očima.

Kulička se bude pohybovat s konstantním zrychlením směrem dolů. Závislost vzdálenosti kuličky od očí na čase můžeme vyjádřit jako

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}gt^2,$$

kde g je tíhové zrychlení.

Dále se zamysleme nad tím, jak se nám jeví průměr kuličky. Kuličku vidíme pod úhlem φ . Je-li $r \ll x_0$, můžeme si místo kuličky představit kruh o stejném poloměru a psát

$$\text{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{r}{2}}{x(t)}.$$

Díváme-li se stále na vzdalující se kuličku (tedy zmenšuje-li se úhel φ), můžeme buď poznat, že se vzdaluje, nebo se nám může zdát, že je stále na místě (tedy stále vzdálená x_0 od našeho oka) a její průměr se zmenšuje, což je právě situace, kterou řešíme. Označíme zdánlivý poloměr kuličky r_z (tedy takový poloměr, jaký by měla kulička ve vzdálenosti x_0 , aby se nám jevila stejně velká jako kulička o poloměru r vzdálená x). Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{r}{x(t)} = \frac{r_z(t)}{x_0}$$

a po dosazení vztahu pro vzdálenost můžeme vyjádřit

$$r_z(t) = \frac{x_0}{x(t)}r = \frac{x_0}{x_0 + \frac{1}{2}gt^2}r.$$

Úloha III.3 . . . upečené brzdy

Jakou rychlostí máme jet autem z kopce, abychom co nejvíce zahřivali brzdy? Uvažujte, že rozdíl teploty vzduchu a teploty brzd je úměrný brzdnému výkonu.

Začneme fyzikou celej situácie. Auto, spúšťajúce sa z kopca, je urýchľované zložkou gravitačnej sily o veľkosti $F_g = mg \sin \alpha$, kde klasicky značíme hmotnosť, gravitačné zrýchlenie a uhol sklonu kopca. Na auto pôsobia dve brzdné sily, odporová a trecia od pneumatík. Budeme predpokladať, že odporová sila je úmerná druhej mocnine rýchlosti, teda $F_{\text{odp}} = kv^2$. Brzdnú silu od jednej pneumatiky označíme F_p . Ak auto nezrýchľuje, sú sily v smere pohybu v rovnováhe, čo v našom prípade znamená

$$\begin{aligned} F_g &= F_{\text{odp}} + 4F_p, \\ mg \sin \alpha &= kv^2 + 4F_p. \end{aligned}$$

Pozrime sa teraz na pneumatiku. Tá neprešmykuje a pri konštantnej rýchlosti je moment sily, ktorý na ňu pôsobí, nulový (inak by sa jej uhlová rýchlosť zvyšovala). Brzdenie si môžeme jednoducho predstaviť ako silu T , ktorá pôsobí proti otáčaniu pneumatiky vo vzdialenosti a od stredu. Pre rovnosť momentov musí platiť

$$Ta = F_p r,$$

kde sme označili polomer pneumatiky ako r .

Tepelný výkon, ktorý sa bude uvoľňovať v mieste pôsobenia sily T , je jednoducho súčin sily T a rýchlosti, ktorou sa tento konkrétny bod pohybuje (tu si stačí spomenúť na známe $\Delta W = T\Delta s$ a predeliť zodpovedajúcim časovým úsekom).

Pripomínam, že samotná sila F_p tu kolesá nezohrieva, pretože pri neprešmykovaní sa nekoná žiadna práca.

Rýchlosť pohybu bodu vzdialeného a od stredu pneumatiky vypočítame z uhlovej rýchlosti, ktorá je rovná v/r . Celkový výkon ohrievajúci jednu pneumatiku je teda

$$P = Ta \frac{v}{r} = F_p v,$$

kde sme pri druhej rovnosti použili vzťah na rovnosť momentov síl. Vidíme, že nám vyšiel rozumný záver, a to že brzdný výkon nezávisí od toho, kde je konkrétne umiestnený brzdný kotúč a platnička.

Silu F_p sme už ale dali do súvisu z rýchlosťou, takže môžeme vyjadriť výkon ako funkciu rýchlosti

$$P(v) = F_p(v)v = \frac{mg \sin \alpha - kv^2}{4} v.$$

Pri ustálenej teplote práve tento výkon uniká a vieme, že unikajúci výkon je priamo úmerný rozdielu teploty kolesa a okolia Δt . Túto úmeru vyjadríme vzťahom $P = K\Delta t$ a dosadíme, aby sme získali teplotu kolesa v závislosti na rýchlosti auta.

$$\Delta t(v) = \frac{mg \sin \alpha - kv^2}{4K} v.$$

Našou, teraz už len matematickou, úlohou je nájsť maximum tejto funkcie.

Vidíme, že táto funkcia je nulová v nule a v bodoch

$$\pm v_0 = \pm \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k}}.$$

kde pre nás zaujímavá kladná hodnota znamená, že auto nebrzdí vôbec a gravitačná sila je plne kompenzovaná odporom vzduchu. Medzi nulou a v_0 je to kladná funkcia a my hľadáme maximum práve tu. Hľadanie maxima funkcie je ale už dávno vyriešený problém a väčšine z vás by malo byť jasné, ako na to. Z funkcie $\Delta t(v)$ vyrobíme jej *deriváciu*. Je to opäť funkcia rýchlosti a jej hodnota hovorí, ako rýchlo *rastie* funkcia $\Delta t(v)$. Ak je táto hodnota pre nejakú konkrétnu rýchlosť veľká, vieme, že $\Delta t(v)$ je pre túto rýchlosť strmá. Ak je táto hodnota záporná, tak $\Delta t(v)$ klesá. Nás zaujíma špeciálny prípad, keď je derivácia rovná nule, čo znamená, že funkcia ani nerastie a ani neklesá. Toto je práve prípad maxim a minim funkcií.¹⁰

Za deriváciami stojí matematická teória, nám stačí vedieť, ako sa používajú.¹¹ Tu derivujeme len polynóm, deriváciu označíme čiarkou

$$\Delta t'(v) = \frac{mg \sin \alpha}{4K} - 3 \frac{k}{4K} v^2,$$

podľa pravidla $(v^n)' = nv^{n-1}$. Po položení derivácie rovnej nule dostaneme maximálne Δt pre

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{3k}} = \frac{\sqrt{3}}{3} v_0,$$

kde sme zahodili zápornú hodnotu (už pri zostavovaní pohybovej rovnice sme totiž použili predpoklad, že odporová sila vzduchu pôsobí proti gravitácii, čo by pre záporné rýchlosti neplatilo). Vidíme teda, že pre maximálny brzdný výkon musíme ísť asi 60% z maximálnej možnej rýchlosti pri vypnutom motore.

Ak chceme dosadiť, treba ešte odhadnúť konštantu k . Zo vzťahu na odporovú silu ale máme

$$k = \frac{1}{2} C_{\rho} S \approx 1 \text{ N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2,$$

kde sme odhadli C približne 1, plochu približne 2 m^2 a hustotu vzduchu $1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Dosadíme ešte približnú hodnotu hmotnosti 1000 kg a sklon 10°

$$v_{\max} \approx 24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}.$$

Treba ešte povedať, že pohon kolies sme neuvažovali. S ním by sme len zvýšili moment na kolesá a súčasne brzdnú silu T , čo by sme efektívne mohli chápať ako jazdu po strmšom svahu.

¹⁰Predstavte si, aká strmá je funkcia práve vo svojom maxime, podobne ako keď vyjdete na vrchol kopca, má tam nulovú strmú.

¹¹Odkazujem na dôkladné preštudovanie napríklad nášho seriálu v XVI. ročníku alebo na študijný text FO.

Poznámky

Možností ako hľadať minimum funkcie je skutočne viacero. Jeden trik je namiesto rýchlosti v vyjadriť výslednú teplotu cez pomer v/v_0 . Takto dostaneme

$$\Delta t \propto \frac{v}{v_0} \left(1 - \frac{v^2}{v_0^2} \right),$$

odkiaľ je už jednoduchšie získať $v_{\max} = v_0/\sqrt{3}$.

Pekné riešenie, od Kuby Vošmery, je požadovať, aby rovnica

$$\Delta t = C,$$

mala práve dve riešenia, pre nejakú konštantu C . Pri pohľade na graf je zrejmé, že táto rovnica má dve riešenia práve ak je jedno z týchto riešení extrém našej závislosti $\Delta t(v)$. Toto riešenie musí dokonca byť aj dvojnásobným koreňom, práve kvôli tomu, že je to extrém dotýkajúci sa priamky (pre znalejších, aj derivácia je v tomto bode nulová, čo je ekvivalentné podmienke na viacnásobný koreň). Z Vietových vzťahov potom dostaneme existenciu dvojnásobného koreňa vtedy, keď má tento dvojnásobný koreň hodnotu

$$\frac{v}{v_0} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

odkiaľ len vyberieme naše kladné riešenie.

Úloha III.4 . . . nadzvuková alebo podzvuková?

Uvažujte bombu padajúcu voľným pádom svisle dolú na cieľ. Po celou dobu pohybu, ktorý začína z klidu, vydáva vlivem trení o vzduch zvuk, ktorý sa šíri rýchlosťou $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaká je maximálna možná rýchlosť dopadu, aby ti, na ktoré bomba dopadne, ji ešte za živa slyšeli?

Ze zadání víme, že bomba padá voľným pádom, tj. bez trení o vzduch, i když právě tímto nulovým trením zvuk vydává, což doufáme, že vás nevyvedlo moc z míry a že jste se s plnou vervou vrhli do řešení.

Protože bomba padá voľným pádom, můžeme pro polohu zdroje zvuku psát

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde H je počáteční výška bomby, g je tíhové zrychlení a t je čas od začátku pádu. Nyní určíme čas T , ve kterém doputuje na zem zvuk vydaný v čase t . Ten musí překonat vzdálenost $y(t)$ určenou dle vztahu výše, tj. pro čas T platí

$$T(t) = t + \frac{y(t)}{c}.$$

Nyní si ukážeme malý trik, který se ve fyzice velmi často používá, protože zjednodušuje zápis. Položíme $c = 1$, což vypadá divně, protože rychlost zvuku není

bezrozměrná. Ale nejde o problém, protože dostaneme-li obecný výsledek, tak není problém do něj dopsat na správná místa násobky c a to tak, abychom sčítali vždy veličiny stejného rozměru. Jiné vysvětlení je, že dále nebudeme vzdálenosti měřit v metrech, ale v sekundách, kde převodní konstanta bude právě rychlost zvuku c .

Proto můžeme psát

$$T(t) = H + t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Dále víme, že bomba dopadne v čase T_0 , pro který platí

$$T_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Aby ji ti, na které bomba dopadne, slyšeli ještě za živa, musí existovat čas $t_0 \in (0, T_0)$ určující okamžik vydání zvuku takový, aby $T(t_0) < T_0$.

Nakreslíme si proto graf 5 závislosti T na t , tedy závislost doby slyšení signálu na době vyslání signálu, a také do tohoto grafu zaneseme přímkou $T = t$. Je zřejmé, že na průsečíku $T = T(t)$ a $T = t$ dojde k dopadu bomby na zem, protože vzdálenost zdroje od pozorovatele $\Delta = c(T - t)$ je nulová.

Nyní se podíváme, co značí přímkou $T = \text{konst}$, resp. její průsečíky s $T(t)$. Vlastně se tímto ptáme: V jakém okamžiku byl vydán zvuk, který nyní slyšíme? Samozřejmě pro tuto interpretaci se musíme omezit na $t < T$, protože ty ostatní zvukové vlny nebyly ještě v daný moment vydány. Jak tohoto využít při řešení úlohy? Jednoduše. Pokud bude existovat průsečík paraboly s přímkou $T = \text{konst}$ takový, aby $t \in (0, T)$, tak bombu uslyšíme. Z obrázku 5 je vidět, že pro časy $T \in (H, T_0)$ existuje čas t vydání zvuku, a proto v těchto časech bude bomba slyšet. Dále je též vidět, že aby byly budoucí oběti varovány, musí platit

$$H < T(T_0),$$

do čehož můžeme dosadit ze vztahů výše a dostáváme

$$H < H + T_0 - \frac{1}{2}gT_0^2 = H + T_0 - H.$$

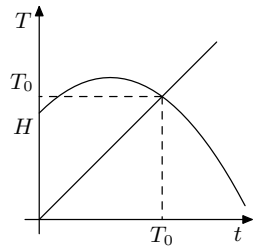
Nyní se již opět odvrátíme od označení $c = 1$ a nerovnici výše přepíšeme

$$H < cT_0 = c\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Nyní uvážíme, že pro rychlost dopadu platí $v_D = \sqrt{2Hg}$, a jednoduchými úpravami dostáváme

$$v_D < 2c,$$

což je velmi zajímavý výsledek, protože bombu můžeme slyšet před dopadem, i když dopadá nadzvukovou rychlostí.



Obr. 5: Závislost okamžiku uslyšení signálu na okamžiku jeho vyslání

Alternativní způsob řešení

Stačilo dát do rovnosti dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu bomby a rovnoměrného pohybu zvuku vydaného na počátku pádu,

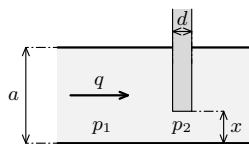
$$ct = \frac{v^2}{2g}, \quad v = gt \quad \Rightarrow \quad v = 2c,$$

a použít velmi pěkný argument z vašich řešení, proč zvuk vydaný na počátku dorazí na zem nejdříve: „Před dosažením rychlosti zvuku je rychlost bomby menší než rychlost zvuku, proto zvuková vlna vydaná v pozdějším čase dorazí na zem později. Po překročení rychlosti zvuku můžeme již vydávané zvukové vlny ignorovat, protože dorazí později než bomba.“

Úloha III.5 ... Gazprom

Na plynovodu na daleké Sibiři, kterým teče zkvalněný zemní plyn, došlo k havárii a bylo nutné jej uzavřít. Spočítejte, jakou práci musel vykonat Váňa Vasilijevič, který byl vyslán k zásobníku zavřít výborně promazaný deskový ventil na příslušné lince. Jakou sílu musel během tohoto aktu vynakládat (vyjádřete ji v závislosti na rozumně vybrané veličině)? Ventil si představte jako desku, která je postupně vsouvána ze strany napříč do potrubí. Vě velkém rezervoáru, který je na linku připojen, je tlak $p = 2 \text{ MPa}$, deskový ventil má tloušťku $d = 10 \text{ cm}$, potrubí má čtvercový průřez o straně $a = 1 \text{ m}$ a zkvalněný plyn o hustotě $\rho = 480 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ jím protéká s průtokem $q = 20 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$.

Začněme obrázkem. Na nákresu geometrie systému vidíme vodorovný řez potrubím, přičemž vyznačeny jsou veličiny ze zadání. Uvažme, že tlak v potrubí těsně před ventilem (p_1) odpovídá tlaku v rezervoáru (p). Průřezu potrubí přiřadíme označení $S_1 = a^2$ a průřezu ventilu $S_2 = ax$. Budeme chtít zjistit, jaký je tlak p_2 ve ventilu v závislosti na ploše pod ním, protože ten vyvolává tlakovou sílu $F = p_2 A$ ($A = da$ je plocha hrany ventilu), kterou musíme při zavírání překonat. Práci pak spočteme jako $\int F(x) dx$, kde x je vertikální rozměr volného prostoru ve ventilu (viz obrázek 6). O mezích integrace budeme mluvit později.



Obr. 6: Uspořádání situace s ventilem

K určení tlaku p_2 využijeme Bernoulliho rovnici. Protože vsouváme desku z boku, můžeme člen odpovídající tíhovému potenciálu z rovnice vypustit.

$$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2,$$

přičemž potřebujeme vědět, jaké rychlosti plynu jsou v potrubí a ve ventilu. Kapalný plyn budeme považovat za nestlačitelný.

Rychlosti spočítáme z rovnice kontinuity, kde výhodně použijeme hodnotu průtoku q známou ze zadání (obecně je totiž $q = Sv$),

$$S_1 v_1 = q = S_2 v_2,$$

z čehož vyplývá, že známe obě rychlosti – $v_1 = q/S_1 = q/a^2$ a $v_2 = q/S_2 = q/(ax)$ – za plochy jsme už dosadili jejich konkrétní velikosti spočtené ze zadaných parametrů.

Vyjádříme nyní tlak p_2 z Bernoulliho rovnice

$$p_2 = \frac{1}{2} \rho q^2 \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) + p_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho q^2}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} \right) + p_1.$$

Teď je dobrá chvíle zamyslet se nad tím, co nám tento vztah říká. Jediným nezávislým parametrem v něm je x , kratší hrana otevřené části potrubí. Na začátku zavírání ventilu je $x = a$, pročež člen se závorkou zmizí úplně a na píst působí tlaková síla vyvolaná tlakem p_2 . Když ventil budeme postupně zasouvat, x se bude zmenšovat, ale $1/x^2$ poroste, což znamená, že celý člen se závorkou bude mít záporné znaménko. Rychle proudící tekutina tedy snižuje tlak na ventil. Ale pro x jdoucí k nule $1/x^2$ roste nade všechny meze, a tudíž existuje taková pozice zasunutí ventilu x_0 , při které snížení tlaku vyrovná tlak v rezervoáru (p_1). Když bychom ventil zasouvali ještě hlouběji, následováním vzorce bychom došli k tomu, že tlak ve zkoumaném místě bude záporný. To se ovšem v potrubích neděje. Jev, ke kterému v takovýchto případech dochází, se nazývá *kavitace* a jde o vytvoření bublin nasycené páry kapaliny. To se stává v případě, kdy je v kapalině při dané teplotě tlak nižší než tenze par této kapaliny. Vzniknuvší bubliny potom při dopadu na stěny poškozují materiál potrubí. Co to znamená pro náš výpočet? Určeme nejdříve hodnotu x_0 (položíme hodnotu $p_2 = 0$)

$$x_0 = \sqrt{\frac{\rho a^2 q^2}{2p_1 a^4 + \rho q^2}},$$

což je pro naše data přibližně $x_0 = 0,21$ m. To znamená, že ke kavitaci začne docházet, když když ventil zavřeme přibližně do čtyř pětín.

Víme¹², že tlak nasycených par kapalného methanu se pohybuje od 15 kPa do 190 kPa. Tlak, který je v rezervoáru, je ovšem 10–100krát větší, zároveň nevíme, jak a kde se bubliny tvoří, a celý tento problém se týká jen pětiny dráhy, nahradíme tento zbytek nulou. Protože víme, že tlaková síla na píst působící proti směru jeho pohybu je $F(x) = adp_2(x)$, můžeme její průběh popsat jako

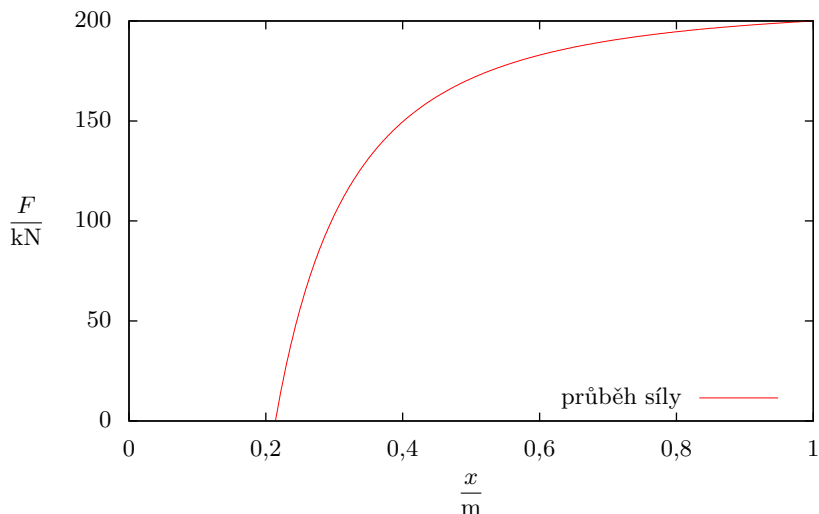
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0. \\ ad \left[\frac{1}{2} \frac{\rho q^2}{a^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x^2} \right) + p_1 \right], & x > x_0. \end{cases} \quad (6)$$

Pro konkrétní situaci vidíme průběh na obrázku 7.

Samotná velikost práce již je lehce spočitatelná z předpisu pro sílu (6). Je sice potřeba spočítat určitý integrál $\int F(x) dx$, ale k tomu s výhodou můžeme použít například volně dostupný Wolfram Alpha. Výsledek pak určíme ve tvaru

$$W = (AB + C)(a - x_0) + A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_0} \right),$$

¹²http://www.vscht.cz/uchi/e_tabulky/antoine.html



Obr. 7: Průběh síly působící na píst.

kde $A = dq^2/(2a)$, $B = 1/a^2$, $C = adp_1$ a x_0 známe z předchozích úvah. Numerická hodnota vykonané práce pak po dosazení hodnot ze zadání je $W \doteq 130$ kJ. Kdo neovládá Wolfram Alpha, může stejného údaje dosáhnout pomocí svého oblíbeného tabulkového procesoru nebo programovacího jazyka.

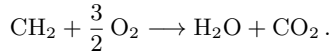
Since jsme dospěli k nějakému číselnému výsledku, nicméně nebude úplně správně. V základě jsme pro určení tlaku ve ventilu použili Bernoulliho rovnici, která ovšem platí pro místa na jedné proudnici. Také jsme mlčky předpokládali, že v celém průřezu je rychlost konstantní, což zřejmě neplatí. V takovémto (čtveratém) potrubí se těžko nebudou vyskytovat různé víry, které situaci ještě více zkomplikují, nehledě na to, že jsme zanedbali jevy, které nastanou potom, co začne docházet ke kavitaci. Nedá se tedy říct, že Váňa Vasilijevič pak všechnu energii získá zpátky snědením čtyř čtverečků mléčné čokolády, nicméně alespoň přibližný odhad nám to může poskytnout.

Úloha III.P ... protikonspirační

Zamyslete se nad tím, na kterých parametrech a jak může záviset délka kondenzační čáry za letadlem. Tyto parametry se pokuste odhadnout či vyhledat a určete možné délky čar. Na základě vašich úvah vyvrátte internetový mýtus o tzv. chemtrails, práškových letadlech, která na obyvatele sypou jedovaté látky.

V prvom rade si potrebujeme daný jav vysvetliť kvalitatívne. V motoroch lietadla je palivo spaľované v naháňanom vzduchu. Ako palivo sa používa často petrolej. Ide o zmes nasýtených uhľovodíkov (C_kH_{2k+2}) s kostrou tvorenou 12 až 15 uhlíkmi.

Pri takom počte uhlíkov v molekule môžeme povedať, že pomer uhlíkov a vodíkov je pre celú látku približne 1 : 2 (zastúpenie uhľovodíkov v petroleji nie je presné). Potom rovnica spaľovania vyzerá takto



Pri reakcii nám vzniká voda (vodná para). Horúci vzduch vychádzajúci z motora sa rozopne a od okolitého prostredia schladí. Pri takej nízkej teplote sa nadbytočná voda vyzerá vo forme zmrznutých kvapiek. Takto nám vznikne takzvaná kondenzančná stopa, ktorú za lietadlami pozorujeme.

Ale čo spôsobí to, že sa vyzerázaná ľadová hmla rozpynie? Ľad sa späť rozpustí vo vzduchu. Ale keďže sa nám voda z nasýteného vzduchu už vyzeráza, musia sa zmrznuté kvapôčky presunúť a rozpustiť v okolitom nenasýtenom vzduchu. Na kvapôčky pôsobí gravitačná sila a odporová sila okolia a po krátkom čase sa ich pohyb ustáli. Postupne kvapôčky prechádzajú do nižších vrstiev a rozpušťaajú sa v suchom vzduchu.

Tak a teraz nastáva moment, kedy by sme chceli odhadnúť kvantitatívne, aká dlhá je naša stopa za lietadlom. Lietadlo sa pohybuje vo výške $h = 9$ km. Tlak vzduchu v tejto výške je $p = 31$ kPa, teplota $t = -44^\circ\text{C}$, hustota vzduchu $\rho = 0,47 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a tlak nasýtených vodných pár pri tejto teplote (maximálna vlhkosť) $p_v = 8,6$ Pa.

Spotreba paliva lietadiel dopravných letov sa pohybuje v závislosti na obsadenosti letu a type lietadla v rozmedzí $10 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ až $20 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$. Zvolili sme preto ako približnú spotrebu paliva $Q = 15 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$. Uvažujme, že nás zaujíma, koľko paliva sa použilo na trase dĺžky l . Spotrebované palivo je $m = Ql$. Molárna hmotnosť jednej CH_2 jednotky je $M = 14 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. Látkové množstvo CH_2 jednotiek potom je $n = m/M$. Z rovnice vidíme, že rovnaké látkové množstvo vody v motoroch vzniklo. Na naše zmrznuté guľaté kvapky polomeru $r = 10^{-5}$ m, objemu $V_1 = 4/3\pi r^3$ a hmotnosti $m_1 = \rho_1 V_1$ (kde $\rho_1 = 915 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) pôsobí gravitačná sila $G = m_1 g$ (kde $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$) a odporová sila $F_o = 1/2 C \pi r^2 \rho v^2$ (kde $C = 0,45$ pre guľu). Pohyb kvapiek sa čoskoro ustáli. Z rovnováhy síl určíme rýchlosť klesania

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = \frac{1}{2} C \pi r^2 \rho v^2,$$

$$v = \sqrt{\frac{8r \rho_1 g}{3C \rho}}.$$

Teraz potrebujeme vymedziť objem vzduchu, kde sa voda rozpustila. Šírku môžeme odhadnúť vzdialenosťou motorov $d = 12$ m. Dĺžka daného úseku je l . Za čas t prešli kvapky výšku $h = vt$. A v danom objeme $V = dlh$ sa nám vytvorená voda látkového množstva n rozpustila. Použitím stavovej rovnice dostávame vzťah, z ktorého vyjadríme čas potrebný na rozpustenie.

$$p_v V = nRT,$$

$$p_v d l \sqrt{\frac{8r \rho_1 g}{3C \rho}} t = \frac{Ql}{M} RT,$$

$$t = \frac{QRT}{Mp_v d} \sqrt{\frac{3C \rho}{8r \rho_1 g}}.$$

Lietadlo ide rýchlosťou $u = 250 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, takže odhad dĺžky kondenzačnej čiary $s = ut$ pre naše zistené veličiny dáva

$$s = \frac{QRTu}{Mp_v d} \sqrt{\frac{3C \rho}{8r \rho_1 g}} \approx 4 \text{ km}.$$

Dostali sme pomerne rozumnú hodnotu. Platí však, že je tu veľa faktorov, ktoré môžu životnosť kondenzačnej stopy ovplyvniť. Napríklad už len vo výške 11 km je tlak nasýtených vodných pár 1 Pa, čo nám predĺži odhad na 35 km. Uvažovali sme zároveň, že vo vzduchu nie je žiadna vlhkosť, ale v skutočnosti nebude vlhkosť nulová, a preto môžu čiary žiť ešte dlhšie.¹³ Ďalej v našom prípade sme uvažovali, že sa pohyb zamrznutých kvapôčiek ihneď ustáli, čo ale nejaký čas trvá. To nám odhad predĺži. Neuvažovali sme bočný vietor, ktorý by nám pomohol častice distribuovať do väčšieho priestoru, kde by sa mohla čiara rozpustiť. To nám odhad skráti. Zamrznuté kvapôčky sa budú pri klesaní rozpúšťať vo vzduchu, takže sa budú zmenšovať a tým pádom spomalovať. To nám odhad zase predĺži. Keď unikajú z lietadla spaliny, tak sa okrem pohybu od lietadla budú aj rozširovať do strán, takže naša stopa bude širšia ako vzdialenosť motorov. To nám odhad zase skráti. A čo ak je náš odhad polomera kvapiiek nadhodnotený a kvapky sú menšie? To by znamenalo, že sa nám čiara predĺži. Takto by sme mohli nájsť ešte veľa efektov, ktoré nám akurát vravia, že náš odhad môžeme brať ako rádový. Má vôbec zmysel odhadovať, ako sa zmení náš odhad dĺžky čiary zahrnutím týchto efektov? Ani nie, keďže podmienky ako vlhkosť, výška letu, rýchlosť a smer vetra nám náš odhad veľmi ovplyvňujú. Môžeme teda povedať, že dĺžka kondenzačnej čiary je rádovo v kilometroch a vo väčších výškach sa predlžuje, vo väčšej vlhkosti sa predlžuje a pri väčšom bočnom vetre sa skraca.

Úloha IV.1 ... antieinsteinovská

Napište nám, jaký je váš nejoblíbenější fyzik/fyzička, kromě Einsteina. Co udělá-l/a? Proč je podle vás tak skvělý/á? Proč by měl/a být známý/á? Rozepište se o jeho/jejích objevech a životě.

Po světě chodí a chodilo mnoho vynikajících fyziků, takže vybrat z nich svého největšího oblíbence nemusí být snadný úkol. Alespoň pro mě to představovalo skoro horší dilema, než si vybírat zákusek v cukrárně. Nakonec jsem dospěla k tomu, že jak svým přínosem pro vědu, tak svým životem je mi sympatická Marie

¹³Pekne vidno na tejto fotografii, že čiary vydržia dlhšie vo vlhkejšej oblasti. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Contrails_over_Nova_Scotia.jpg

Curie-Sklodowská a že o Feynmanovi, Newtonovi a dalších se toho od vás ostatních doufejme dočtu až hanba, takže jsem s konečnou platností zůstala u této dámy.

Marie Curie-Sklodowská se narodila 7. listopadu 1867 v polské Varšavě, většinu života však strávila ve Francii, kde při studiích na Sorbonně poznala svého manžela Pierra Curie, se kterým se věnovala badatelské činnosti až do jeho smrti, po které s vědeckou prací dále pokračovala sama. Zemřela 4. července 1934 na důsledky ozáření.

Na jejím životopise je fascinující, že může být velmi hezky založen na větě: „Byla první ženou, která...“ Začneme poměrně zvolna výrokem, že byla první ženou, která složila přijímací zkoušky na fakultu fyziky a chemie zmiňované pařížské univerzity, což se pravděpodobně jednou některé poštědit muselo. Že se však nejednalo o náhodu dokázala v roce 1903, kdy jako první žena na světě získala doktorát z fyziky za práci na zkoumání tehdy relativně nedávno objeveného jevu radioaktivity. Vše korunovala o necelý rok později, když za tento výzkum spolu se svým manželem a Henri Becquerelem získala Nobelovu cenu za fyziku, a jelikož se jednalo o teprve třetí ročník udílení Nobelových cen, tak jistě nepochybujete o tom, že ani v tomto ji žádná jiná žena nepředběhla. V roce 1906 se stala první profesorkou Sorbonny, což byl ovšem bohužel důsledek tragické smrti jejího muže, po kterém se stala vedoucí katedry. Její poslední prvenství tohoto typu, které zde bude zmíněno, je to, že jako první a zatím stále jediná žena spočívá v pařížském Pantheonu.

Podíváme-li se na její přínosy na poli fyziky a chemie, pak základem je nepochybně právě radioaktivita. Její objev měl sice na svědomí Henri Becquerel v roce 1896, nicméně Marie Curie-Sklodowská se svým manželem určila její pravděpodobnou příčinu jako rozpad nestabilních atomových jader. Velké úsilí věnovala zkoumání rud uranu (některé vzorky odebrala i v Jáchymově). Její snaha najít vysvětlení toho, proč uran samotný poskytuje méně ionizujícího záření než některé jeho rudy, vedlo k objevu nových prvků, radia a polonia. Za objev a separaci radia získala druhou Nobelovu cenu, tentokrát za chemii v roce 1911, a dodnes je jediným člověkem, který dostal tuto cenu za fyziku i chemii. Také se zabývala možností léčby rakoviny pomocí ionizujícího záření, takže určitě i díky ní se metody založené na tomto principu dnes v lékařství úspěšně používají. Ač výše uvedené trochu svádí k tomu, abychom považovali Marii Curii-Sklodowskou za mimořádnou ženu, myslím, že mnohem lepší je brát ji jako zcela mimořádnou osobnost, která vědě zasvětila téměř celý svůj život.

Úloha IV.2 . . . vesmírná skleróza

Jaký je poměr objemu Země ku objemu Měsíce? Vypočítejte jej pouze ze znalosti, že poměr jejich hmotností je přibližně 81 a že intenzita gravitačního pole je na povrchu Země přibližně šestkrát vyšší než na povrchu Měsíce.

K povrchu Měsíce je náš testovací bod přitahován silou šestkrát menší než na Zemi. Uvědomíme si, jak se počítá intenzita gravitačního pole. Je to vlastně síla, která

působí na testovací těleso jednotkové hmotnosti, jinak řečeno

$$K = \frac{F_g}{m},$$

kde gravitační sílu F_g umíme spočítat ze známého vzorce

$$F_g = G \frac{mM}{R}.$$

Můžeme tedy napsat

$$G \frac{M_Z}{R_Z^2} = 6G \frac{M_M}{R_M^2}.$$

Dále se podíváme na druhou informaci, víme, že poměr hmotností je 81. Hmotnost vystupuje ve výše uvedeném vzorci, tak jej jenom přepíšeme

$$\left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^2 = \frac{M_Z}{6M_M} = \frac{81}{6}.$$

Teď si stačí uvědomit, že se jedná o koule a pokud známe poměr jejich poloměrů, stačí vyjádřit poloměr ze vzorce pro výpočet objemu koule, který je $V = 4\pi R^3/3$. Pokud si R vyjádříme a dosadíme do poměru, pak po vykrácení konstant můžeme napsat

$$\frac{V_Z}{V_M} = \left(\frac{R_Z}{R_M}\right)^3 = \left(\frac{81}{6}\right)^{\frac{3}{2}},$$

což je po dosazení přibližně 50 (přesněji 49,6).

Vypočítanou hodnotu poměru můžeme srovnat i s reálnými údaji. Reálný objem Měsíce je $2,1958 \cdot 10^{10} \text{ km}^3$, Země $1,0832 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$. Dáme-li tyto hodnoty do poměru, získáme výsledek 49,3. S naším výpočtem, který bral v úvahu pouze přibližné poměry jsme se příliš nesešli.

Úloha IV.3 . . . kačenka ve vaně

Na trajektu máme nezabrzdené auto, které stojí rovnoběžně s jeho osou. Trajekt se houpe harmonicky na vlnách, tj. $\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t)$. Maximální úhlová výchylka trajektu je Φ . Jak daleko od kraje můžeme zaparkovat auto, aby nám nemohlo spadnout do moře? Uvažujte, že maximální výchylka se pomalu zvětšuje z nuly na hodnotu Φ .

Najprv si popíšeme pohyb auta na trajekte. Můžeme považovať auto za hmotný bod. Keďže je nezabrzdené, pohybuje sa po palube trajektu bez trenia. Ako vyplýva zo zadania, uhol sklonu paluby φ (uhol medzi rovinou paluby a vodorovnou rovinou) závisí od času harmonicky, teda

$$\varphi(t) = \Phi \sin(\omega t),$$

kde Φ je maximálna uhlová výchylka trajektu a ω je uhlová frekvencia nakláňania.

Popisovať pohyb auta vzhľadom na more by bola iba komplikácia. Budeme preto popisovať pohyb auta v sústave spojenej s trajektom, kde sa auto pohybuje

iba na priamke. Na auto nám pôsobí *tiažová sila* \mathbf{G} (pôsobí šikmo, keďže je trajekt naklonený o uhol φ) a *normálová sila* (sila od podložky, má vertikálny smer). Nesmieme zabudnúť, že sústava spojená s trajektom nie je inerciálna, a preto nám v nej budú na auto pôsobiť aj zdanlivé, fiktívne, *zotrvačné sily* (odstredivá sila, Coriolisova sila a sila, v dôsledku uhlového zrýchlenia). Našťastie sú zotrvačné sily v našom prípade oproti tiažovej a normálovej sile zanedbateľné. Prečo? Ak by sa trajekt nakláňal prudko sem-tam, tak by boli zotrvačné sily badateľné a nahadzovalo by to s nami na palube. V tomto prípade nám postačí uvažovať nakláňanie trajektu na miernych vlnách. Pri búrlivom mori by sme neuvažovali, či nám vypadlo auto z trajektu, ale či sa nám trajekt nepotopil. Tým sa nám problém zjednodušil.

Tiažová sila bude mať vždy vertikálnu zložku, ktorú bude stále kompenzovať normálová sila (aby sa nám auto neprepadlo pod palubu). Preto nás bude zaujímať iba horizontálny pohyb, a teda horizontálna zložka tiažovej sily. Na auto pôsobí horizontálna sila

$$F_x = -G \sin(\varphi(t)) = -mg \sin(\varphi(t)).$$

Ako už bolo spomenuté, uvažujeme mierne vlny. To znamená, že uhol naklonenia trajektu φ je malý ($1 \text{ rad} \gg \varphi$), takže v našom prípade môžeme použiť aproximáciu sínusu ($\sin x \approx x$) a dostaneme

$$F_x = -mg\Phi \sin(\omega t).$$

Sila nám určuje zrýchlenie v danom smere

$$F_x = ma_x = -mg\Phi \sin(\omega t).$$

Vidíme, že táto rovnica nám niečo pripomína. Podobná závislosť zrýchlenia a_x od času je aj v prípade kmitov.

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -g\Phi \sin(\omega t).$$

Prvou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť rýchlosti od času

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{g\Phi}{\omega} \cos(\omega t) + v_0.$$

Výsledok si môžeme overiť spätnou deriváciou. Máme tu neznámu rýchlosť v_0 . Môžeme to interpretovať tak, že okrem kmitavého pohybu sa auto ešte rovnomerne pohybuje jedným smerom. V zadaní sa písalo, že uvažujeme, že sa maximálna uhlová výchylka trajektu pomaly zväčšovala z nuly na Φ . Na začiatku auto stálo v pokoji na palube. Nie je žiaden dôvod, prečo by sa malo auto začať rovnomerne pohybovať smerom dopredu, či dozadu, takže uvedená rýchlosť v_0 bude nulová (zo symetrie ☺).

Druhou separáciou premenných a integráciou dostaneme závislosť polohy od času

$$x = \frac{g\Phi}{\omega^2} \sin(\omega t) + x_0.$$

Z rovnakých dôvodov (ako v prípade rýchlosti) nie je žiaden dôvod, prečo by malo auto kmitať okolo iného miesta ako miesta, kde stálo na začiatku. Preto i vzdialenosť x_0 bude nulová. Auto bude vykonávať kmity s amplitúdou A

$$A = \frac{g\Phi}{\omega^2}$$

a uhlovou frekvenciou ω . Z toho vyplýva, že auto musíme dať od okraja ďalej, ako je vzdialenosť A , ak nechceme, aby nám spadlo do mora.

Musíme spomenúť, že uvedený vzťah nám vyšiel pre malé výchylky (aproximácia sínusu) a nízkou uhlovú frekvenciu (zanedbanie zotrvačných síl).

Úloha IV.4 . . . rána kladivem

Pokud udeříte kladivem do jednoho konce kovové tyče (jejíž průměr je mnohem menší než její délka), začnou se okolo ní šířit zvukové vlny. Narýsujte a co nejpřesněji popište, jak se bude s časem měnit tvar vlnoploch v rovině tyče. Mezi vašimi obrázky by měly být znázorněny vlnoplochy, a to v okamžicích, kdy se vlna dostala na druhý konec tyče a kdy se po odrazu vrátila opět do místa úderu. Nezapomeňte konstrukci popsat. Uvažujte pouze podélné kmity tyče. Poměr rychlosti šíření zvuku v tyči a ve vzduchu je $\beta = v_{\text{tyč}}/v_{\text{vzduch}} \approx 10$.

Na riešenie použijeme Huygensov princíp. Ten tvrdí, že každý bod *vlnoplochy* sa stáva malým zdrojom guľových vln, ktoré ďalej vysielajú žiarenie. Obalom miest, kam sa dostane za malý čas toto vlnenie, je nová vlnoplocha. Čo to ale je vlnoplocha? Nám bude stačiť pracovné chápanie, že sú to práve tie body, kde sa nachádzajú maximá výchylky.^{14,15}

Abý nám vzniklo vlnenie, potrebujeme zdroje. V tomto prípade je zdroj reprezentovaný rázom v tyči. Ráz ide po tyči tam a späť a tam. Kde sa nachádza, spôsobí rozvlnenie okolitého vzduchu. Fyzikálne sa to dá dobre predstaviť tak, že tyč sa v mieste rázu mierne deformuje, a tým rozhybe vzduch.

Máme teda zdroj, ktorý sa hýbe rýchlosťou $v_{\text{tyč}}$. To, že je táto rýchlosť väčšia ako rýchlosť zvuku vo vzduchu, je veľmi dôležité. V každom mieste vytvorí guľovú vlnoplochu, ktorá sa postupne rozširuje do priestoru. Vieme, že jej polomer rastie s rýchlosťou v_{vzduch} .

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť je, že celý problém má rotačnú symetriu okolo tyče. Preto sa nemusíme zaoberať popisom v celom priestore, ale stačí nám ľubovoľná rovina obsahujúca tyč. Skutočný obraz by sme dostali rotáciou našich vlnoploch okolo tyče.

Skúmajme moment, v ktorom ráz prvýkrát dorazí na druhý koniec tyče. Polomer kružníc, ktoré predstavujú body s rovnakou fázou pochádzajúce od zdrojov

¹⁴Správna definícia hovorí, že vlnoplocha je množina bodov s rovnakou fázou. Uvidíme ale, že tu by nám niečo takéto nebolo veľmi užitočné a len by sme zbytočne zavádzali ďalší pojem *fázy*.

¹⁵A o akej výchylke to vlastne hovoríme? Zvuk je len zmena tlaku vzduchu, takže môžeme popisovať napríklad výchylky tlaku. Hustota je rovnako dobrý popis, ale náš ušný bubienok reaguje práve na tlak vzduchu.

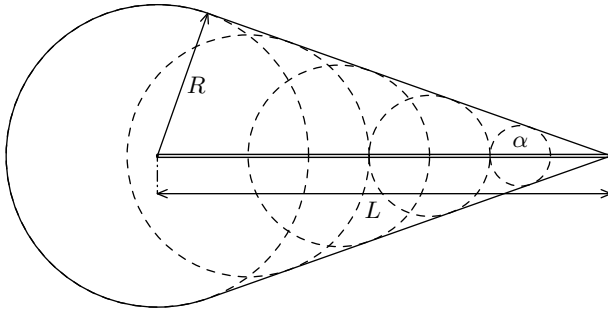
na tyči, porastie lineárne so vzdialenosťou od tohoto konca.¹⁶ Nech úder do tyče nastal v okamihu 0 a vlna cestovala tyčou čas Δt . Vieme, že určite platí

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\text{tyc}}},$$

kde sme L označili dĺžku tyče. Kružnica vychádzajúca z konca tyče, do ktorého sme udreli, sa zatiaľ stihla nafúknuť na polomer

$$R = v_{\text{vzduch}} \Delta t = v_{\text{vzduch}} \frac{L}{v_{\text{tyc}}} = \frac{L}{\beta}.$$

Obálka ostatných postupne zmenšujúcich sa kružníc predstavuje trojuholník, ako je zrejmé z náčrtku postupne zmenšujúcich sa kruhových vln. Tento trojuholník má v čase Δt vrchol práve vo vrchole tyče. Opäť z náčrtku vidíme, že trojuholník sa na kruhovú vlnu (tú, ktorá vznikla v čase 0) napája hladko. Teda strana trojuholníka je dotyčnica ku kružnici s polomerom R . Nakreslime si teda celú situáciu (pre ilustratívnosť volíme $\beta = 3$), naznačiac aj vrcholový uhol trojuholníka.



Obr. 8: Tvar vlnoplôch v čase Δt

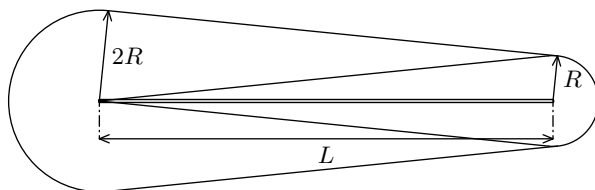
Keďže vyznačený priemer je kolmý na dotyčnicu ku kružnici, uhol α môžeme vyjadriť jednoducho

$$\sin \alpha = \frac{R}{L} = \frac{1}{\beta}.$$

V momente Δt sa ráz otočí a vráti sa späť. Vlna, ktorá existovala v čase Δt , sa bude ďalej nafukovať, čo si najlepšie predstavíme na nafukovaní pôvodných zdrojov vlnenia umiestnených na tyči. V čase $2\Delta t$ sa pôvodná kružnica zväčší na polomer $2R$, ostrý vrchol sa zmení na kružnicu s polomerom R a spája ich dotyčnicová priamka so sklonom α .

Naviac sa vytvára obdoba trojuholníka zakončeného kružnicou. Podobne ako pri pohybe od času 0 do Δt . Keď tieto dva obrazce nakreslíme, dostávame pre zadanú hodnotu $\beta = 10$

¹⁶Tu práve prichádza do hry Huygensov princíp. Namiesto textu vám ale odporúčam vziať si papier, nakresliť si kružnicu a aplikovať Huygensov princíp. Uvidíte, že výsledkom je len nafúknutá pôvodná kružnica.


 Obr. 9: Tvar vlnoplôch v čase $2\Delta t$

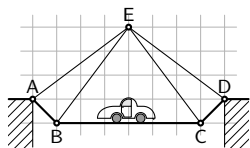
Toto je teda hľadaný tvar vlnoplochy. To, čo sme tu opísali, sú vlastne vrcholy vlniek, ktoré doputovali do naznačených miest. Fáza hovorí o istej vnútornej premennej, ktorá sa vyskytuje pri matematickom popise a na ktorej závisí výchylka (pre harmonický oscilátor je fáza rovná ωt , kde ω je uhlová frekvencia). V naznačených miestach teda predpokladáme rovnakú výchylku a snažili sme sa popisovať čelo vlny. Teda tam by bolo práve maximum výchylky (nezabúdajme, že hovoríme o tlaku).

Máme ešte jeden problém, rozdvojenie vlnoplochy. Ak sa vám to zdá neprirozené, zdá sa vám dobre. Naša analýza totiž jednoducho uvažovala o šírení vzruchu dopredu a nafukovaní vlnoplochy podľa Huygensovho princípu. Ak by sme chceli byť presnejší, museli by sme ísť o úroveň nižšie a pozrieť sa na vlnovú rovnicu. V skutočnosti totiž vzruch nepostupuje iba dopredu, ale zanecháva za sebou nenulové výchylky. S týmito výchylkami by potom interferovala vlna od vzruchu vracajúceho sa späť.

Kvalitatívne môžeme povedať, že vonkajší tvar tak, ako sme ho opísali, bude zachovaný (naš popis nehovorí nič o vnútražsku, pre vonkajšiu obálku funguje dobre). Trojuholník, ktorý vzniká vo vnútri, bude v blízkosti rázu stále viditeľný, práve vytvorené kruhové vlny totiž majú najvyššiu výchylku, a teda len tak ľahko nezinterferujú so slabými zvyškovými vlnami.

V blízkosti rozdvojenia vlnoplochy sú ale obe vlny približne rovnako silné, a tu by nastávala interferencia. V mieste napojenia vnútorného trojuholníka na kružnicu s polomerom R by teda nebola viditeľná tak jasne, ako je na obrázku. Toto všetko je diskusia nad rámec toho, čo sme požadovali od vašich riešení. Tak sa nestrachujte, môžete akurát dostať bonus.

Úloha IV.5 ... stavme mosty



Mějme dvourozměrnou část jednoduché mostní konstrukce jako na obrázku tvořenou z tyčí spojených v bodech A, B, C, D a E. Zjistěte, které tyče jsou namáhány tlakem a které tahem a jak velkými silami, pokud jsou tyče nehmotné a na tyči BC stojí autíčko o hmotnosti m . Délky tyčí určete z obrázku.

Bonus Uvažujte, že všechny tyče mají konstantní délkovou hustotu λ .

Každý z kloubů mostu je v klidu, a tedy celková výsledná síla na něj působící je nulová. Tento fakt nám dává do vztahů síly působící na tyče. Označme T_{XY} sílu, kterou je stlačována tyč spojující body XY . Pak například tyč AE působí na kloub E silou velikosti T_{AE} . Tato síla působí rovnoběžně s tyčí AE směrem od ní. Auto působí na tyč BC tíhovou silou mg . Ta se rozkládá do kloubů B a C rovnoměrně, tedy $mg/2$ směrem dolů na každý z nich. Na klouby A a D pak působí reakční síla od země.

Počítejme rovnou bonusový případ. Řešení základní úlohy pak bude pouze dosazení $\lambda = 0$. Tíha každé tyče se rozkládá rovnoměrně do jejích koncových bodů. Tyč AE tedy navíc působí na kloub E silou $5\lambda g/2$ směrem dolů. Hmotnost celého mostu i s autem je pak $(26 + 2\sqrt{2})\lambda + m$.

Jelikož toto jsou jediné síly působící na klouby, můžeme přejít k výpočtu. Všimněme si, že most je osově souměrný, a proto stačí problém vyřešit pro levou polovinu mostu. Jelikož se jedná o vektorové rovnice, bude nejsnazší si je zapsat po složkách ve vodorovném a svislém směru. Pro svislý směr dostáváme pro klouby A , B a E

$$\begin{aligned} -\frac{3}{5}T_{AE} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{AB} + (13 + \sqrt{2})\lambda g + \frac{mg}{2} - \frac{5}{2}\lambda g - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda g &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}T_{AB} - \frac{4}{5}T_{BE} - \frac{mg}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} + 3\right)\lambda g &= 0, \\ \frac{3}{5}T_{AE} + \frac{4}{5}T_{BE} - 5\lambda g &= 0. \end{aligned}$$

Vodorovná složka sil působících v kloubu E se vyruší automaticky ze symetrie. Vodorovná složka v kloubu B je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}T_{AB} - \frac{3}{5}T_{BE} - T_{BC} = 0.$$

Kdybychom řekli, že kloub A je pevně zasazen v zemi, reakce od země by právě vyrušila působení od mostu i ve vodorovném směru, a tedy by vodorovná složka síly byla automaticky vyvážená. Ovšem čtyři rovnice, které v tuto chvíli máme, nemají jednoznačné řešení. Z fyzikálního hlediska si to můžeme přestavit tak, že země může tlačit klouby A a D k sobě libovolnou silou a jediným důsledkem bude, že se bude měnit napětí v tyčích. To by nastalo třeba při změnách teplot. Abychom tomu zabránili, řekneme, že body A a D nejsou pevně uchyceny ve vodorovném směru. To nám přidává poslední rovnici

$$-\frac{4}{5}T_{AE} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{AB} = 0.$$

Vyřešením této soustavy pěti lineárních rovnic získáme

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -\frac{2\sqrt{2}}{7}m - \frac{2}{7}(2 + 21\sqrt{2})\lambda g, \\ T_{AE} &= \frac{5}{14}m + \frac{5}{14}(21 + \sqrt{2})\lambda g, \end{aligned}$$

$$T_{BC} = -\frac{1}{8}m - \frac{1}{8}(51 + \sqrt{2})\lambda g,$$

$$T_{BE} = -\frac{15}{56}m + \frac{5}{56}(7 - 3\sqrt{2})\lambda g.$$

Vidíme tedy, že tyč AE bude vždy namáhaná tlakem, zatímco tyče AB a BC budou vždy namáhané tahem. Tyč BE je pro malá λ a tedy i základní případ namáhaná tahem. Ovšem pokud

$$\lambda > \frac{3}{7 - 3\sqrt{2}}m,$$

je tyč BE namáhaná tlakem.

Úloha IV.P ... Mrazík

V pohádce Mrazík vyhodil Ivan loupežníkům kyje do takové výšky, že spadly až za půl roku. Jak vysoko by je musel vyhodit, aby dopadly za takovou dobu? Vytvořte první a druhý hrubý odhad. Zdůvodněte, proč jsou tyto odhady nejspíš řádově špatné. Co jste všechno zanedbali? Z jakých důvodů je celkově nesmyslné, aby kyje dopadly na prakticky stejné místo po půl roce? Nebraňte se proudu kritiky na tuto klasickou pohádku!

Budeme řešit pohyb jednoho z kyjů. Zkusme nejprve naivně předpokládat, že Ivan vyhodil kyj v homogenním gravitačním poli v bezodporovém prostředí. Ivánek hází kolmo nahoru z výšky, kterou označíme jako nulovou, s nějakou počáteční rychlostí v_0 , kterou budeme chtít určit. Rovnice pro svislý vrh vzhůru pak vypadají

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (7)$$

$$v = v_0 - gt, \quad (8)$$

kde h je výška kyje v čase t , v je jeho aktuální rychlost a g je tíhové zrychlení. Čas, za který mají kyje dopadnout, je půl roku $T \doteq 15,8 \cdot 10^6$ s. Z druhé rovnice pak můžeme určit původní rychlost kyje, protože víme, že ve chvíli návratu by měly mít kyje stejnou rychlost, ale opačného směru.

$$-v_0 = v_0 - gT \Rightarrow v_0 = \frac{gT}{2} \approx 8 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx \frac{c}{4},$$

kde $c \doteq 3,0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je rychlost světla ve vakuu. Z výsledku je patrné, že bychom už správně měli využít pro výpočet speciální teorii relativity, protože kyj by měl být vyhozen relativistickou rychlostí. Ovšem než se zběsile vrhneme do relativistických řešení, tak si můžeme vyzkoušet vypočítat, do jaké výšky by dle výše uvedeného výpočtu měl kyj vystoupit. Buď si rovnou vzpomeneme, že nejvyššího bodu dosáhne kyj v čase $T_{\max} = v_0/g = T/2$, nebo si uvědomíme, že v okamžiku obratu je rychlost nulová a vypočteme tento čas z rovnice (8), nebo si to můžeme ukázat složitěji tak, že rovnici (7) doplníme na čtverec

$$h = -\frac{1}{2}g\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) \Rightarrow h = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}.$$

Výška bude maximální v okamžiku, kdy závorka umocněná na druhou má nejmenší hodnotu, tedy v okamžiku, kdy je nulová. Pokud čas T_{\max} dosadíme do (7), pak dostáváme $h_{\max} = gT_{\max}^2/2 \approx 3 \cdot 10^{14}$ m, tedy (pokud uvážíme, že poloměr Země je $R_Z = 6378$ km) že se jedná řádově o $5 \cdot 10^7$ násobek poloměru Země. V dalších jednotkách je to pak $2 \cdot 10^3$ AU či 0,03 ly. Je tedy zřejmé, že gravitační pole, ve kterém se kyj pohybuje, ve skutečnosti nebude homogenní, a proto náš původní předpoklad vůbec neplatí, takže se ani vylepšováním speciální teorie relativity nemusíme zabývat.

Již víme, že budeme muset uvažovat, že se jedná o vrh v radiálním gravitačním poli Země. Vrh je prováděn kolmo vzhůru, což by mělo vést k tomu, že se kyj bude pohybovat po degenerované elipse na úsečku, jejíž jeden konec by se nacházel v těžišti Země. Nebudeme raději moc spekulovat nad tím, jak by pak mohl dopadnout kyj opět na stejné místo pod stejným úhlem, protože bychom po chvíli stejně došli k tomu, že je to příliš podezřelé, a to zejména kvůli sklonu osy zemské rotace a dalším pohybům Země v průběhu roku. Keplerův třetí zákon platí i pro takto zdegenerovanou elipsu. Napišme si ho ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_Z}{4\pi^2},$$

kde a je délka hlavní poloosy, což je v našem případě polovina délky úsečky, po které se pohybuje kyj¹⁷, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta, $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg hmotnost Země. Pokud bychom mohli zanedbat dobu, kterou by kyj měl strávit v rámci své oběžné doby pod povrchem Země, tak opravdu můžeme použít ve vztahu čas T . Vyjádříme si hlavní poloosu

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_Z}{4\pi^2} T^2} \approx 1,4 \cdot 10^9 \text{ m} \approx 200R_Z \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ AU}.$$

Vzhledem k tomu, že je poloosa více jak dvoustnásobkem poloměru Země, tak opravdu můžeme relativně dobře použít zanedbání času. Navíc v části pod Zemí by se kyj měl hýbat nejrychleji, a tedy strávit tam jenom relativně krátký čas. Ovšem – měli bychom se zamyslet, do jaké největší vzdálenosti od Země se kyj dostane. Od jejího jádra by to měl být dvojnásobek a , což je řádově 400 poloměrů Země. Zamyslíme se nad tím, jestli opravdu v celé oblasti bude mít hlavní roli gravitace Země, nebo i dalších těles. Proto se podívejme na soustavu Země – Slunce. V této soustavě se nachází 5 bodů, ve kterých se vyrovnávají gravitační a odstředivé síly. Jedná se o takzvané Lagrangeovy či librační body. Nás v této chvíli zajímá zejména poloha bodu L_1 , který je Zemi nejbližší. Proč? Protože pokud se může nějaká družice dostat od Země za bod L_1 , tak se může stát oběžnicí Slunce nebo střídavě obíhat Zemi a Slunce (pokud nemá energii tak velkou, že dokonce ze soustavy unikne). Dá se vypočítat či najít¹⁸, že se nalézá zhruba $1,5 \cdot 10^9$ m od Země. Vzhledem k tomu, že se kyj má dostat až do vzdálenosti $2,7 \cdot 10^9$ m, pak není opět

¹⁷Musíme poznamenat, že v místě obratu kyje, tedy v těžišti Země, bychom museli umístit něco, od čeho by se kyj mohl dokonale pružně odrazit, kdežto cestu až k těžišti bychom mu museli vyhloubit. Takže se jedná vlastně o hypotetickou a dost abstraktní situaci.

¹⁸<http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Punkte>

splněna vstupní podmínka výpočtu. Správně bychom měli uvažovat i gravitační vliv Slunce a tím by se úloha značně zkomplikovala. Proto nadále budeme pracovat s tímto odhadem, ale budeme si uvědomovat, že by musel být ještě opraven.

Zkusme se zaměřit na výpočet rychlosti, kterou by musel Ivan kyje hodit. Jako první nástřel můžeme odhadnout, že musí jít o rychlost někde mezi 1. kosmickou rychlostí¹⁹, což je oběžná rychlost po kruhové dráze na úrovni povrchu Země $v_1 \doteq 7,9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, a 2. kosmickou rychlostí, což je úniková rychlost z povrchu Země, tj. kyje by se vůbec nevrátily $v_2 \doteq 11,2 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Už tím bychom měli docela pěkný řádový odhad. Pokud bychom chtěli dostat nějakou přesnější hodnotu, tak můžeme využít nějakého programu či programovacího jazyka a průběh vrhu si numericky nasimulovat. V tom případě, při použití trochu přesněji zadaných hodnot, než je uvedeno zde, dostáváme hodnotu rychlosti houdu²⁰ jako $v_{\text{kyj}} \doteq 11\,168 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a hodnotu druhé kosmické rychlosti jako $v_2 \doteq 11\,181 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Hodnoty se liší pouze o něco málo víc než jedno promile, což ukazuje další problematickou část pohádky a to, že by Ivan musel do urychlení kyje vložit přesně definovanou sílu, protože jinak by kyje dopadly v úplně jinou dobu, nebo by rovnou úplně uletěly.

Nadále budeme pracovat s rychlostí v_{kyj} , která je vlastně kvůli odporovým silám spodním odhadem toho, na jakou rychlost by Ivan kyje musel urychlit. Zamysleme se nad tím, jakou kinetickou energii by musel Ivan do kyjů vložit. Uvažujme jeden $m \doteq 20 \text{ kg}$ kyje.

$$E_k = \frac{1}{2} m v_{\text{kyj}}^2 \approx 1,2 \text{ GJ}$$

Ivan by tedy do jednoho kyje musel dát přes gigajoule své energie.

S jakým zrychlením musel Ivan kyje urychlovat? Uvažujme, že je urychloval rovnoměrně a že je velmi vysoký, a tak je urychloval $h_i = 2 \text{ m}$.

$$h_i = \frac{1}{2} a \tau^2, \quad v_{\text{kyj}} = a \tau \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_{\text{kyj}}^2}{2h_i} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

kde jsme označili jako τ čas urychlování kyje. Ivan by tedy musel pohybovat svou paží s takto nemožně velkým zrychlením, přičemž celé urychlování by trvalo $\tau \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Při takto agresivním urychlování by se nejspíš kyj sám rozbil svou setrvačností.

Zaměříme se teď na odpor vzduchu, který jsme dosud přecházeli, byť jsme si uvědomovali, že bude hrát značnou roli. Použijeme Newtonův vztah pro odpor vzduchu

$$F = \frac{1}{2} C_{\rho} S v^2,$$

kde C je součinitel odporu daný tvarem tělesa, který bývá většinou mezi 0,1 a 1,2 a v v našem případě ho budeme považovat²¹ za 0,5, $\rho = 1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota

¹⁹Důvodem, proč je jasné, že by rychlost kyje měla být vyšší než tato, je už to, že velká poloosa dráhy kyje je větší, navíc ho vypouštíme přímo vzhůru.

²⁰K výpočtu byl použit program Wolfram Mathematica. Kód je k nalezení na <http://fykos.cz/rocnik26/4-p.nb> a <http://fykos.cz/rocnik26/4-p.cdf>. Ve formátu .nb si můžete kód i upravit, pokud vlastníte Wolfram Mathematicu, kdežto v .cdf se na něj můžete alespoň podívat a přehrávač .cdf můžete stáhnout zdarma na <http://www.wolfram.com/cdf/>.

²¹Ve skutečnosti se mění v průběhu letu, jak se kyj otáčí, ale stejně nám jde pouze o řádový odhad.

vzduchu, S je plocha průřezu tělesa ve směru pohybu, která může být u kyje řádově $S \approx 0,1 \text{ m}^2$. Zkusme dosadit, jaká by pak měla být odporová síla na počátku pohybu v případě, že by byl kyj urychlen „pouze“ na rychlost v_{kyj} . Síla je pak $F = 4 \cdot 10^6 \text{ N}$, což by pro 20 kg kyj znamenalo zrychlení zhruba $2 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, což by kyj teoreticky zabrzdilo v první sekundě²², resp. ještě dříve, takže konstantnost odporu si v úvahách dovolit nemůžeme a kyje by musely vylétnet nejspíše s řádově vyšší rychlostí. Ovšem musíme si uvědomit, že hustota vzduchu s výškou klesá, a zejména, že když je rychlost nižší, tak klesá i odporová síla. Navíc s takto vysokými rychlostmi v atmosféře narážíme na limity použité rovnice, protože jsme v rychlostech řádově nad rychlostí zvuku ve vzduchu. Newtonova rovnice se tudíž ani nedá spolehlivě použít.

Laskavá čtenářka si pak už sama dopočte, že by energie dodaná na počátku kyji stačila na jeho zahřání o více jak několik tisíc stupňů Celsia a s ohledem na odpor vzduchu by se tedy kyj po cestě nejspíš uhořel (stejně jako se to často stává malým meteoritům).

Závěrem můžeme říci, že Mrazík by se měl z hlediska výuky fyziky zakázat, nebo používat pouze jako odstrašující případ.

Úloha V.1 . . . vaříme oceány

Odhadněte, kolik energie by bylo potřeba na odpaření všech pozemských oceánů.

Abychom vodu odpařili, potřebujeme ji napřed ohřát na bod varu a následně dodat skupenské teplo varu. Budeme předpokládat, že voda má průměrnou teplotu T a její hmotnost je m . Pak na ohřátí na $100 \text{ }^\circ\text{C}$ budeme potřebovat teplo

$$Q_o = mc(T_v - T),$$

kde c je měrná tepelná kapacita a T_v je teplota varu, v případě vody tedy $T_v = 373 \text{ K}$. Poté již potřebujeme dodat teplo

$$Q_v = ml_v,$$

kde l_v je měrné skupenské teplo varu.

Zjistíme²³, že průměrná teplota oceánů je přibližně $2 \text{ }^\circ\text{C}$, tedy $T = 275 \text{ K}$. Hmotnost vody v oceánech²⁴ je $m = 1,37 \cdot 10^{21} \text{ kg}$. Měrnou tepelnou kapacitu budeme²⁵ uvažovat jako $c = 4000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Měrné skupenské teplo varu budeme brát jako $l_v = 2300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, kde jsme u posledních dvou určení využili znalosti množství soli v mořské vodě (konkrétně uvažujeme 35 ppt).²⁶

²² První vteřina je zde zmíněná čistě účelově. Atmosféru bychom mohli hodně hrubě považovat za vysokou 10 km s hustotou vzduchu jako je u hladiny moře. Je to hodně hrubé přiblížení, ale pro odhad nám to stačí. Vzhledem k rychlosti, s jakou by kyje měly opustit Ivanovu ruku, tedy skrz atmosféru projde za právě jednu sekundu.

²³ http://www.savethesea.org/STS%20ocean_facts.htm

²⁴ <http://hypertextbook.com/facts/1998/AvijeetDut.shtml>

²⁵ http://web.mit.edu/seawater/Seawater_Property_Tables.pdf

²⁶ <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/chemical/seawater.html>

Ve výpočtu jsme zanedbali měnící se podmínky během vypařování, např. změnu salinity, a pak změnu atmosférických podmínek.

Výsledné množství tepla je dáno součtem tepla na ohřev Q_o a tepla na vypaření Q_v , tedy

$$Q = m [c (T_v - T) + l_v] .$$

Číselně pro naše odhady veličin dostaneme $Q = 3,7 \cdot 10^{27}$ J.

Úloha V.2 . . . molekuly

Předpokládejme, že při vypaření kapalinového tělesa o povrchu S dochází k jeho přeměně na jednotlivé molekuly, které lze považovat za elementární kapalinová tělíška, jejichž úhrnný povrch je ale podstatně větší než povrch původního tělesa. Znáte-li skupenské teplo vypařování vody $L = 2,1 \cdot 10^6$ J·kg⁻¹ a povrchové napětí vody (energie připadající na plošnou jednotku povrchu kapaliny) $\alpha = 7,2 \cdot 10^{-2}$ N·m⁻¹, odhadněte velikost jejích molekul.

Energie potřebná k vypaření vody o hmotnosti M zahřáté na teplotu vypařování je rovna

$$E_v = LM .$$

Změna povrchové energie při vypaření vody o hmotnosti M je

$$\Delta E_S = \alpha \left(\frac{M}{m} S_n - S \right) ,$$

kde m je hmotnost molekuly, S_n je povrch molekuly a S je původní povrch kapaliny.

Změna povrchové energie se musí rovnat energii dodané. V naší aproximaci předpokládáme, že nová plocha kapaliny (člen $S_n M/m$) je mnohem větší než původní plocha S , tu tedy můžeme zanedbat. Dále platí $L = \Delta E_S/M$. Potom platí

$$L = \frac{\alpha S_n}{m} .$$

Jelikož nám nejde o přesnou hodnotu, ale pouze o řádový odhad, můžeme předpokládat, že molekula vody má tvar koule, její plocha je tedy

$$S_n = 4\pi r^2 ,$$

hmotnost molekuly spočteme snadno pomocí relativní molekulové hmotnosti M_r a atomové hmotnostní konstanty m_u

$$m = M_r m_u .$$

Tyto vztahy dosadíme do výše uvedené rovnice a vyjádříme

$$r = \sqrt{\frac{LM_r m_u}{4\pi\alpha}} .$$

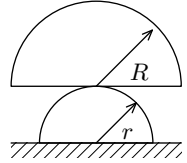
Po dosazení $M_r = 18$, $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg vychází $r \doteq 2,63 \cdot 10^{-10}$ m neboli 2,63 Å (angström – často používaná jednotka při vyjadřování velikostí atomů, délky chemických vazeb atp.)

Srovnáme-li potom náš výsledek s reálnými rozměry molekuly vody, zjistíme, že vzdálenost atomu vodíku a kyslíku v molekule vody je přibližně 0,96 Å. Vidíme tedy, že náš odhad, ačkoli vychází z velice jednoduchých úvah, dává relativně přesné (řádově správné) výsledky.

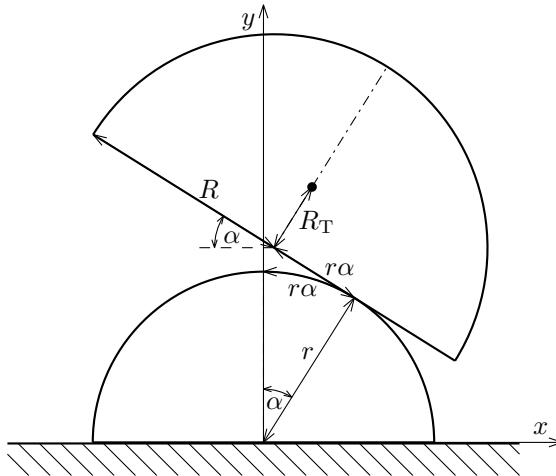
Úloha V.3 . . . plážové válení

Mějme dva půlválce ležící na sobě jako na obrázku. Spodní má poloměr r a horní poloměr R . Pro jaký poloměr R s pevným r je soustava stabilní?

Bonus V případech, kdy je soustava stabilní (pokud vychýlíme vrchní válec z rovnovážné polohy, tak začne provádět malé kmity), s jakou periodou bude kmitat?



Při řešení budeme předpokládat, že se tělesa po sobě pouze valí, tedy nedojde se smýkání, a spodní těleso se nepohybuje. V tom případě můžeme polohu horního půlválce oproti poloze na obrázku v zadání popsat jednou souřadnicí, soustava má jeden stupeň volnosti. Dále nezáleží na tom, jakou souřadnici zvolíme, např. úhel α dle obrázku 10.



Obr. 10: Horní půlválec v obecné poloze popsané úhlem α .

Aby byla soustava stabilní, při vychýlení z rovnovážné polohy musí působit taková síla, popř. takový moment síly, která vychýlené těleso vrací zpět. Jestliže

horní půlválec leží na spodním, dotýkají se na úsečce, kterou v každé poloze můžeme považovat za osu otáčení. Tlaková síla, která působí mezi půlválci, tuto osu protíná, stejně tak síla třecí, obě proto mají vzhledem k této ose nulový moment. Nenulový moment má síla tíhová působící na horní půlválec v jeho těžišti.

Vyjádříme polohu těžiště horního půlválce v závislosti na úhlu α . K tomu potřebujeme znát vzdálenost na obrázku 10 označenou R_T , tedy polohu těžiště půlkruhu vzhledem k jeho středu. Využijeme např. první Pappos-Guldinovy věty, která říká, že objem rotačního tělesa (v našem případě by šlo o kouli s objemem $4\pi R^3/3$) je roven součinu délky trajektorie, kterou při rotaci urazí těžiště (tedy $2\pi R_T$), a obsahu plochy, kterou rotujeme (půlkruh, tedy $\pi R^2/2$), tj.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi R_T \frac{\pi R^2}{2} \quad \Rightarrow \quad R_T = \frac{4R}{3\pi}.$$

Pak z obrázku je poloha těžiště horního půlkruhu

$$\begin{aligned} x_T &= r \sin \alpha - r\alpha \cos \alpha + R_T \sin \alpha = \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \sin \alpha - r\alpha \cos \alpha, \\ y_T &= r \cos \alpha + r\alpha \sin \alpha + R_T \cos \alpha = \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \cos \alpha + r\alpha \sin \alpha. \end{aligned}$$

Nyní se již můžeme vrátit ke stabilitě. Aby moment tíhové síly působící na horní půlválec jej po vychýlení z rovnovážné polohy vracel zpět, musí platit

$$x_T < r \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{4R}{3\pi r} < \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha},$$

tedy horizontální poloha těžiště horního půlválce (resp. přímka, na které leží tíhová síla na něj působící) musí být blíže k ose dolního půlválce, než je bod dotyku, pak moment tíhové síly bude půlválec vracet do rovnovážné polohy. Zkoumáme, kdy poloha $\alpha = 0$ je stabilní, toto tedy dosadíme. Výraz na pravé straně je neurčitý výraz typu $0/0$, buď tedy vypočítáme limitu, nebo si vykreslíme graf této funkce a zjistíme, že musí platit

$$\frac{4R}{3\pi r} < 1 \quad \Rightarrow \quad R < \frac{3\pi r}{4}.$$

Stabilita by šla vyřešit i pomocí potenciální energie. Aby byla poloha stabilní, potenciální energie tělesa v rovnovážné poloze musí mít minimum. Potenciální energie horního půlválce je přímo úměrná vertikální poloze těžiště y_T , stačí tedy zjistit, pro jaké R má funkce $y_T(\alpha)$ v bodě $\alpha = 0$ minimum. Aby funkce měla v nějakém bodě minimum, musí být první derivace nulová a druhá kladná, tedy

$$\left. \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 y_T}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0} > 0.$$

Provedeme příslušné derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_T}{\partial \alpha} &= -\frac{4R}{3\pi} \sin \alpha + r\alpha \cos \alpha, \\ \frac{\partial^2 y_T}{\partial \alpha^2} &= \left(r - \frac{4R}{3\pi} \right) \cos \alpha - r\alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

a z druhé derivace (podmínka plynoucí z první derivace je triviální) dostaneme stejnou podmínku jako postupem výše.

Z tvaru potenciální energie (pokud bychom si vykreslili její průběh v závislosti na α) je též vidět, že ačkoliv je pro některá R je poloha stabilní, existuje takový úhel α , pro který má potenciální energie maximum a dále začne opět klesat. Tedy, jestliže vychýlíme horní půlválec o větší úhel (popř. mu dáme takovou rychlost, aby tento mezní úhel překonal), spadne (opět zde neuvažujeme situaci, kdy by se začal smýkat).

Bonus

K výpočtu periody malých kmitů budeme potřebovat moment setrvačnosti horního válce vzhledem k ose procházející jeho těžištěm. Nejprve určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose válce. Jelikož moment setrvačnosti je aditivní veličina, bude moment setrvačnosti půlválce polovinou momentu setrvačnosti válce o stejném poloměru a výšce (který bude mít hmotnost $2m$), tedy

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

Za pomoci Steinerovy věty poté určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_T = J - mR_T^2 = mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right).$$

Pohyb jakéhokoliv tuhého tělesa (jako je i náš půlválec) můžeme rozložit na translační pohyb libovolného jeho bodu a rotační pohyb vzhledem k ose procházející tímto bodem. Za tento bod je vhodné si zvolit těžiště tělesa. Kinetická energie pohybu je pak rovna součtu kinetické energie translačního pohybu a kinetické energie rotačního pohybu, tedy

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2}m\dot{x}_T^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_T^2 + \frac{1}{2}J_T\dot{\alpha}^2 = \\ &= \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \dot{\alpha} \cos \alpha - r\dot{\alpha} \cos \alpha + r\dot{\alpha} \sin \alpha \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}m \left[- \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \sin \alpha \dot{\alpha} - r\dot{\alpha} \sin \alpha + r\dot{\alpha} \cos \alpha \right]^2 + \\ &+ \frac{1}{2}mR^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right) \dot{\alpha}^2 = \\ &= \frac{1}{4}m \left(R^2 + 2r^2 \right) \dot{\alpha}^2, \end{aligned}$$

přičemž tečka označuje derivaci podle času, tedy \dot{x}_T je velikost rychlosti těžiště ve vodorovném směru (analogicky \dot{y}_T) a $\dot{\alpha}$ je úhlová rychlost rotačního pohybu.

Nulovou hladinu potenciální energie je pro další postup vhodné zvolit tak, aby v rovnovážné poloze (tedy pro $\alpha = 0$) byla nulová, tedy

$$E_p = mg(y_T - r - R_T) = mg \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \cos \alpha + r\alpha \sin \alpha - r - \frac{4R}{3\pi} \right].$$

Budeme předpokládat, že kmity jsou malé a můžeme použít aproximaci

$$\begin{aligned}\sin \alpha &\approx \alpha, \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}.\end{aligned}$$

Pak můžeme přepsat vztah pro potenciální energii

$$E_p \approx mg \left[\left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right) + r\alpha^2 - r - \frac{4R}{3\pi} \right] = mg \left[r\alpha^2 - \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \frac{\alpha^2}{2} \right].$$

Dále budeme předpokládat, že kmity jsou harmonické, tedy závislost výchylky α a úhlové rychlosti $\dot{\alpha}$ na čase t lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_m \sin \omega t, \\ \dot{\alpha} &= \omega \alpha_m \cos \omega t,\end{aligned}$$

kde α_m je amplituda a $\omega = 2\pi/T$ je úhlová frekvence kmitů, přičemž T je jejich perioda.

Vzhledem ke zvolené hladině nulové potenciální energie je v rovnovážné poloze potenciální energie nulová, a tedy kinetická energie je maximální. Naopak při maximální výchylce α_m je potenciální energie maximální a kinetická energie nulová. Vzhledem k zákonu zachování mechanické energie musí být potenciální energie při maximální výchylce (kdy $\alpha = \alpha_m$ a $\dot{\alpha} = 0$) rovna kinetické energii v rovnovážné poloze (kdy $\alpha = 0$ a $\dot{\alpha} = \omega \alpha_m$), tedy

$$mg \left[r\alpha_m^2 - \left(\frac{4R}{3\pi} + r \right) \frac{\alpha_m^2}{2} \right] = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 \alpha_m^2,$$

odkud

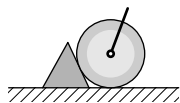
$$\omega = \sqrt{\frac{g(6\pi r - 8R)}{3\pi R^2}},$$

tedy perioda kmitů je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{12\pi^3 R^2}{g(6\pi r - 8R)}}.$$

Povšimněme si, že výraz pro periodu kmitů má smysl pouze pro $R < 3\pi r/4$, což je stejný výsledek, jako jsme dostali výše.

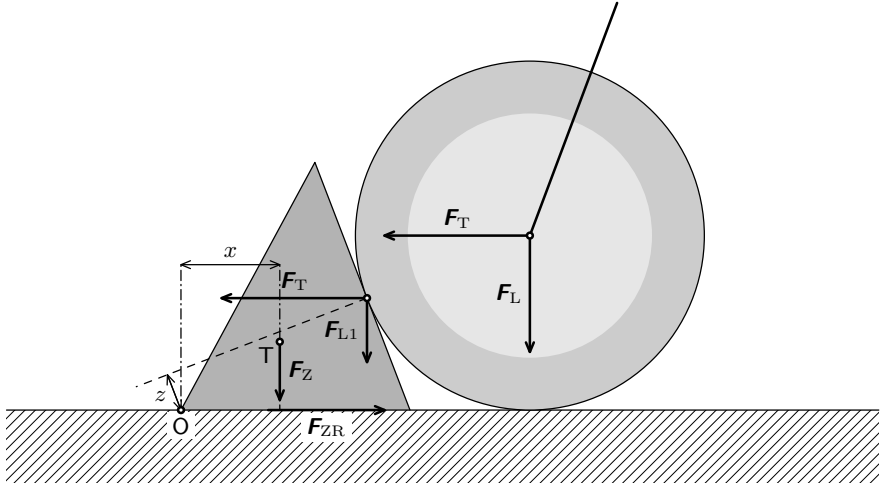
Úloha V.4 ... zašpalkovat



Může zašpalkované letadlo pustit motory na zemi na plný tah a zůstat na místě? Pokuste se o obecné vyjádření uvažující různé materiály kola, špalku i podlahy. Změní se to, bude-li špalek vysoký akorát na dotek kola?

Celá úloha je o hledání všech možných zásadních vlivů na zastavení pohybu kola, takže si musíme určit faktory, které budou celou situaci ovlivňovat.

V úloze použijeme tyto veličiny: tíhovou sílu letadla F_L , tahovou sílu F_T , tíhovou sílu špaluku F_Z , úhel α_1 , který určuje naklonění roviny špaluku, úhel α_2 , který je druhým úhlem špaluku při rovině, a konečně koeficient smykového tření mezi špalkem a ranvejí f_{ZR} . Dále u kola bychom mohli zavést konstantu pro rameno valivého odporu závisující na materiálu kola a ranveje, avšak jejich vliv je oproti ostatním zanedbatelný, neboť $r_k/\zeta \sim 0,01$, kde ζ je užito pro rameno valivého odporu a r_k pro poloměr kola.



Obr. 11: Rozkreslení sil

Také by asi bylo správné si říct několik předpokladů: letadlo má tryskový pohon nebo přední vrtuli a nepoužívá motory umístěné v kolech. Letadlo má těžiště dostatečně vzadu, aby se nepřevrátilo. A samozřejmě neuvažujeme Harrier.

Jako první vyšetříme stabilitu klínu a letadla. Na obrázku máme zobrazeny síly. Z rozložení sil můžeme určit první třecí sílu T_{ZR} působící mezi ranvejí a špalkem

$$T_{ZR} = F_T,$$

kde jsme zanedbali sílu valivého odporu letadla. Tyto síly působí v opačných směrech x -ové osy. Ještě je třeba uvažovat tíhovou sílu letadla F_L , která ve statickém případě nemá vliv na tření klínu (působila by na klín v případě pohybu letadla po klínu). My bychom chtěli, aby se letadlo nepohybovalo po klínu, tedy výsledná část svislé síly musí být kolmá na styčnou plochu klínu. Pro naši podmínku musí platit, že část tíhové síly působící jako tlaková síla na klín se rovná

$$F_{L1} = F_T \operatorname{tg} \alpha_1,$$

kde jsme užili značení F_{L1} pro tlakovou část na klín. Zbytek tíhové síly je tlaková síla působící na ranvej a ta je kompenzována ranvejí.

Díky tomu získáváme novou podmínku pro třecí sílu

$$F_T \leq f(F_z + F_T \operatorname{tg} \alpha_1) \quad \Rightarrow \quad F_T \leq \frac{f}{1 - f \operatorname{tg} \alpha_1} F_z.$$

Z této rovnosti se už lehce vyjádří podmínka pro F_T . Nakonec ještě musíme zajistit, aby náhodou nedošlo k tomu, že by letadlo klín přešlo – tedy obě rozdělené tíhové síly musí být kladné. Z toho vyplývá podmínka

$$F_T \operatorname{tg} \alpha_1 \leq F_L \quad \Rightarrow \quad F_T \leq \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_1} F_L.$$

Je třeba si uvědomit, jak už bylo řečeno, že třecí sílu způsobenou valivým odporem zanedbáváme.

Další podmínka stability je spojena s velikostí momentu vůči vrcholu u bodu α_2 . Pro tento moment budeme požadovat, aby platila rovnost

$$0 \geq M = z \frac{F_T}{\sin \alpha_1} - x F_z \quad \Rightarrow \quad F_T \leq \frac{x \sin \alpha_1}{z} F_z,$$

kde x a y jsou souřadnice těžiště klínu vůči vrcholu a z je kolmá vzdálenost bodu dotyku kola s klínem od bodu otáčení. Zde můžeme také vidět účel úhlu α_2 , který by pro větší stabilitu měl být co nejmenší, a tím zajistit kladnou velikost x -ové souřadnice. Všechny tyto podmínky musí být splněny k tomu, aby nedošlo k převrácení, přelezení nebo podklouznutí.

Kdyby se letadlo pouze dotýkalo nejvyššího bodu špalku (což je mnohem bližší reálné situaci, kdy se špalky tvarují tak, aby do nich kolo zapadlo, resp. mohlo se v nich protáčet), pak zde máme pouze působení momentů. Předpokládejme, že špalek splňuje všechny podmínky ke stabilitě. Pak můžeme říct, že na to, aby se kolo převrátilo okolo vrcholu špalku, by mělo stačit „přemoci“ moment způsobený tíhovou silou, kde můžeme psát $F_T y_2 > F_G x_2$, kde x_2 , y_2 jsou kolmé vzdálenosti mezi vrcholem dotyku a středem kola.

Co se týče materiálů, je asi jasné, že pneumatika kola bude například z materiálu podobnému pryži, pak je rameno valivého odporu pneumatiky na asfaltu okolo²⁷ 0,0025 až 0,0045 (ale třeba guma na betonu má rameno valivého odporu 0,015 až 0,035, což je o řád vyšší). Pro smykové tření bychom dostali ještě o řád vyšší hodnoty, např. pneumatika na betonu okolo 0,7 až 0,8, a to už by nám mohlo dát jistotu stability letadla. U asfaltu by to bylo 0,55. Otázkou zůstává, z čeho udělat špalek? Člověka asi napadne dřevo, to má na betonu koeficient smykového tření²⁸ 0,23, dále se většinou zarážky na letadla dělají z pryže a sem tam se přidává i nějaký kov. Samozřejmě se zarážky opracují tak, aby jejich materiál nebyl hladký, a měl tedy měl větší třecí součinitel.

²⁷<http://www.converter.cz/tabulky/valive-treni.htm>

²⁸http://is.muni.cz/th/199446/pedf_m/diplomka.txt

Úloha V.5 ... skladník BOBA

Skladník BOBA měl ve svém sibiřském příbytku přímotop s příkonem 2 kW po pradědečkovi jako jediný zdroj vytápění. Když se na podzim začalo trochu ochlazovat, rozhodl se po dlouhé době přímotop zapnout, ale zjistil, že již nefunguje. BOBA byl celý nešťastný, protože se mu nechtělo utrácet celé své úspory za nový přímotop. Když si pak dal něco na zahřátí a zahrnutí deprese, napadl ho geniální nápad: ve skladu, kde pracuje, se válejí tuny hřejivého plutonia 237. Kolik plutonia si má BOBA odnést do svého příbytku, aby nahradil doslouživší přímotop a v následující zimě neumrzl? Předpokládejte, že plutonium je téměř čisté a má doma dost olověného nádobí po praprapraprababičce, takže dokáže zachytit veškerou vycházející energii.

Skladník BOBA si teda domov priniesol určité množstvo $^{237}_{94}\text{Pu}$, ktoré sa mu s časom rozpadá (elektrónovým záchyтом) na $^{237}_{93}\text{Np}$ – vďaka čomu môže BOBA prežiť zimu a nezamrznúť.

Začneme počítat od konca. BOBA teda potrebuje na konci zimy výkon minimálne 2 kW. Príslušná veličina, ktorá kvantifikuje „silu“ žiariča, sa nazýva aktivita a je definovaná ako počet úbytku jadier (doposiaľ nepremených) za jednotku času alebo ekvivalentne ako počet jadier, ktoré sa premieňajú za jednotku času. Túto skutočnosť môžeme vyjadriť vzťahom

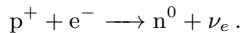
$$A = \frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (9)$$

kde N je okamžitý počet nerozpadnutých jadier a λ je rozpadová konštanta, charakterizujúca daný izotop. Jednotka aktivity je Bq (Becquerel) – jeden rozpad za jednu sekundu.

Celkový energetický výkon žiariča je teda energia uvoľnená pri jednom rozpade vynásobená aktivitou žiariča

$$P = A\Delta E.$$

Čo to teda ten elektrónový záchyt ale je? Je to jadrová premena, pri ktorej jadro zachytí a pohltí elektrón z elektrónového obalu za vzniku neutrónu a neutrína



Pri tomto procese sa žiadne žiarenie z jadra nevysiela. Ako je to teda ale rádi-oaktívna premena? Charakteristické žiarenie sa vysiela až pri prechode elektrónu z vyššej vrstvy elektrónového obalu na novo uvoľnené miesto v nižšej vrstve.

Teraz nám už nič nebráni vrhnúť sa do počítania. Všetky potrebné údaje nájdeme na internete²⁹ alebo v tabuľkách. Pre $^{237}_{94}\text{Pu}$ nachádzame $\Delta E = 220,03 \text{ keV}$ a $\lambda = 1,78 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. Ešte pár vzorcov z chémie a pre hmotnosť $^{237}_{94}\text{Pu}$ na konci zimy (kedy požadujeme výkon 2 kW) tak dostávame

$$m_k = \frac{M}{N_A} \frac{P}{\lambda \Delta E} \doteq 126 \text{ g},$$

²⁹Napríklad na <http://www.wolframalpha.com/input/?i=plutonium+237>.

kde $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ je Avogadrova konstanta a $M = 237 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost ${}^{237}_{94}\text{Pu}$. Z exponenciálního rozpadového zákona (který je mimochodem řešením definiční rovnice (9) pro aktivitu) víeme, že počet nerozpadnutých jader klesá s časem t exponenciálně – pro hmotnost ${}^{237}_{94}\text{Pu}$ na začátku zimy tak máme

$$m_z = \frac{m_k}{e^{-\lambda t}} \doteq 1,26 \text{ kg},$$

kde sme uvažovali, že zima na Sibíri trvá asi tak 150 dní. Nejaké to kilo plutónia by nám teda na prežitie zimy malo stačiť!

Ako to už s jadrovými reakciami ale býva, nič nie je zadarmo a nanešťastie je tu otázka, ako sa vysporiadať so samoštiepením ${}^{237}_{93}\text{Np}$ (pri premene sa z jadra nič nevyžarovalo, takže rozdiel energií materského a dcérskeho jadra sa odrazil v excitácii dcérskeho jadra), ktoré sa nám v chalupe hromadí a hromadí. . .

Úloha V.P . . . Praha pod vodou

Vzpomeňte si na veľké povodňe z roku 2002. Odhadnite, kolik vody pojme pražské metro při povodních. Důležité rozměry jako velikosti souprav, počet stanic, celkovou délku tubusů metra a další si najdete na internetu.

Hned na začátku prozradíme, že v zadání jsme vynechali jednu důležitou věc, a to tu, že metro není jen rovinný útvar, ale že jeho tunely se různě vlní a více či méně kopírují terén, pod kterým vedou. Mimo jiné není pravda třeba zažitá *urban legend*, že stanice jsou stavěny v lokálním minimu tak, aby do nich v případě výpadku proudu mohly soupravy dojet bez dodávání energie. Lokální minimum najdete např. v tunelu mezi Florencí a Vltavskou nebo Nádražím Holešovice a Kobylisy, kde metro vyjíždí směrem dolů a do následující stanice vjíždí směrem nahoru.

Ještě než budeme pokračovat dál, řekněme si, že uvažujeme, že metro má potenciál zaplavit pouze Vltava. Jediná další řeka, která by nám to mohla porušit, je Rokytky, ale tu s dovolením zanedbáme. A dodejme, že budeme počítat se stejnou povodní, jako byla v roce 2002 (ta tehdy mimochodem zdržela začátek FYKO-Su asi o dva měsíce). Nakonec, aby mělo smysl co počítat, prohlásme, že žádná z ochranných opatření proti zaplavení nefungují. Další zjednodušení budou následovat v textu.

Údaje o stanicích a jiných parametrech týkajících se metra budeme čerpat z <http://www.metroweb.cz>.

Udělejme nejdřív jednoduchý odhad za jeden bod. Celková délka tras metra je 59 100 m, většina tunelů je jednokolejných o průměru 5,1 m (tj. celková délka tunelů je 118 200 m), metro má 57 stanic, přičemž v každé z nich je střední tunel o délce 250 m (průměrná délka stanice dle Metrowebu) o průměru 7,8 m. Z průměrné stanice ve hloubce 20 m se dostaneme jedním eskalátorem se sklonem 30° a průřezem ve tvaru elipsy s osami 7,8 m a 9,5 m o délce 40 m. Spočteme-li tedy objem těchto částí, vyjde nám, že do metra se vejde asi $3,23 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ vody, přičemž 75 % z toho tvoří voda v traťových tunelech, 21 % voda ve stanicích a 4 % voda v eskalátorech. Nedá se ale tento odhad nějak zpřesnit? A není náhodou úplně špatně?

První oprava by mohla být na počet zaplavených souprav metra, přičemž lidi necháme včas utéct. Průměrná souprava³⁰ váží 160 t, jsou z hliníku a celkem jich je ve špičce na trase až 95. To znamená, že celkový objem, který z tunelů vytlačí, je asi $5\,600\text{ m}^3$, což jsou asi 2 promile spočtené hodnoty. Nemá smysl se tedy zabývat zpřesněními tohoto typu (např. objem technologických zařízení, kolejnic, pražců a dalších).

Z podmínek uvedených v prvních dvou odstavcích ovšem vyplývá jedna věc. Metro nikdy nebude zaplaveno celé. Důležitější tedy než říct, kolik vody vytlačí průměrná souprava, je zjistit, kam až v tunelech voda vystoupá. Z údajů o povodních na Metrowebu víme, že voda dosáhla nadmořské výšky 190 m. Ve skutečnosti se s polohou výška hladiny měnila, protože ač vysoká, voda stále byla tekoucí. Nicméně na toto nemysleme. Projdeme si tedy úseky metra, kde se postup vody zastavil. Na lince A jsou to úseky Dejvická – Hradčanská a Muzeum – Náměstí míru, na lince B Radlická – Smíchovské nádraží a Hloubětín – Rajská zahrada a na lince C Kobylisy – Nádraží Holešovice a Florenc – Hlavní nádraží. Podrobně úseky vidíme rozepsané v tabulce 2. Zde se budeme muset dopustit jednoho prohrěšku, a to toho, že prohlásíme úseky mezi stanicemi za přímé, abychom nemuseli hledat přesné příčné řezy každou trasou v inkriminované části. Neplatí to zejména na trase C mezi Nádražím Holešovice a Kobylisy, kde metro nejdříve podchází Vltavu a pak až stoupá. Vzhledem k délce mezistaničního úseku to ale prohláseme za zanedbatelné, protože řeka je od stanice nedaleko. Tento předpoklad využijeme k určení poměrné části zatopeného tunelu (viz tabulku 2). Tímto jsme vyřešili tunely, zatopeno bude 19 300 m metra.

Dále musíme zohlednit zatopené stanice. Tím, že jsme některé úseky nechali suché, nám ubyla podstatná část stanic ze seznamu. Takto jich bude zatopeno jen 22. Opět uvažujme stejný odhad na staniční středový tunel. U eskalátorů musíme zohlednit jinou průměrnou hloubku stanic (ta je nyní 30 m, protože stanice v centru města jsou z těch hlubších) a dříve uvedenou výšku hladiny Vltavy – ta hloubku redukuje zpátky na 20 m.

Pokud budeme počítat se stejnými průřezy tunelů, *odhad za jeden bod* zlepšíme následujícím způsobem: Celkem je zatopeno 38 600 m traťových tunelů a 22 stanic, přičemž každou z nich tvoří 180 m dlouhý tunel (zahrneme jen zaplavené stanice) a 40 m dlouhý eskalátor. Dohromady se do nich vejde $1,03 \cdot 10^6\text{ m}^3$ vody. Poměry zůstávají podobné jako v prvním případě (77 % tunely, 18 % stanice a 5 % eskalátory). To je už jen třetinová hodnota oproti původnímu výsledku.

Dál už pokračovat nebudeme, ačkoliv je ještě pořád plno míst, kde bychom mohli najít nějaké věci ke zlepšení, například započítat spojovací tunely mezi trasami B a C, pořádně zohlednit obratiště a odstavné koleje jakožto i jiné další technologické prostory. Například u stanice Malostranská existuje „falešná“ stanice metra, což je starý atomový kryt z padesátých let uspořádáním nijak se nelíšící od jiné průměrné stanice – ale od povodní v roce 2002 nebyl odčerpán a je zaplaven (viz http://agartha.cz/html/pruzkumy/praha/k_vlady/index.php). Někdo

³⁰V pražském metru jezdí dva základní typy souprav. České soupravy M1 na lince C a rekonstruované sovětské stroje 81-71 na linkách A a B. Fanoušci metra by nás asi za toto rozdělení nepochválili, ale pro orientaci stačí.

Tabulka 2: Přechodové úseky metra. Výšky se vztahují ke středu stanice, délky úseků jsou změřeny na <http://mapy.cz>.

linka	stanice	nadmořská výška		úsek	zatopeno		
		nást.	výstup		délka	stanice	
		m n. m.	m n. m.	m	m		
A	Dejvická	208	219				
A	Hradčanská	185	228	920	200	0	
A	Muzeum	182	216	2 800	2 800	4	
A	Náměstí Míru	199	251	750	350	1	
B	Radlická	238	248				
B	Smíchovské nádraží	182	192	1 570	220	0	
B	Hloubětín	188	214	12 590	12 590	13	
B	Rajská zahrada	248	248	1 680	60	1	
C	Kobylisy	251	283				
C	Nádraží Holešovice	183	190	2 810	290	0	
C	Florenc	180	189	2 120	2 120	2	
C	Hlavní nádraží	196	203	890	650	1	
Celkem						19 280	22

by mohl namítat, že jsme nezohlednili to, že mezi některými nezatopenými stanicemi tunel tvoří lokální minimum – ale pokud voda nateče odspodu, do tohoto minima se nedostane. Ani zmíněná Rokytkka metro nezaplaví, protože v oblasti, kde teče, se o to postará Vltava a ona sama nebude dosahovat takového průtoku, aby zvedla hladinu stoleté vody nad oněch 190 m. Na druhou stranu, metro nevede jen pod zemí, ale i v mostech (skrz Nuselský, u Kačerova, na obou koncích linky B, linka A má pro změnu povrchovou stanicí Depo Hostivař), a tam by se žádná voda neudržela.

Nakonec jako zajímavost (opět z Metrowebu) zmiňme, že po povodních v srpnu 2002 v polovině odčerpávání vody ze stanic hasiči odhadovali, že celkem jí do metra nateklo $1 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. Tehdy bylo zatopeno méně stanic (17), protože některé tlakové uzávěry se podařilo zabezpečit – to by znamenalo, že by náš odhad byl asi o 20 % špatně, ale když uvážíme třeba to, že jsme např. nijak nezohlednili přestupní tunely na Můstku a Florenci nebo existenci více výstupních eskalátorů a pravděpodobně i podstatně větší technické prostory, než umíme zjistit, můžeme náš odhad prohlásit za dobrý.

Úloha VI.1 ... ne zcela chutné pití vody

Pták Fykosák jednoho dne vypil 2 dcl vody. Uběhlo milénium a všechna voda na Zemi se stihla mezitím promíchat. Když teď pták znovu vypije 2 dcl vody, kolik molekul z vody, co vypil právě před milénium, v nich bude?

Objem vypité vody si označme $V_p = 0,21 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. Počet N_1 molekul vody v jedné takové dávce je

$$N_1 = \frac{\rho V_p}{M_{\text{H}_2\text{O}}} N_A,$$

kde $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vody, $M_{\text{H}_2\text{O}} \doteq 0,01802 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ je její molární hmotnost a $N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ Avogadrova konstanta.

Celkový objem vody na Zemi je někde mezi $1,3 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ a $1,4 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle zdroje (například $1,338 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle Wikipedie a $1,386 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$ podle U.S. Geological Survey). Označme ho V_{abs} .

Za předpokladu, že jsou částice z první dávky rovnoměrně rozloženy v celém objemu, je jejich koncentrace $c = N_1/V_{\text{abs}}$. Když pak pták Fykosák znova vypije V_p vody, tak vypije $N_2 = cV_p$ molekul ze svého přípitku před milénium, přičemž platí

$$N_1 = \frac{\rho V_p^2 N_A}{M_{\text{H}_2\text{O}} V_{\text{abs}}}.$$

Když za V_{abs} dosadíme $1,338 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$, dostáváme $N_2 \doteq 999$, tedy přibližně tisíc molekul.

Úloha VI.2 . . . roztržitý drát

Jak by musel být minimálně dlouhý ocelový drát ve stočeném stavu, aby se při volném zavěšení za jeho jeden konec přetrhl? Používáme ocelový drát o hustotě $\rho = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, průměru $D = 1 \text{ mm}$ a mezi pevnosti $\sigma_{\text{max}} = 400 \text{ MPa}$. Uvažujte, že jsme v homogenním tíhovém poli o intenzitě $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Bonus Uvažujte teď nejdelší drát, který se ještě nepřetrhne. O kolik procent se protáhne po zavěšení? Youngův modul pružnosti v tahu použité oceli je $E = 200 \text{ GPa}$.

Stalo se to snad každému z nás. Volně jste si zavěsili svůj oblíbený ocelový drát, načež se ozvala rána jako z děla a vy jste viděli, jak se sám od sebe přetrhl. Zkusme se celému případu trochu věnovat, a spočítat si, že to je prakticky nesmysl.

Předesíláme raději předem, že problematiku akustiky trhání drátů necháváme na rozmyšlení čtenáři. Co nás ale bude zajímat, je například průběh (tažného) napětí podél drátu, stejně jako zákony hovořící o vztahu mezi tímto napětím a elastickým prodloužením.

Trhání drátu

Co mohlo způsobit přetržení drátu? Zcela jistě ta jediná vnější síla na drát působící, tíhová síla. Pokud je totiž dostatečně velká, drát se už neunes a praskne. No ano, ale kde? Ve skutečnosti dráty praskají, kde se jim zlíbí, takové my ale uvažovat nebudeme. Jsme přece fyzici, máme k dispozici dokonalý drát. Ten nemá žádnou mikroskopickou poruchu, žádné průřezové fluktuační či z dřívějšíka materiálově unavené zóny. Jinými slovy, budeme se tedy zabývat fyzikou zcela homogenního tenkého ocelového válce. Takový drát pak musí prasknout u zavěšeného konce. To

proto, že tam tažné napětí dosahuje maxima. Každé místo drátu je totiž vystaveno přesně takovému napětí, aby uneslo celou část drátu, která visí pod ním. Podrobněji níže. Za zmíněných předpokladů a uvážení jednoduchého modelu drátu, který se nedeformuje vůbec nebo při deformaci nemění svůj průřez (diskuzi o Hookeově zákonu a různých i jiných modelech drátu se budeme věnovat až v dalším odstavci), můžeme postupovat přímočaře. Aby se žádný kus drátu nepohyboval, musí být výslednice sil na něj působící nulová. Proto síla, kterou musí vyvíjet průřezová ploška v každém místě drátu, je přesně rovna tíze celé části drátu pod ní, jelikož právě na tento kus již nepůsobí žádná vnější síla krom této a tíhové.³¹ Naši úvahu zapíšeme do rovnice

$$F = \rho l S g,$$

kde F značí tahovou sílu, již vyvíjí průřezová ploška na svoje okolí, pokud je ve výšce l od volného konce drátu. S je plocha průřezu a písmena ρ , resp. g značí hustotu drátu, resp. tíhové zrychlení. Jak vidno, vztah pro sílu je lineární v délce, proto bude dosahovat maxima, právě když to udělá l . Maximální napětí, které se v drátu objeví, σ_0 , je proto rovno

$$\sigma_0 = \rho h g, \quad (10)$$

kde h je délka drátu. Pokud chceme zjistit mezní délku drátu, který už praskne, stačí nám výraz v rovnici (10) dát do rovnosti s mezí pevnosti materiálu σ_{\max} . Jedná se totiž o prahovou hodnotu napětí, při které již dojde přetržení. Jednoduchou algebraickou operací získáme

$$h_{\text{mez}} = \frac{\sigma_{\max}}{\rho g}$$

a číselně $h_{\text{mez}} \doteq 5,2 \text{ km}$.

Nejkratší ocelový drát, který by se mohl takto kvůli své vlastní váze přetrhnout, měří asi 5,2 km. Kdo máte doma pouze 5 km dlouhý drát, tak bohužel, nic takového se vám nepovede.

Natahování drátu

Pokud se nám podaří zavěsit drát jen o malinko kratší, už by se, v ideálním případě, diskutovaném v prvním odstavci, neměl roztrhnout. Všechny tyto úvahy však byly vedeny pro drát, který si zachovával plochu průřezu, a tím bylo zajištěno neměnné napětí při libovolném prodloužení. Jak ale uvidíme dále, ani to nemusí být splněno vždy, obzvlášť když uvažujeme nějaký realističtější model. A jak se mezi řemeslníky říká, každá ves, jiný drát, zkusme si tedy vymyslet hned několik modelů drátu, podle toho, jak na napěťový stav reagují. Prvním příkladem může být drát, který při zvýšení napětí nedělá vůbec nic. Je to (nerealistický) model drátu, který pouze „čeká na přetrnutí“. Nazvěme si jej „drát zachovávající délku“. Naším druhým modelem bude drát, který při zvýšení (tažného) napětí reaguje prodloužením,

³¹ Jen na doplnění, jak již víme, dále tam existuje vnitřní pnutí, to však ze zákona akce a reakce nemá žádný vliv na pohyb celku. Krásný příklad za vše – ani ten největší silák nezdvihne židli, na které sedí. Je to asi tak stejně možné jako dvakrát napočítat do nekonečna nebo vyhrát Tour de France na rotopedu.

zachovává si však průřez. Říkejme mu proto „drát zachovávající průřez“. A pak tu máme další exemplář, kterým je „drát zachovávající objem“. Od něj budeme jen chtít, aby, jak název napovídá, zachovával objem. V neposlední řadě však musíme zmínit i krapet realističtější model, který má svým chováním blízko k poslednímu jmenovanému, zužuje se však podle platného zákona. Tím je tzv. Poissonův zákon, hovořící o změně plochy průřezu při podélné deformaci. Tento model nazvěme „Poissonův drát“. Pro každý z modelů teď udělejme menší komentář.

Především ale zmiňme důležitou věc. Další významná aproximace, bez které by se nám počítalo velmi nepříjemně, je linearizace vztahu mezi relativním prodloužením a napětím v celém rozsahu prodloužení materiálu. Považujme tedy všechny dráty za Hookeovské. Ve skutečnosti se před přetržením materiál dostane do plastické oblasti, kdy jsou jeho deformace nevratné, co je však pro nás důležitější, neplatí Hookeův zákon.

Drát zachovávající průřez

Poslední z dvojice drátů, pro který platí výpočet prvního odstavce. Tím prvním je drát zachovávající délku, který se však do odstavce o natahování drátu dostal nešikovností autora. Dle zmíněné aproximace platí důležitý vztah mezi napětím a relativním prodloužením, již několikrát zmíněný Hookeův zákon

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (11)$$

kde ε je relativní prodloužení a E Youngův modul pružnosti v tahu. Protože je ale v každém místě drátu jiné napětí, uvažujme nejprve prodloužení mezi dvěma dostatečně blízkými body, abychom v dobrém přiblížení mohli zanedbat tíhu úseku drátu mezi těmito body, a též uvažovat, že na prodloužení se výlučně podílí pouze síly působící na oba konce úseku. Za těchto podmínek je naše úloha již zcela lineární. Pro prodloužení Δl nám z rovnice (11) vyjde

$$d l g = E \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (12)$$

kde l_0 je počáteční délka úseku, l je výška tohoto úseku od volného konce drátu. Z této rovnice pro prodloužení malého úseku můžeme dojít k celkovému prodloužení drátu využitím integrálního počtu, který již nespádá do standardní středoškolské látky, proto doporučuji číst opatrně a pomalu. Jde nám o to, posčítat všechny ty prťavé přírůstky délky nějak chytře. Každý součin malého dílku l_0 s jeho vzdáleností od volného konce l lze reprezentovat obsahem malého obdélníčku. Pokud za sebe takového malé obdélníčky naskládáme, dostaneme útvar, který se velmi podobá trojúhelníku. Jeho obsah už ale spočítat dovedeme! Pro celkové prodloužení drátu Δh nám pak vychází

$$\Delta h = \frac{gh^2 g}{2E}.$$

Pokud uvažujeme procentuální prodloužení ε_h , chceme spočítat

$$\varepsilon_h = \frac{\Delta h}{h} \cdot 100\%,$$

číselně $\varepsilon_h \doteq 0,1\%$.

Drát zachovávající objem

V tomto případě je dobré zmínit, že kvůli změně průřezu drátu tohoto chování můžeme očekávat změny v mezní délce drátu, který se ještě nepřetrhne. Kvantitativní úvahy na toto téma však necháváme čtenáři k rozmyšlení. Nyní se však pokusíme najít vztah pro jeho prodloužení jako u předcházejícího modelu. Aby při natahování drát nezměnil objem, musí za každého počasí platit pro plochu jeho průřezu S vztah

$$S = \frac{S_0 l_0}{l_0 + \Delta l}, \quad (13)$$

kde S_0 a l_0 jsou počáteční obsah průřezu drátu a délka každého malého úseku. Jakmile tuto rovnici dosadíme do Hookova zákona (pozor, rovnice (12) už pro náš případ neplatí, jelikož uvažuje neměnný průřez), získáme pro prodloužení délkového elementu l_0 vztah

$$\Delta l = \frac{\rho l g l_0}{E - \rho l g}.$$

Abychom vás dlouho nenapínali, tady už nepomůže ani trojúhelník. Po zintegrování podle proměnné l v mezích původní délky drátu, tedy od 0 do h , získáme nádherný vztah

$$\Delta h = -h + \frac{E}{g\rho} \log \left(\frac{E}{E - gh\rho} \right),$$

k němuž je potřeba dodat drobnou poznámku. Jak jste si jistě všimli, při jistém nastavení počátečních hodnot budeme svědky logaritmu ze záporného čísla, což není vůbec pěkné. Nastává tu totiž jeden zajímavý efekt, a to ten, že pokud bude jmenovatel v logaritmu roven nule, bude se drát prodlužovat do nekonečna. Prakticky však do chvíle, než praskne. Proto pokud bude hodnota jmenovatele přímo záporná, nemá smysl prodloužení počítat.

Poissonův drát

Situace je velmi analogická té předchozí, vlastně se odlišuje pouze v míře zužování drátu. Vyjdeme přímo z Poissonova vztahu, který určuje relativní míru změny délkového rozměru průřezu (například délka strany v případě obdélníkového průřezu) při změně rozměru jiného

$$\mu\varepsilon = \frac{\Delta a}{a},$$

kde a je charakteristický rozměr průřezu a μ je tzv. Poissonovo číslo. Z binomické věty pak pro změnu plošného rozměru máme

$$\mu\varepsilon = \frac{\Delta S}{2S_0},$$

čímž dostáváme vztah pro velikost plochy průřezu nataženého drátu ve tvaru

$$S = S_0 (2\mu\varepsilon + 1),$$

neboli analogii k rovnici (13), a tím situaci úplně převádíme na předchozí případ „drát zachovávající objem“. Zbytek necháváme na dopočet nadšeným čtenářům.

Úloha VI.3 . . . utopená čočka

Jestliže do vzdálenosti p od tenké čočky vyrobené ze skla o indexu lomu n_s umístíme předmět, podaří se nám zachytit jeho obraz na stínítku ve vzdálenosti d od ní. Čočku a předmět beze změny vzájemné vzdálenosti poté ponoříme do kapaliny o indexu lomu n . Za jakých podmínek budeme nyní schopni zachytit obraz předmětu na stínítko a v jaké vzdálenosti x od čočky to bude?

Za počátečních podmínek jsme předmět, umístěný ve vzdálenosti p od čočky, viděli ve vzdálenosti d . Dopočteme tedy nejprve ohniskovou vzdálenost čočky ze zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{f}, \quad (14)$$

kde a je skutečná vzdálenost předmětu od čočky (v našem případě tedy p), a' vzdálenost, ve které vidíme zobrazený předmět (v našem případě tedy d), a f ohnisková vzdálenost naší čočky. Pro tenkou čočku můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit také pomocí poloměrů křivosti lámavých ploch (R_1 a R_2) a indexu lomu čočky n_s . Takto můžeme ohniskovou vzdálenost vyjádřit z této rovnice

$$-\frac{1}{f} = (n_s - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (15)$$

Z rovnic (14) a (15) můžeme tedy určit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{d} = (n_s - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = (n_s - 1) \sigma, \quad (16)$$

kde $\sigma = 1/R_1 - 1/R_2$ je tzv. vypuklost čočky. Vlastnosti čočky se určují ze Snellova zákona

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2.$$

Běžně předpokládáme, že se skrz brýle díváme ve vzduchu, jehož index lomu je až na nepatrnou odchylku roven jedné. Snellův zákon můžeme pro čočku ve vzduchu tedy upravit na tvar

$$\sin \alpha_1 = n_s \sin \alpha_2. \quad (17)$$

V kapalině o indexu lomu n bude tato rovnice vypadat následovně

$$n \sin \alpha_1 = n_s \sin \alpha_2.$$

Abychom se dostali znovu do tvaru (17), musíme určit takzvaný relativní index lomu – n_s/n . Výsledek s čočkou v kapalině tedy bude stejný, jako kdybychom měli ve vzduchu čočku s indexem lomu n_s/n . Pokud tedy dosadíme do rovnice (16), získáváme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) \sigma. \quad (18)$$

Pokud tedy chceme zjistit hodnotu x , musíme vyřešit soustavu dvou rovnic (16) a (18) o dvou neznámých σ a x . Tato soustava má pro x řešení

$$x = \frac{pd(n_s - 1)}{\left(\frac{n_s}{n} - 1 \right) (p + d) - d(n_s - 1)}.$$

Z tvaru řešení je zřejmé, že obraz neuvidíme v případě, že bude splněno

$$\left(\frac{n_s}{n} - 1\right)(p + d) = d(n_s - 1), \quad (19)$$

neboli

$$n = n_s \frac{p + d}{p + n_s d}.$$

V tomto případě bychom obraz zachytili až v nekonečnu. Dále požadujeme, aby-
chom byli schopni obraz zachytit na stínítku. Vzdálenost x musí být kladné číslo.
Požadujeme tedy, aby byl splněn vztah

$$\frac{pd(n_s - 1)}{\left(\frac{n_s}{n} - 1\right)(p + d) - d(n_s - 1)} > 0.$$

Pro splnění podmínky je potřeba, aby číselník a jmenovatel měli stejné znaménko.
Možnost, že obě znaménka budou záporná, můžeme vyloučit, neboť index lomu
čochky nemůže být menší než 1. Musíme tedy ověřit, kdy bude kladný číselník. To
bude v případě, kdy bude splněno

$$\left(\frac{n_s}{n} - 1\right)(p + d) > d(n_s - 1) \Rightarrow p < d \frac{n_s(n - 1)}{n_s - n}.$$

Nahlédnutím vidíme, že toto určitě nebude splněno v případě, kdy index lomu
čochky bude nižší než index lomu kapaliny. V tomto případě by se čochka chovala
nikoliv jako spojka, nýbrž jako rozptylka.

Úloha VI.4 . . . nalévání čaje do várnice v menze

*O kolik se zvýší rychlost čepování čaje v_0 , pokud je do várnice právě doléván?
Průměr várnice je D , průměr proudu dolévaného čaje je d právě při dopadu na
hladinu. Čaj naléváme z výšky h nad hladinou, která je ve výšce H nad středem
otvoru. Průměr otvoru, jímž čaj vytéká, je mnohem menší než D . Zanedbejte
veškeré tření.*

Základným vztahom, ktorý budeme používať, je Torricelliho vzorec. Ak do nádoby
žiaden čaj nedolievame, bude podľa neho výtoková rýchlosť rovná

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Ak teraz začneme nalievat čaj, ten kvôli spomaľovaniu pri dopade bude pôsobiť
dodatočným tlakom na hladinu. Budeme uvažovať zľahka nerealistický model, že
čaj sa pri dopade na hladinu úplne spomalí a odovzdá celú svoju hybnosť. Tým,
že dopadajúci čaj tlačí na čaj v nádobe tlakom p , efektívne zvyšuje hladinu o

$$\Delta H = \frac{p}{\rho g}.$$

Otázka je, môžeme takto uvažovať, ak chceme určiť výtokovú rýchlosť? Áno, mô-
žeme! Čaj pri otvore totiž nevie, čo sa deje hore na hladine, on cíti len u seba tlak.

No a tento tlak je rovnaký, či už by na hladine bola vrstva čaju s hrúbkou ΔH naviac alebo či tam ten čaj dopadá.

Ostáva nám teda určiť tlak p . Pozrime sa na krátky časový okamih Δt . Keďže čaj dopadá z výšky h , má na hladine rýchlosť

$$v_v = \sqrt{2gh}.$$

Za časový úsek Δt dopadne objem čaju (podľa vzťahu podstava krát výška)

$$\Delta V = \frac{1}{4}\pi d^2 v_v \Delta t$$

s hmotnosťou $\Delta m = \rho \Delta V$. Tento čaj má hybnosť $\Delta p = \Delta m v_v$ a sila, ktorá ho za čas Δt zastaví, musí mať veľkosť (hybnosť vody sa tu totiž mení práve o Δp)

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{4}\pi \rho d^2 v_v^2 = \frac{1}{2}\pi \rho g h d^2.$$

Táto sila sa rozloží na plochu³² $\pi D^2/4$, môžeme teda konečne vypočítať efektívne zvýšenie hladiny

$$\Delta H = \frac{F}{\rho g \pi D^2/4} = 2h \frac{d^2}{D^2}$$

a novú rýchlosť

$$v_1 = \sqrt{2g(H + \Delta H)} = \sqrt{2gH + 4gh \frac{d^2}{D^2}} = \sqrt{v_0^2 + 4gh \frac{d^2}{D^2}}.$$

Zmysel má spočítať aj pomer týchto rýchlostí

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 + 2 \frac{hd^2}{HD^2}},$$

čo vám môže pripomínať pomer nejakých objemov.

Úloha VI.5 . . . problémy baseballistů

Mějme hráče baseballu, který drží v rukou baseballovou pálku délky L a hmotnosti m a chystá se na odpal míčku. Jako vhodné přiblížení se držme toho, že hráč může otáčet pálkou jen okolo fixované osy, která je kolmá na osu páčky a prochází na jejím konci rukama odpalujícího hráče. Pálkou otáčí úhlovou rychlostí ω . V jaké vzdálenosti l od konce páčky má hráč odpálit míček, aby nárazová síla na hráčovy ruce byla co nejmenší? Pálka je tenká homogenní tyč.

Na pálku počas nárazu loptičky pôsobia tri sily. Malá radiálna sila F_d , ktorá vzniká dostredivým zrýchlením páčky. Jej pôsobenie počas nárazu nebudeme uvažovať.

³²Prečo nie na plochu $\pi d^2/4$? To by znamenalo, že v nádobe sa vytvára stĺpec vyššieho tlaku s priemerom d , čo skutočne nie je stabilný stav. Tlak sa smerom ku dnu bude priemerovať na celý prierez nádoby.

Teraz položíme pátku pri náraze loptičky na y -novú os a obmedzíme sa len na zložky síl v smere osi x . Sily F_1 (v mieste držania pátky rukami hráča) a F_r (v mieste nárazu loptičky na pátku) majú najväčší vplyv na náraz, pretože pri náraze loptičky behom pár milisekúnd drasticky spomalia pátku.

Práve $-F_1$ je nárazová sila, ktorá pôsobí na hráčove ruky. Pozrime sa, ako by sme o nej zistili niečo viac. Označme l vzdialenosť od osi otáčania pátky a miesta nárazu loptičky.

Impulz momentu hybnosti pre pátku vzhľadom na os otáčania je

$$J_1 - J_2 = \Delta L = M \Delta t. \quad (20)$$

Počiatočný moment hybnosti J_1 je $I\omega_0$, kde I je moment zotrvačnosti pátky vzhľadom na os otáčania. Po náraze má pátku moment hybnosti $J_2 = I\omega$. Moment sily M pôsobiaci na pátku počas nárazu je $M = lF_r$. Ak všetko dosadíme do rovnice (20), dostávame

$$I(\omega_0 - \omega) = I\Delta\omega = lF_r\Delta t. \quad (21)$$

Pre ťažisko pátky zase platí impulz hybnosti

$$p_1 - p_2 = F\Delta t,$$

kde F je celková sila pôsobiaca na pátku. Platí $F = F_1 + F_r$. Hybnosť ťažiska pátky pred nárazom p_1 v smere osi x je $ml'\omega_0$, kde l' je vzdialenosť ťažiska pátky od osi otáčania. Hybnosť po náraze p_2 je $ml'\omega$. Zozbieraním týchto údajov máme

$$ml'\Delta\omega = (F_1 + F_r)\Delta t. \quad (22)$$

Vylúčením F_r z rovnice (21) a dosadením do rovnice (22) dostávame

$$F_1\Delta t = \left(ml' - \frac{I}{l} \right) \Delta\omega.$$

Ak zvolíme

$$l = \frac{I}{ml'},$$

tak nárazová sila na hráčove ruky vymizne! Ak si bejzbalovú pátku predstavíme ako rovnomernú tenkú tyč s momentom zotrvačnosti $I = mL^2/3$ a vzdialenosťou ťažiska od osi otáčania $l' = L/2$, tak máme $l = 2L/3$. Nie je náhoda, že hráči bejzbalu odpaľujú loptičky približne práve v tejto vzdialenosti od osi otáčania pátky.

Úloha VI.P ... vypni to – nejde to

Kolik lidí dokáže za sekundu usmrtit nestíněný jaderný reaktor?

Ujasňme si najprve, jakými způsoby může jaderný reaktor zabíjet. Z reaktoru vychází různé typy záření, právě ty jsou smrtonosné. Jde jednak o tepelné záření, které se uvolňuje jako kinetická energie produktů rozpadu, jednak o ionizující

záření, tj. α , β a γ záření. Na wikipedii³³ najdeme poměry energií vyzářených v různých typech záření pro ^{235}U :

- Celková vyzářená energie: 202,5 MeV,
- kinetická energie jader: 169 MeV,
- kinetická energie neutronů: 4,8 MeV,
- primární γ emise: 7 MeV,
- sekundární záření β : 6,5 MeV,
- sekundární záření ν , $\bar{\nu}$: 8,8 MeV,
- a sekundární γ emise: 6,3 MeV.

Sekundární emise označuje β a γ záření vyzářené s časovým odstupem po samotném štěpení. Jde převážně o samovolný β rozpad primárních produktů štěpení.

Vidíme, že $\sim 86\%$ energie se uvolňuje ve formě tepla, dále $\sim 6,5\%$ v γ záření a nakonec $\sim 4,5\%$ v β záření. Neutrino nemusíme uvažovat, protože interagují pouze velmi slabě a člověku nijak neublíží (naprostá většina z nich projde Zemí, aniž by interagovala). Protože neutrony ztratí většinu své energie v moderátoru a též je potřebujeme na udržení jaderného reaktoru v chodu, nebudeme je dále uvažovat.

Budeme uvažovat reaktor výkonem odpovídající temelínské elektrárně. Její výkon je 1 GW, proto celkový (tepelný)³⁴ výkon reaktoru je ~ 3 GW.

Nejdříve odhadneme energii v tepelném záření, která by byla pro člověka smrtelná. Budeme uvažovat, že člověk má stejnou tepelnou kapacitu jako voda a že smrtelné je zvýšení tělesné teploty o 6°C . Při hmotnosti 70 kg je potřebná energie $E_{\text{st}} \approx 1,8$ MJ. Proto tepelná energie způsobí přehřátí přibližně 1 700 lidí za sekundu.

Nyní se zaměříme na ionizující záření. Dle³⁵ je fatální dávka ionizujícího záření 8 Sv, kde Sv je jeden sievert³⁶ jednotka udávající dávku záření. Vidíme, že pro fotony a elektrony je radiační váhový faktor jednotkový. Zde je též vidět další důvod, proč nemusíme uvažovat neutrony: Tepelné neutrony³⁷ mají energii pouze několik elektronvoltů, tj. asi jednu miliontinu původní energie; i přes relativně velký váhový faktor je tedy můžeme zanedbat.

Ze smrtelné dávky ionizujícího záření a výše uvažované hmotnosti „testovací“ osoby jednoduše zjistíme, že smrtelných je již $E_{\text{si}} \approx 560$ J obdržených skrze ionizující záření. Z tohoto vyplývá, že máš reaktor by dokázal usmrtit přibližně 500 000 lidí každou sekundu.

Vidíme, že tepelné záření je naprosto neškodné, i když je ve skoro desetinásobné převaze. Zde je potřeba podotknout, že nešlo o výpočet, ale spíše o odhad, proto je potřeba brát výsledek pouze jako řádový odhad. Na druhou stranu není důvod se čehokoli obávat, stínění reaktoru pohltí naprostou většinu emitovaného záření a ven se nedostane více, než kolik vyzářuje sama Země.

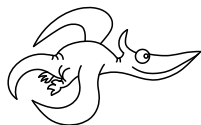
³³http://en.wikipedia.org/wiki/Nuclear_fission

³⁴Účinnost je odhadnutá, tedy zde můžeme zaměnit celkový a tepelný výkon, protože se liší pouze o několik málo procent, viz též <http://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrárna>.

³⁵<http://www.xkcd.com/radiation>

³⁶<http://cs.wikipedia.org/wiki/Sievert>

³⁷<http://cs.wikipedia.org/wiki/Neutron>



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... tři šedé vlasy dědy Aleše

8 bodů

Pokuste se určit některé napěťové charakteristiky v tahu u lidského vlasu. Z vašeho pokusu sestavte co nejpodrobnější graf závislosti použité síly na prodloužení vlasu; z něj potom určete graf závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení. Pokuste se z něj vyčíst/odhadnout mez pevnosti, případně i jiné charakteristiky. Měření opakujte alespoň na 3 vlasech stejné osoby.

Nápovědy Vhodné jsou hodně dlouhé vlasy – pokud sami takové nemáte, určitě není problém takové sehnat. Průměr vlasu můžete změřit ve škole pomocí mikrometru nebo pomocí laseru. Jako závaží můžete použít mince, které mají docela dobře definované hodnoty hmotnosti. (řešení str. 78)

Úloha II.E ... listopadová

8 bodů

Určete průměrnou plochu listu vámi vybraného stromu (či keře). Nezapomeňte na statistické zpracování vašich dat. Odhadněte, kolik energie ze slunečního záření může váš strom použít pomocí chlorofylu na tvorbu cukrů za jeden den, rok.

(řešení str. 82)

Úloha III.E ... válení sudů

8 bodů

Změřte závislost rychlosti na čase plechovky, která je zcela zaplněná vodou a která se rozjíždí z klidu po nakloněné rovině. Použijte nakloněnou rovinu, která je dlouhá alespoň dva metry a je rovná, bez hrbolů a není prohnutá. Experiment můžete realizovat například natočením a zpracováním videí či měřením doby, za kterou plechovka sjede vždy určitý úsek dráhy.

(řešení str. 86)

Úloha IV.E ... nástěnkový boj brček

8 bodů

Když si vezmete běžné plastové brčko (slámku) a otřete ho kapesníkem, dokážete brčko nabít tak, že bude dokonce držet na některých stěnách a nástěnkách díky svému náboji. Vysvětlete jev a odhadněte, jak velký náboj dokážete na brčku vytvořit.

Nápověda Hodilo by se použít dvě brčka.

(řešení str. 91)

Úloha V.E ... Vypař se!

8 bodů

Určete, jak závisí rychlost vypařování vody na povrchu, který tato kapalina zaujímá. Experiment proveďte alespoň pro pět různých vhodných nádob. Zamyslete se nad dalšími faktory, které mohou rychlost vypařování vody ovlivnit. Upozorňu-

jeme, že experiment je velmi vhodné nechat probíhat po delší dobu (několik dní), proto ideálně začnete o hodně dříve než pár hodin před uzávěrkou.

(řešení str. 93)

Úloha VI.E ... ztroskotání balónu

8 bodů

Když pustíte nafukovací balónek z výšky, po chvíli bude padat s přibližně konstantní rychlostí. Změřte, jak závisí tato rychlost na velikosti balónku a na hmotnosti závaží, které pod něj zavěsíte.

(řešení str. 100)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... tři šedé vlasy dědy Aleše

Pokuste se určit některé napěťové charakteristiky v tahu u lidského vlasu. Z vašeho pokusu sestavte co nejpodrobnější graf závislosti použité síly na prodloužení vlasu; z něj potom určete graf závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení. Pokuste se z něj vyčíst/odhadnout mez pevnosti, případně i jiné charakteristiky. Měření opakujte alespoň na 3 vlasech stejné osoby.

Nápovědy Vhodné jsou hodně dlouhé vlasy – pokud sami takové nemáte, určitě není problém takové sehnat. Průměr vlasu můžete změřit ve škole pomocí mikrometru nebo pomocí laseru. Jako závaží můžete použít mince, které mají docela dobře definované hodnoty hmotnosti.

Teorie

Pro určení napětí v tahu je vhodná jednoosá napjatost vlasu, která vznikne působením síly F na vlas v potřebném směru. Přijatelnou silou z hlediska nenáročnosti vybavení a určení její velikosti a směru působení je síla tíhová F_G . Vlas délky l_0 se při zatížení závažím o hmotnosti m , tedy při působení síly $F_G = mg$, prodlouží na délku l_n , přičemž se taktéž původní průřez vlasu S_0 zmenší na S_n . Hodnotu prodloužení vlasu Δl získáme rozdílem jeho délky při daném zatížení l_n a jeho původní délky l_0 , $\Delta l = l_n - l_0$. Pro zjištění závislosti napětí σ_p na relativním prodloužení vlasu ε je nutno tyto dvě veličiny určit. V praxi se v podobných tahových zkouškách používá takzvané smluvní napětí σ_p , které vyjadřuje vztah $\sigma_p = F/S_0$, jeho hodnota může i klesat (často u kovů a jejich slitin), ačkoliv skutečné napětí se zvětšující se silou až do okamžiku prasknutí roste, neboť nezohledňuje změnu (zmenšování) průřezu na S_n , ale vztahuje se k průřezu původnímu S_0 . Relativní prodloužení ε lze získat ze vztahu $\varepsilon = \Delta l/l_0$. Ze získaného tahového diagramu (závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení) lze poté pozorovat, zda a do jaké hodnoty napětí se u napínaného vlasu uplatňuje Hookeův zákon.

Abychom však tahový diagram získali, je nutné před samotným experimentem změřit další potřebnou veličinu, průřez vlasu S_0 . Jeho hodnotu lze získat na základě měření mikrometrem nebo pomocí laseru za předpokladu, že považujeme vlas za váleček. Vzhledem ke zkušenostem z dřívějšího experimentu byl upřednostněn laser, neboť výsledky mikrometru se od těch získaných pomocí laseru poměrně výrazně lišily, což bylo pravděpodobně způsobeno větší invazivností vůči vzorku při měření mikrometrem (vlas se zmáčkne, čímž se jeho skutečný průměr zmenší). Využít k tomuto účelu laseru je navíc fyzikálně mnohem zajímavější. Svitíme-li laserem

přes vlas na stínítko, pak pro svazek laseru dopadající pod úhlem α platí

$$\sin \alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d} = \frac{l_k}{\sqrt{h^2 + l_k^2}},$$

kde d je tloušťka (průměr) vlasu, k , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, je číslo maxima vzniklého difrakčního obrazce, h je vzdálenost vlasu od stínítka, l_k je vzdálenost k -tého maxima od hlavního maxima a λ je vlnová délka použitého laseru. Pro výpočet tloušťky vlasu d tedy platí

$$d = \frac{\sqrt{h^2 + l_k^2}}{l_k} \cdot k \cdot \lambda.$$

Měření

K experimentu bylo použito pěti delších rovných vlasů stejné osoby, u kterých byla nejdříve zjišťována jejich tloušťka d , respektive průřez S_0 . Krátký kousek každého z vlasů byl lepící páskou připevněn do pěti „okýnek“ z kartonu tak, aby možné přes něj posvítit laserem ($\lambda = 532$ nm, zelený) bez interakce laseru s jinými objekty. Laser byl položen na zvýšené místo (parapet) a podložen tak, aby svítil přibližně do středu délky vlasu upevněného v kartonu, který byl postaven do těsné blízkosti před něj a stabilizován kolíčky na prádlo. Poté byl laser zapnut a u difrakčního obrazce vzniklého na stínítku byly změřeny vzdálenosti vedlejších maxim od maxima hlavního, jejichž hodnoty jsou zapsány v tabulce 3. Byla také změřena vzdálenost od měřeného vzorku vlasu ke stínítku $h = 309$ cm. S využitím naměřených údajů byly dopočítány tloušťky vlasů d_n ve všech změřených maximech a jako tloušťka vlasu d byl určen jejich aritmetický průměr, poté byl z této veličiny dopočítán průřez vlasu S_0 , $S_0 = \pi d^2/4$, a taktéž zapsán do tabulky.

Dále se pokračovalo samotnou tahovou zkouškou všech pěti vlasů, každý z nich byl postupně přilepen lepící páskou k okraji stolu, poté byl malý kousek izolopy přilepen přibližně do poloviny délky visícího vlasu a byla změřena délka nezatíženého vlasu (hmotnost izolopy byla zanedbána) od okraje stolu k danému kousku izolopy. Posléze byly do místa vlasu s izolopou jednotlivě přilepovány jednorukové mince o hmotnosti $m = 3,6$ g jako závaží a po každém přidání mince byla měřena aktuální délka vlasu. Takto bylo postupováno až do chvíle, kdy vlas po přidání další mince prasknul (délku už tedy nebylo možno změřit), mez pevnosti vlasu lze proto hledat v intervalu smluvních napětí vyvolaného tíhovou silou po přidání předposlední mince a tíhovou silou po přidání poslední mince, která vyvolala prasknutí vlasu (příslušné napětí již není uvedeno v tabulce).

Výsledky

Ze zjištěných hodnot byly pro každý vlas vytvořeny tahové diagramy (obrázek 12), u nichž lze zpočátku s trochou fantazie pozorovat uplatnění Hookeova zákona, proto lze lineární regresí několika prvních bodů získat Hookeovy přímky. Youngův modul pružnosti E lze určit ze směrnice u rovnice dané přímkou získané regresí pro každý vlas. Meze pevnosti vlasů σ_p jsou stanovovány podle napětí, při kterém vlas prasknul (k prasknutí došlo při zatížení daným počtem mincí téměř okamžitě,

Tabulka 3: Určení průřezů vlasů S_0

vlas č.	1.	2.	3.		4.	5.	$\frac{d}{\mu\text{m}}$	$\frac{S_0}{\text{mm}^2}$
			maximum cm					
1	3,2	5,4	7,5	9,8	11,9	76,3	$4,57 \cdot 10^{-3}$	
2	2,4	3,7	5,2	6,6	8,6	108,4	$9,24 \cdot 10^{-3}$	
3	2,8	5,0	7,1	9,0	11,1	84,2	$5,57 \cdot 10^{-3}$	
4	3,7	5,8	8,2	10,5	12,7	69,9	$3,84 \cdot 10^{-3}$	
5	3,4	5,6	8,0	10,3	12,5	72,4	$4,12 \cdot 10^{-3}$	

proto není možné určit konkrétní hodnotu meze pevnosti σ_p , neboť napětí se měnilo velmi skokově, lze však říci, že mez pevnosti σ_p lze hledat v intervalu ohraničeného hodnotou napětí, které vyvolalo prasknutí vlasu, a hodnotou napětí, které mu předcházelo), výsledky jsou v tabulce 4.

 Tabulka 4: Výsledky pro jednotlivé vlasy (pro σ_p je uveden interval odhadu)

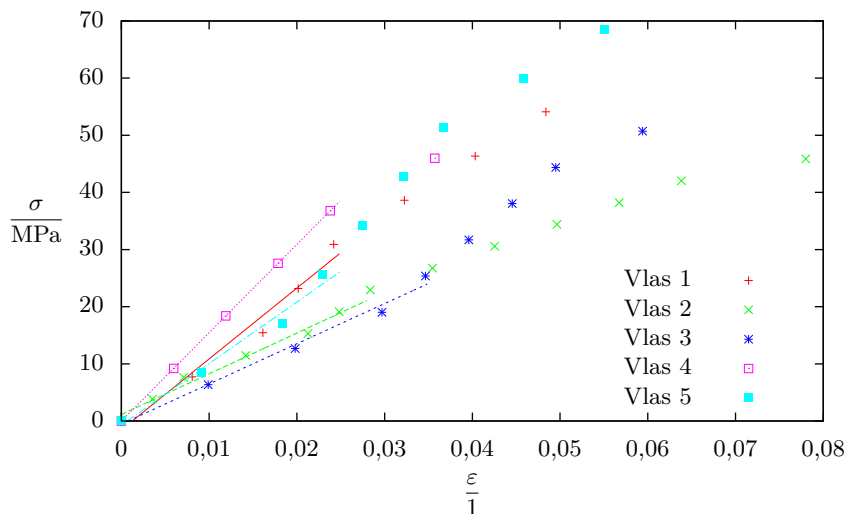
vlas č.	$\frac{E}{\text{MPa}}$	$\frac{\sigma_p}{\text{MPa}}$
	1	1 200
2	700	(45; 50)
3	700	(50; 58)
4	1 500	(45; 56)
5	1 100	(68; 78)

Diskuze

Je dobré zmínit, že naše provizorní tahová zkouška se liší od standardních zkoušek tahem, a to v tom, že u skutečné zkoušky tahem se mění prodloužení a měří se síla, zatímco zde byla měněna síla a měřeno prodloužení, čili bylo postupováno zcela opačně. Standardní zkouška tahem také patří do skupiny statických zkoušek materiálů, u kterých se prodloužení mění velmi pomalu, zatěžování je tedy kvazistatické, kdežto u naší zkoušky částečně dynamické, kvůli postupnému přidávání mincí. Dále také stojí za povšimnutí, že ačkoliv se jedná o vlasy stejné osoby, výsledné Youngovy moduly pružnosti E a meze pevnosti σ_p se pro jednotlivé vlasy poměrně výrazně liší, což může být způsobeno různou kvalitou vlasů, eliptickým tvarem průřezu vlasů u evropské populace či jinými faktory.

Závěr

Ze získaných tahových diagramů lze usuzovat na platnost Hookeova zákona pro lidské vlasy v počátcích tahového diagramu. Dále se podařilo přibližně určit Youngův modul pružnosti a intervaly meze pevnosti pro jednotlivé použité vlasy.



Obr. 12: Závislosti smluvního napětí na relativním prodloužení vlasu

Tabulka 5: Výsledky měření postupně pro jednotlivé vlasy.

počet mincí	$\frac{l}{\text{mm}}$	$\frac{\Delta l}{\text{mm}}$	$\frac{F}{\text{N}}$	$\frac{\sigma}{\text{MPa}}$	ϵ
0	124	0	0	0	0
1	125	1	0,035	7,73	0,008
2	126	2	0,071	15,45	0,016
3	126,5	2,5	0,106	23,18	0,020
4	127	3	0,141	30,91	0,024
5	128	4	0,177	38,64	0,032
6	129	5	0,212	46,37	0,040
7	130	6	0,247	54,10	0,048
0	141	0	0	0	0
1	141,5	0,5	0,035	3,82	0,004
2	142	1	0,071	7,64	0,007
3	143	2	0,106	11,47	0,014
4	144	3	0,141	15,29	0,021
5	144,5	3,5	0,177	19,11	0,025
6	145	4	0,212	22,93	0,028
7	146	5	0,247	26,75	0,036
8	146,5	5,5	0,283	30,58	0,043
9	147	6	0,318	34,40	0,050

10	148	7	0,353	38,22	0,057
11	149	8	0,388	42,04	0,064
12	151	10	0,424	45,86	0,078
0	101	0	0	0	0
1	102	1	0,035	6,34	0,001
2	103	2	0,071	12,68	0,020
3	104	3	0,106	19,02	0,030
4	104,5	3,5	0,141	25,36	0,035
5	105	4	0,177	31,70	0,040
6	105,5	4,5	0,212	38,04	0,045
7	106	5	0,247	44,38	0,050
8	107	6	0,283	50,72	0,059
0	84	0	0	0	0
1	84,5	0,5	0,035	9,20	0,006
2	85	1	0,071	18,39	0,012
3	85,5	1,5	0,106	27,59	0,018
4	86	2	0,141	36,79	0,024
5	87	3	0,177	45,98	0,036
0	109	0	0	0	0
1	110	1	0,035	8,57	0,009
2	111	2	0,071	17,14	0,018
3	111,5	2,5	0,106	25,72	0,023
4	112	3	0,141	34,29	0,028
5	112,5	4,5	0,177	42,86	0,032
6	113	4	0,212	51,43	0,037
7	114	5	0,247	60,00	0,046
8	115	6	0,283	68,57	0,055

Úloha II.E ... listopadová

Určete průměrnou plochu listu vámi vybraného stromu (či keře). Nezapomeňte na statistické zpracování vašich dat. Odhadněte, kolik energie ze slunečního záření může váš strom použít pomocí chlorofylu na tvorbu cukrů za jeden den, rok.

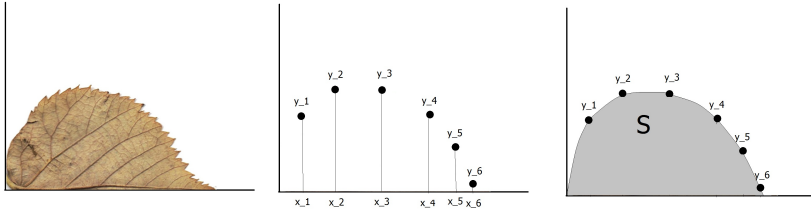
Tato úloha má dvě části, jedna je trochu matematická, druhá je trochu biologická. K našemu pokusu jsme si vybrali buk a javor v parku na Kraví hoře v Brně a z každého stromu nasbírali pokud možno reprezentativní vzorek asi 10–15 listů.

Plocha listu jde určit mnoha různě přesnými způsoby, některé jsou uvedeny a některé i vyzkoušeny v první části vzoráku. Nepřesnosti uvedených metod jsou ale mnohem menší než rozdíly v plochách mezi jednotlivými listy, není proto třeba metody šperkovat do přehnané přesnosti.

Určení plochy listu

Čtverečkový papír Tohle je asi nejjednodušší, v případě jednoho listu i nejrychlejší, způsob – položíme list na čtverečkový papír, obtáhneme a spočítáme, kolik zabere čtverečků. Jak se vyrovnat s nerovnými okraji? Můžeme si pro ně stanovit pravidlo, že budeme odhadovat, jestli list zabere čtvereček nebo půlku čtverečku nebo čtvereček vůbec nezabere. Nebo spočítáme, kolik čtverečků zabere pouze úplně, kolik úplně + alespoň trochu a z těchto dvou čísel uděláme aritmetický průměr. Je jasné, že čím menší list a větší čtverečky vezmeme, tím větší chyby se dopustíme. Nicméně pro velké množství listů je to vcelku pracná metoda, když se dělá ručně.

Interpolování a integrace Pokud máme hladký (nejlépe se spojitou derivací okraje) a symetrický list, jako třeba buk, můžeme si ho rozdělit podél osy (procházející řapíkem) na dvě části, a obsah každé zjišťovat zvlášť. Řapíkovou osu ztotožníme s osou x , okraj listu dáme třeba do počátku kartézské soustavy souřadnic. Zvolíme si na okraji listů několik hodnot y , ke kterým najdeme hodnoty x – budeme tedy mít několik bodů $[x, y]$, kterými můžeme proložit vhodný polynom a ten potom (zase třeba numericky) zintegrovat mezi okraji listu. Princip je znázorněn na obrázku.



Obr. 13: Metoda interpolování a integrace

Monte Carlo Další, trochu programovací, možností je použití metody Monte Carlo. Naskenujeme list na papíře do počítače, budeme tedy mít list na pozadí o známé ploše. Napíšeme si program, který bude rovnoměrně a náhodně (!) vybírat body z celé plochy a pro každý bod rozhodne, jestli do listu patří, nebo ne. Potom z poměru počtu bodů v listu ku počtu bodů celkem zjistíme obsah plochy listu.

Počítání pixelů Pro naše měření jsme si vybrali tento způsob. Je to v podstatě čtverečková metoda v menších rozměrech – list naskenujeme na papír A4 o známé ploše. Naskenovaný obrázek (například v programu Gimp) upravíme tak, že tam, kde je list, bude černá plocha, a jinde bílá. Pak už jednoduše, třeba pomocí histogramu, určíme podíl černých pixelů a všech pixelů a z toho spočítáme obsah listu.

$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$	$\frac{S_{A4}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{px}}$	$\frac{S_{\text{list}}}{\text{cm}^2}$
			8 619 072	3 252 809	235
			8 670 080	2 068 239	149
			8 670 080	838 180	60
			8 722 928	786 776	56
			8 675 040	1 608 507	116
			8 675 040	1 466 428	105
			8 842 944	1 370 373	97
			8 842 944	1 279 372	90
			8 842 944	1 152 676	81
			8 638 784	784 268	57
			8 638 784	630 905	46
			8 638 784	749 055	54
			8 600 088	2 145 590	156
			8 600 088	1 511 269	110
			8 684 362	2 567 299	184
			8 530 098	1 804 438	132
			8 530 098	1 171 948	86
			8 530 098	872 321	64
			8 513 940	1 499 103	110
			8 513 940	1 159 501	85
			8 705 398	1 139 623	82
			8 705 398	1 823 675	131
			8 457 475	871 670	64

Tabulka 6: Měření plochy listů

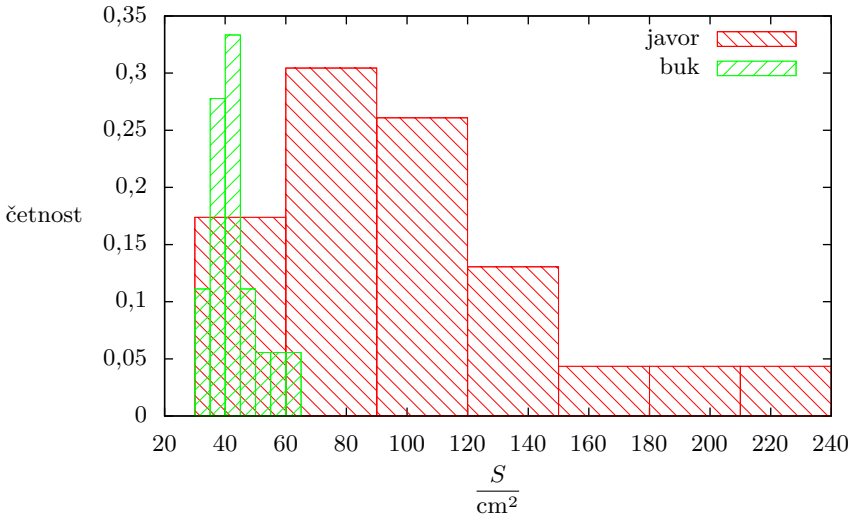
Zpracování dat V tomto případě nemůžeme použít obvyklé zpracování (aritmetický průměr, výběrová směrodatná odchylka, atd.), protože hodnoty nespĺňují tzv. normální neboli Gaussovo rozložení. My neměříme spoustu hodnot, které by se měly blížit jisté jedné hodnotě, ale listy mají prostě různou svou velikost, která se během jejich života mění a my jsme je zastihli zrovna v nějaké fázi. Podíváme-li se na histogramy, vidíme, že Gaussovo rozdělení nespĺňují.

Vhodným popisem výsledku bude medián. Ten zjistíme, když seřadíme všechny naměřené hodnoty podle velikosti a vezmeme tu prostřední (v případě sudého počtu hodnot aritmetický průměr dvou prostředních).

$$S_b = 40 \text{ cm}^2, \quad S_j = 86 \text{ cm}^2.$$

Odhad energie

U obou vybraných stromů jsme odhadli počet listů n : $n_{\text{buk}} = 2000$, $n_{\text{javor}} = 5000$. Celková plocha listů na stromě bude $2nS$, protože fotosyntéza může probíhat na obou stranách listu.



Obr. 14: Histogramy z měření plochy listů

O množství energie, které k nám přijde ze Slunce, hovoří solární konstanta, její hodnota se zhruba rovná $1367 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Konkrétní množství sluneční energie dopadající na dané místo na Zemi je ale menší, zejména kvůli zemské atmosféře. Průměrná hodnota je rovna asi čtvrtině solární konstanty³⁸ – $P_S = 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

V listech jsou chloroplasty, na kterých probíhá fotosyntéza – strom chytá energii ze slunečního záření a přeměňuje ji na jiné formy energie – rovníci



všichni známe. Nicméně ne všechna energie, která na list dopadne, se skutečně využije. Účinnost fotosyntézy se typicky pohybuje jen okolo 0,1%–2%.³⁹ Počítejme s $\eta = 0,1\%$. Tak malá účinnost je způsobena několika faktory, nejdůležitější zkusíme vyjmenovat:

- Fotosyntéza funguje pouze pro světlo o vlnových délkách 400 nm–700 nm, ale na list dopadá celé sluneční záření s větším rozsahem vlnových délek.
- Když už na list dopadne světlo s vlnovou délkou 400 nm–700 nm, list si ho upraví tak, aby mělo potřebných 700 nm.

³⁸Solární konstanta. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z http://cs.wikipedia.org/wiki/Sol%C3%A1rn%C3%AD_konstanta

³⁹Photosynthetic efficiency. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Photosynthetic_efficiency

- List neabsorbuje dokonale všechny vhodné fotony, které na něj dopadnou – některé se třeba odrazí nebo prostě nejsou úplně využity, protože dopadnou pod velkým úhlem.
 - Část vyrobené glukózy se spotřebuje na energii pro další fáze fotosyntézy.
- Teď už můžeme spočítat, kolik sluneční energie tedy náš strom využije na tvorbu cukrů za den – dejme tomu, že strom je osvětlen po dobu $t = 12$ h:

$$E_{\text{den, buk, 12h}} = \eta \cdot S \cdot P_{\text{S}} \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 2000 \cdot 40 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s} = 2,4 \cdot 10^5 \text{ J},$$

$$E_{\text{den, javor, 12h}} = \eta \cdot S \cdot P_{\text{S}} \cdot t = 0,001 \cdot 2 \cdot 5000 \cdot 86 \text{ cm}^2 \cdot 342 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 12 \cdot 3600 \text{ s} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Chceme-li odhadnout hodnoty za celý rok, musíme si uvědomit, že strom má listy pouze asi 8 měsíců v roce (přibližně duben – listopad), z toho na podzim už nejsou zelené, takže i fotosyntéza probíhá méně. Uvažujme efektivní počet měsíců 5,5. Slunce tyto měsíce nesvítí celý den, průměrně řekněme 14 hodin. Ne všechny dny je slunečno – proto se ještě přijatá energie sníží o koeficient přibližně 0,4.⁴⁰

$$E_{\text{rok, buk}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, buk, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J},$$

$$E_{\text{rok, javor}} = 0,4 \cdot E_{\text{den, javor, 14h}} \cdot \frac{365 \cdot 5,5}{12} = 9,9 \cdot 10^7 \text{ J}.$$

Úloha III.E . . . válení sudů

Změřte závislost rychlosti na čase plechovky, která je zcela zaplněná vodou a která se rozjždí z klidu po nakloněné rovině. Použijte nakloněnou rovinu, která je dlouhá alespoň dva metry a je rovná, bez hrbolů a není prohnutá. Experiment můžete realizovat například natočením a zpracováním videí či měřením doby, za kterou plechovka sjede vždy určitý úsek dráhy.

Teorie

Teorii si zjednodušíme tak, abychom mohli použít zákon zachování energie. Nebudeme tedy uvažovat odpor vzduchu, valivý odpor a ani zahřívání kapaliny vyvolané jejím vnitřním třením. Polohová potenciální energie E_p se v našem modelu zcela přemění v kinetickou energii translační (posuvnou) E_t a rotační E_r . Dále předpokládáme, že plechovka neprokluzuje, valí se po desce a je s ní neustále v kontaktu.

Označíme-li délku nakloněné roviny d , sklon nakloněné roviny α , tíhové zrychlení g , celkovou hmotnost plechovky i s náplní m , rychlost plechovky v nejnižším místě nakloněné roviny v , moment setrvačnosti plechovky s vodou J , poloměr plechovky R a úhlovou rychlost otáčení plechovky ω , pak platí

$$E_p = E_t + E_r, \quad v = \omega R,$$

⁴⁰Sluneční energie. [online]. [cit. 2012-11-09]. Dostupné z http://www.solarniobchod.cz/clanek_1.php

$$E_p = mgd \sin \alpha, \quad E_t = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_t = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Po vyjádření z rovnic dostáváme vztah pro rychlost na konci dráhy

$$v = \sqrt{\frac{2mgd \sin \alpha}{m + \frac{J}{R^2}}},$$

respektive tento vztah platí i tak, že místo d můžeme dosadit jinou vzdálenost na nakloněné rovině a dostáváme rychlost v tomto bodě.

Jak ovšem chápat moment setrvačnosti v našem případě? Voda se v plechovce jistě neroztáčí všechna najednou, ale postupně se (díky tření, které jinak zanedbáváme) roztáčí. Teoreticky, pokud by se vnitřní tření neuplatnilo vůbec, pak by se otáčela pouze plechovka, kdežto voda uvnitř by se pohybovala jenom translačním pohybem a J by bylo velmi malé, prakticky zanedbatelné. Rychlost by pak byla $v_{\max} = \sqrt{2gd \sin \alpha}$. Na druhou stranu, kdyby se jednalo o homogenní plný váleček, tak by moment setrvačnosti byl $J = mr^2/2$, pokud bychom opět zanedbali lehkou plechovku, a rychlost by byla $v_{\text{val}} = \sqrt{4/3 \cdot gd \sin \alpha}$. Reálně nastane něco mezi těmito dvěma mezními možnostmi – tzn. voda se bude v plechovce pozvolna roztáčet.⁴¹ Navíc se uplatní i zanedbané odporové síly, takže zrychlení, kterého plechovka dosáhne, bude nižší.

Důležitým prvkem naší teorie je, že rychlost roste s druhou odmocninou vzdáleností, kterou plechovka urazí. Stejně jako např. volný pád či jakýkoliv rovnoměrně zrychlený pohyb. Tím pádem by rychlost měla růst lineárně se zrychlením někde mezi $g \sin \alpha$ (sjíždění bez valení) a $2/3 \cdot g \sin \alpha$ (valení plného válce). Vzhledem k přítomnosti odporových sil, které jsou navíc závislé na velikosti rychlosti, však můžeme očekávat, že průběh nebude dokonale lineární a že zrychlení bude nižší než vypočtené z teorie.

Z měření však můžeme vypočítat efektivní moment setrvačnosti válce naplněného vodou J_{ef} . Ten můžeme určit ze vztahu $v = at$ a po pár úpravách

$$J_{\text{ef}} = mR^2 \left(\frac{g \sin \alpha}{a} - 1 \right),$$

kde a je naměřené zrychlení válce.

Měření

K měření byla použita smrková deska o délce $d = (2,330 \pm 0,005)$ m. Zadání si žádalo neprohnutou, rovnou desku. Pokud bychom to brali do důsledků, tak takovou desku nemůžeme najít, protože každá se pod naší plechovkou mírně (byť mikroskopicky) prohne. Zadání bylo míněno tak, aby byla použita právě taková deska, aby prohnutí nebylo okem pozorovatelné, což pro námi použitou desku platilo.

⁴¹ Přesnější popis by vyžadoval uvážení rozměrů plechovky a vlastností použité vody, zejména její viskozity. Také by se mohlo stát, že voda v plechovce by byla při umístění na nakloněnou rovinu v rotačním pohybu, i když je zvenčí zdánlivě v klidu, a to bychom pak museli také zahrnout do svých výpočtů. Takovými vlivy se nebudeme dále zabývat, ale budeme si vědomi, že takové případy mohou nastat při sestavování experimentu a při zpracování výsledků.

Deska byla podložena dřevěným špalkem a to tak, že vertikální rozdíl mezi horní hranou nakloněné roviny a jejím spodním koncem⁴² byl $h = (81 \pm 1)$ cm. Výsledný úhel sklonu roviny vůči vodorovné rovině po započtení přenosu chyb⁴³ byl $\alpha = \arcsin(h/d) = (20,3 \pm 0,3)^\circ$.

Pro experimenty byly použity dvě válcové nádoby. První byla plastová uzavíratelná nádoba, která se dala snadno zcela zaplnit vodou a uzavřít. Druhou experimentální nádobou byla sice plechovka podle zadání, ale obsahující psí krmení, prostě psí konzerva. Naměřené vnější poloměry plechovek a jejich hmotnosti jsou v tabulce 7. Abychom měli srovnání i s dutým válcem, které by mohlo být zajímavé, tak jsme měřili plastový válec jak zcela naplněný vodou, tak prázdný.⁴⁴

Tabulka 7: Tabulka rozměrů a hmotností experimentálních válců

válec	$\frac{R}{\text{mm}}$	$\frac{m}{\text{kg}}$
plastový prázdný	$43,0 \pm 0,25$	$0,0420 \pm 0,0005$
plastový naplněný vodou	$43,0 \pm 0,25$	$0,9710 \pm 0,0005$
psí krmení	$51,0 \pm 0,25$	$1,3850 \pm 0,0005$

Měření bylo provedeno formou videozáznamu a následné analýzy v počítačovém programu Tracker. Snímkování kamery bylo 29 snímků za sekundu. Experiment byl vícekrát opakován a to tak, aby u každé plechovky byl úspěšně zpracovaný sjezd z téměř celé nakloněné roviny. Při experimentálním provedení se totiž situace komplikovala tím, že ne vždy válec sjížděl zcela rovně a v některých případech z nakloněné roviny spadl, taková měření jsme ale pro další zpracování neuvažovali.

V grafu 15 je pro přehlednost zanesena pouze závislost rychlosti na čase u plně plechovky, jak bylo požadováno v zadání úlohy. Jak je vidět, tak data relativně dobře leží na přímce, kromě toho, že tam vidíme určitý šum, ale ten je způsoben metodou zpracování – rychlost plechovky se počítá numericky z jednotlivých poloh

⁴²Samozřejmě jsme neopomenuli použít vodováhu, abychom zjistili, jestli je terén, na kterém pokus probíhal, dostatečně rovný.

⁴³Pro zvědavé – po chvíli odvozování (zderivování a drobných úpravách) z obecného

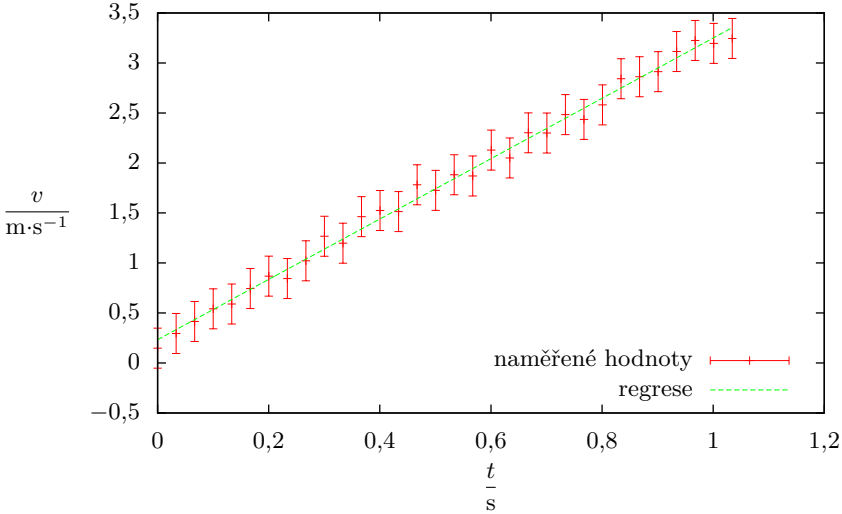
$$\Delta y(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2},$$

kde y je veličina vypočtená z veličin x_i , kterých je n , Δy je vypočtená chyba určení y a Δx_i jsou chyby x_i .

$$\Delta \alpha = \frac{1}{1 - \left(\frac{h}{d}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{\Delta h}{d}\right)^2 + \left(2 \frac{h^2}{d^3}\right)^2 \Delta d^2}.$$

Pokud ještě nevládáte tento vysokoškolský výpočet, tak kvůli tomu experimentálky nevdávejte a místo poctivého výpočtu chybu alespoň kvalifikovaně odhadněte – například dosadte tak, aby zlomek h/d byl co největší a co nejmenší a vezměte polovinu rozdílu hodnot $\arcsin(h/d)$ vypočtených těmito způsoby. V tomto případě dostanete prakticky stejnou chybu měření.

⁴⁴Do situací mezi plně naplněným a prázdným jsme se již nepouštěli, protože v takovém případě se situace s prouděním v plechovce ještě dále významně komplikuje.



Obr. 15: Graf závislosti rychlosti válce naplněného vodou sjíždějícího z nakloněné roviny v závislosti na čase

plechovky v čase, které program neurčí zcela přesně. Tyto relativně malé chyby v určení polohy pak vedou k viditelným chybám v určení okamžité rychlosti (někdy to vypadá, že rychlost i poklesla), ale můžeme je použít v této podobě velice dobře pro určení směrnice a tedy zrychlení v průběhu pohybu a tím pádem i pro relativně dobrý popis děje. V grafu jsou chybové úsečky, ale pouze na ose y , protože chyba určení času měření je relativně malá vůči samotným velikostem bodů. Chyba určení rychlosti v jednotlivých časových intervalech je odhadnuta na $0,2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Byla určena z odhadu nepřesnosti určení polohy válce na dvou po sobě následujících snímcích. Uvažovali jsme, že při počítačové analýze trajektorie bude chyba zhruba 2 pixely na každém snímku.

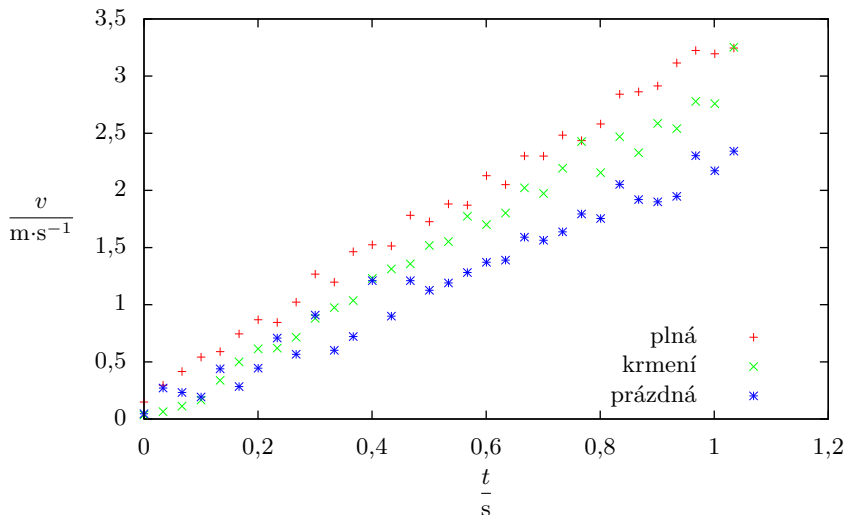
V grafu 16 jsou pro srovnání všechna tři měření (plný váleček, prázdný váleček a psí krmení), ale pro lepší přehlednost bez chybových úseček.

Po proložení lineární funkcí pomocí metody nejmenších čtverců nám vychází zrychlení plného válce na nakloněné rovině jako $a_{\text{plný}} = (3,02 \pm 0,03)\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Pro prázdný váleček jsme po aplikaci stejného postupu obdrželi výsledek $a_{\text{prázdný}} = (2,01 \pm 0,05)\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a pro plechovku s psím krmením $a_{\text{krmení}} = (2,91 \pm 0,04)\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Efektivní momenty setrvačnosti⁴⁵ vypočtené z naměřených zrychlení a rozměrů

⁴⁵ Chybu měření efektivního momentu setrvačnosti jsme určili ze vztahu

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{J}{m} \Delta m\right)^2 + \left(2 \frac{J}{R} \Delta R\right)^2 + \left(m R^2 \frac{g}{a} \cos \alpha \Delta \alpha\right)^2 + \left(m R^2 \frac{g}{a^2} \sin \alpha \Delta a\right)^2}.$$



Obr. 16: Graf závislosti rychlosti na čase pro všechny tři válce

válce s vodou, prázdného válce a plechovky s krmením jsou

$$\begin{aligned}
 J_{\text{ef,plný}} &= (23 \pm 4) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\
 J_{\text{ef,prázdný}} &= (54 \pm 4) \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\
 J_{\text{ef,krmení}} &= (61 \pm 8) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.
 \end{aligned}$$

Diskuze a závěr

Z grafu lze vyvodit, že v našem experimentálním uspořádání probíhal pohyb, který je relativně přesně popsatelný jako rovnoměrně zrychlený pohyb a nelineární odporové síly se tedy ztatečně neprojeví. V případě prázdného válce a psího krmení vypadaly grafy podobně. Mírně se u obou projeví nelinearity, ale grafy bylo stále možné docela dobře aproximovat lineární funkcí. U krmení byl v grafu větší šum. To přikládáme za vinu nehomogenitám v obsahu plechovky – jedna otočka neprobíhala zcela rovnoměrně a těžiště plechovky pravděpodobně bylo mírně mimo osu.

Naměřená hodnota zrychlení pro plný válec $a_{\text{plný}} = (3,02 \pm 0,03) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je mezi hodnotami odpovídající sjíždění kvádrů bez odporu (pro náš sklon roviny $g \sin \alpha = 3,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) a valíčího se homogenního válce ($2/3 \cdot g \sin \alpha = 2,55 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), což jsme očekávali. V případě prázdného válce bychom očekávali, že jeho zrychlení bude mezi hodnotami pro valící se plný homogenní válec a pro valící se dutý tenkostěnný válcový plášť bez podstav (moment setrvačnosti má mR^2 , zrychlení má $g/2 \cdot \sin \alpha = 1,70 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), což se opravdu při měření potvrdilo ($a_{\text{prázdný}} = (2,01 \pm 0,05) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$). Plechovka s psím krmením dosahovala zrychlení ($a_{\text{krmení}} = (2,91 \pm 0,04) \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

blízké vodou naplněnému válci, byť o něco nižší, ale stále v intervalu hodnot, který jsme předpokládali. To, že je hodnota o něco nižší, se dá vysvětlit tím, že v případě psího krmení se bude plechovka chovat spíše jako plný válec a bude v ní nastávat o vyšší vnitřní tření.

Vzhledem k tomu, že jsme v teorii zanedbali odpor prostředí a vnitřní tření v kapalině a zrychlení válců bylo v očekávaném intervalu, tak nemůžeme moc přesně odhadnout, jak velký vliv měly tyto síly na průběh experimentu. Můžeme pouze prohlásit, že experiment neovlivnily v příliš velké míře.

Úloha IV.E . . . nástěnkový boj brček

Když si vezmete běžné plastové brčko (slámku) a otřete ho kapesníkem, dokážete brčko nabít tak, že bude dokonce držet na některých stěnách a nástěnkách díky svému náboji. Vysvětlíte jev a odhadnete, jak velký náboj dokážete na brčku vytvořit.

Nápověda Hodilo by se použít dvě brčka.

Snadno si s pár brčky a ubrouskem můžeme vyzkoušet, že jevy popsané v zadání fungují. Brčko je nevodič. Při tření brčka například ubrouskem přeskočí mezi brčkem a ubrouskem pár elektronů a na brčku se tak vytvoří náboj. Když brčko přiblížíme třeba ke zdi, tak se povrchové atomy polarizují tak, že na povrchu zdi se vytvoří parciální náboj opačného znaménka než na brčku, díky kterému tam brčko drží (nám drželo na zdi asi hodinu, říká se ale, že tam může vydržet i přes týden). Když tedy dáme dvě brčka k sobě, tak je jasné, že se budou odpuzovat. Zkusme odhadnout, jak velký náboj se na nich vytvoří.

Odhady

Náš experiment bude velice jednoduchý. Nabijeme dvě brčka, jedno z nich upevníme a druhé budeme lehce prsty přidržovat a zjišťovat, v jaké vzdálenosti d nad prvním brčkem bude mít stabilní polohu, tj. v jaké vzdálenosti se vyrovnají tíhová F_G a odpudivá elektrostatická F_e síla. Tíhovou sílu určíme jednoduše $F_G = mg$, kde m je hmotnost brčka a g tíhové zrychlení. Elektrostatickou sílu můžeme odhadnout několika způsoby, získané odhady na závěr porovnáme.

Nejdříve budeme uvažovat náboj na brčku jako bodový náboj (má to k tomu sice daleko, ale odhad je od toho, že to je odhad). Elektrostatická odpudivá síla má pak klasický Coulombovský tvar

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{d^2},$$

kde ϵ_0 je permitivita vakua. Uvažujeme, že na obou brčkách je stejný náboj. Když to dáme do rovnosti s tíhovou silou, dostaneme pro náboj odhad

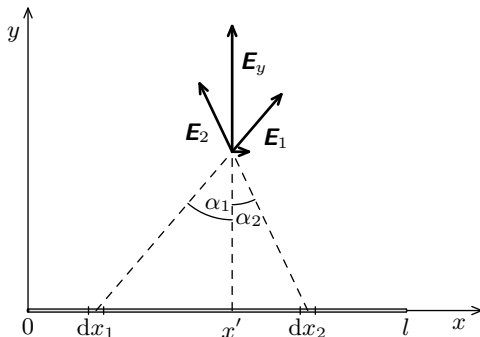
$$q_1 = d\sqrt{4\pi mg\epsilon_0}.$$

Dále můžeme brčko délky l považovat za nekonečně dlouhou rovnoměrně nabitou tyčku s délkovou hustotou náboje $\tau = q/l$. S využitím Gaussova zákona určíme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od tyčky

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 dl}.$$

Po vynásobení q dostaneme hledanou sílu, kterou dáme opět do rovnosti s tíhovou a vyjádříme náboj

$$q_2 = \sqrt{2\pi\epsilon_0 d l m g}.$$



Obr. 17: Dvě rovnoměrně nabitě tyče konečné délky

Nakonec můžeme brčka považovat za dvě tyče rovnoměrně nabitě délkovou hustotou náboje $\lambda = dq/dx = q/l$. Na lepší odhad se asi ani nezmůžeme, protože nerovnoměrně a nestejně rozložení náboje, které je při každém pokusu trochu jiné, popsat nedokážeme. Odvození vzorce pro sílu, kterou se tyče odpuzují, není úplně triviální, nicméně šikovný středoškolák si na něm může vyzkoušet integrování. Tak tedy sledujme obrázek 17: nejprve si vypočítáme intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti d od jedné rovnoměrně nabitě tyče. Budeme počítat y -ovou složku intenzity – budeme z ní potom počítat sílu v y -ovém směru. Uvažujme bod, který má x -ovou souřadnici x' . Od malých elementů tyče dx_1 a dx_2 do y -ové složky intenzity přispívají $\cos\vartheta_1 dE_1$ a $\cos\vartheta_2 dE_2$, kde význam úhlů je zřejmý z obrázku. Celkovou intenzitu získáme, když tyto elementy zintegrujeme přes celou tyč

$$\begin{aligned} E_y &= \int dE_y = \int_0^{x'} \cos\alpha_1 dE_y + \int_{x'}^l \cos\alpha_2 dE_y = \\ &= \frac{\lambda d}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_0^{x'} \frac{1}{[(x' - x)^2 + y^2]^{3/2}} dx_1 + \int_{x'}^l \frac{1}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}} dx_2 \right) = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 d} \left(\frac{l - x'}{\sqrt{(l - x')^2 + y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

Teď dáme do vzdálenosti d od této tyče další, úplně stejnou, tyč. Odpudivou sílu (která míří ve směru y), kterou na sebe budou působit, spočítáme takto

$$\begin{aligned} F &= \int dF = \int E_y dq = \int_0^l E_y \lambda dx = \\ &= \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0 d} \int_0^l \left(\frac{l-x'}{\sqrt{(l-x')^2 + y^2}} - \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}} \right) dx = \\ &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left(\sqrt{1 + \frac{l^2}{d^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Nyní můžeme, jako předtím, dát tuto sílu do rovnosti s tíhovou a určit náboj:

$$q_3 = \sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 mgl^2}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{d^2}} - 1}}.$$

Měření

Zvážili a změřili jsme několik brček a z měření určili hmotnost m a délku nabitě části brčka l : $m = (0,52 \pm 0,02)$ g, $l = (14,0 \pm 0,5)$ cm. Dále jsme měřili, v jaké výšce nad jedním nabitým brčkem se pro druhé nabitě brčko vyrovná tíhová a elektrostatická odpudivá síla: $d = (2,3 \pm 0,5)$ cm.

Z těchto údajů jsme spočítali hodnotu náboje, chybu jsme určili podle zákona šíření nejistot.⁴⁶ Chyba měřidel (vah a pravítka) je v tomto případě zanedbatelná.

$$\begin{aligned} q_1 &= (17 \pm 4) \text{ nC}, \\ q_2 &= (38 \pm 3) \text{ nC}, \\ q_3 &= (32 \pm 5) \text{ nC}. \end{aligned}$$

Výsledky se v rámci nejistot sice neshodují, ale jsou velmi podobné – všechny tři odhady pro řádový odhad postačí. Dle očekávání je ten třetí, tedy nejpřesnější, mezi zbylými dvěma – tj. brčko bude pravděpodobně něco mezi bodovým nábojem a nekonečně dlouhou nabitou tyčkou.

Úloha V.E ... Vypař se!

Určete, jak závisí rychlost vypařování vody na povrchu, který tato kapalina zaujímá. Experiment proveďte alespoň pro pět různých vhodných nádob. Zamyslete se nad dalšími faktory, které mohou rychlost vypařování vody ovlivnit. Upozorňujeme, že experiment je velmi vhodné nechat probíhat po delší dobu (několik dní), proto ideálně začněte o hodně dřív než pár hodin před uzávěrkou.

⁴⁶ Pokud je veličina y funkcí několika veličin x_i : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a známe chybu Δx_i každé z těchto veličin, lze chybu veličiny y vypočítat ze vztahu $\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}$.

Vypařování je typickou vlastností kapalin. Při každé teplotě přechází určitá část molekul vlivem tepelné energie (která se projevuje pohybem molekul) do plynného skupenství. V podstatě dochází k tomu, že molekula vody dostatečně blízko povrchu s dostatečnou kinetickou energií překoná soudržné síly a přejde do plynné fáze. Tato tendence závisí na povaze kapalin, přesněji na jejich soudržných silách mezi molekulami. Probíhá-li vypařování v uzavřené nádobě, ustaví se mezi kapalinou a její párou rovnováha. V naší úloze se však jedná o otevřenou soustavu, proto nedojde k ustavení rovnováhy vlivem neustálého unikání molekul páry do okolního prostředí, proto bude kapalné fáze neustále ubývat.

Naše úloha je zaměřena na to, jak souvisí velikost povrchu vody s rychlostí vypařování v , respektive s rychlostí úbytku kapalné fáze. Tuto rychlost vypařování v si můžeme definovat jako množství (případně objem) odpařené vody za čas.

To, že s větším povrchem lze očekávat větší množství odpařené vody, je poměrně intuitivní (nevíme, jak často věšíte prádlo, ale asi nikdo z vás by nečekal, že mu tričko zmačkané do kuličky uschne rychleji než stejně mokré tričko pověšené na šňůře), nás však přímo zajímá, zda je tato závislost lineární, jak by se dalo čekat, či jiná, tedy jaká je rychlost vypařování na jednotku povrchu.

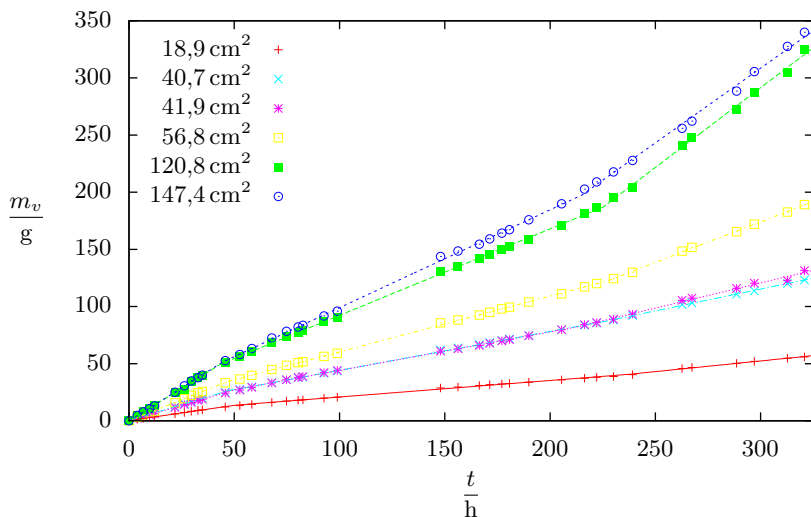
Nelze však zanedbat skutečnost, že na rychlost vypařování má vliv celá řada dalších faktorů. Rychlost vypařování souvisí s tenzí odpařených par nad kapalinou, pokud je tato tenze větší, vypařování probíhá rychleji, neboť molekuly jsou více tlačeny do okolí. Tenze par je navíc veličina provázaná s teplotou a tlakem. Na rychlost vypařování má také vliv vlhkost vzduchu, neboť vlhčí vzduch bude méně ochotně přijímat nové molekuly páry. Stejně tak pohyb vzduchu je při odpařování důležitý, což je spolu se zvýšením teploty například principem fěnu.

Jak je vidět, nejlépe by bylo experiment provádět v místnosti o stálé teplotě, tlaku, vlhkosti vzduchu a bez jakéhokoli průvanu, a vůbec nejlépe na nic nesaňat, nedýchat a ani tam nebýt. Tyto podmínky však v domácím prostředí těžko splníte, zvláště když je nutné provádět v průběhu experimentu měření, proto je dobré nechat všechny nádoby s vodou spolu na stejném místě a nechat probíhat experiment u všech zároveň, čímž máte zhruba zaručeno, že ač budou okolní podmínky do určité míry proměnlivé, budou v daném okamžiku pro všechny nádoby přibližně stejné, takže by pak jejich případný vliv měl být pozorován u všech nádob a rozpoznán jako ovlivnění některými ze zmiňovaných faktorů.

Poslední vliv, který zde bude zmíněn, nejdříve ani nebyl v teorii uvažován, nicméně v průběhu samotného experimentu se ukázala jeho důležitost. Jedná se o působení nádoby, která představuje nejen překážku pro kapalinu, ale také pro páru. Pokud máme kapalinu pouze na dně poměrně vysoké a úzké nádoby, je pro molekuly páry těžší uniknout do okolí, neboť při nárazu do stěny nádoby ztratí část své energie, takže mnohem větší část z nich zkondenzuje zpátky na kapalinu. Proto je vhodné pro experiment použít nádoby co nejvíce naplněné vodou nebo aspoň dostatečně široké, velmi úzkým nádobám (jako jsou například zkumavky) je dobré se vyhnout i kvůli kapilárním jevům, které by zde již nemusely být zanedbatelné.

Měření

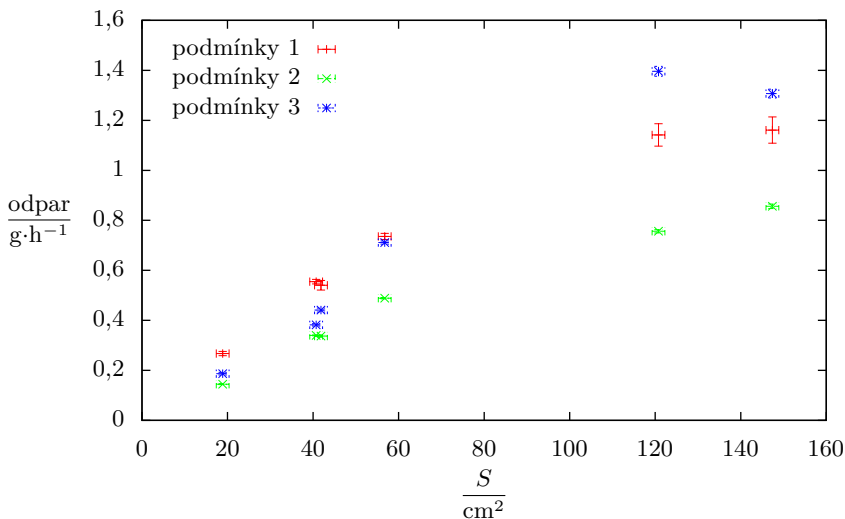
Pro první verzi experimentu bylo vybráno devět nádob, přičemž dvě z nich byly stejné (pro kontrolu) a ostatní se lišily. Všechny nádoby byly vybírány tak, aby měly tvar válce (aspoň na potřebném úseku – např. seříznutá PET láhev) a bylo tím pádem snadné dát do souvislosti množství odparu s jejich povrchem, který byl v podstatě konstantní a také lehce zjištělný. Průměr nádob se pohyboval v rozmezí 58 mm až 137 mm.



Obr. 18: Závislost množství odpařené vody na čase.

Je třeba říci, že množství vody, které bylo možno do nádob nalít, bylo limitováno tím, že váhy, které byly k dispozici a měřily s přesností na setinu gramu, vážily maximálně do cca 400 g. Takže bylo postupováno tak, že bylo do nádob postavených na kuchyňské váze naléváno takové množství vody, aby nádobu i s vodou bylo nejlépe možno zvážit na výše zmíněné váze. Tak došlo k tomu, že nádoby byly různě plné. Všechny nádoby s vodou byly po zvažení a zapsání času vážení umístěny spolu na okenní parapet a po různých časových úsecích byly váženy, aby se zjistilo, kolik vody se z nich za danou dobu odpařilo. Po několika prvních měřeních však bylo zřejmé, že výsledky jsou jiné, než by se očekávalo. Zatímco dvě stejné nádoby poskytovaly přibližně stejný odpar (byly i stejně vysoko naplněné), což bylo v pořádku, při srovnání ostatních nádob bylo vidět, že z některých širších nádob se odpařuje téměř stejně, nebo dokonce méně než z nádob užších. Nejlépe to bylo patrné při srovnání nádob označených jako PET malá, která měla průměr 72 mm, a PET velká s průměrem 85 mm. První tři hodnoty množství odpařené vody vždy za určité časové úseky z PET malé činily 1,52 g, 5,92 g a 1,89 g, zatímco z PET velké se za stejné časové úseky odpařilo pouze 1,13 g, 4,45 g a 1,64 g. Z toho plyne,

že nádoba s povrchem o zhruba 30 % menším měla odpar o 23 % až 35 % větší, což je poměrně podivné.



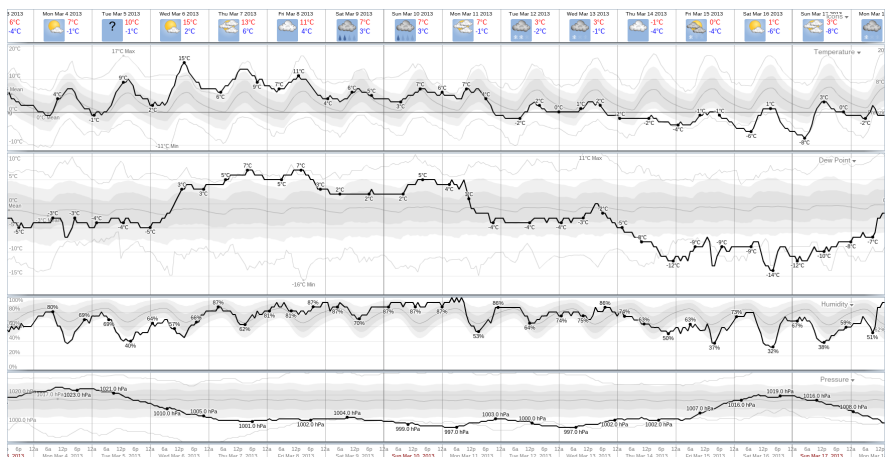
Obr. 19: Závislost rychlosti vypařování na povrchu.

Vysvětlení spočívá právě v různé naplněnosti nádob, která vyplývala z omezeného množství vody, které mohlo být do nádoby nalito, aby byla pořád vážitelná. Tato různá vzdálenost hladiny od vrchní části nádoby byla nejdříve zanedbána. Nyní ale vidíme, jak může fakt, že PET malá byla naplněna vodou téměř po okraj, zatímco PET velká pouze zhruba do poloviny své výšky, negativně ovlivnit výsledky.

Pro potvrzení důležitosti tohoto efektu byl proveden miniexperiment se třemi shodnými skleničkami o průměru 58 mm, tyto skleničky měly výšku zhruba 13 cm. První byla naplněna do výšky přibližně 11 cm (naprosté naplnění nebylo možné z váhového hlediska), druhá byla naplněna zhruba do poloviny, tedy do výšky cca 7 cm a poslední byla naplněna pouze do výšky cca 3 cm. Z výsledků bylo posléze patrné, že odpar třetí skleničky často činí méně než 50 % odparu skleničky první. Podrobnější data k tomuto měření jsou uvedena v tabulce 8.

Posléze se začalo s experimentem od začátku. Postup byl podobný, ovšem byly vyřazeny všechny skleněné nádoby a nahrazeny plastovými, neboť bylo třeba, aby samotná nádoba vážila co nejméně. Nakonec bylo pro měření použito šesti nádob: kalíšek od svíčky (1), PET malá (5), PET velká (6) (tyto byly na začátku vodou zcela naplněny), plastový odpadáček (4), plastový kryt na CD (2) (naplněny zhruba 1 cm pod okraj) a plastová miska (3) (naplněná zhruba 4 cm pod okraj – ovšem dostatečně široká), další údaje o použitých nádobách jsou uvedeny v tabulce 9 spolu s výsledky. Po různých časových intervalech byly vždy všechny

nádoby zváženy a získala se tak hmotnost odpařené vody za daný časový úsek. Tato fáze experimentu probíhala od 4. března do 17. března.



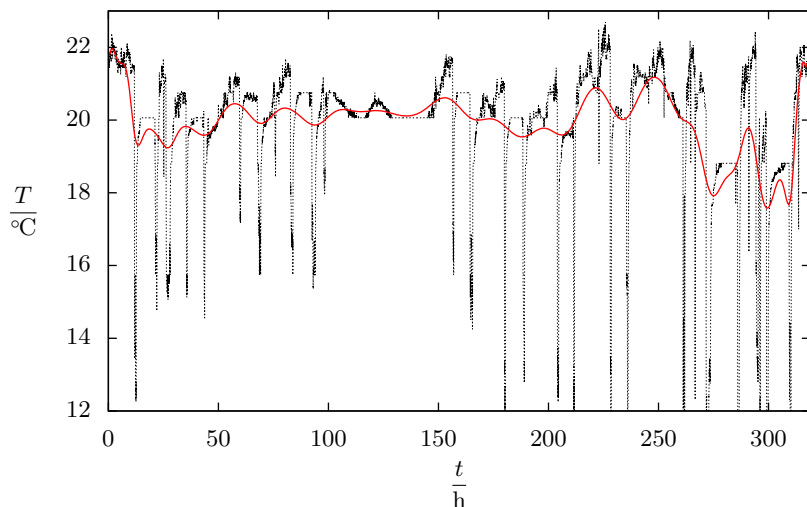
Obr. 20: Počasí během experimentu (shora teplota, rosný bod, vlhkost a tlak).
Zdroj: <http://weatherspark.com>.

Tabulka 8: Srovnání odparu pro tři stejné skleničky naplněné do výšky 11 cm, 7 cm a 3 cm.

t min	odpar 1 g	odpar 2 g	odpar 3 g
821	2,37 (100 %)	2,00 (84 %)	1,15 (49 %)
222	0,68 (100 %)	0,58 (85 %)	0,35 (51 %)
399	1,20 (100 %)	0,75 (63 %)	0,44 (37 %)
750	2,05 (100 %)	1,09 (53 %)	0,78 (38 %)
529	1,55 (100 %)	0,88 (57 %)	0,72 (46 %)

Výsledky

Souhrn experimentálně získaných dat je uveden v tabulce 9. Podle nich je vytvořen graf 18 závislosti hmotnosti odpařené vody na čase pro jednotlivé nádoby. Z grafu je patrné, že tato závislost je lineární, nicméně nelze zde provést lineární regresi jedinou přímkou kvůli proměnlivým podmínkám, které mají vliv na rychlost vypařování, což ovlivní sklon příslušné části. Proto bylo fitováno funkcí s proměnnou směrnici a všechny grafy se rozdělily na tři úseky. Jak je vidět, body zlomu pro jed-



Obr. 21: Teplota v místnosti.

notlivé kapaliny nejsou ve zcela stejný čas, což však může být důsledkem fitování, které funguje na základě metody nejmenších čtverců.

Jak již bylo zmíněno, tato proměnlivost souvisí s výraznými změnami experimentálních podmínek. První větší změna nastala za zhruba 52 h od začátku experimentu, kdy se venku oteplilo, což by samo o sobě nemělo velký vliv, ale jako důsledek bylo vypnuto topení v místnosti. Jelikož topení je umístěno kousek od místa, na kterém stály nádoby s vodou, mohlo to rychlost vypařování ovlivnit jednak teplotně, jednak změnou proudění vzduchu a odvětrávání par. Počasí se však v tu dobu také měnilo nejen z hlediska teploty, ale také tlaku, rosného bodu a vlhkosti, což je vidět na přiloženém záznamu (zlom je ve středu 6. 3. dopoledne) na obrázku 20. Také bylo zaznamenáno, jak se měnila teplota v místnosti, kde probíhal experiment, pomocí teplotního čidla (obrázek 21). Všechny tyto faktory se pravděpodobně podílejí na zpomalení odpařování, které je pozorovatelné ve střední části grafu. Pro ověření, že zapnuté topení má na rychlost odpařování větší vliv, bylo v čase kolem 190 h od začátku experimentu topení znovu zapnuto a rychlost odpařování skutečně znovu narostla. Rozdělení na jednotlivé úseky (tedy použití rozdílných směrnic) bylo zohledněno i v grafu závislosti rychlosti odparu na povrchu kapaliny na obrázku 19.

Tabulka 9: Parametry nádob; čas a množství odpařené vody.

r [mm]	49	124	137	73	72	85
S [cm ²]	18,9	120,8	147,4	41,9	40,7	56,8
m_0 [g]	5,01	20,22	91,44	39,67	8,24	8,32
$m_0 + m_v$ [g]	98,01	396,64	392,44	416,93	321,65	365,83
t	odpar	odpar	odpar	odpar	odpar	odpar
min	g	g	g	g	g	g
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
234	1,28	5,07	4,66	2,12	2,46	3,09
408	2,07	7,97	7,80	3,67	4,12	5,12
586	2,77	10,60	10,60	5,03	5,55	6,93
729	3,36	13,19	13,07	6,25	6,75	8,55
1 313	6,10	24,70	25,01	11,62	12,20	15,77
1 576	7,26	27,78	30,52	14,22	15,14	19,43
1 775	8,32	34,53	34,84	16,27	17,20	22,29
1 966	9,07	38,08	37,69	17,96	18,74	24,49
2 091	9,57	40,01	39,88	18,90	19,70	25,70
2 745	12,09	50,88	52,58	24,27	24,92	33,21
3 157	13,31	56,37	58,06	27,01	27,48	36,58
3 499	14,39	60,94	63,25	29,35	29,71	39,75
4 069	16,06	68,55	72,47	33,19	33,38	44,97
4 487	17,26	74,00	78,27	35,90	35,97	48,52
4 818	18,02	77,56	82,00	37,91	37,70	50,84
4 956	18,33	79,02	83,61	38,73	38,33	51,74
5 556	19,79	86,55	91,74	42,10	41,52	56,34
5 935	20,69	89,95	95,96	44,11	43,49	59,03
8 878	28,67	130,87	143,81	60,97	61,93	85,67
9 374	29,56	135,07	148,58	63,00	63,80	88,19
9 984	30,94	141,85	154,52	65,99	66,60	92,56
10 280	31,64	145,67	159,14	67,75	68,36	95,05
10 625	32,37	149,97	164,25	69,86	70,23	97,87
10 843	32,73	152,34	167,23	71,08	71,62	99,46
11 395	33,85	159,00	175,82	74,42	74,53	103,98
12 330	35,78	170,54	189,87	79,75	79,69	111,05
12 981	37,21	181,21	202,69	84,09	83,54	117,22
13 327	38,01	186,95	209,02	85,90	85,50	120,13
13 806	38,77	195,33	217,76	88,87	88,07	124,40
14 349	40,41	203,91	227,80	93,24	92,03	129,95
15 762	45,78	241,09	255,98	105,40	101,66	148,44
16 041	46,74	248,12	262,21	107,41	103,16	151,72
17 314	50,28	272,48	288,52	115,87	110,72	165,54
17 820	51,97	287,11	305,58	120,39	113,64	171,97
18 764	54,73	305,19	327,54	122,60	120,12	182,65
19 249	55,91	325,08	339,91	131,38	123,27	189,16

Diskuze

Ze získaných dat je vidět, že množství odpařené kapaliny je lineárně závislé na čase, avšak tato rychlost vypařování závisí do značné míry i na podmínkách okolí. Podíváme-li se na závislost této rychlosti na povrchu kapaliny, tak zjistíme, že zde lineární závislost není (aspoň dle získaných dat). Naopak, s rostoucím povrchem rychlost odparu na jednotku povrchu klesá, což je zajímavý výsledek. Nicméně vzhledem k velkému počtu faktorů, které mají na vypařování vody vliv, a k tomu, že širší nádoby nebyly vodou zcela naplněné, protože by pak nebyly vážitelné naším vybavením, tento výsledek nelze považovat za zcela průkazný. Naopak ovlivnění rychlosti odparu v závislosti na výšce hladiny je z uvedených dat vidět mnohem jednoznačněji.

Závěr

Z měření vyplývá, že rychlost vypařování není lineárně závislá na povrchu, ale s rostoucím povrchem má spíše klesavou tendenci. Tento výsledek však vzhledem k povaze experimentu není nezpochybnitelný. Za určitější výsledek tedy lze považovat spíše to, že rychlost odpařování je závislá na míře naplnění dané nádoby, ačkoliv to nebylo původním cílem úlohy.

Úloha VI.E . . . ztroskotání balónu

Když pustíte nafukovací balónek z výšky, po chvíli bude padat s přibližně konstantní rychlostí. Změřte, jak závisí tato rychlost na velikosti balónku a na hmotnosti závaží, které pod něj zavěsíte.

Teorie

V okamžiku, kdy balónek pustíme, je jeho rychlost nulová. Působí na něj vztaková síla směrem svisle vzhůru a tíhová síla směrem svisle dolů. Pokud bychom chtěli určit velikost tíhové síly, museli bychom znát hmotnost balónku a vzduchu v něm (tedy např. tlak uvnitř). Proto zavedeme efektivní hmotnost balónku m , což bude taková hmotnost nafouknutého balónku, kterou zvažíme na váze. V této efektivní hmotnosti je již započítán vliv vztakové síly. Pak velikost výslednice tíhové síly působící na balónek o efektivní hmotnosti m , tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M a vztakové síly působící na balónek je rovna $(m + M)g$, přičemž předpokládáme, že závaží je oproti balónku velmi malé, takže vztakovou sílu na něj působící můžeme zanedbat. Výsledná síla na balónek působící bude v případě nafouknutí vzduchem směřovat svisle dolů, balónek tedy začne padat.

Jakmile bude rychlost balónku nenulová, začne na něj proti směru pohybu působit odporová síla. Dále budeme uvažovat, že tvar balónku je při všech velikostech stejný a jde o kouli o průměru d . Pak velikost odporové síly je dle Newtonova vztahu $\rho v^2 S/4$, kde ρ je hustota vzduchu, $S = \pi r^2/4$ je v našem případě obsah průmětu balónku do vodorovné roviny a v je jeho rychlost.

Balónek bude nejprve zrychlovat, při určité rychlosti bude výsledná síla působící na balónek nulová a ten se dále bude pohybovat rovnoměrně přímočaře ustálenou rychlostí

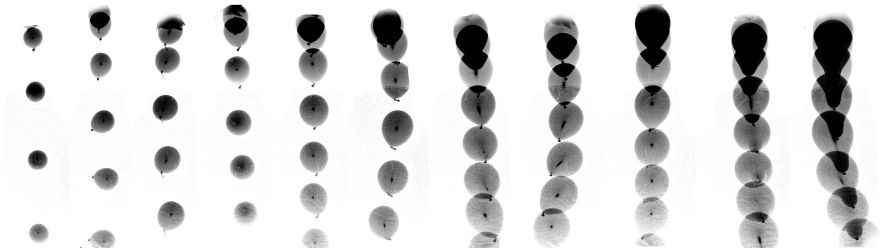
$$v_u \propto \frac{\sqrt{m+M}}{d}, \quad (23)$$

tedy velikost ustálené rychlosti je přímo úměrná odmocnině součtu jeho efektivní hmotnosti a hmotnosti závaží a nepřímo úměrná jeho průměru.

Metody měření rychlosti

Měření rychlosti je možné provést několika způsoby. Nejjednodušší se jeví použití stopky a změřit čas, za jaký balónek urazí danou dráhu. K tomu by však bylo třeba alespoň odhadnout, kdy již balónek nezrychluje. Navíc bychom do měření zanesli velkou nejistotu v podobě měření času stopkami, což by se ovšem dalo eliminovat použitím optické závory.

Přesnější metoda měření rychlosti je využitím stroboskopu (např. blesku s touto funkcí) a fotoaparátu. Na fotografii zachytíme balónek v několika okamžicích a při známé frekvenci záblesků po kalibraci délky (např. vyfotografováním pravítka) měříme vzdálenosti, které balónek urazil mezi záblesky. Výhodou je, že můžeme zaznamenávat pohyb balónku od okamžiku upuštění a rychlost určovat jen z vhodné části pohybu. Nevýhodou naopak to, že musíme pracovat ve tmě a před tmavým pozadím. Příklad snímků s použitím stroboskopu je pro použité balónky na obrázku 22. Všechny snímky byly pořízeny při frekvenci stroboskopu 5 Hz. Ačkoliv nebyly použity k měření, dobře dokumentují to, že se zvyšující se velikostí balónku jeho velikost rychlosti klesá a je (kromě prvních několika záblesků) přibližně konstantní. Také je zde vidět, že balónky se při pádu otáčejí.



Obr. 22: Snímky (negativy) vytvořené pomocí stroboskopu pro různé velikosti balónků.

Další možnost je záznam videa, které poté analyzujeme např. v programu Tracker⁴⁷, viz obrázek 23. Nejprve je třeba, stejně jako v případě použití stroboskopu, udělat kalibrační snímek, na kterém vyfotografujeme měřítko známé délky a pomocí něj v programu nastavíme správné měřítko a orientaci souřadných os. Na

⁴⁷<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

nafouklém balóнку uděláme fixem značku (pro dostatečný kontrast je vhodné použít světlé balóнку a tmavý fix). Pomocí funkce Autotracker poté tuto značku v prvním snímku označíme a spustíme trasování. Program v každém ze snímků tuto značku najde, určí její polohu a numerickým derivováním pak i rychlost a zrychlení v jednotlivých časových okamžicích.

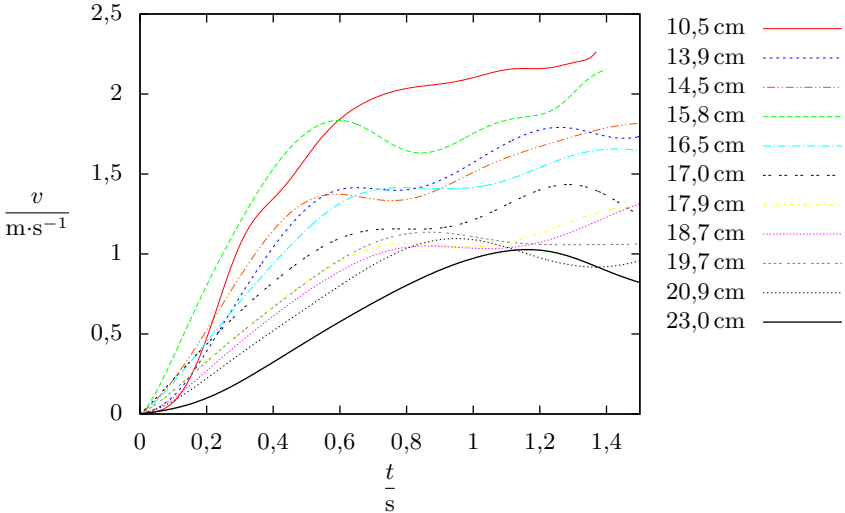


Obr. 23: Práce v programu Tracker. Po označení dostatečně kontrastního bodu (v našem případě černá značka na bílém balóнку) program pohyb tohoto bodu během záznamu vyhledá.

Měření

Rychlosti balóнку byly měřeny pomocí programu Tracker. Při určování závislosti ustálené rychlosti na velikosti balóнку bylo použito 11 balóнку nafouknutých na různý průměr. S každým balóнку byla provedena tři měření. Závislost rychlosti na čase pro jedno měření s každým z balóнку jsou v grafu na obrázku 24. Při pohledu na něj je zřejmé, že předpoklad, že balónek bude zrychlovat a od určitého okamžiku bude jeho rychlost konstantní, nebyl zcela správný, jelikož situace byla příliš zjednodušená a nebyly uvažovány některé další vlivy. I při pozorování okem bylo zřejmé, že balóнку nemají dokonalý tvar rotačního tělesa. Z toho důvodu odpor prostředí způsobí, že se balónek začne otáčet a obsah jeho průmětu do vodorovné roviny se změní, což zapříčiní změnu rychlosti, případně další rotaci. I pokud by byl balónek dokonale symetrický kolem nějaké osy, bylo by třeba jej pouštět tak, aby tato osa byla dokonale svisle. V opačném případě by též mohl začít vykonávat nechtěné pohyby.

Protože rychlost balóнку není při pohybu konstantní, je třeba dále zvolit rychlost, pro kterou budeme zkoumat závislost na průměru a hmotnosti. Rychlost vyjádřená vztahem (23) je taková rychlost, při které jsou síly na balónek působící

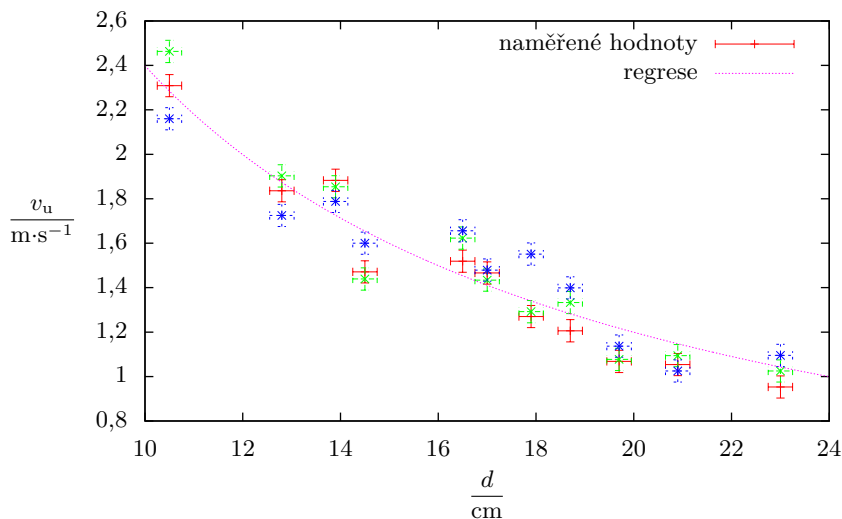


Obr. 24: Závislost velikosti vertikální rychlosti na čase pro různé velikosti balóneků. Každý balónek byl měřen třikrát, pro ilustraci uvádíme jedno měření.

v rovnováze, jeho zrychlení je tedy nulové. Je-li nulové zrychlení, musí být rychlost v tomto okamžiku maximální či minimální, popř. musí jít o inflexní bod. Ustálenou rychlostí tedy v dalším textu budeme rozumět velikost rychlosti v prvním maximu, tedy velikost rychlosti v prvním okamžiku od upuštění, kdy je zrychlení balóнку nulové.

Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balóнку je v grafu na obrázku 25. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí na rychlosti (23), přičemž se předpokládalo, že hmotnost všech balóneků byla stejná. Toto předpoklad byl vyvozen z měření hmotností nafouknutých a následně i nenafouknutých balóneků. Hmotnosti nenafouknutých balóneků ze stejného balení (kde by všechny balóanky měly být stejné) se pohybují od 1,27 g do 1,56 g. Efektivní hmotnosti nafouknutých balóneků včetně kousku špagátu, kterým byly zavázány (všechny kousky byly přibližně stejně dlouhé) se pohybovaly od 1,60 g do 2,05 g, přičemž ale hmotnost nerostla s průměrem monotónně, zřejmě v důsledku různých hmotností balóneků před nafouknutím. Navíc vzhledem k velkému rozptylu naměřených hodnot nemůžeme říci, zda naměřené hodnoty odpovídají teoretické závislosti, takže nejistota skrytá v předpokladu stejných hmotností nevádí.

Dalším úkolem bylo měření závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, které pod balónek zavěšíme. Jako závaží byly použity mince a knoflíkové baterie, které byly pod balónek připevněny lepící páskou, kterou též považujeme za závaží. Měření bylo provedeno s jedním balónekem pro deset různých hmotností závaží vždy třikrát. V grafu na obrázku 26 je uvedená hmotnost součtem efektivní hmotnosti



Obr. 25: Závislost velikosti ustálené rychlosti na velikosti balónku. Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

balónku $m = (1,90 \pm 0,01)$ g a hmotnosti závaží M . Pokud bychom požadovali graf závislosti ustálené rychlosti na hmotnosti závaží, stačilo by pouze vodorovnou osu posunout. Naměřené hodnoty jsou v programu gnuplot proloženy teoreticky odvozenou závislostí (23).

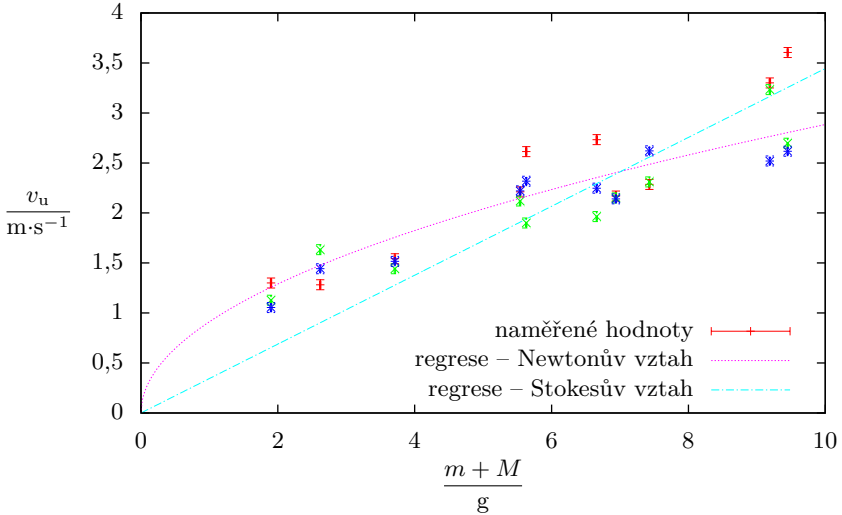
Diskuse a nejistoty měření

Nejistoty tohoto měření je možné rozdělit na nejistoty měření polohy, velikosti balónku a jeho hmotnosti. Polohy balónku (a z nich numericky vypočítané rychlosti) byly měřeny v programu Tracker, který určoval polohu označeného bodu balónku. Jelikož ten se ale mohl v průběhu měření pohybovat i jinak než svisle dolů (např. se naklánět), nedá se říci, že naměřené polohy jsou polohy těžiště. V případě měření polohy z videa hraje také roli zkreslení obrazu, které bylo minimalizováno měřením z větší vzdálenosti a použitím objektivu s dlouhým ohniskem. Nejistota určení velikosti rychlosti byla odhadnuta na $0,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Jelikož balónky nebyly kulaté (menší balónky se kouli blížily více, viz obrázek 22) a v modelu jsme balónek modelovali koulí, nedá se též jednoznačně určit jeho rozměr. Proto byl brán průměr průmětu do vodorovné roviny (s tím, že balónky se pouštěly otvorem dolů), přičemž byl měřen s nejistotou asi $0,5 \text{ cm}$.

Nejistota měření hmotnosti byla malá, použité váhy rozlišují $0,01 \text{ g}$.

Při pohledu na grafy na obrázcích 25 a 26 je zřejmé, že naměřené hodnoty mají rozptýl větší než odhadnuté nejistoty. Jak již bylo zmíněno výše, pohyb balónku,



Obr. 26: Závislost velikosti ustálené rychlosti na hmotnosti balónku se závaží.
Barevně jsou pouze pro přehlednost odlišena jednotlivá měření.

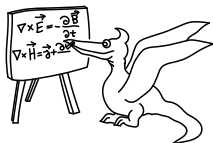
který nemá tvar koule s těžištěm ve svém středu, z velké části ovlivňuje i to, jak natočený jej pustíme.

Při takto velkém rozptylu se nedá jednoznačně říci, zda naměřené hodnoty korespondují s teoreticky odvozenou závislostí. V obou případech je trend správný (tj. velikost ustálené rychlosti klesá se zvyšující se velikostí balónku a klesá se zvyšující se hmotností závaží), nicméně více se toho říci nedá.

Pokud bychom pro výpočet velikosti odporové síly použili Stokesův vztah, tedy předpokládali bychom, že velikost odporové síly je přímo úměrná průměru koule a velikosti její rychlosti, dostali bychom též, že ustálená rychlost je nepřímo úměrná průměru koule. Závislost na hmotnosti by však byla jiná – velikost ustálené rychlosti by byla přímo úměrná $m + M$. Naměřená data na obrázku 26 bychom tedy prokládali přímkou procházející počátkem (pokud by efektivní hmotnost balónku byla nulová a náklad by byl též nulový, výslednice tíhové a vztlakové síly by byla nulová, tudíž po upuštění by se balónek nezačal pohybovat), což na naměřené hodnoty zjevně nesedí.

Závěr

Analýzou videí padajících balónků v programu Tracker byla zjištěna závislost rychlosti balónku na jeho velikosti (obrázek 25) a dále závislost této rychlosti na hmotnosti balónku (obrázek 26). Použité balónky nebyly po nafouknutí symetrické, proto se při pádu různě otáčely (viz obrázek 22), kvůli čemuž rychlost nebyla během žádné fáze pohybu konstantní.



Seriál o plazmatu

Kapitola 1: Úvod do fyziky plazmatu a termojaderné fúze

Plazma jakožto čtvrté skupenství hmoty reprezentuje 99% hmoty ve vesmíru a přestože se s ním na Zemi setkáváme jen výjimečně, hraje důležitou roli v řadě technologických procesů, které slouží k výrobě předmětů denní potřeby. V neposlední řadě je klíčem k ovládnutí řízené termojaderné fúze. V tomto seriálu se budeme nejprve zabývat základními pojmy z fyziky plazmatu a následně rozebereme problematiku udržení plazmatu pro potřeby jaderné fúze, zvláště v zařízení zvaném TOKAMAK.

Co je to plazma

Dle definice je plazma *kvazineutrální plyn nabitých a neutrálních částic, který vykazuje kolektivní chování*. Ač se tato definice může zdát velmi obecná, obsahuje všechny klíčové vlastnosti, které odlišují plazma od jiných skupenství hmoty.

1. Plazma je směs neutrálních a nabitých částic. K určení stupně ionizace (poměru koncentrace nabitých a neutrálních částic) můžeme použít Sahovu rovnici

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2,4 \cdot 10^{21} \cdot \frac{T^{3/2}}{n_i} e^{-\frac{U_i}{kT}},$$

kde n_i je koncentrace nabitých částic, n_n koncentrace neutrálnů, T teplota plynu a U_i ionizační potenciál atomů plynu. Je zřejmé, že aby byl stupeň ionizace nezanedbatelný, je třeba plyn ohřát na teplotu, při které budou mít jeho částice energie blízké ionizačnímu potenciálu U_i . Ten je pro elektrony na nejvyšších atomárních hladinách typicky v řádu elektronvoltů, což odpovídá teplotám větším než 10 000 K. S takovými teplotami se v přírodě okolo nás často nesetkáváme, a tak je naše bezprostřední zkušenost s plazmatem obvykle omezena na pozorování blesků či polární záře. Z umělých plazmatických zdrojů jsou ale běžně rozšířené zářivky a neonové osvětlení. Ve vesmíru je ovšem plazma prakticky všudypřítomné, nalézá se ve hvězdách, v mezihvězdných mlhovinách i např. ve slunečním větru.

2. Plazma se globálně jeví jako *kvazineutrální*, tj. jsou v něm shodně zastoupeny částice s kladným i záporným nábojem. Tím se liší např. od svazku částic v urychlovači. Tato vlastnost neplatí lokálně, kde může docházet k separaci náboje (např. při kontaktu plazmatu s pevným předmětem).
3. Plazma vykazuje *kolektivní chování*. Tato vlastnost zaručuje, že hlavní interakcí mezi částicemi plazmatu jsou Coulombovské síly, tj. síly dlouhého dosahu. V praxi to znamená, že událost v jedné části plazmatického oblaku (např. lokální separace náboje) může vytvořit elektrické pole, které ovlivní zbytek plazmatu.

Tím se plazma odlišuje od plynu, kde jsou hlavní interakcí elastické srážky, které mají lokální charakter.

Debyovské stínění

Základní vlastnosti plazmatu se názorně projeví, pokud je necháme interagovat s pevným předmětem. Jako příklad takového objektu si můžeme představit mřížku, kterou nabijeme na určitý potenciál a vložíme do plazmatického oblaku. Při výpočtu profilu elektrického potenciálu v okolí mřížky vyjdeme z jedné z Maxwellových rovnic

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0}, \quad (24)$$

kde je náboj ρ tvořený rozdílem koncentrace iontů n_i a elektronů n_e (neuvažujeme vícenásobně nabitě ionty). Budeme uvažovat nekonečně hmotné nepohyblivé ionty, které tvoří pozadí k Boltzmannovským elektronům, které reagují na elektrický potenciál

$$\begin{aligned} n_i &= n_\infty, \\ n_e &= n_\infty e^{\frac{e\varphi}{kT_e}}. \end{aligned}$$

Převedeme-li rovnici (24) na jednorozměrný problém a dosadíme-li za hustoty, získáme diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{en_\infty}{\varepsilon_0} \left(e^{\frac{e\varphi}{kT_e}} - 1 \right),$$

kteřá se nedá jednoduše vyřešit. Exponenciální člen můžeme rozvést do Taylorovy řady

$$e^{\frac{e\varphi}{kT_e}} = 1 + \frac{e\varphi}{kT_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{e\varphi}{kT_e} \right)^2 + \dots$$

Za předpokladu, že $e\varphi/(kT_e) \ll 1$, můžeme uvažovat pouze první dva členy rozvoje a rovnice se tak zjednoduší na

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{\varepsilon_0 k T_e} \varphi.$$

Toto je již standardní rovnice, která má známé exponenciální řešení

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}} \\ \lambda_D &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_e}{n e^2}} \end{aligned}$$

s parametrem λ_D , který se nazývá *Debyeova délka*. V praxi toto řešení znamená, že mřížka bude v závislosti na svém potenciálu přitahovat nebo odpuzovat elektrony, takže okolo ní vznikne oblak nábojové hustoty, který poruchu odstíní. Tato důležitá vlastnost – schopnost odstínit odchylky elektrického potenciálu (které mohou být způsobené např. přebytkem náboje) – je pro plazma typická. Tato schopnost vede k zachování kvazineutality, protože fluktuace nábojové hustoty mají částice tendenci odstínit.

Úloha I.S ... seriálová

6 bodů

- Vyhledejte z dostupných zdrojů typické vlastnosti plazmatu ve slunečním větru, centru tokamaku a doutnavém výboji a spočítejte příslušnou velikost λ_D .
- Spočítejte vztah pro velikost Debyeovy délky pro plazma tvořené elektrony o teplotě T_e a ionty o teplotě T_i bez předpokladu nehybných iontů.
- Spočítejte rozložení potenciálu mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými vodivými deskami vzdálenými od sebe na vzdálenost d , které jsou drženy na potenciálu $\varphi = 0$. Prostor mezi deskami je rovnoměrně vyplněný plynem nabitých částic o náboji q a koncentraci n .

(řešení str. 124)

Kapitola 2: Pohyb nabitých částic v elektrických a magnetických polích

Abychom pochopili chování plazmatu jako celku, je zapotřebí se seznámit s procesy, které probíhají na úrovni jednotlivých částic. V této kapitole se budeme zabývat pohybem nabitých částic v magnetizovaném plazmatu, což nás dovede k principu udržení plazmatu za pomoci magnetických polí.

Nejprve uvažujme nabitou částici pohybující se v homogenním statickém magnetickém poli paralelním s osou z , na kterou nepůsobí žádné další síly. Pohybová rovnice této částice bude obecně

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

v našem jednoduchém případě můžeme rozepsat pohybovou rovnici do složek a získat tak systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} v_x B, \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Pohyb ve směru magnetického pole zůstává rovnoměrný přímočarý, kolmé složky lze separovat pomocí derivace

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dv_y}{dt} B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_x.$$

To je známý typ diferenciální rovnice – lineární harmonický oscilátor, s řešením

$$\begin{aligned} x(t) &= -r_L \sin(\Omega_L t + \varphi_0) + x_s, \\ y(t) &= r_L \cos(\Omega_L t + \varphi_0) + y_s, \end{aligned}$$

kde x_s a y_s jsou souřadnice středu obíhané kružnice a φ_0 je fáze, kterou můžeme položit rovnu nule, tj. částice se bude pohybovat po šroubovici o poloměru r_L s úhlovou frekvencí Ω_L , kde

$$\begin{aligned}\Omega_L &= \frac{qB}{m}, \\ r_L &= \frac{v_\perp}{\Omega_L}, \\ v_\perp &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.\end{aligned}$$

Tento pohyb se nazývá Larmorova rotace, r_L je obvykle označován jako Larmorův poloměr a Ω_L Larmorova frekvence. Z povahy pohybu je zřejmé, že zatímco podél siločar se částice může pohybovat volně, ve směru kolmém na magnetické siločáry je její pohyb omezený.

Jako druhý případ budeme uvažovat přítomnost statického homogenního elektrického pole \mathbf{E} , jehož směr bude kolmý na pole magnetické – bude mít nenulovou složku ve směru y . Soustava pohybových rovnic se tedy změní na

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= \frac{e}{m} v_y B, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m} (E + v_x B), \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Stejným postupem jako v předchozím případě dojdeme k diferenciální rovnici pro v_x

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{e}{m} \frac{dv_y}{dt} B = -\left(\frac{eB}{m}\right)^2 \left(v_x - \frac{E}{B}\right).$$

Tato rovnice má tedy oproti předchozímu případu ještě partikulární řešení

$$v_x = v_\perp \cos(\Omega_L t + \varphi_0) + \frac{E}{B},$$

kde konstantní člen se nazývá *driftová rychlost* a tento drift se obvykle označuje jako $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ *drift*. Všimněte si, že driftová rychlost vůbec nezávisí na hmotnosti či náboji částice, jen na velikosti elektromagnetických polí. Její směr je kolmý na magnetické i elektrické pole. Pro elektrické pole v obecném směru na pole magnetické se dá dojít k výrazu

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Místo elektrické síly můžeme do pohybové rovnice dosadit libovolnou jinou sílu (např. gravitační) a dospět tak k formulaci pro obecný driftový pohyb

$$\mathbf{v}_{\mathbf{F}} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Všechny drifty, které nejsou vyvolané elektrickou silou, mají směr závislý na náboji částic, proto v plazmatu budou driftovat elektrony jedním směrem a ionty opačným, což povede k separaci náboje. Prostorový náboj způsobuje vznik elektrického pole (viz poslední úloha předchozího dílu seriálu), které v konečném důsledku nastartuje $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift a umožní částicím pohyb napříč siločarami magnetického pole. Tento nepříjemný mechanismus značně znesnadňuje udržení plazmatu v magnetických pastích.

Zvláště zajímavé jsou driftы způsobené gradienty a zakřivením magnetického pole. Pokud je magnetické pole zakřivené s poloměrem zakřivení R_k , působí na částice pohybující se podél siločar odstředivá síla, která způsobuje drift

$$\mathbf{F}_{\text{od}} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \mathbf{r} = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}_k}{R_k^2},$$

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2 \mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{qB^2 R_k^2}.$$

Pokud má velikost magnetického pole gradient (např. ve směru y) kolmý na směr pole, musíme zvolit jiný postup k získání driftové rychlosti. Vyjdeme z neporušené trajektorie částice a gradient budeme považovat za poruchu. Spočítáme sílu, která působí na částici

$$F_y = -qv_x B(y) = -qv_{\perp} \cos \Omega_L t \left(B_0 + q \frac{v_{\perp}}{\Omega_L} \cos \Omega_L t \frac{\partial B}{\partial y} \right).$$

Zde jsme použili Taylorova rozvoje magnetického pole

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}.$$

Nyní musíme tuto sílu vystředovat přes jeden Larmorův oběh. První člen s $\cos \Omega_L t$ bude po vystředování nulový (odpovídá neporušenému pohybu), střední hodnota $\cos^2 \Omega_L t$ je $1/2$, získáme tedy sílu

$$\bar{F}_y = \mp \frac{1}{2} q r_L v_{\perp} \frac{\partial B}{\partial y},$$

čemuž odpovídá drift

$$\bar{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} q r_L v_{\perp} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2}.$$

Tento drift je opět kolmý jak na magnetické pole, tak na jeho gradient, který samotný drift způsobuje.

Posledním pohybem, kterým se budeme zabývat, je pohyb způsobený gradientem magnetického pole, který je rovnoběžný s jeho směrem. Vzhledem k typické vlastnosti driftu, tj. že je vždy kolmý na působící sílu i magnetické pole, bychom žádný drift neočekávali, přesto zde dochází k zajímavému jevu. Nejprve uvedeme definici magnetického momentu částice

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}.$$

Tento moment se při pohybu částice nemění, tj. je to invariant pohybu. Důkaz tohoto tvrzení zde neuvádíme, protože je poněkud zdlouhavý. Zvídavý čtenář tak alespoň není ochuzen o možnost odvodit si ho sám. Pokud se částice pohybuje mezi místy, kde se mění velikost magnetického pole, musí se měnit i velikost jeho paralelní rychlosti, má-li být μ konstantní. Vzhledem k tomu, že magnetické pole nekoná práci, a tedy nemění celkovou kinetickou energii částice, dochází tak k přesunu energie mezi složkou kinetické energie odpovídající kolmé rychlosti a odpovídající paralelní rychlosti. Touto úvahou docházíme ke vztahu pro paralelní rychlost

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B = \text{konst.}$$

Pokud se tedy částice bude pohybovat z místa se slabým magnetickým polem do oblasti s vyšším magnetickým polem, bude se postupně snižovat její paralelní rychlost. Může se dostat do bodu, kdy její paralelní rychlost klesne na nulu, protože veškerou svoji kinetickou energii transformuje do kolmé složky. Částice se díky tomu odrazí a bude se vracet zpět do oblasti s nízkým magnetickým polem. Tomuto jevu se říká magnetické zrcadlo a je principem jednoduchých lineárních magnetických pastí, které se dají realizovat pomocí dvou sousedních magnetů (viz. obr. 27). Taková past ovšem není schopná zachytit všechny částice, ale pouze ty, které mají vhodný poměr paralelní a kolmé rychlosti. Kvalita pastí je daná parametry B_{\max} a B_{\min} , tj. velikostí magnetického pole na kraji a uprostřed pastí. Částice se v pasti zachytí, pokud splní podmínku

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} \leq \frac{B_{\min}}{B_{\max}},$$

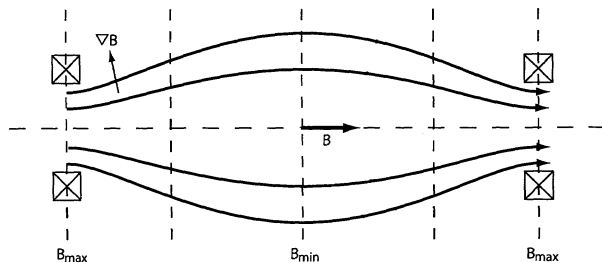
kde dané rychlosti jsou rychlostmi uprostřed pastí, tj. v místě s nejmenším magnetickým polem. Částice, která tuto podmínku nesplní (tj. nachází se ve *ztrátovém kuželu* rychlostního prostoru), dokáže překonat past a nezůstane v ní zachycena. Bohužel, tím, jak se nabitě částice mezi sebou srážejí, migrují v rychlostním prostoru a postupně se dostanou až do ztrátového kuželu. To je hlavní slabina lineárních pastí, která obvykle způsobuje rychlý únik částic.

Úloha II.S ... driftujeme

6 bodů

- a) Které driftы budeme pozorovat v lineární pasti? Představte si, že je osa pastí vodorovná, bude v pohybu částic hrát významnou roli drift způsobený gravitační silou?
- b) Odvodte vztah pro ztrátový kužel a nakreslete originální obrázek, který bude názorně ilustrovat chování částic v lineární pasti.
- c) Odvodte vztah pro drift způsobený elektrickým polem, které je kolmé na magnetické pole a má konstantní gradient ve směru svého působení. Diskutujte různé typy pohybu částice v závislosti na velikosti gradientu.

(řešení str. 125)



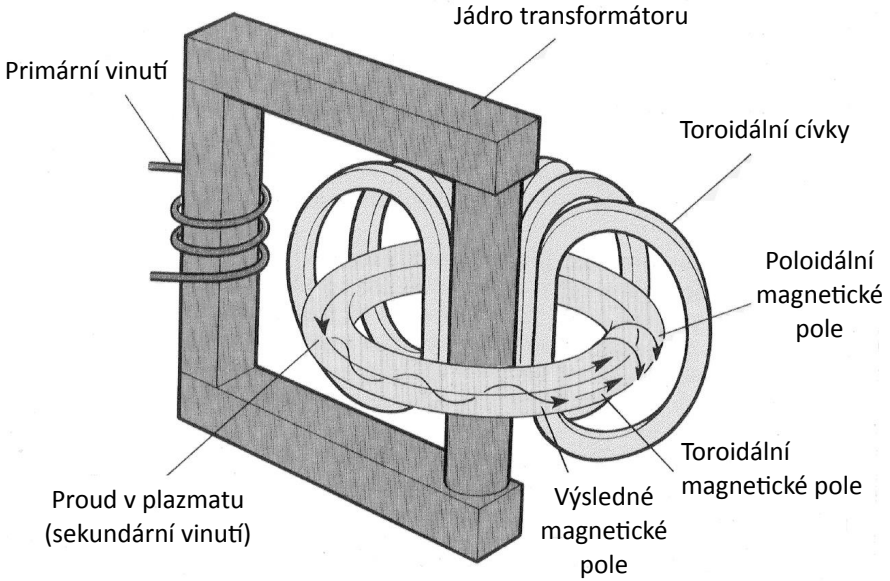
Obr. 27: Magnetické zrcadlo tvořené dvěma magnety se společnou osou

Kapitola 3: Udržení plazmatu v TOKAMAKu

V minulých dílech našeho seriálu jsme si ukázali základní pojmy z oblasti fyziky plazmatu. V tomto díle se budeme věnovat praktické konstrukci zařízení, ve kterém je možné takové plazma vyrobit, udržet a studovat. Minule jsme odvodili vztah pro lineární past, která má ovšem velké ztráty podél své osy. Tato past se dá výrazně zdokonalit tím, že se oba konce stočí proti sobě a vznikne tak torus, čímž se paralelní ztráty eliminují. Bohužel v důsledku zakřiveného magnetického pole vznikají drifts, které vedou k separaci kladně a záporně nabitých částic, což vyvolává silný $E \times B$ drift ve směru od hlavní osy torusu. Tímto mechanismem mohou nabitě částice z torusu velmi rychle unikát. Naštěstí se tento efekt dá potlačit přidáním *poloidálního* magnetického pole (viz obrázek 28), které bude zakřivovat magnetické siločáry po povrchu torusu a tím promíchá nabitě částice a potlačí vliv driftů.

Toto poloidální pole se dá vyrobit v zásadě dvěma způsoby – buď velmi komplikovaným 3D tvarem externích cívek, nebo proudem v plazmatu, kdy plazma jako každý vodič vytváří vlastní magnetické pole. Obě možnosti vedly ke konstrukci úspěšných zařízení – v prvním případě tzv. *Stellarátoru*, který poprvé zkonstruoval v roce 1950 Lyman Spitzer, zatímco torus s proudem v plazmatu vyzkoušeli o rok později sovětská inženýři Sacharov, Tamm a Arcimovič a nazvali ho *TOKAMAK* (z ruského *toroidal'naya kamera s magnitnymi katuskami*). Tento koncept pasti se stal rychle populární díky schopnosti dosahovat vysokých teplot plazmatu, což je důležitý předpoklad k realizaci jaderné fúze (principu fúzního reaktoru se bude věnovat některý z příštích dílů seriálu). Původní koncept tokamaku fungoval na principu transformátoru, kde prstenec plazmatu byl sekundárním vinutím, ve kterém se indukoval proud. Šlo tedy v principu o pulsní zařízení.

K pochopení chování plazmatu při průchodu elektrického proudu si osvěžíme základní vztahy z oblasti pružných Coulombovských srážek. Uvažujme pohybující se elektron, který interaguje s nehybným iontem. Pokud by se jednalo o nenabitě částice, minuly by se ve vzdálenosti r_0 (tzv. srážkový parametr). Vzhledem k to-



Obr. 28: Schéma tokamaku

mu, že jsou nabité, bude mezi nimi působit elastická interakce zprostředkovaná Coulombovskou silou

$$F = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

V hrubém přiblížení můžeme předpokládat, že síla bude působit pouze po dobu, kdy budou částice blízko sebe, tj. $r \sim r_0$. Tato doba bude

$$T \sim r_0/v$$

a hybnost elektronu se tedy změní přibližně o

$$\Delta(mv) = |FT| \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 v}.$$

Budeme uvažovat tzv. *účinný průřez srážky*, tj. průřez s takovým poloměrem, při kterém se směr pohybu elektronu změní o 90° , tj. změna hybnosti bude rovna mv .

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mv^2}.$$

Účinný průřez potom bude

$$\sigma = \pi r_0^2 = \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^4}.$$

Předchozí úvaha se týkala pouze dvou částic. Když budeme uvažovat pohyb elektronu mrakem iontů o hustotě n , bude místo srážkového průřezu důležitá srážková frekvence

$$\nu_{ie} = n\sigma v = \frac{ne^4}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}.$$

Elektrický proud v plazmatu je realizován pohybujícími se elektrony, které se srážejí s ionty, čímž se jejich pohyb zpomaluje. Coulombovské srážky proto vytvářejí odpor, který závisí na srážkové frekvenci. Vztah mezi srážkovou frekvencí ν_{ie} a specifickým odporem η vyplývá z teorie tekutin a jeho odvození vyžaduje matematické postupy, které přesahují rámec našeho seriálu. Spokojme se tedy s jeho uvedením bez odvození

$$\eta = \frac{m}{ne^2} \nu_{ie} \sim \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3}.$$

Pokud budeme uvažovat Maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů o teplotě T_e , můžeme střední rychlost nahradit teplotou dle vztahu

$$v^2 = kT_e/m$$

a dospět tak k finálnímu vztahu pro odpor plazmatu

$$\eta = \frac{m}{ne^2} \nu_{ie} \sim \frac{e^2 m^{1/2}}{16\pi\epsilon_0^2 (kT_e)^{3/2}}.$$

Důležitým důsledkem tohoto vztahu je možnost využít proud vedený plazmatem pro jeho ohřev. Jako každý vodič, i plazma se zahřívá Joulovým teplem, které je úměrné odporu plazmatu. Jak se ale plazma začne zahřívát, bude jeho odpor díky závislosti na teplotě klesat, tj. pro horké plazma bude tento ohřev méně efektivní. To je důvod, proč tzv. ohmický ohřev v tokamacích nedostačuje k dosažení teplot potřebných k jaderné fúzi a je zapotřebí použít i další metody ohřevu.

Úloha III.S ... tokamak

6 bodů

- Spočtete specifický odpor vodíkového plazmatu při teplotě 1 keV a srovnajte ho s odporem běžně používaných vodičů.
- Spočtete, jak velký proud plazmatu je zapotřebí k vytvoření dostatečně silného poloidálního magnetického pole v tokamaku, který má hlavní poloměr 0,5 m. Toroidální pole vytváří cívky navinuté okolo torusu s hustotou vinutí 20 závitů na metr, kterými prochází proud 40 kA. Poloidální pole by mělo mít velikost zhruba 1/10 pole toroidálního.
- Pokuste se libovolným nápaditým způsobem vytvořit fyzický model siločar v tokamaku, tento model nafotíte a pošlete spolu s řešením.

(řešení str. 126)

Kapitola 4: Transport částic

V dnešním díle seriálu se budeme věnovat problému transportu částic plazmatu napříč magnetickým polem. Tento problém je z pohledu jaderné fúze zásadní, protože rychle unikající částice znemožňují dosažení vysokých teplot a hustot nutných pro fúzi. V druhém a třetím dílu seriálu jsme ukázali, jak lze plazma zachytit v magnetickém poli. Žádná past ale není dokonalá, a tak existuje řada mechanismů, které umožňují částicím cestovat napříč magnetickým polem.

Jedněmi z nich jsou srážky, při kterých se mění směr rychlosti částic a umožňují částicím „přeskočit“ na jinou siločáru, okolo které následně gyruje Larmorovským pohybem. Srážky tak vytvářejí difuzní tok Γ , který je závislý na gradientu hustoty plazmatu s konstantou úměrnosti D (tzv. difuzním koeficientem)

$$\Gamma = -D\nabla n,$$

$$D = \frac{a^2}{\tau},$$

kde a je vzdálenost, o kterou se částice v průměru posune v důsledku jedné srážky, a τ je průměrná doba, po kterou se částice volně pohybuje mezi dvěma srážkami (tj. převrácená hodnota srážkové frekvence). Je důležité si uvědomit, že srážky mezi částicemi stejného druhu k difuzi nepovedou – jejich trajektorie se sice změní, ale v důsledku zákona zachování hybnosti se částice v podstatě prohodí a plazma jako celek se neposune. Difuzi mohou způsobit jen srážky mezi nestejnými částicemi, tj. mezi elektrony a ionty. V důsledku velkého rozdílu hmotností se budou elektrony odrážet od téměř nehybných iontů a jejich krok při jedné srážce bude roven Larmorově poloměru r_{Le} . Ionty budou svoji trajektorii měnit jen pozvolna, ale jejich Larmorův poloměr bude daleko větší. Ve výsledku to bude znamenat, že ionty i elektrony budou difundovat stejně rychle (toto tvrzení zde ale necháme bez důkazu). Jako difuzní krok budeme tedy brát Larmorův poloměr elektronů a použijeme vztah pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu. Dospějeme tedy ke vztahu pro difuzní koeficient, který má zajímavou závislost na hustotě a velikosti magnetického pole

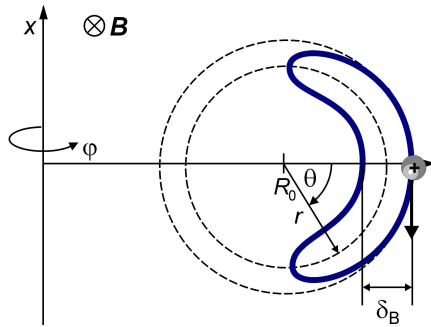
$$D \sim \frac{n}{B^2}.$$

Tato úvaha stála u zrodu snahy o dosažení jaderné fúze v tokamacích. Vypočtená velikost difuzního koeficientu byla velice malá (typicky $D = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$), navíc se měla kvadraticky zmenšovat s rostoucím magnetickým polem. Takto malá difuze (označovaná jako klasická difuze) slibovala velmi snadné dosažení hustoty a teploty nutné pro fúzní reakce deuteria s tritiem. Bohužel již první experimenty v tokamacích ukazovaly daleko vyšší difuzi, bylo tedy nutné najít mechanismy, které za ni mohou být odpovědné. Jedním z nich mohly být efekty spojené s toroidální geometrií tokamaku. V torusu totiž toroidální magnetické pole není konstantní, ale klesá směrem od osy torusu

$$B_{zT} = \frac{\mu_0 I_T}{2\pi R}.$$

Částice v tokamaku, které sledují magnetické siločáry, se pohybují mezi oblastmi s větším (blízko osy torusu) nebo menším (dále od osy) magnetickým polem.

Pro částice s určitou kombinací paralelní a kolmé rychlosti bude tento systém fungovat jako magnetické zrcadlo popsané dříve v seriálu a jejich trajektorie budou mít tvar tzv. banánových orbitů, jak je to znázorněno na obrázku 29.



Obr. 29: Banánový orbit částic zachycených v toroidálním poli.

Odvození rovnic charakterizujících pohyb zachycených částic je poměrně zdlouhavé, proto ho necháme pozornému čtenáři k samostatné úvaze. Spokojíme se se vztahem pro dobu, po kterou se budou částice pohybovat mezi body odrazu

$$\tau_B = \frac{qR}{v_{\perp}} \sqrt{\frac{R_0}{r}},$$

kde q je tzv. zásoba bezpečnosti (angl. safety factor)

$$q = \frac{rB_0}{R_0B_{\varphi}},$$

kteřá charakterizuje míru zkroucení magnetických siločar v tokamaku. Během pohybu po banánovém orbitu působí na částici ∇B drift, který ji bude vychylovat z gyrace okolo magnetické siločáry. Míra této výchytky δ_B udává šířku banánového orbitu. Driftová rychlost bude přibližně

$$v_d = \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_L} \frac{1}{R},$$

kde ω_L je je larmorovská frekvence. V hrubém přiblížení můžeme uvažovat, že driftová rychlost je konstantní a působí po celou dobu pohybu mezi body odrazu. V tomto případě bude tedy šířka banánového orbitu

$$\delta_B = v_d \tau_B,$$

$$\delta_B = r_L q \sqrt{\frac{R_0}{r}}.$$

Pro většinu tokamaků dosahuje q na okraji plazmatu hodnot okolo 5, poměr velkého a malého poloměru je zhruba 3. Šířka banánového orbitu je tedy zhruba

desetinásobek Larmorova poloměru. Pokud částice utrpí srážku v blízkosti bodu obratu (kde se pohybuje nejpomaleji, tj. tráví zde nejvíce času), bude její difuzní krok roven šířce banánového orbitu. Vzhledem k tomu, že difuzní koeficient je úměrný čtverci tohoto kroku, bude výsledná difuze 100krát rychlejší. Tato difuze se nazývá neoklasická a vede k hodnotám difuzního koeficientu $D = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Experimentální měření transportu částic udávají hodnoty okolo $D = 1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, tj. o několik řádů vyšší, než je neoklasická difuze. Ukazuje se, že velice efektivním mechanismem transportu je elektromagnetická turbulence, kdy si plazma vytváří svoje elektrické pole, které následně pomocí $E \times B$ driftu umožňuje částicím uniknout z magnetické pasti. Za určitých okolností je ale možné tuto turbulenci potlačit, a pak difuze dosahuje hodnot předpovězených neoklasickým modelem.

Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů

- Za použití vztahu pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu odvoďte vzorec pro difuzní koeficient klasické difuze a spočítejte jeho hodnotu pro typické plazma v tokamaku (viz první díl seriálu).
- Odvoďte vztah určující závislost frakce zachycených částic (tj. poměr zachycených částic ku celkové populaci) na poměru hlavního a malého poloměru plazmatu r/R_0 .

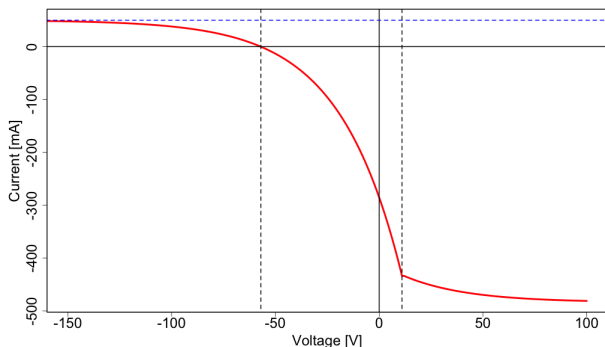
(řešení str. 127)

Kapitola 5: Sondová diagnostika plazmatu

V minulých dílech seriálu jsme popsali vlastnosti plazmatu vycházející z teoretického rozboru chování nabitých částic. V praxi se ale o chování plazmatu dozvídáme nejvíce z experimentálního pozorování. V tomto díle se budeme věnovat jedné z nejstarších diagnostických metod zkoumání plazmatu za pomoci Langmuirovy sondy.

Langmuirova sonda je pojmenována po průkopníkovi fyziky plazmatu Irvingovi Langmuirovi, který jí poprvé úspěšně zkonstruoval a použil roku 1924. Ve své nejjednodušší variantě se jedná o kus drátu ponořený do plazmatu. Na sondu se aplikuje proměnlivé předpětí a měří se proud, který na ni dopadá. Výsledkem tohoto měření je tzv. voltampérová charakteristika. Jejím zpracováním je možné odvodit základní parametry plazmatu – hustotu a elektronovou teplotu. Jakkoliv je měření s Langmuirovou sondou relativně snadné, interpretace výsledků (zvláště pro magnetizované plazma) je předmětem neutuchajících diskusí od dvacátých let až do současnosti. V následujícím textu rozebereme pouze základní model fungování sondy.

Ideální voltampérová charakteristika je zobrazená na obr. 30. Pro záporná napětí na sondu dopadá pouze kladný proud iontů, který je prakticky konstantní a nazývá se *iontový saturační proud*. Se zvyšujícím se napětím přibývá elektronů, které mají dostatek energie na to, aby na sondu dopadly. Při určitém potenciálu se proudy iontů a elektronů vyrovnají, takže celkový proud je nulový. Tento potenciál se nazývá *plovoucí potenciál*. Při dalším zvyšování sondového předpětí elektronový



Obr. 30: Idealizovaná voltampérová charakteristika Langmuirovy sondy.

proud dále narůstá až do momentu, kdy se potenciál sondy bude rovnat *potenciálu plazmatu* (hodnotě elektrického potenciálu v neporušeném plazmatu). Při tomto potenciálu je sonda plně otevřená elektronovému proudu, který se opět saturuje. V experimentu se saturace elektronového proudu pozoruje velice obtížně, sondy mají tendenci vysávat elektrony úměrně svému předpětí.

Při teoretickém rozboru voltampérové charakteristiky budeme sondu považovat jednoduše za vodič o daném povrchu A a potenciálu φ . Z teorie plynů vyplývá, že proud částic (např. elektronů) na takový objekt bude

$$I_e = \frac{1}{4} q_e n_e A \bar{v}_e ,$$

kde n_e je hustota elektronů, q_e jejich náboj a \bar{v}_e jejich střední rychlost. Za předpokladu, že elektrony mají Maxwellovské rozdělení rychlostí, kterému odpovídá teplota T_e , můžeme střední rychlost vyjádřit a dostat vztah

$$I_e = \frac{1}{4} q_e n_e A \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} .$$

Plazma je ale soubor nabitých částic, a proto bude důležitou roli hrát rozdíl potenciálu plazmatu a potenciálu sondy. Pokud bude sonda na menším potenciálu, než je potenciál plazmatu, bude od sebe elektrony odpuzovat a část jich nebude mít dostatečnou energii na to, aby tento rozdíl potenciálu překonala a na sondu dopadla. Pokud budeme toto předpětí na sondě snižovat, elektronový proud postupně klesne na nulu. Nejmenší energie elektronu, který je schopný dopadnout na sondu o daném potenciálu φ , je

$$\frac{1}{2} m_e v_{\min}^2 = e(\varphi - \varphi_0) ,$$

kde φ_0 je potenciál plazmatu, jehož hodnotu obvykle neznáme. Mezní rychlost v_{\min} je tedy rovna

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2e(\varphi - \varphi_0)}{m_e}}.$$

Existence této minimální rychlosti změni průměrnou rychlost dopadajících, která je dle definice

$$\bar{v} = \frac{\int_{v_{\min}}^{\infty} f(v)v dv}{\int_{-\infty}^{\infty} f(v)dv},$$

kde $f(v)$ je rozdělovací funkce rychlostí elektronů. Opět za předpokladu Maxwellovského rozdělení rychlostí můžeme po několika úpravách dospět ke vztahu

$$I_e = \frac{1}{4}q_e n_e A \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} e^{\frac{e(\varphi - \varphi_0)}{kT_e}}.$$

Pro potenciál sondy menší než potenciál plazmatu bude sonda přitahovat ionty. V jednoduchém přiblížení můžeme uvažovat, že na sondu dopadnou všechny ionty, které překročí hranici tzv. *sheathu*, tj. oblasti prudkého poklesu potenciálu v blízkosti sondy (tuto oblast jsme rozebírali v prvním díle seriálu při odvození Debyeovy délky). Takový iontový proud nebude záviset na předpětí sondy. Z teorie sheathu vyplývá, že ionty překračují jeho hranici se střední rychlostí rovnou zvukové rychlosti. Iontový proud tedy bude

$$I_{\text{isat}} = q_i n_i A c_s = q_i n_i A \sqrt{\frac{kT_e + kT_i}{m_i}}.$$

Nyní využijeme předpokladu kvazineutality, tj. $n_e = n_i$, a izotermálnosti $T_e = T_i$, která je v okrajovém plazmatu v tokamaku přibližně splněna, a můžeme zapsat finální vztahy pro iontový a elektronový proud

$$\begin{aligned} I_{\text{isat}} &= -Zq_e n_e A \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}}, \\ I_e &= \frac{1}{4}q_e n_e A \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} e^{\frac{e(\varphi - \varphi_0)}{kT_e}}, \end{aligned} \quad (25)$$

kde Z charakterizuje náboj iontů. Zkombinováním obou vztahů můžeme dospět k finálnímu výrazu pro elektronový proud

$$I_e = -\frac{I_{\text{isat}}}{2\sqrt{\pi}Z} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} e^{\frac{e(\varphi - \varphi_0)}{kT_e}}. \quad (26)$$

Výše uvedené vztahy dávají postup, jak z voltampérové charakteristiky odvodit hustotu a elektronovou teplotu:

1. Z grafu charakteristiky zjistíme hodnotu iontového saturačního proudu. K tomu nám poslouží oblast záporných napětí, kde se celkový proud nemění.
2. Od charakteristiky odečteme iontový saturační proud. Tím získáme odhad čistě elektronového proudu na sondu.
3. Celou charakteristiku vydělíme velikostí iontového saturačního proudu, čímž nám saturační proud vypadne ze vztahu (26). Nyní proud zlogaritmujeme a v oblasti, kde má tento zlogaritmovaný signál lineární charakter, provedeme lineární fit.
4. Ze směrnice fitu určíme hodnotu elektronové teploty.
5. Z velikosti iontového saturačního proudu při znalosti elektronové teploty za použití vztahu (25) určíme hustotu.

Je nutné podotknout, že výše uvedený postup je pouze přibližný a zanedbává celou řadu mechanismů, které ale ve výsledku mohou vést k významně rozdílným naměřeným hodnotám. Jedním z nich je sekundární elektronová emise, která mění velikost měřeného proudu, v magnetizovaném plazmatu hraje roli Larmorovská rotace iontů, která zvětšuje efektivní plochu sondy (iontový Larmorův poloměr má obvykle podobnou velikost jako sonda). Přesto je tato diagnostika populární hlavně díky své snadné realizaci.

Úloha V.S ... seriálová

6 bodů

- a) Z adresy <http://fykos.cz/rocnik26/4-compass.dat> si stáhněte data naměřená Langmuirovou sondou na tokamaku COMPASS. Vykreslete voltampérovou charakteristiku a určete hodnotu plovoucího potenciálu.
- b) Při znalosti povrchu sondy ($A = 6 \text{ mm}^2$) a složení plazmatu (deuterium) zanalyzujte voltampérovou charakteristiku a získejte hodnotu elektronové teploty a hustoty.
- c) Napište krátký oslavný hymnus popisující vynález Langmuirovy sondy.

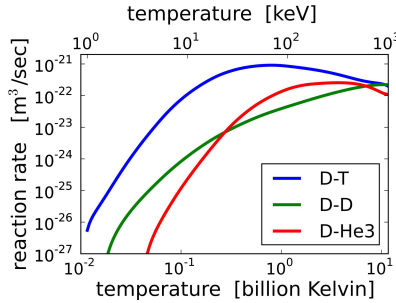
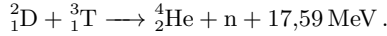
(řešení str. 129)

Kapitola 6: Tokamak jako fúzní reaktor

V závěrečném (a trochu oddychovém) díle seriálu popíšeme základní charakteristiky termonukleárního reaktoru. Uvedeme vztahy, které popisují reaktor tak, aby byl schopen generovat více energie, než kolik spotřebuje.

Jaderná fúze je oproti dnes využívanému štěpení založená na slučování lehkých jader za účelem získání energie. K tomu, aby se atomová jádra mohla slučovat, je zapotřebí překonat jejich vzájemné Coulombovské odpuzování a přiblížit je k sobě na vzdálenost typickou pro velikost atomového jádra. Pro překonání Coulombovské bariéry musí mít jádra dostatečnou energii, která po zahrnutí efektu kvantově-mechanického tunelování činí řádově 100 keV. K fúzování je nutné, aby se jádra srážela čelně, většina srážek ale typicky probíhá tak, že se trajektorie iontů změni jen o malý úhel. Proto není k dosažení fúze vhodné použít urychlovač a srážet urychlené částice s pevným terčíkem (případně dva urychlené svazky proti sobě), ale je výhodnější využít termální srážky v dostatečně horkém prostředí. Pečlivý

čtenář, který sledoval předchozí díly seriálu, již jistě tuší, že tímto prostředím je plazma, protože při tak vysokých teplotách dojde k oddělení elektronového obalu od atomových jader. Z hlediska účinného průřezu (viz obrázek 31) je nejvýhodnější fúzovat jádra deuteria a tritia, izotopy vodíku, které mají v jádře jeden proton a jeden, respektive dva, neutrony. Fúzní reakcí získáme atom helia a neutron



Obr. 31: Účinný průřez nejefektivnějších fúzních reakcí.

Fúzní výkon v jednotkovém objemu plazmatu bude

$$P = n_d n_t \langle \sigma v \rangle E ,$$

kde n_d a n_t jsou hustoty deuteria a tritia, $\langle \sigma v \rangle$ účinný průřez reakce a E energie uvolněná při jedné fúzní reakci (v případě DT fúze je rovna 17,56 MeV). Vzhledem k povaze fúzní reakce je žádoucí mít směs DT 50/50, takže můžeme vztah přepsat pro celkovou iontovou hustotu

$$P = \frac{1}{4} n_i^2 \langle \sigma v \rangle E .$$

Protože udržení energie v tokamaku není dokonalé, dochází ke kontinuálním ztrátám, které musejí být kompenzované ohřevem plazmatu. Celková kinetická energie plazmatu je

$$W = \int \left(\frac{3}{2} n_i T_i + \frac{3}{2} n_e T_e \right) d^3 x = \int 3nT d^3 x = 3\overline{nT}V ,$$

kde uvažujeme, že plazma je izotermální a ionty a elektrony mají stejnou hustotu. Konvence \overline{nT} značí průměrné hodnoty hustoty a teploty. Ztráty energie vlivem nedokonalého udržení můžeme charakterizovat *dobou udržení energie* τ_E , tj. časovou konstantou, se kterou by se energie ztrácela, pokud bychom plazma neohřívali. Ztrátový výkon P_L potom bude

$$P_L = \frac{W}{\tau_E} .$$

Pokud chceme plazma udržet na konstantní teplotě, tak musíme ztrátový výkon kompenzovat ohřevem P_H o stejné velikosti

$$P_H = P_L,$$

čímž se dostáváme ke vztahu, podle kterého můžeme v praxi dobu udržení změřit

$$\tau_E = \frac{W}{P_H}.$$

Stačí tedy znát celkovou kinetickou energii v plazmatu (tj. její hustotu a teplotu) a velikost ohřevu.

V případě, že v plazmatu probíhají fúzní reakce, 4/5 energie odnáší neutron (který s plazmatem nereaguje) a 1/5 ($E_\alpha = 3,5 \text{ MeV}$) odnáší alfa částice, která ji postupnými srážkami předává plazmatu. Ohřev alfa částicemi v jednotkovém objemu tedy bude

$$p_\alpha = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha$$

a v celém plazmatu

$$P_\alpha = \int p_\alpha d^3x.$$

Ohřev alfa částicemi bude přispívat k externímu ohřevu plazmatu a celková energetická bilance tedy bude

$$P_H + \frac{1}{4} \overline{n^2 \langle \sigma v \rangle} E_\alpha V = \frac{3nT}{\tau_E} V.$$

Ideální situace v termonukleárním reaktoru je taková, kdy ohřev alfa částicemi plně kompenzuje tepelné ztráty a dodatečný ohřev již není zapotřebí. Tento stav se nazývá podmínka zapálení. Dle předchozí rovnice pro $P_H = 0$ získáme nerovnici

$$n\tau_E > \frac{12T}{\langle \sigma v \rangle E_\alpha}.$$

Přestože se teplota v nerovnici vyskytuje explicitně, v praxi na ní závisí i τ_E a samozřejmě i účinný průřez $\langle \sigma v \rangle$. Analýzou těchto závislostí můžeme dospět k optimální teplotě mezi 10 keV a 20 keV, kde se účinný průřez dá aproximovat kvadratickou závislostí

$$\langle \sigma v \rangle = 1,1 \cdot 10^{-24} \text{ T}^2 \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1},$$

kde se teplota udává v keV. Při znalosti energie alfa částic můžeme dospět ke vztahu

$$nT\tau_E > 3 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot \text{keV} \cdot \text{s}.$$

Tento vztah poprvé odvodil J. D. Lawson v roce 1955 a jmenuje se po něm *Lawsonovo kritérium*. V případě tokamaku můžeme uvažovat optimální teplotu 10 keV, hustota je omezená nestabilitami na cca 10^{20} m^{-3} , což dává podmínku na dobu udržení energie okolo 3 sekund.

Pro úspěšný provoz termonukleárního reaktoru ale není nutné dosáhnout podmínky zapálení. Důležité je, aby reaktor vyrobil více energie, než kolik spotřebuje. Během fúzní reakce $4/5$ energie odnáší neutron, který se zachytí ve stěně reaktoru a jeho energie se odvede chladicími systémy. Můžeme zavést celkovou účinnost reaktoru

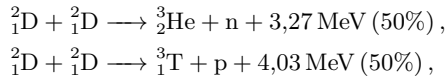
$$Q = \frac{5P_\alpha}{P_H},$$

tedy pro $Q = 1$ je ohřev alfa částicemi jen 20 % z celkového ohřevu plazmatu. Při zapálení jde $P_H \rightarrow 0$, a tedy $Q \rightarrow \infty$. V současné době největší tokamak JET dosáhl $Q = 0,6$, plánovaný tokamak ITER, který je ve výstavbě na jihu Francie, by měl dosáhnout $Q = 10$ a potvrdit tak dosažitelnost pozitivní energetické bilance termonukleárních reaktorů.

Úloha VI.S ... seriálová

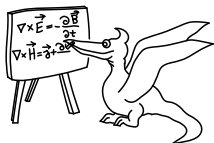
6 bodů

- Spočtete dobu udržení energie v tokamaku COMPASS, kde je energie plazmatu 5 kJ a ohmický ohřev 300 kW.
- Spočtete, jaký alfa ohřev by byl v tokamaku COMPASS, pokud by v něm hořela DT směs. Typická teplota plazmatu je 1 keV, hustota 10^{20} m^{-3} , objem plazmatu cca 1 m^3 . Při uvážení ohmického ohřevu z předešlého příkladu spočtete Q .
- S využitím obrázku v textu seriálu a znalosti DD reakce



kde opět $3/4$ energie v první reakci odnáší neutron, spočtete celkový ohřev plazmatu, který se vyvine během jedné DD reakce (uvažujte, že následně proběhne i DT fúze s produktem druhé reakce), a odhadněte nároky na dobu udržení při hustotě 10^{20} m^{-3} a teplotě 10 keV.

(řešení str. 130)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... seriálová

- Vyhledejte z dostupných zdrojů typické vlastnosti plazmatu ve slunečním větru, centru tokamaku a doutnavém výboji a spočítejte příslušnou velikost λ_D .
- Spočítejte vztah pro velikost Debyeovy délky pro plazma tvořené elektrony o teplotě T_e a ionty o teplotě T_i bez předpokladu nehybných iontů.
- Spočítejte rozložení potenciálu mezi dvěma nekonečnými rovnoběžnými vodivými deskami vzdálenými od sebe na vzdálenost d , které jsou drženy na potenciálu $\varphi = 0$. Prostor mezi deskami je rovnoměrně vyplněný plynem nabitých částic o náboji q a koncentraci n .

Vlastnosti plazmatu

Parametry plazmatu ve slunečním větru mají poměrně široké rozpětí v závislosti na událostech, které v něm probíhají. Jako typické hodnoty ve vzdálenosti od Slunce odpovídající oběžné dráze Země můžeme uvažovat $T_e = T_i = 100 \text{ eV}$ a $n = 6 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$. Tomu odpovídá Debyeova délka $\lambda_D \approx 100 \text{ m}$. V centru tokamaku je $T_e = T_i = 10 \text{ keV}$ a $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, tj. $\lambda_D \approx 1 \mu\text{m}$. V doutnavém výboji pak $T_e = 10 \text{ eV}$ a $n = 10^{15} \text{ m}^{-3}$, tj. $\lambda_D \approx 1 \text{ mm}$.

Debyeova délka

Vyjdeme z jednorozměrné Poissonovy rovnice, kam za hustoty iontů a elektronů dosadíme

$$n_i = n_\infty e^{-\frac{e\varphi}{kT_i}} \quad \text{a} \quad n_e = n_\infty e^{\frac{e\varphi}{kT_e}},$$

následně použijeme stejný postup jako při prvním odvození Debyeovy délky. Dostaneme se k rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{\varepsilon_0 (kT_e + kT_i)} \varphi,$$

z čehož získáme novou Debyeovu délku

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 (kT_e + kT_i)}{ne^2}}.$$

Mezi deskami

Vyjdeme z jednorozměrné Poissonovy rovnice, kam dosadíme konstantní nábojovou hustotu

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{qn}{\varepsilon_0}.$$

První integrací získáme nejprve průběh elektrického pole

$$\frac{d\varphi}{dx} = -E(x) = \frac{qn}{\varepsilon_0} x,$$

druhou integrací s použitím okrajových podmínek $\varphi(-d/2) = 0$ a $\varphi(d/2) = 0$ dostaneme žádaný profil potenciálu

$$\varphi(x) = \frac{qn}{\varepsilon_0} (d^2 - x^2).$$

Úloha II.S ... driftujeme

- Které driftы budeme pozorovat v lineární pasti? Představte si, že je osa pasti vodorovná, bude v pohybu částic hrát významnou roli drift způsobený gravitační silou?*
 - Odvodte vztah pro ztrátový kužel a nakreslete originální obrázek, který bude názorně ilustrovat chování částic v lineární pasti.*
 - Odvodte vztah pro drift způsobený elektrickým polem, které je kolmé na magnetické pole a má konstantní gradient ve směru svého působení. Diskutujte různé typy pohybu částice v závislosti na velikosti gradientu.*
- a) V lineární pasti, která byla znázorněna na obrázku doprovázejícím druhý díl seriálu, budeme pozorovat především driftы způsobené nehomogenním magnetickým polem. Gradient magnetického pole paralelní ke směru siločar bude odrážet částice s vhodným poměrem paralelní a kolmé rychlosti zpět do prostoru pasti. Vzhledem k tomu, že dle Maxwellových rovnic je celková divergence magnetického pole nulová, bude gradient ve směru pole vyvolávat i gradient ve směru kolmém na pole. Ten bude způsobovat precesní pohyb částic, které budou pomalu rotovat okolo osy pasti. Tím se budou částice promíchávat a bude se rušit vliv driftu způsobený gravitací, který by částice separoval ve směru kolmém na osu pasti a směr gravitační síly. Pokud bychom uvažovali přítomnost plazmatu s kolektivním chováním (a ne jen individuálních nabitých částic), zcela jistě by se objevil i $E \times B$ drift – ionty a elektrony by z pasti unikaly různým tempem a tím by se narušovala kvazineutralita plazmatu v pasti, což by vedlo ke vzniku elektrických polí.
- b) Vyjdeme z předpokladu zachování magnetického momentu μ , který bude stejný pro částici v místě s nejmenším magnetickým polem B_0 (tj. uprostřed pasti) a s maximálním polem (na kraji) B_{\max} (v dalším textu bude rychlost v tomto místě označována jako v_1)

$$\mu = \frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0} = \frac{mv_1^2}{2B_{\max}}.$$

Uvažujme případ takové částice, která bude mít v místě maximálního magnetického pole přesně nulovou paralelní rychlost, tj. veškerá její kinetická energie se transformuje do kolmé složky

$$\frac{mv_{\perp 0}^2}{2B_0} = \frac{mv_0^2}{2B_{\max}}.$$

Z tohoto vztahu snadno odvodíme podmínku pro poměr celkové a kolmé rychlosti

$$\frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2} = \frac{B_0}{B_{\max}}.$$

Tomuto poměru odpovídá ve fázovém rychlostním prostoru ztrátový kužel s úhlem α

$$\sin^2 \alpha = \frac{B_0}{B_{\max}}.$$

Částice, které se nacházejí uvnitř ztrátového kužele, mají dostatečně velký poměr paralelní složky rychlosti ku celkové velikosti rychlosti na to, aby dokázaly z pasti uniknout.

$$v_{\parallel} > v \sqrt{\frac{B_0}{B_{\max}}}.$$

c) Vyjdeme z rovnice ze seriálu, kde konstantní elektrické pole nahradíme výrazem

$$E = E_0 + ay,$$

kde a je gradient elektrického pole. Dále budeme postupovat podobně jako v seriálu s využitím vztahu

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dt} = av_y.$$

Takto budeme schopni separovat soustavu diferenciálních rovnic a dojít k rovnici pro v_y

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{e}{m} av_y - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 v_y = -\Omega_L \left(\frac{a}{B} + \Omega_L\right) v_y.$$

Částice se bude pohybovat s pozměněnou Larmorovskou frekvencí. Zajímavý je případ, kdy

$$-\frac{a}{B} > \Omega_L.$$

V tomto případě se změní znaménko koeficientu u v_y , tedy změní se charakter řešení diferenciální rovnice – z lineárního harmonického oscilátoru přejde na exponenciální řešení. Larmorovský pohyb bude tedy nahrazen pohybem ve směru elektrického pole.

Úloha III.S . . . tokamak

- Spočítejte specifický odpor vodíkového plazmatu při teplotě 1 keV a srovnajte ho s odporem běžně používaných vodičů.
- Spočítejte, jak velký proud plazmatu je zapotřebí k vytvoření dostatečně silného poloidálního magnetického pole v tokamaku, který má hlavní poloměr 0,5 m. Toroidální pole vytváří cívky navinuté okolo torusu s hustotou vinutí 20 závitů na metr, kterými prochází proud 40 kA. Poloidální pole by mělo mít velikost zhruba 1/10 pole toroidálního.

- c) Pokuste se libovolným nápaditým způsobem vytvořit fyzický model siločar v tokamaku, tento model nafotíte a pošlete spolu s řešením.
- a) Vztah uvedený v třetí části seriálu je sice zjednodušený, postačí ale pro to, abychom získali řádový odhad specifického odporu plazmatu.

$$\eta = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0^2 m^2 v^3},$$

dospějeme k hodnotě cca $1,3 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$. Tento odpor můžeme srovnat např. se specifickým odporem mědi ($1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$), olova ($2,2 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$) nebo oceli ($6,9 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$). Plazma je tedy poměrně dobrý vodič, což má za následek malý výkon ohmického ohřevu.

- b) Nejprve si spočteme, jak velké toroidální pole vytvoří cívky o zadaných parametrech – s použitím vztahu pro magnetické pole vytvářené solenoidem

$$B_T = \mu_0 n I,$$

kde n je počet závitů na metr a I je proud v solenoidu. Po dosazení dospějeme k velikosti magnetického pole cca 1 Tesla. Poloidální pole by mělo mít velikost 0,1 T. Pro výpočet magnetického pole generovaného plazmatem budeme uvažovat přiblížení nekonečně dlouhého vodiče. V tomto případě magnetické pole klesá směrem od vodiče a je nutné zvolit referenční vzdálenost, ve které budeme velikost pole uvažovat. Jako dobré přiblížení slouží malý poloměr torusu. Tento údaj sice v zadání chyběl, vyskytoval se tam ale hlavní poloměr torusu ($R = 0,5 \text{ m}$). Pro většinu moderních tokamaků je poměr hlavního a malého poloměru blízky 3, tj. můžeme uvažovat malý poloměr přibližně $a = 0,15 \text{ m}$. Nyní již můžeme použít známý vzorec

$$B_{\text{pol}} = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}$$

a získat hodnotu potřebného proudu plazmatu I_p . Po dosazení dospějeme k přibližné hodnotě 75 kA.

Pozn.: Tento postup je velmi zjednodušený a zanedbává celou řadu efektů, např. zakřivení toroidálních cívek, profil proudové hustoty v plazmatu apod. Pro přibližný odhad potřebného proudu ale postačuje. Na tokamaku COM-PASS, který má danou velikost toroidálního pole, se pracuje se zhruba dvojnásobnou velikostí proudu plazmatu, tj. okolo 150 kA.

Úloha IV.S . . . seriálová

- a) Za použití vztahu pro srážkovou frekvenci z minulého dílu seriálu odvoďte vztah pro difuzní koeficient klasické difuze a spočítejte jeho hodnotu pro typické plazma v tokamaku (viz první díl seriálu).
- b) Odvoďte vztah určující závislost frakce zachycených částic (tj. poměr zachycených částic ku celkové populaci) na poměru hlavního a malého poloměru plazmatu r/R_0 .

a) S využitím následujících vztahů

$$D = \frac{r_L^2}{\tau},$$

$$r_L = \frac{\sqrt{kT_e m_e}}{|q_e B|},$$

$$\tau = 1/\nu_{ie} = \frac{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 \left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{3/2}}{ne^4}$$

dospějeme k finálnímu výrazu

$$D = \frac{ne^2 \sqrt{m_e}}{16\pi\varepsilon_0^2 B^2 \sqrt{kT_e}}.$$

Po dosazení typických hodnot plazmatu ve středu tokamaku ($n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $B = 2 \text{ T}$, $T_e = 1000 \text{ eV}$) dospějeme k hodnotě

$$D = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tato hodnota je ještě nižší, než je uvedeno v textu. Ve skutečnosti hraje největší roli difuze na okraji plazmatu, kde je menší magnetické pole a hlavně výrazně nižší teplota. Navíc vztah uvedený v seriálu je jen přibližný.

b) Toroidální magnetické pole není konstantní, ale jak vyplývá z úvahy o banánových orbitech částic, klesá směrem od osy torusu

$$B = B_0 \frac{R_0}{R},$$

kde index 0 značí hodnoty veličin uprostřed poloidálního řezu komory (tj. R_0 je hlavní poloměr tokamaku). Poměr maximálního pole v komoře (tj. na místě nejbližší ose torusu) ku minimálnímu tedy bude

$$\frac{B_{\min}}{B_{\max}} = \frac{R_0 + a}{R_0 - a},$$

kde a je malý poloměr tokamaku. Za použití podmínky pro ztrátový kužel odvozené v předešlých dílech seriálu dospějeme k meznímu poměru rychlostí

$$\frac{v_{||0}}{v_{\perp 0}} < \sqrt{\frac{2a}{R_0 - a}}.$$

Pro izotropní Maxwellovské rozdělení částic je frakce zachycených částic f dána tvarem rychlostního prostoru a můžeme ji vyjádřit pomocí poměru složek rychlostí částice, která je přesně na hranici ztrátového kužele

$$f = \frac{v_{||0}}{v_0}.$$

Za použití vztahu pro složky rychlosti $v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$ vyjádříme

$$\left(\frac{v_{\parallel}}{v}\right)^2 = \frac{\left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right)^2}{1 + \left(\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}}\right)^2}$$

a po několika úpravách dostaneme výraz pro f

$$f = \sqrt{\frac{2a}{R_0 + a}},$$

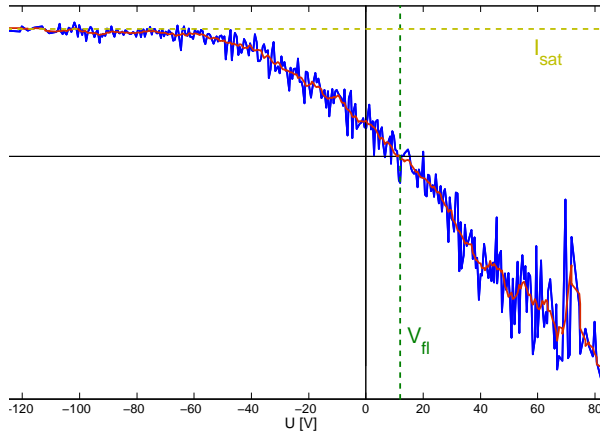
neboli

$$f = \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon}},$$

kde $\varepsilon = R/a$ je poměr hlavního a malého poloměru tokamaku.

Úloha V.S ... seriálová

- Z adresy <http://fykos.cz/rocnik26/4-compass.dat> si stáhněte data naměřená Langmuirovou sondou na tokamaku COMPASS. Vykreslete voltampérovou charakteristiku a určete hodnotu plovoucího potenciálu.
 - Při znalosti povrchu sondy ($A = 6 \text{ mm}^2$) a složení plazmatu (deuterium) zanalyzujte voltampérovou charakteristiku a získejte hodnotu elektronové teploty a hustoty.
 - Napište krátký oslavný hymnus popisující vynález Langmuirovy sondy.
- Plovoucí potenciál je dle definice taková hodnota potenciálu, při které se vyrovná proud iontů a elektronů na sondu, tj. celkový proud je nulový. Na obr. 32 je vidět přibližná hodnota plovoucího potenciálu 12 V.
 - Zároveň je v obr. 32 vyznačený iontový saturační proud 365 mA. Dále budeme postupovat podle kuchařky z minulého dílu. Odečteme od celkového proudu iontový saturační proud (který uvažujeme jako konstantní pro potenciál nižší než potenciál plazmatu), abychom získali elektronový proud. Ten vydělíme hodnotou iontového saturačního proudu, čímž se zbavíme dvojí závislosti na teplotě, a potom provedeme lineární fit na jeho logaritmu. Směrnice fitu určí velikost elektronové teploty. Pro úspěšné získání elektronové teploty je důležité určit vhodnou část charakteristiky, na kterou se aplikuje fit. Není vhodné fitovat příliš nízká napětí, kde je elektronový proud malý, a tudíž zatížený šumem, ale zároveň není korektní fitovat oblast blízko potenciálu plazmatu, kde začíná klesat iontový proud a může se tam projevit odchylka rychlostního rozdělení elektronů od Maxwellovského rozdělení. Vhodná oblast je tak typicky v okolí plovoucího potenciálu. Na obr. 33 je vidět fit s červeně vyznačenou částí charakteristiky použité k fitu. Směrnice fitu určuje teplotu 42 eV s typickou přesností okolo 10 %.



Obr. 32: Voltampérová charakteristika s vyznačeným plovoucím potenciálem V_{fl} a iontovým saturačním proudem I_{sat}

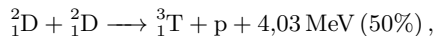
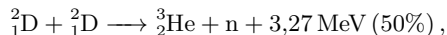
Díky znalosti velikosti elektronové teploty můžeme použít přibližný vztah z minulého dílu seriálu

$$I_{i,sat} = -Zq_e n A \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}}$$

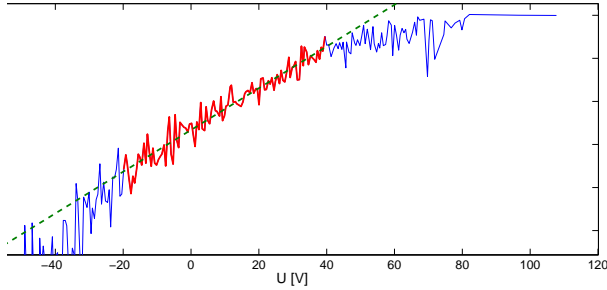
a spočítat hustotu plazmatu, která vychází přibližně na $6 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$.

Úloha VI.S ... seriálová

- Spočtete dobu udržení energie v tokamaku COMPASS, kde je energie plazmatu 5 kJ a ohmický ohřev 300 kW.
- Spočtete, jaký alfa ohřev by byl v tokamaku COMPASS, pokud by v něm hořela DT směs. Typická teplota plazmatu je 1 keV, hustota 10^{20} m^{-3} , objem plazmatu cca 1 m^3 . Při uvážení ohmického ohřevu z předešlého příkladu spočtete Q .
- S využitím obrázku v textu seriálu a znalosti DD reakce



kde opět 3/4 energie v první reakci odnáší neutron, spočtete celkový ohřev plazmatu, který se vyvine během jedné DD reakce (uvažujte, že následně proběhne i DT fúze s produktem druhé reakce), a odhadněte nároky na dobu udržení při hustotě 10^{20} m^{-3} a teplotě 10 keV.



Obr. 33: Logaritmus elektronového proudu s vyznačeným fitem elektronové teploty.

- a) Doba udržení energie je definovaná jako poměr energie v plazmatu a dodávaného příkonu

$$\tau_E = \frac{W}{P_H} = 17 \text{ ms}.$$

- b) Pro výpočet ohřevu od alfa částic použijeme vztahy z minulého dílu seriálu

$$p_\alpha = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha,$$

přičemž je z obrázku nutné odhadnout účinný průřez reakce pro 1 keV, tj. zhruba $10^{-26} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Po dosazení dostaneme hodnotu ohřevu přibližně

$$p_\alpha = 14 \text{ W}.$$

Když tuto hodnotu vydělíme ohmickým příkonem, dostaneme $Q = 0,00004$.

- c) V první větvi DD reakce se na ohřev plazmatu využije 1/4 uvolněné energie, tj. 0,82 MeV. V druhé části se nejprve uvolní celá energie z první reakce (tj. 4,03 MeV) a následně 3,5 MeV z DT reakce. Po zprůměrování daném pravděpodobnostmi obou větví získáme průměrně 4,2 MeV.

Z grafu účinných průřezů vyplývá, že pro DD reakci a teplotu 10 keV je účinný průřez cca $10^{-24} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a celkový fúzní výkon na jednotku objemu bude přibližně

$$p_{DD} = 1,6 \text{ kW}.$$

Pro splnění Lawsonova kritéria bude zapotřebí doba udržení energie

$$\tau_E > \frac{12T}{n \langle \sigma v \rangle E_\alpha},$$

po dosazení vyjde limita zhruba 285 s.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Dlouhých Rzech

Podzimní soustředění 2012 se konalo v Dlouhých Rzech v termínu 23.–30. 9. 2012.

Organizátoři

Tomáš Bárta, Zuzana Bogárová, Pavel Brom, Aleš Flandera, Jan Humplík, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Aleš Podolník, Marek Scholz, Tereza Steinhartová, Jáchym Sýkora

Účastníci

Martin Adamec, Filip Ayazi, Pavel Blažek, Michal Buráň, Michal Červenák, Veronika Dočkalová, Jakub Dolejší, Jakub Doležal, Jiří Guth, Miroslav Hanzelka, David Hruška, Kristýna Kohoutová, Tomáš Kremel, Jakub Kvorka, Michal Nožička, Jaroslav Průcha, Václav Skála, Viktor Skoupý, Petr Smíštel, Radka Štefaníková, Lukáš Timko, Tomáš Turlík, Patrik Turzák, Tomáš Zahradník



Společná fotografie

Legenda

Mezi čtyřmi mafiánskými klany Dottore, Muschetti, Lavattore a Perrugini panuje křehké příměří. Všichni ctí nepsaná pravidla a opatrně našlapují po hranicích vymezených území. Vědí, že stačí málo a rozpoutá se peklo. Když se ulicemi městské čtvrti, kam policajti nikdy nechodí, začne šířit zpráva, že don Paolo Muschetti je po smrti, je všem jasné nejen to, kdo zmáčkl spoušť, ale také to, že rovnováha byla narušena a začíná boj o přežití.

Ve hře je mnoho a tak není radno dělat chybné kroky. Nerovnováha ohrožuje nejen jednotlivce, ale celé rodinné podniky. Dobrou motivací pro hledání kompromisů je společný zájem na udržení casina. Když už je ale situace neudržitelná a je třeba kasino obětovat a tím zahladit stopy, je nutné nalézt nový, efektivní a elegantní způsob obživy. Na super tajné vědecké konferenci prezentují největší mozky světa své nové nápady hodné patentování. Jejich geniální vynálezy zasahují do mnohých oborů lidské činnosti od zbrojení přes energetiku až po kulinářství. Naši mafiáni, unaveni celoživotním bojem o moc a zdrčení ztrátami svých blízkých, se nečekaně rozhodují pro podnikání v gastronomii – a tak vznikla slavná italská zmrzlina.

Jarní soustředění v Heřmanicích v Podještědí

Jarní soustředění 2013 proběhlo v Heřmanicích v Podještědí ve dnech 14.–21. 4. 2013.

Organizátoři

Tomáš Bárta, Aleš Flandera, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Aleš Podolník, Marek Scholz, Tereza Steinhartová, Jáchym Sýkora, Ivo Vinklárek

Účastníci

Filip Ayazi, Jakub Bahyl, Michal Belina, Pavel Blažek, Michal Buráň, Michal Červeňák, Mark Daniel, Jakub Dolejší, Jakub Dvořák, Tomáš Fiala, Jirka Guth, Miroslav Hanzelka, Erik Hendrych, Peter Hojnoš, Jiří Jarošík, Petr Kepčija, Lukáš Knob, Tomáš Kremel, David Siegert, Viktor Skoupý, Miloslav Staněk, Karolína Šromeková, Radka Štefaníková, Zdeněk Turek, Patrik Turzák, Mikuláš Zindulka



Celodenní výlet na soustředění v Heřmanicích v Podještědí

Legenda

Legenda soustředění byla na motivy filmu Tajemství hradu v Karpatech. Kromě tradičních akcí jako experimentální odpoledne, výlet a přednášky si účastníci užili hry motivované tímto příběhem.

Na jarní soustředění účastníky zval hrabě Teleke z Tölökö jako na setkání operních pěvců stížených ztrátou milované osoby, což kromě psychického traumatu s sebou neslo také ztrátu hlasu, což pro všechny byla strašná tragédie.

První den po seznámení se mezi sebou se skupina snažila získat své hlasy zpět, nejprve konvenčními metodami jako například návštěvou doktora, která ale byla zhacena všeprostupující rakousko-uherskou byrokracií a posléze lázeňskými kúrami, které sice někomu mírně pomohly, ale i tak se to nedalo prohlásit za úspěch. Rozhodli se proto vyrazit na čerstvý vzduch do Karpat a až na krátkou epizodu s vraždou uhlobarona po cestě vlakem vše probíhalo hladce.

Po cestě z nádraží v Salašárech do Vyšných Vlkodlaků nedošlo k žádným větším problémům, jen domorodci večer chtěli nějakou ukázkou operního zpěvu, ale toho nedosáhli, protože skupina hraběte Telekeho jim to radši spočítala.

Následovala krátká orientační vsuvka, kde se zdrcení pěvci seznamovali s okolím Vlkodlaků. Večer v hospodě po nich domorodci chtěli nějaké obecné informace o životě ve městě, za což se jim odvděčili úsečným popisem toho, že v hradu nad vesnicí straší. Aniž by dbali varování, vydali se místo do pokojů na průzkum. Na hradě ovšem nestrašilo, nýbrž se ukázalo, že by tam mohla být jejich ztracená milenka. Bylo však už ráno a protože nikdo nestál o to poštvat si proti sobě celou vesnici, nechali další akci na později.

Vesničané ale s návrhem cesty na hrad nesouhlasili, bylo nutné je přesvědčit o tom, že veškerá strašidla určitě budou jen různé přístroje. Pěvecká skupina je po okolních lesích našla, rozebrala a vesničanům jejich funkci vysvětlila. Nakonec bylo potřeba přesvědčit hospodského a po tomto finálním úspěchu bylo možné se začít připravovat na cestu na hrad.

Přípravy se skládaly z rozboru různých dalších zařízení, které mohou být na hradě, protože z předchozího dne bylo jasné, že za vši tou technikou musí stát nějaký génius. Když bylo vše hotovo, Teleke a společnost se vydali do útrob hradu tajným podzemním labyrintem.

V hradě je již očekávali baron Gorc a šílený vědec Orfanik. Ačkoliv se jim je podařilo přemoci, výsledkem jejich pátrání bylo zklamání. Milenka, která, jak se ukázalo, je všechny se všemi ostatními podváděla, byla navíc mrtvá. Hrad byl v překotném závěru zničen explozí jednoho z Orfanikových vynálezů a skupina pěvců odjela nejbližším vlakem do Vídně.

Týden s aplikovanou fyzikou

Po dlouhé šestileté pauze se opět v rámci Týdne s aplikovanou fyzikou vydal FYKOS do CERNu a dalších zajímavých institucí. Akce, která se konala v termínu od 28. listopadu do 4. prosince 2012, se zúčastnilo 41 řešitelů semináře a 6 orga-

nizátorů. Podrobnější představu o akci si můžete vytvořit z reportu, který o ní napsala účastnice zájezdu Veronika Dočkalová.⁴⁸

Report z TSAFu

Vše začalo již ve středu 28. listopadu, kdy měli zájemci možnost přespat v pražském hostelu a užít si noc plnou deskových her, případně i jiných aktivit. Ve čtvrtek většina účastníků zavítala na Den otevřených dveří na MFF UK, kde se mohla seznámit se svojí, ve spoustě případů, budoucí fakultou. Oficiální začátek celé akce přišel až po skončení DOD. Všichni jsme se sešli ve velké posluchárně a nafasovali FYKOSí mikiny, aby v cizině všichni dobře viděli, co jsme zač. Poté jsme vyslechli zajímavou přednášku o CERNu od Mgr. Martina Rybáře z Ústavu částicové a jaderné fyziky MFF UK, abychom do CERNu nepřišli jako neznalci, a následně nás, jako důležitý socializační prvek, čekaly seznamovací hry. Kolem půlnoci pro nás přijel autobus, a tak jsme vyrazili vstříc novým zážitkům.

První zastávka nás čekala v Neckarsulmu v automobilce AUDI. Ještě celý rozlámaní jsme obdivovali především automatické stroje, kterým se nová vozidla s nadávkou řečeno objevovala přímo pod rameny. V čase oběda jsme se přesunuli do technického muzea v Sinsheimu, jednoho z největších v Evropě. Tam jsme nejdříve navštívili 3D kino, ve kterém spousta z nás ocenila pohodlné sedačky (na rozdíl od těch autobusových) a poté jsme měli dostatek času si prohlédnout celé muzeum. Největším lákadlem pro nás byly originály letadel Concorde a TU-144 a několika dalších, které byly umístěny na vysokých stojácích nad zemí a které jsme mohli prozkoumat i uvnitř. Po vyčerpávající prohlídce celého areálu jsme se už jen přesunuli do francouzské Formule 1, kde jsme konečně měli možnost zaujmout při spaní polohu ležmo.

Další den byla jako první na programu prohlídka Luzernu, města, kde se mimo jiné nachází nejstarší zakrytý dřevěný most na světě. Odpoledne jsme se v rámci stejného města dopravili do velkého dopravního muzea, které láká mnoho místních i turistů. Celá expozice je rozdělena do čtyř pavilonů, každý patří jinému druhu dopravy. A v každém je velká spousta interaktivních exponátů, her, tabulí, řada tlačítek a páček, možnost mnoho věcí si osahat, vyzkoušet... Zkrátka ráj pro všechny hravé a zvědavé jedince. A tak není divu, že asi čtyři hodiny utekly jako voda a museli jsme muzeum opustit stále lační po prozkoumání, co vše ještě skrývá. Následoval opět přesun do Francie, kde jsme strávili další noc.

V neděli jsme nejdříve podnikli prohlídku překrásného Bernu, v němž jsme schouleni do zimních bund procházeli malebná podloubí a nasávali vánoční atmosféru. Poté přišla všemi očekávaná návštěva sýrárny v Gruyères a čokoládovny Cailler. V sýrárně jsme absolvovali turistické kolečko po návštěvnickém centru, kde jsme se dozvěděli, jak se sýr vyrábí a mohli také nahlédnout do části zdejší „kuchyně“. Aby nám po ochutnávce sýru řádně vytrávil, udělali jsme krátkou zastávku v malém městečku, odkud byl překrásný výhled nejen dolů do údolí, ale i na mohutné alpské kopce. A potom již následovala cesta do čokoládovny. Tam

⁴⁸A pokud by vám tento report nestačil, pak není nic snazšího než se podívat na další dva, které jsou k nalezení ze stránky <http://fykos.cz/archiv/rocnik26/tsaf>.

nás sice také čekalo skvělé návštěvnické centrum, ale všichni jsme spíše nedočkavě očekávali slibovanou ochutnávku čokolády. Proto se není čemu divit, že jsme tento přímo pohádkový podnik opouštěli nacpaní k prasknutí, s taškami plnými nakoupených dobrot.



Účastníci TSAFu v Ženevě

Poslední den nám přinesl vyvrcholení celého zájezdu – exkurzi do CERNu. Ještě předtím nás ovšem čekala procházka po dalším významném městě, a sice po Ženevě. Když jsme se celí dychtiví opět nalodili na palubu autobusu očekávající rychlý přejezd do výzkumného centra, zapracoval zákon schválnosti a náš autobus nenastartoval. Nezbylo nám tedy nic jiného, než se vydat do víru velkoměsta a podstoupit dobrodružnou cestu ženevskou MHD. Naštěstí celá výprava měla šťastný konec. V CERNu nás nejdříve čekala zajímavá úvodní přednáška a potom jsme dychtivě nakoukli přímo do míst, kde se „dělá“ věda. V testovací hale jsme viděli různé součástky urychlovače a detektoru, dokonce i vystavenou autentickou část samotného tunelu. Dále jsme navštívili laboratoře u detektoru Atlas, kde jsme bohužel nemohli zhlédnout samotný detektor, ale zato jsme pozorovali vědce „v akci“, pracující v kontrolní místnosti. Většina z nás byla ovšem fascinována velkým červeným tlačítkem s anglickým nápisem: „Máte jedinečnou příležitost stisknout v CERNu velké červené tlačítko!“, po jehož zmáčknutí se rozezvučela varovná siréna. Posledním bodem programu bylo setkání s českými učiteli fyziky, kteří nám v konferenčním sále (přesně tam, kde se potkávají tamní badatelé) zodpověděli naše dotazy. Tím byl celý zájezd završen. Páni řidiči stihli mezitím zařídit opravu autobusu, tudíž jsme naposledy nastoupili a obohaceni o nové kamarády, znalosti a zážitky jsme se spokojeni vrátili zpět domů.



V CERNu

Den s experimentální fyzikou 2013

Den s experimentální fyzikou je tradiční akce FYKOSu, během které se účastníci mohou porozhlédnout po fyzikálních pracovištích na MFF UK. Na vlastní oči mohou vidět, jak se dělá experimentální fyzika dnešních dní.



U tokamaku

Letošní DSEF zahájil dne 14. 2. 2013 Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D. přednáškou *O komunikaci*. Dopolední program tvořily exkurse po experimentálních pracovištích MFF UK v budovách Ke Karlovu 3 a 5. Svůj čas nám věnovali a svými laboratořemi nás provedli pracovníci KCHFO, KFKL, KFM a FÚ AV, kterým i tímto děkujeme. Celkem si tak mohli účastníci z jedenácti připravených exkurzí vybrat šest, které si za dopoledne prošli. Odpoledne jsme navštívili další pracoviště AV – tokamak a PALS a další alternativou byla prohlídka Muzea pražského vodárenství a úpravny vody Podolí.

FYKOSí Fyziklání 2013

Šestý ročník Fykosího fyziklání proběhl v pátek 15. února 2013 v prostorách Matematicko-fyzikální fakulty UK na Karlově. Soutěže se zúčastnilo rekordních 76 týmů z českých i slovenských škol. Týmy byly rozděleny do tří kategorií podle toho, v jakých ročnících jejich členové momentálně byli. Nejvyšším příčkám dominovaly týmy ze Slovenska: vítězem v kategorii A se stal tým z Gymnázia Jura Hronca, v kategorii B vyhrálo Gymnázium J. G. Tajovského a v kategorii C Gymnázium Vavrince Benedikta Nedožerského v Prievidzi.



Z FYKOSího Fyziklání

Pravidla soutěže

Soutěže se účastní družstva s nejvýše 5 členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připiše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů může vyzvednout nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím cílem

je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

Výsledky

Kategorie A

- | | |
|---|--------|
| 1. Gymnázium Jura Hronca | 195 b. |
| 2. Gymnázium Plzeň a Gymnázium Tachov (smíšený tým) | 190 b. |
| 3. Gymnázium Č. Budějovice | 178 b. |

Kategorie B

- | | |
|-------------------------------|--------|
| 1. Gymnázium J. G. Tajovského | 165 b. |
| 2. Gymnázium Jan Keplera | 135 b. |
| 3. Mensa gymnázium | 116 b. |

Kategorie C

- | | |
|--|--------|
| 1. Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského v Prievidzi | 161 b. |
| 2. Gymnázium Olomouc-Hejčín | 122 b. |
| 3. Gymnázium Chrudim | 99 b. |

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Fyziklání Online

6. prosince roku 2012 se konal již druhý ročník soutěže Fyziklání online. Soutěže se zúčastnilo 156 aktivních týmů rozdělených do tří kategorií českých a slovenských středoškoláků, dále pak středoškoláků zahraničních a open kategorie, které se mohl zúčastnit kdokoli. Zúčastnilo se jí tedy více než dvojnásobek týmů.

Vůbec nejlepším tým byl $kTP^{\sim}2/(MJ) = MaKaJ ToPře$ se 159 body, na druhém místě pak byl tým *Veteráni* se 139 body, oba týmy z kategorie open. Nejlepším středoškolským týmem a třetí celkově se umístil tým *Okarusov blesk* se ziskem 134 bodů. Tento tým byl zároveň vítězným v kategorii středoškoláci A. Vítězem středoškoláků B byl tým *Ešte dalej* se 78 body, na celkovém 13. místě. Tým *Gymtri1* získal 29 bodů a stal se tak nejlepším mezi středoškoláky C, celkově pak 41. Nejlepší zahraniční středoškolský tým byl *bieber* se ziskem 94 bodů, to stačilo na celkové 6. místo.

Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel pět úloh, jejichž výsledkem bylo číslo. Po zadání správného výsledku do internetového systému tým získal zadání nové úlohy. Trvání soutěže bylo 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také půlhodinová hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení jedné úlohy od všech témat bylo hodnoceno bonusovými body. Protože se tato soutěž koná po internetu, nebyly povolené pomůcky nijak omezeny.

Výsledky**Středoškoláci A**

1. Okarusov blesk	134 b.
2. Gympláci	86 b.
3. Gymik+Tonda	84 b.
4. Grupa Jedákov Horaliek	61 b.
5. Zkrocený kůň	57 b.

Středoškoláci B

1. Ešte ďalej	78 b.
2. Gymji PRO team 1337	57 b.
3. alea	47 b.
4. Budulínci	41 b.
5. Master Minds	34 b.

Středoškoláci C

1. Gymtri1	29 b.
2. Hejčín 3,884	25 b.
3. Gočovskí Junáci z Hôr	23 b.
4. Radek Chmelař	18 b.
5. Gamča Chewers	18 b.

Zahraniční středoškoláci

1. bieber	94 b.
2. terserah	81 b.
3. NSAMF-BiH	80 b.
4. TALENTOS SABROSONES	60 b.
5. Electrostatic	42 b.

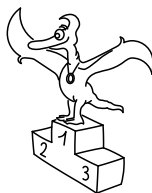
Open

1. $kTP^2/(MJ) = MaKaJ$ ToPře	159 b.
2. Veterani	139 b.
3. όπερ έδει δείξει	115 b.
4. Čučoriedie rozmanité	101 b.
5. Sinergy	90 b.

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Cyklus přednášek pro středoškoláky 2012/2013

Na podzim 2012 se konal již druhý ročník cyklu přednášek s fyzikální tematikou pro středoškoláky. Celkem se konalo pět přednášek s tématy: *Mechanika kladek, Hydrostatika a hydrodynamika, Statistika, O čem se mluví v CERNu a Aproximace*. Celý cyklus byl koordinován s pražskou komisí Fyzikální olympiády a všechny přednášky byly ve spolupráci s Talnetem nahrány, vysílány online a nyní je jejich záznam umístěn na webu FYKOSu.



Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
1. Jiří Jarošík	G J. Vrchlického, Klatovy	139
2. Anna Kufová	G M. Koperníka, Bílovec	121
3. Klára Stefanová	G B. Němcové, Hradec Králové	64
4. František Zajíc	G, Nymburk	54
5. Marek Otýpka	G, Židlochovice	53
6. Filip Šmejkal	G Uherské Hradiště	45
7. Jaroslav Cerman	G a SOŠ, Jilemnice	43
8. Lukáš Kotlaba	G Ludovíta Štúra, Trenčín	42
9. Jakub Kolář	Reálné G a ZŠ, Prostějov	40
10. Milan Zongor	G Ludovíta Štúra, Trenčín	34
11. Petr Vitovský	G Uherské Hradiště	31
12. Diana Miezgová	G Liptovský Hrádok	26
13. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	23
14. Pavel Kús	G J. Š. Baara, Domažlice	17
15. Karel Chládek	G, Lanškroun	16
16. Michal Ržonca	G L. Štúra, Zvolen	15
17. Pavel Grepl	G J. Wolkera, Prostějov	13
18. Alena Košáková	G, Strakonice	12
19.–22. Šimon Jelínek	G, Mostecká, Chomutov	11
19.–22. Jakub Novotný	G Brno-Řečkovice	11
19.–22. David Pokorný	G, Bučovice	11
19.–22. Ondřej Poláček	G F. Palackého, Val. Meziříčí	11
23.–25. Vojtěch Kaprál	G J. Wolkera, Prostějov	10
23.–25. Josef Kolář	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	10
23.–25. Martin Kudělka	G, Neumannova, Žďár n. S.	10
26.–29. Ondřej Běhávka	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	8
26.–29. Tímotej Mareš	Jiráskovo G, Náchod	8
26.–29. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	8
26.–29. Honza Touš	G, Nymburk	8
30. Petr Martínek	G, Voděradská, Praha	5
31.–35. Jan Alfery	G Na Pražačce, Praha	4
31.–35. Michal Fiala	G Brno-Řečkovice	4
31.–35. Pavel Herínek	ZŠ Luhačovice	4
31.–35. Vojtěch Juríček	G, Kralupy	4
31.–35. Vítek Paulík	G, Nymburk	4
36. Matěj Kosma	SPŠ Ostrava - Vítkovice	3
37. Ladislav Hustý	G, Frýdlant nad Ostravicí	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 236
1. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	176
2. <i>Tomáš Fiala</i>	G, SOŠ a VOŠ, Ledec n. Sáz.	139
3. <i>Martín Kíhoulou</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	132
4. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	119
5. <i>Mikuláš Zindulka</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	105
6. <i>Erik Dóme</i>	G Hubeného, Bratislava	91
7. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	84
8. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	79
9. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	74
10. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	68
11. <i>Samuel Kočiščík</i>	G Poštová, Košice	62
12. <i>Ondrej Bohdal</i>	G Jura Hronca, Bratislava	55
13. <i>Václav Skála</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	53
14. <i>Dušan Stěhule</i>	G B. Němcové, Hradec Králové	50
15. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	45
16. <i>Jakub Dvořák</i>	G, Botičská, Praha	44
17. <i>Štěpán Štěpán</i>	Jiráskovo G, Náchod	37
18. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	32
19. <i>Petr Smíšitel</i>	G, Bučovice	27
20. <i>Jakub Maruška</i>	G Andreja Vrábla, Levice	26
21. <i>Radovan Zeman</i>	G, Uničov	25
22. <i>Marek Liška</i>	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	24
23. <i>Petr Buchal</i>	G, Mimoň	23
24. <i>Štefan Stanko</i>	G Andreja Vrábla, Levice	20
25. <i>Filip Čonka</i>	G L. Štúra, Zvolen	19
26. <i>Benedikt Peťko</i>	G Matyáše Lercha, Brno	15
27.–29. <i>Olga Leskovjanová</i>	Masarykovo G, Vsetín	14
27.–29. <i>Matěj Sehnal</i>	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	14
27.–29. <i>Hana Šáchová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	14
30. <i>Jan Ulrich</i>	G a SOŠE, Sedlčany	12
31.–34. <i>Matěj Malý</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	8
31.–34. <i>Jan Marek</i>	G Zábřeh	8
31.–34. <i>Jan Soukup</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	8
31.–34. <i>Petr Turnovec</i>	SOŠ a SOU, Tábor	8
35.–36. <i>František Pavelka</i>	G, Uničov	6
35.–36. <i>Veronika Veresová</i>	G Rimavská Sobota	6
37.–40. <i>Dávid Barbora</i>	G Fr. Švantnera	4
37.–40. <i>Stanislav Bartoš</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	4
37.–40. <i>Jana Orságová</i>	Masarykovo G, Vsetín	4
37.–40. <i>Dávid Sekáč</i>	SZŠ Moyzesova, KE	4
41.–42. <i>Petra Hrubcová</i>	G, Nad Alejí, Praha	2
41.–42. <i>Ondřej Soukup</i>	Gymnázium Mozartova, Pardubice	2
43. <i>Andrej Peleš</i>	G Andreja Vrábla, Levice	0

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pílný</i>	škola MFF UK	Σ 212
1. <i>Jakub Kvorka</i>	G, Dubnica n. Váhom	155
2. <i>Patrik Turzák</i>	G Poštová, Košice	109
3. <i>Radka Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	108
4. <i>Markéta Vohníková</i>	PORG, Praha	97
5. <i>Jiří Guth</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	88
6. <i>Peter Hojnoš</i>	G Školská, Spišská Nová Ves	85
7. <i>Daniel Slezák</i>	Svobodná chebská škola	69
8. <i>Lukáš Knob</i>	G, Kojetín	62
9.–10. <i>Petr Kepčija</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	59
9.–10. <i>Viktor Skoupý</i>	G, Moravská Třebová	59
11. <i>Lucie Valentová</i>	G, Boskovice	56
12. <i>Mark Daniel</i>	G Párovská, Nitra	48
13.–14. <i>Adam Přáda</i>	G, Ostrov	33
13.–14. <i>Karolína Šromeková</i>	ŠpMNDaG Teplická	33
15. <i>Martin Jurček</i>	G, Studentská, Havířov	32
16. <i>Michal Belína</i>	G Volgogradská, Ostrava	30
17.–18. <i>Martin Šípka</i>	G Kežmarok	25
17.–18. <i>Martin Wirth</i>	První české G, Karlovy Vary	25
19. <i>Marek Koščo</i>	G Varšavská, Žilina	22
20.–21. <i>Jaroslav Hofierka</i>	G J. A. Raymana, Prešov	21
20.–21. <i>Vendula Kotyzová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	21
22. <i>Jiří Jaskowiec</i>	Wichterlovo G, Ostrava	19
23. <i>Václav Dvořáček</i>	PORG, Praha	18
24. <i>Tomáš Zahradník</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	17
25. <i>Jan Studený</i>	G J. Škody, Přerov	15
26.–30. <i>Patriks Aldersons</i>		14
26.–30. <i>Ota Čapek</i>	G, Roudnice nad Labem	14
26.–30. <i>Daniel Kolář</i>	Wichterlovo G, Ostrava	14
26.–30. <i>Ján Ondráš</i>	G Grösslingova, Bratislava	14
26.–30. <i>Patrik Štefek</i>	Matiční G, Ostrava	14
31.–32. <i>Viktor Dolník</i>	G Andreja Vrábla, Levice	12
31.–32. <i>Jiřina Svobodová</i>	G, Šumperk	12
33.–35. <i>Jakub Kušnír</i>	G, L. Štúra, Michalovce	8
33.–35. <i>Karolína Pěčková</i>	Jiráskovo G, Náchod	8
33.–35. <i>Tereza Štěpánová</i>	Jiráskovo G, Náchod	8
36.–39. <i>Irena Bačinská</i>	ŠpMNDaG Teplická	7
36.–39. <i>Lenka Hackerová</i>	Jiráskovo G, Náchod	7
36.–39. <i>Veronika Chadimová</i>	G, Vysoké Mýto	7
36.–39. <i>Stanislav Valtera</i>	G, Dobruška	7
40.–41. <i>Filip Bartůněk</i>	G, Benešov	6
40.–41. <i>František Prinz</i>	G a JŠ, Břeclav	6
42.–43. <i>Ege Ayyün</i>	Dogus Science School	5
42.–43. <i>Tomáš Kořínek</i>	G, Zámberk	5
44.–47. <i>Sarp Demiralay</i>	Dogus Science School	4
44.–47. <i>Aranka Hrušková</i>	G Christiana Dopplera, Praha	4
44.–47. <i>Daniela Prokešová</i>	Jiráskovo G, Náchod	4
44.–47. <i>Norbert Slivka</i>	G Tajovského, B. Bystrica	4
48.–49. <i>Lukáš Hejda</i>	Jiráskovo G, Náchod	3
48.–49. <i>Filip Januš</i>	G, Benešov	3
50.–51. <i>Dávid Princík</i>		2

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 212
50.–51. Jozef Rojník	G L. Štúra, Zvolen	2
52.–53. Soňa Ondrušová	G, Ostrov	1
52.–53. Matouš Zavřel	Křesťanské G, Kozinova, Praha	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 212
1. Miroslav Hanzelka	G, Česká Lípa	184
2. Jakub Šafin	G, P. Horova, Michalovce	161
3. Peter Šišán	G PdC, Piešťany	117
4. Jakub Bahyl	G Varšavská, Žilina	77
5.–6. David Matejov	G, Dubnica n. Váhom	76
5.–6. Tereza Uhlířová	G, Omská, Praha	76
7. Lubomír Grund	G Christiana Dopplera, Praha	75
8. David Siegert	G, Klášterec n. O.	55
9. Vít Nosek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	50
10.–11. Michal Červeňák	G Púchov	46
10.–11. Veronika Dočkalová	G, Elgartova, Brno	46
12. Michal Buráň	G J. A. Komenského, Uh. Brod	31
13.–14. Tomáš Gonda	G Grösslingova, Bratislava	30
13.–14. Erik Hendrych	G J. Heyrovského, Praha	30
15.–16. Lukáš Fusek	G Uherské Hradiště	29
15.–16. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	29
17. Tomáš Kello	G J. A. Raymana, Prešov	22
18. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	21
19.–21. Jakub Doležal	G, Špitálská, Praha	18
19.–21. Ivana Monková	G J. A. Raymana, Prešov	18
19.–21. Tomáš Turlík	G J. A. Raymana, Prešov	18
22.–23. Jaroslav Průcha	G, Strakonice	16
22.–23. Bogdan Yaparov		16
24.–26. Ján Dudič	G Poštová, Košice	9
24.–26. Albert Štěrba	G P. Bezručé, Frýdek-Místek	9
24.–26. Jana Zelenková	Jiráskovo G, Náchod	9
27. Michal Nožička	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	8
28. Matúš Uriček	G Púchov	7
29. David Kasal	G Jana Nerudy, Praha	4
30. Viktor Korba		3
31.–32. Klaudia Mráziková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2
31.–32. Václav Šídlo	G, Písek	2
33.–35. Vladan Glončák	G Ludovíta Štúra, Trenčín	1
33.–35. Jana Hlavová	G, Hořovice	1
33.–35. Kateřina Koňasová	G, Hořovice	1

KAREL KOLÁŘ, ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXVI. ročník – 2012/13

Předmluva: Michal Koutný

Náměty úloh:

Karel Kolář (I.1, I.2, I.P, I.E, II.1, II.2, II.5, II.P, II.E, III.2, III.E, IV.1, IV.2, IV.5, IV.E, V.1, V.3, V.P, VI.1, VI.2),
Lukáš Ledvina (III.3, III.4, IV.3, IV.4, IV.P, VI.4, VI.P),
Michael Komm (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S),
Radomír Gajdošoci (II.4, VI.5), Michal Koutný (III.P, V.4),
Tomáš Pikálek (VI.3, VI.E), Aleš Podolník (III.1, III.5),
Jan Humplík (I.3), Dominika Kalasová (V.2), Marek Nečada (V.5),
Kristína Nešporová (V.E), Lada Peksová (II.3), Petr Ryšavý (I.4),
Tereza Steinhartová (I.5), Jáchym Sýkora (IV.3)

Autoři řešení úloh:

Michael Komm (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S),
Tomáš Pikálek (I.3, III.2, V.3, VI.E), Ján Pulmann (I.P, III.3, IV.4, VI.4),
Radomír Gajdošoci (II.4, V.5, VI.5), Dominika Kalasová (I.2, II.E, IV.E),
Jakub Kocák (II.P, III.P, IV.3), Lukáš Ledvina (II.5, III.4, VI.P),
Kristína Nešporová (I.E, IV.1, V.E), Tomáš Bárta (II.2, VI.3),
Zdeněk Jakub (II.1, V.2), Karel Kolář (III.E, IV.P), Aleš Podolník (III.5, V.P),
Jana Poledníková (I.1, IV.2), Jáchym Sýkora (I.4, IV.5),
Jakub Vošmera (I.5, III.1), Aleš Flandera (V.1), Dávid Hvizdoš (VI.1),
Pavel Irinkov (II.3), Jiří Nárožný (VI.2), Hana Šustková (III.E),
Ivo Vinklárek (V.4)

Seriál o plazmatu: Michael Komm

Legenda podzimního soustředění: Tereza Steinhartová

Legenda jarního soustředění: Aleš Podolník

Sazba: Michal Koutný, Tomáš Pikálek

Obrázky a grafy: Michal Koutný, Lukáš Ledvina, Tomáš Pikálek

Jazykové korektury: Zuzana Bogárová, Dominika Kalasová

Odborné korektury: Lukáš Ledvina, Jakub Vošmera

Pokusy s radioaktivitou na dálku

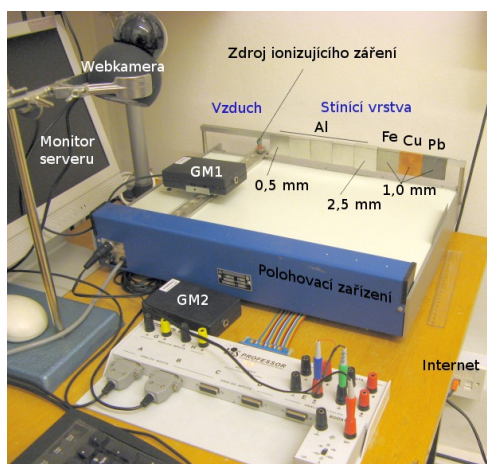
Radioaktivita je přirozenou součástí přírody. Můžeme ji snadno měřit, samozřejmě pokud máme detektor. A pokud ho nemáme, je tu vzdálená laboratoř pro pokusy s radioaktivitou. Připojte se!

Možná znáte ze školy soupravu Gamabeta. Je to jediná pomůcka v ČR, se kterou se dají dělat školní pokusy s ionizujícím zářením. Pro ty, komu fyzikální pokusy ve škole nestačí, je řešením „vzdálená laboratoř“ na Matematicko fyzikální fakultě UK v Praze. Experimentovat s radioaktivitou může kdokoli, odkudkoli a kdykoli z libovolného počítače na internetu přes standardní prohlížeč. Počítač musí mít nainstalovanou Javu.

Pokusy

- Monitorování přírodního radiačního pozadí.
- Závislost množství záření na vzdálenosti od zářiče.
- Závislost množství záření na druhu a tloušťce vrstvy stínícího materiálu. Vyzkoušejte vzduch, hliník, ocel, měď a olovo.

Všechny tři experimenty lze sledovat on line kamerou v reálném čase – program zaznamenává výsledky, kreslí grafy a nabízí excelovské tabulky pro statistické vyhodnocení. Výsledky si můžete stáhnout do svého počítače a dál s nimi pracovat.



Vzdálenou laboratoř ke studiu radioaktivity najdete na kdt-38.karlov.mff.cuni.cz.

Informace o soupravě Gamabeta a návody na další zábavné pokusy najdete v materiálech vzdělávacího programu ČEZ Svět energie (www.cez.cz/vzdelavaciprogram) nebo v časopise Třípól (www.tretpol.cz).

Svět energie je dobrodružný a zajímavý!
Zauvažujte o budoucím zaměstnání v energetice!



KAREL KOLÁŘ, ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXVI. ročník – 2012/13

Vydal **MATFYZPRESS**
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 431. publikaci

Vytiskl TISK SPRINT

Vydáno pro vnitřní potřebu MFF UK
Publikace není určena k prodeji

148 stran, 33 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu X_qL^AT_EX
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2013

ISBN 978-80-7378-237-5

