

## Úloha II.5 . . . Mikulášovy kučery

4 body; průměr 3,08; řešilo 25 studentů

Lidský vlas má u některých lidí tendenci zaujmout zakroucený tvar. Uvažujme vlas, který má v klidovém stavu dané parametry podobně jako stočená pružinka (poloměr, sklon, materiálové konstanty). Spočítejte, jak se vlas prodlouží, když ho nejprve položíme vodorovně na stůl a potom ho pověsíme svisle dolů. Uvažujte hodně stočený vlas, tj. s malým sklonem.

*Jakub studoval vlasy kamaráda.*

Protože, dle zadání, má lidský vlas parametry odpovídající pružince, budeme se dále zabývat pouze pružinkou. Naším úkolem je určit, o kolik se prodlouží pružinka vlastní vahou. Víme, že prodloužení pružinky je přímo úměrné jejímu zatížení (konstantu úměrnosti budeme standardně značit  $k$ ). Abychom mohli vypočítat celkové prodloužení, tak pružinku rozdělíme na  $N$  kousků o klidové délce  $L/N$ , určíme prodloužení každého z nich a nakonec je všechny sečteme. Budeme předpokládat, že  $N$  je veliké.

Označme tuhost celé pružiny  $k$ , její délku  $L$  a její hmotnost  $M$ , pak každý z úseků má hmotnost  $M/N$  a  $k$ -tý úsek je napínán silou  $F_i = Mg(1 - i/N)$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení. Nyní si rozmysleme, jaká je tuhost takového kousku pružiny. Odvodíme si nejprve vztah pro tuhost dvou pružin spojených „za sebou“. Platí

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_1 = F_2, \\ \Delta x_{12} &= \Delta x_1 + \Delta x_2, \\ F_i &= k_i \Delta x_i \quad \text{pro } i \in \{1, 2, 12\}. \end{aligned}$$

Jednoduchými úpravami dostáváme  $k_{12}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$ , což v našem případě znamená, že tuhost jednotlivých částí pružinky  $k_i = kN$ . Tato veličina je pro velká  $N$  velká, ale to je očekávaný výsledek, protože jednotlivá prodloužení jsou velmi malá.

Nyní již můžeme přistoupit ke spočítání celkového prodloužení. Platí

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \sum_{i=1}^N k_i^{-1} Mg(1 - i/N) = \frac{Mg}{kN} \sum_{i=1}^N (1 - i/N). \quad (1)$$

Sumu můžeme upravit následovně

$$\sum_{i=1}^N (1 - i/N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (N - i) = \frac{1}{N} \cdot \frac{N}{2} ((N - 1) + 0) = \frac{N - 1}{2},$$

kde jsme použili vztah pro součet aritmetické posloupnosti. Nyní již stačí pouze dosadit do vztahu (1) a uvážit, že  $N$  je veliké, tj.  $N - 1 \approx N$  a pro celkové prodloužení dostáváme

$$\Delta x = \frac{Mg}{kN} \frac{N - 1}{2} \approx \frac{Mg}{2k}.$$

Výše uvedený postup pouze obchází nutnost integrování prodloužení přes délku pružinky.

**Lukáš Ledvína**  
lukas1@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.