Úloha V.4 ... maminka a kočárek

5 bodů; průměr 1,82; řešilo 17 studentů

Maminka má kočárek o hmotnosti m a je s ním pevně spojena vláknem délky l, které je na počátku natažené. Mezi maminkou i kočárkem a podlahou, na které oba stojí, je nenulový koeficient smykového tření f. Maminka začne kočárek táhnout po přímce konstantní rychlostí v, která je kolmá na počáteční polohu vlákna. Popište trajektorii kočárku v závislosti na parametrech úlohy. Maminku i kočárek považujte za hmotné body. Doporučujeme úlohu numericky simulovat.

Maturantská.

Nejdříve upřesníme zadání – je zde uvedeno, že třecí síla působí také mezi maminkou a podlahou, tato podmínka je naprosto nepodstatná, protože máme informaci, že maminka táhne po přímce stále konstantní rychlostí, proto nemusíme provádět silový rozbor.

Dále budeme v řešení uvažovat, že provázek bude po celu dobu natažený, tj. vzdálenost maminky a kočárku bude konstantní (tuto podmínku si na konci ověříme). Pokud by tomu tak nebylo, nastal by analyticky špatně řešitelný problém: $|\mathsf{MK}| \leq l = \text{konst}$. Bylo by nutné ošetřit případ nataženého a nenataženého vlákna zvlášť.

Zamyslíme se nad tím, jaké síly nám působí na kočárek. Jednak to je síla třecí, která působí proti pohybu kočárku, jednak to je síla napínající provázek. Nyní uděláme úkrok stranou – budeme celou situaci řešit v soustavě spojené s maminkou, tj. soustavě pohybující se rychlostí v. Tato soustava má tu výhodu, že vzhledem k tomu, že jsme k ní dospěli pomocí Galileiho transformace, tak se neobjeví setrvačné síly, které by nám celou situaci zkomplikovaly. Dále budeme úlohu řešit v polárních souřadnicích (polohu kočárku budeme udávat pomocí úhlu φ a vzdálenosti r od maminky). Podle předpokladu výše budeme uvažovat $r = \text{konst}$.

Přešli-li jsme do polárních souřadnic a požadujeme-li, aby platilo $r = \text{konst}$, tak nám zbude pouze jedna proměnná, a to φ. Proto nemusíme uvažovat sílu v provázku (je radiální, tj. nemění velikost tangenciální rychlosti). Stačí uvažovat pouze tangenciální složku třecí síly, která nám bude měnit rychlost „oběhu“ kočárku okolo maminky.

Víme, že velikost třecí síly je konstantní a její velikost je $F_\mathrm{t} = mgf$. Nyní již musíme tedy pouze vypočítat její průmět do směru kolmého na provázek. Dále ještě víme, že třecí síla působí proti směru rychlosti. Proto platí

$$\frac{F_\mathrm{tt}}{F_\mathrm{t}} = \frac{w_\mathrm{t}}{w}\,,$$

kde F_tt je velikost tečné složky třecí síly, w_t je tečná složka rychlosti a w je celková velikost rychlosti. Při výpočtu třecí síly je potřeba opět uvažovat i rychlost maminky, kterou jsme výše odtransformovali Galileiho transformací, protože třecí síla působí mezi kočárkem a podložkou, ale směr se touto transformací nemění. Pro celkovou velikost rychlosti dle kosinové věty platí

$$w = \sqrt{l^2\dot{\varphi}^2 + v^2 - 2vl\dot{\varphi}\sin\varphi}\,,$$

kde $\dot{\varphi}$ značí derivaci úhlu φ podle času, tj. úhlovou rychlost. Pro tečnou složku rychlosti platí

$$w_\mathrm{t} = l\dot{\varphi} - v\sin\varphi\,.$$

Nyní již můžeme napsat druhý Newtonův pohybový zákon

$$ml^2\ddot{\varphi} = -lF_\mathrm{tt} = mglf\frac{l\dot{\varphi} - v\sin\varphi}{\sqrt{l^2\dot{\varphi}^2 + v^2 - 2vl\dot{\varphi}\sin\varphi}}\,,$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gf}{l^2}\frac{\dot{\varphi} - \omega\sin\varphi}{\sqrt{\dot{\varphi}^2 + \omega^2 - 2\omega\dot{\varphi}\sin\varphi}}\,,$$

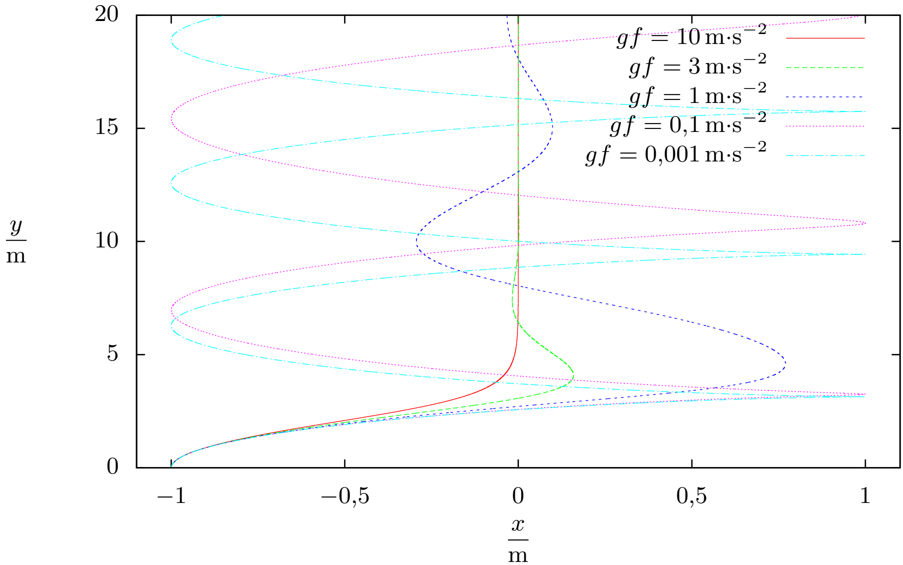
kde jsme označili $\omega = v/l$, tj. počáteční úhlovou rychlost pohybu kočárku.

Tato diferenciální rovnice bohužel již nelze dále řešit analyticky až na jeden triviální případ, a to $f = 0$, tj. pohyb bez tření. Potom nám na kočárek nepůsobí žádný moment síly a proto se pohybuje konstantní úhlovou rychlostí a platí

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{v}{l} t \,.$$

Nyní již stačí numericky vyřešit rovnici výše a navrátit všechny substituce, tj. Galileiho transformaci a polární souřadnice. Platí

$$x(t) = -l \sin\varphi \,,$$
$$y(t) = vt - l \cos\varphi \,.$$



Obr. 1: Trajektorie pohybu pro různé počáteční parametry.

Na obrázku 1 jsou vykresleny trajektorie pohybu pro rychlost $v = 1{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, délku $l = 1\,\mathrm{m}$ a součin $gf \in \{10, 3, 1, 0{,}1, 0{,}001\}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Je zde dobře vidět, že pro veliký koeficient tření $gf = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ se kočárek pohybuje téměř přímo za maminkou, tj. lze zanedbat setrvačnost kočárku. Naopak pro $gf = 0{,}001\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ je již tření velmi malé a trajektorie odpovídá obíhání kočárku okolo maminky téměř konstantní úhlovou rychlostí.

Nyní se vrátíme k podmínce, která požaduje, aby bylo lanko plně natažené, tj. požadujeme, aby radiální síla působící na kočárek byla kladná. Radiální síla má dvě složky, jednak sílu třecí, jednak sílu dostředivou způsobenou pohybem kočárku okolo maminky. Musí proto platit

$$gf \frac{v \cos\varphi}{w} < \dot{\varphi}^2 l \,,$$

což je opět podmínka, kterou je nutno testovat numericky. Jediné, co lze říci, je, že pro $f = 0$ je splněna vždy a vlákno tedy nikdy nepřestane býti napjaté.

Pokud je lano nenapjaté, je potřeba řešit soustavu dvou diferenciálních rovnic – jednak pro úhlovou odchylku, jednak pro radiální vzdálenost. Dojde-li opět k napnutí lana, tak není v zadání řečeno, jak se bude lano chovat – zdali se bude chovat pružně, tj. kočárek odskočí opět do vnitřku kruhu (zmenšenou radiální rychlostí), nebo nepružně, tj. kočárek se bude dále pohybovat po obvodu kruhu s nulovou radiální rychlostí.

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás vůbec neuvažovala setrvačnost kočárku a ignorovala tření mezi podložkou a kočárkem, tj. předpokládala, že kočárek se pohybuje vždy ve směru lana, což je pravda pouze pokud je koeficient tření veliký. Bohužel pouze velmi málo z vás si všimlo analyticky řešitelného případu pro $f = 0$.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`