

24. ročník, úloha IV.1 ... rozcvička !!! chybí statistiky !!!

a) napnutá struna

Frekvence kmitů napjaté struny závisí na její délce l , síle F , kterou je struna napjatá, a na délkové hustotě ϱ_l . Určete z těchto údajů vzoreček pro frekvenci struny pomocí rozměrové analýzy.

b) dolů

Mějme činku, jejíž závaží mají tvar disků, které jsou blízko u sebe. Tyčku omotáme jednou provázkem a činku spustíme. Jak rychle padá, pokud se nesmýká? Disky mají hmotnost m a poloměr R , tyčka je nehmotná s poloměrem r .

Karel a Jakub

Napnutá struna

Rozměrová analýza je velmi silný nástroj pro odhadnutí chování nějakého systému, pokud víme, pouze na čem by zkoumaná veličina mohla záviset.

Rozměrová analýza je také velmi dobrou kontrolou správnosti výsledku. Známe-li totiž jednotku, která nám má vyjít a dosadíme-li do vzorce ty, které v něm vystupují, musí být výsledkem ona očekávaná jednotka. Když není, určitě jsme udělali chybu.

Nyní se ale již zaměřme na náš problém. Ze zadání víme, že frekvence by měla záviset na délce l , síle F a hustotě ϱ_l . Proto můžeme psát

$$f = l^\alpha F^\beta \varrho_l^\gamma. \quad (1)$$

Budeme hledat koeficienty α , β a γ tak, aby rozměr levé i pravé strany byl týž. Pokud bychom našli více možností, může být frekvence rovna libovolné lineární kombinaci výrazů (1).

Najdeme nejprve rozklad veličin ze zadání do jednotek SI:

$$\begin{aligned} [l] &= \text{m}, \\ [F] &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}, \\ [\varrho] &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}, \\ [f] &= \text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Aby se rovnaly rozměry veličin na levé a pravé straně výrazu (1), musí se rovnat mocniny u všech různých veličin z SI. Proto dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \text{kg:} \quad & 0 = \beta + \gamma, \\ \text{m:} \quad & 0 = \alpha + \beta - \gamma, \\ \text{s:} \quad & -1 = -2\beta. \end{aligned}$$

Vyřešením soustavy dostáváme $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$ a $\gamma = -1/2$. Proto můžeme napsat výsledek

$$f = \frac{C_0}{l} \sqrt{\frac{F}{\varrho_l}}.$$

Hodnotu konstanty C_0 nám však rozměrová analýza neumožňuje zjistit, závisí totiž na tom, kolikátá harmonická frekvence je na struně naladěna.

Dolů

Zvolíme zde jiný, však pro mnohé úlohy velmi silný, nástroj. Tím bude zákon zachování energie.

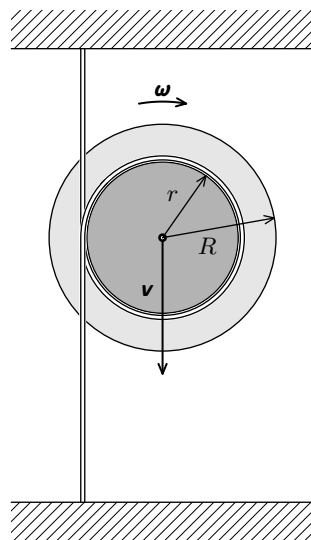
Celá situace je vyobrazena na obrázku 1. Protože nedochází během pohybu k disipaci energie¹, veškerá potenciální energie se změní na energii kinetickou.

Ze zadání víme, že hmotnost celé soustavy je $2m$, dále uvažujme, že těžiště se posune dolů o h . Celková změna potenciální energie je proto

$$E_p = -2mgh. \quad (2)$$

Znaménko minus je zde proto, že se potenciální energie zmenší. Nyní ještě vyčísleme energii kinetickou. Ta má dvě složky: translační a rotační. Uvažujme nyní, že se těžiště pohybuje rychlostí v směrem dolů. Úhlová rychlost otáčení joja okolo těžiště je potom $\omega = v/r$. Protože se jojo skládá ze dvou disků každého o hmotnosti m a poloměru R , platí pro jeho moment setrvačnosti $J = 2 \cdot \frac{1}{2}mR^2$, konstanta $1/2$ souvisí s tvarem disků a můžeme ji nalézt např. v tabulkách nebo na internetu². Celková kinetická energie je rovna součtu translační a rotační energie.

$$E_k = E_t + E_r = \frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)mv^2. \quad (3)$$



Obr. 1. Činka na provázku

Jak jsme již uvedli výše, energie se neztrácí, proto je celková změna energie nulová, tj. $E_k + E_p = 0$. Z rovnic (2) a (3) vyjádříme rychlost pohybu

$$v = \sqrt{\frac{2hg}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s rovnicí pro rovnoměrně zrychlený pohyb $v = \sqrt{2ha}$, můžeme určit zrychlení pohybu

$$a = \frac{g}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}.$$

Lukáš Ledvina

lukas1@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹⁾ Docházelo by k němu, pokud by bylo vlákno hmotné.

²⁾ http://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrvačnosti