Úloha IV.S ... seriálová

6 bodů; průměr 1,88; řešilo 8 studentů

a) *Spirální galaxie můžeme velmi hrubě popsat logaritmickou spirálou*

$$r(\varphi) = r(0)\exp(\varphi \operatorname{tg}\Phi)\,,$$

kde r a φ jsou polární souřadnice a Φ je úhel otevření odpovídající úhlu, který svírá kolmice k průvodiči s tečnou ke spirále (úhel otevření roste ve směru hodinových ručiček, vyjadřujeme jej v radiánech, přičemž hodnota může nabývat více než 2π). Zvažme $\Phi = 10^\circ$. Odvoďte vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů téhož spirálního ramene od centra galaxie. Jak by se poměr změnil, kdyby ramena byla čtyři (rovnoměrně rozložená). Vyjádřete vzdálenost pro sousední ramena v $r(0) = 8\,\mathrm{kpc}$.

b) *Uvažujte nekonečný vesmír s konstantní hustotou hvězd a bez extinkce. Vyjádřete vztahy pro integrální a diferenciální počet hvězd v závislosti na zdánlivé hvězdné velikosti. Co se stane, bude-li zdánlivá hvězdná velikost velká?*

Bonus *Jaká je pravděpodobnost, že dvě hvězdy se nám v galaxii promítnou za sebe? Uvažujte osamocené hvězdy, ne dvojhvězdy.*

Janapka.

Spirální galaxie

V prvé řadě chceme odvodit vztah pro poměr vzdáleností dvou sousedních závitů. Jedná se o jedno a to samé rameno, takže musíme uvažovat, co se bude měnit podle čeho. Vzdálenost od středu galaxie se zjevně bude měnit s úhlem φ. Změny nejsou skokové, ale naopak docela malé, a pořád musí platit, že jde o logaritmickou spirálu. Chceme-li malé změny vzdálenosti od středu, budeme derivovat podle φ (ostatně na ničem jiném r závislé není).

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= r(0)\exp(\varphi \operatorname{tg}\Phi)\\ \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} &= r(0)\exp(\varphi \operatorname{tg}\Phi)\operatorname{tg}\Phi\,, \end{aligned}$$

kde $r(0)$ je konstanta. Podíváme-li se pozorně na vztah, zjistíme, že se nám v derivované spirále opět objevilo $r(\varphi)$. Můžeme ji přepsat

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = r(\varphi)\operatorname{tg}\Phi\,,$$

což je velmi jednoduchá diferenciální rovnice, kterou lze vyřešit metodou separace proměnných.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{r} &= \operatorname{tg}\Phi \mathrm{d}\varphi\\ \int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}r}{r} &= \int_0^{\varphi}\operatorname{tg}\Phi \mathrm{d}\varphi\\ [\ln r]_0^{\varphi} &= [\varphi \operatorname{tg}\Phi]_0^{\varphi}\\ \ln\frac{r(\varphi)}{r(0)} &= \varphi \operatorname{tg}\Phi\,, \end{aligned}$$

což je obecný vztah. Nás zajímá, jak je tomu po jednom zákrutu. Jeden zákrut je de facto opsání kruhu, což je 2π. Zároveň vztah zlogaritmujeme

$$\frac{r(2\pi)}{r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg} \Phi)\,,$$

což je vztah, který jsme chtěli. Dosadíme-li $\Phi = 10^\circ$, dostaneme poměr $1 : 3{,}03$.

V případě, že budou spirální ramena čtyři, musíme se zamyslet nad tím, jak vlastně bude vypadat obrázek galaxie. Mezi každé dva závity jednoramenné galaxie musíme vměstnat tři další. Spirála bude zdánlivě pouze čtyřikrát hustěji namotaná. V praxi to znamená, že vztah pro logaritmickou spirálu změníme na $r(\varphi) = r(0)\exp(4\varphi \operatorname{tg}\Phi)$. Počítáme úplně stejně jako v předešlém případě.

$$\ln\frac{r(\varphi)}{r(0)} = 4\varphi \operatorname{tg}\Phi$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{r(\varphi)}{r(0)} = \varphi \operatorname{tg}\Phi\,,$$

což je po úpravě $\sqrt[4]{r(2\pi)/r(0)} = \exp(2\pi \operatorname{tg}\Phi)$. Po dosazení $\sqrt[4]{1 : 3{,}03}$.

Nakonec se ptáme, jaká je vzdálenost pro sousední ramena Slunce. Předpokládejme, že Slunce leží někde mezi rameny. Prostor mezi rameny má stejný tvar jako ramena samotná, nicméně vzhledem k tomu, že hustota hmoty je zde výrazně menší, tvoří jen jakási virtuální ramena, která nám pomohou ve výpočtu. Předpokládejme, že Slunce se nachází v jednom takovém virtuálním rameni (což je předpoklad nutný, abychom zkoumali jeho vzdálenost od dvou ramen skutečných). Ramen virtuálních i skutečných máme dohromady osm. Budeme počítat úplně stejně jako v předešlém případě, ale započítáme i virtuální ramena. Poměr se tak změní na

$$\sqrt[8]{\frac{r(2\pi}{r(0)}} = \exp(2\pi \operatorname{tg}\Phi)\,.$$

Pro sousední ramena poměr máme vyčíslený jako $\sqrt[8]{1 : 3{,}03}$, spočítáme vzdálenosti a dosadíme vzdálenost Slunce $r(0)$ ze zadání

$$\sqrt[8]{3{,}03} - \sqrt[8]{1/3{,}03} = 0{,}28 r(0) = 2{,}2\,\mathrm{kpc}\,.$$

Vzdálenost mezi dvěma rameny, mezi kterými se nachází Slunce, je 2,2 kpc.

Počítáme hvězdy

V textu seriálu je uveden vzorec pro počet hvězd mezi námi a daným objektem

$$N_M(M,S,\Omega,d)\mathrm{d}M = \left(\int_0^d n_M(M,S,\Omega,r)\Omega r^2 \mathrm{d}r\right)\mathrm{d}M\,.$$

Zamyslíme se nad tím, jaké jsou v zadání předpoklady. Konstantní hustota nám říká, že nám zmizí závislost na prostorovém úhlu a vzdálenosti od pozorovatele $n_M(M,S,\Omega,r) = n_M(M,S) =$ konst. Vzhledem k tomu, že nezapočítáváme mezihvězdné zčervenání, tedy extinkci, nebude se nám měnit ani absolutní hvězdná velikost hvězd, tzn. zmizí faktor $\mathrm{d}M$. Zahrneme-li tyto předpoklady, můžeme tento vztah přepsat jako

$$N_M(M,S,\Omega,d) = n_M(M,S)\Omega\int_0^d r^2\mathrm{d}r = \frac{\Omega d^3}{3}n_M(M,S)\,.$$

Pro vyjádření ve zdánlivých hvězdných velikostech si vzpomeneme na starou dobrou Pogsonovu rovnici ve tvaru $m = M + 5\log_{10} d - 5$. Odtud si můžeme vyjádřit d a výše uvedený vztah napíšeme ve tvaru

$$\overline{N}_M(M,S,\Omega,m) = \frac{\Omega}{3}n_M(M,S)10^{3(m-M+5)/5} = \frac{\Omega}{3}n_M(M,S)\exp\left(\ln 10^{3(m-M+5)/5}\right) =$$
$$= \frac{\Omega}{3}n_M(M,S)\exp\left(\frac{3(m-M+5)}{5}\ln 10\right)\,.$$

V textu seriálu je uveden i vztah pro diferenciální počet počet hvězd

$$A_M(M,S,\Omega,m)\mathrm{d}M\mathrm{d}m = \frac{\overline{N}_M(M,S,\Omega,m)}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}M\mathrm{d}m\,,$$

který můžeme přepsat podle našich úvah jako

$$\begin{aligned} A_M(M,S,\Omega,m) &= \frac{\overline{N}_M(M,S,\Omega,m)}{\mathrm{d}m} \\ &= \frac{\ln 10}{5}\Omega n_M(M,S)10^{3(m-M+5)/5} \\ &= \frac{3\ln 10}{5}\overline{N}_M(M,S,\Omega,m)\,, \end{aligned}$$

což je výsledný vztah. Zkusme se zamyslet nad tím, co se stane, když bude velmi velké m. Abychom zachovali konstantní počet hvězd, úhel Ω bude velmi rychle divergovat s tím, jak m poroste. Dojdeme k tomu, že v nekonečné vzdálenosti by k nám mělo docházet nekonečné množství světla. Jedná se o tzv. *Olberův paradox*.

Olberův paradox je známý také jako paradox tmavé noci. Za našich předpokladů by obloha v noci totiž měla být spíše jasná. Představme si jakési slupky o určité tloušťce. V jedné slupce je určitý počet hvězd, ale v těch následujících, které jsou větší a vzdálenější počet hvězd roste. Nicméně jelikož jsou vzdálenější, klesá intensita světla, které k pozorovateli doputuje. Nakonec každá slupka bude v součtu zářit stejně. Máme-li nekonečný vesmír, slupek je nekonečně mnoho a obloha v noci musí být jasná, k čemuž jsme došli i naším výpočtem. Kde je chyba v předpokladech? Prvním chybným předpokladem je nekonečnost vesmíru, ten má totiž konečné stáří. Hvězdy se navíc netvořily od prvopočátku vesmíru. Existuje tedy pouze konečný počet hvězd, který můžeme spatřit. Také jsme zanedbali extinkci, což v realitě nelze udělat. A nakonec červený posuv (diskutovaný ve druhém díle seriálu), díky němuž se záření posune do okem nespatřitelných vlnových délek.

Jana Poledniková
`janap@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.