24. ročník, úloha VI . 1 ... *rozcvička* *(5 bodů; průměr 3,85; řešilo 13 studentů)*

a) *zprohýbané prkno*

Prkno dané délky leží vodorovně. Z jednoho konce po něm pošleme kuličku. Za jakých podmínek bude na druhém konci prkna nejdříve?

a) *Prkno bude prohnuté nahoru.*
b) *Prkno bude prohnuté dolů.*
c) *Prkno bude rovně.*
d) *Při libovolném prohnutí bude doba stejná.*

Svoji volbu řádně odůvodněte.

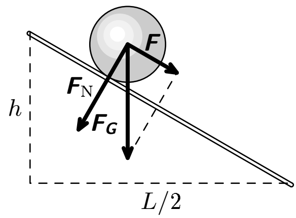
b) *zlomené prkno*

Prohlubeň šířky L přemostíme prohnutým prknem. To se skládá ze dvou stejně dlouhých rovných částí, které jsou uprostřed spojeny zlomem. Na jeden konec položíme kuličku. Pro jakou hloubku prohnutí h bude kulička na druhém konci nejdříve? Zlom je tak hladký, že na něm kulička neztrácí energii. Mohlo by se vám hodit, že funkce $f(x) = x + 1/x$ má minimum v bodě $x = 1$.

Lukáš s Jáchymem, když rozumovali nad první částí úlohy

Zprohýbané prkno

Jelikož má prkno konstantní délku, bude čas přejetí záviset pouze na průměrné rychlosti. Ze zákona zachování energie víme, že čím je kulička níž, tím větší má rychlost. Její potenciální energie v gravitačním poli se přemění na kinetickou energii. Tedy pro vodorovné prkno je rychlost konstantní, pro prkno prohnuté nahoru je rychlost menší a pro prkno prohnuté dolů je rychlost větší.



Obr. 1. Síly působící na kuličku

Pokud bychom se dívali jen na působení sil, vidíme, že je-li prkno rovné, žádná výsledná síla nepůsobí a pohyb je rovnoměrný. Je-li prkno prohnuté nahoru, kulička nejdříve zpomaluje a pak zrychluje. Průměrná rychlost je tedy menší. Naopak při prohnutí dolů kulička nejdříve jede z kopce a tedy zrychluje a pak zase zpomaluje. Průměrná rychlost je větší.

Správná odpověď je tedy b), protože kulička pojede nejrychleji.

Zlomené prkno

Kuličku budeme modelovat jako hmotný bod. Spočítejme, za jak dlouho se dostane do poloviny. Rozložíme tíhovou sílu do kolmého a tečného směru k prknu. Kolmá složka je vyrušena reakcí prkna. Tečná složka urychluje kouli směrem dopředu (z kopce). Tato síla je po celou první polovinu cesty konstantní. Jedná se tedy o rovnoměrně zrychlený pohyb. Z podobnosti trojúhelníků (obrázek 1) můžeme urychlující sílu vyjádřit jako

$$F = mg\frac{h}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Tedy zrychlení, se kterým se bude pohybovat, bude

$$a = \frac{F}{m} = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Do vzorce pro rovnoměrně zrychlený pohyb $s = \frac{1}{2}at^2$, kde s je dráha, kterou těleso urazí z klidu za čas t při zrychlení a, dosaďme

$$s = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} \quad \text{a} \quad a = \frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Odtud již jednoduše vyjádříme čas, za který kulička sjede do poloviny.

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{1}{2}\frac{gh}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}t^2$$

$$2\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2\right) = ght^2$$

$$\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} = t^2\,, \quad \sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} = t$$

Čas, za který ujede druhou polovinu, bude stejný (rozmyslete si).

Nyní hledáme hodnotu h, pro kterou bude výraz

$$\sqrt{\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g}} \tag{1}$$

nejmenší. Druhá odmocnina je funkce rostoucí na kladných číslech, a proto bude výraz (1) nejmenší, když bude argument odmocniny

$$\frac{L^2}{2gh} + \frac{2h}{g} \tag{2}$$

také nejmenší. Pokud výraz (2) upravíme na

$$\frac{L}{g}\left(\frac{1}{\frac{2h}{L}} + \frac{2h}{L}\right)\,,$$

stačí již jen použít nápovědu ze zadání a říct, že tento výraz nabývá minima pro

$$\frac{2h}{L} = 1 \quad \text{neboli} \quad h = \frac{L}{2}\,.$$

Přejetí bude kuličce trvat nejkratší dobu pro $h = L/2$.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz