24. ročník, úloha III . 1 ... *rozcvička* *(4 body; průměr 1,90; řešilo 20 studentů)*

a) *dr. Nec*

Terka byla o víkendu tahat dřevo. Objem dřeva se měří dvěma způsoby: na kubíky (1 m^3 *dřevo-hmoty bez vzduchových mezer mezi kládami) a na plnometry (1 m*^{3} *i s mezerami). Nalezněte převodní vztah mezi těmito dvěma jednotkami (tj. kolik plnometrů odpovídá jednomu kubíku) v závislosti na poloměru klád, ze kterých se skládá hranice. Klády považujte za dokonale hladké válce, které se skládají na sebe.*

b) *bublifuk*

Foukáme do mýdlového povrchu na počátku kruhového tvaru tak, aby měl tvar kulového vrchlíku o poloměru r. Odhadněte, jakou rychlostí do něj musíme foukat?

Dohromady (se) dali Terka a Jakub.

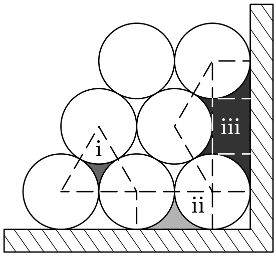
Dr. Nec

V zadání jsme se trochu, trošičku spletli. Zkušení dřevaři nám to snad odpustí, a znalí řešitelé chybu objevili. Prodejci dřeva, tedy ti všichni dr. Necové a dr. Voštěpové, používají troje různé jednotky pro měření jeho množství. Tou prvou je skutečný objem dřevní hmoty, tj. krychle o hraně 1 m zcela vyplněná dřevem. Takto měřené množství dřeva se udává v *plnometrech* a značí se písmeny plm.

Častěji se však používá *prostorový metr*, což je opět krychle o hraně 1 m vyplněná poleny, a tedy se započítávají i vzduchové mezery mezi nimi. Dřevo je však urovnané, a proto jsou tyto mezery dosti malé. Níže výpočtem zjistíme jak moc malé. Prostorový metr se označuje symbolem prmr, kde poslední r znamená rovnané.

Konečně se můžete setkat ještě s *prostorovým metrem sypaným*. Představte si hromadu poházených nasekaných špalků dřeva, v níž vymezíte krychli o délce hrany 1 m. Takové množství dřeva odpovídá jednomu sypanému prostorovému metru, 1 prms. Toto počítat nebudeme, ale vlivem velkých mezer mezi špalíky je zde jen asi 40 % dřevní hmoty.

Uvažujme nyní kulatiny vzorně srovnané na železničním vagónu nebo na nákladním autě. Nákladový prostor je vymezen jednak podlahou, a po stranách také klanicemi. Předpokládejme, že vzdálenost mezi nimi je celočíselným násobkem poloměru klád R, tedy že dolní vrstva je tam narovnána tak „akorát“. Při pokládání druhé vrstvy se pak dřevo skutálí do mezer mezi kládami v prvé vrstvě. Třetí vrstva bude však podobně jako první zarovnána tak akorát. A tak dále.



Obr. 1. Složené klády

Na vagónu tedy máme několik typů mezer. Díky tomu, že klády jsou dokonalé válce, můžeme celou situaci zkoumat pouze ve dvou rozměrech. Zakreslili jsme ji do obrázku 1. Vidíme celkem tři typy mezer: (i) mezi trojicí sousedních klád, (ii) mezi dvojicí klád a stěnou, (iii) mezi trojicí klád a stěnou. Vypočítáme plochy všech těchto geometrických útvarů, ačkoli pro řešení úlohy to není nezbytně nutné.

Pro výpočet obsahu S_1 využijeme rovnostranný trojúhelník o délce strany $2R$. Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je π, můžeme okamžitě napsat

$$S_1 = R^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) ,$$

kde $\sqrt{3}$ je pozůstatek po výšce tohoto trojúhelníku.

Druhá mezera má obsah S_2, který zjistíme díky obdélníku o rozměrech $2R$ a R. Pak již velmi snadno určíme

$$S_2 = R^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Konečně se dostáváme k poslední možnosti. Velikost plochy S_3 je součtem několika částí: prvně tam je celá S_2, i když rozdělená na dvě poloviny, dále obdélník o stranách ε a R a konečně ten zbytek, jakýsi ve třech stranách „propadlý" čtyřúhelník. Jeho plochu označme S_4. Tedy $S_3 = S_2 + \varepsilon R + S_4$.

Nejprve zjistíme velikost ε. Je to vzdálenost mezi dvěma kládami ob vrstvu. Použijeme opět rovnostranný trojúhelník se stranou $2R$. Jeho výška je $\sqrt{3}R$. Odsud $\varepsilon/2 = \sqrt{3}R - R$, a tedy $\varepsilon = 2R(\sqrt{3} - 1)$.

Nyní vyšetříme plochu S_4. Použijeme k tomu rovnoramenný trojúhelník s délkou ramen $2R$ a základnou $2R + \varepsilon$. Jeho výšku označme w a podle Pythagorovy věty pro ni platí $w = \sqrt{4R^2 - \left(R + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2} = R$. Tedy rovná strana tohoto čtyřúhelníku se dokonce dotýká protější kulaté. Je její tečnou. Teď už snadnou vyjádříme

$$S_4 = R\left(R + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\pi R^2}{2} = R^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) .$$

Dohromady proto $S_3 = \left(3\sqrt{3} - \pi\right) R^2$.

Nyní je třeba si rozmyslet, kolik kterých mezer v jednom plošném metru je. Tady nám nezbude než zvolit vhodný průměr klád. Předpokládejme, že klády nakládáme na vůz řady Smmps, který má ložnou šířku[1] 3100 mm. Průměr klád zvolme např. 310 mm, tj. $R = 155$ mm, a skládejme je do sedmi vrstev po deseti, respektive devíti kusech. Vůz tedy celkově pojme 67 kulatin, přičemž mezer mezi nimi bude věru požehnaně: $5 \cdot (9 + 8)$ prvého typu, $2 \cdot 10$ druhého (uvědomte si, že dvě mezery v rozích jsou polovinou jedné u stěny) a $2 \cdot 3$ posledně jmenovaných.

Celkový průjezdný profil nákladu ohraničeného obdélníkem je součinem šířky dolní vrstvy a celkové výšky

$$P = 2nR\left(2R\left\lceil \tfrac{1}{2}m \right\rceil + \varepsilon \left\lfloor \tfrac{1}{2}m \right\rfloor\right) = 4nR^2\left(\left\lceil \tfrac{1}{2}m \right\rceil + \left\lfloor \tfrac{1}{2}m \right\rfloor (\sqrt{3} - 1)\right) \doteq 5{,}955\,\mathrm{m}^2 ,$$

kde n je počet klád v nejnižší vrstvě a m počet vrstev. Všimněte si využití dolní a horní části podílu $m/2$ pro odlišení různého množství stromů v sudých a lichých vrstvách.

Nás však zajímá poměr dřevní hmoty a celkem zabraného místa

$$\nu = \frac{\left(\left\lceil \frac{1}{2}m \right\rceil n + \left\lfloor \frac{1}{2}m \right\rfloor (n - 1)\right)\pi R^2}{P} = \frac{(4 \cdot 10 + 3 \cdot 9)\pi}{4 \cdot 10\left(4 + 3(\sqrt{3} - 1)\right)} \doteq 0{,}849 .$$

Toto číslo je poměrně dobrým výsledkem. V praxi je převodní konstanta podstatně nižší (obvykle 0,65 až 0,8), neboť stromy nejsou válce a nejde je „nacpat" přímo na sebe jako v této modelové situaci.

[1] Viz `http://vozy.cdcargo.cz/katalog_vozu/plosinove-vozy/smmps-54.html`.

Bublifuk

Bublifuk je oblíbená dětská hračka, a proto můžeme předpokládat, že každý si vyzkoušel vyfouknout nějakou tu mýdlovou bublinu. Kromě určité intenzity foukání to však vyžaduje i nemalý cit. Příliš prudký vítr totiž bublinu roztrhne. Zabývejme se pro tentokrát minimální silou foukání, aby se bublina zdárně nafoukla.

Foukáním udělujeme molekulám vzduchu určitou hybnost. Ty pak narážejí na mydlinovou blánu tato jejich hybnost se zužitkovává pro udržování vypouklého tvaru mýdlové blány, neboť, jak známo, kapalina se snaží zaujmout takový tvar, aby její povrch byl co nejmenší. To je způsobeno existencí povrchového napětí, které vyvolává sílu, jež se snaží povrch blány vrátit do rovinného tvaru. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že veškerá hybnost pohybujícího se vzduchu se využije k tomuto účelu. Takže síla vzduchu musí být rovna povrchové síle, způsobené povrchovým napětím σ,

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4\sigma\pi R^2}{r}\,, \tag{1}$$

kde πR^2 je obsah vyfukovacího kroužku a r poloměr zakřivení vypouklé blány. Změna hybnosti vzduchu je z $p = mv$ na 0 (dle předpokladu). Je-li hustota vzduchu ϱ, pak za dobu Δt na blánu doletí vzduch o hmotnosti $m = \pi R^2 v \Delta t \varrho$, takže na levé straně rovnice (1) dostáváme výraz $\pi R^2 v^2 \varrho$.

Dosazením obdržíme

$$\pi R^2 v^2 \varrho = \frac{4\sigma\pi R^2}{r}\,,$$

odkud elementárními úpravami získáme výsledek

$$v = \sqrt{\frac{4\sigma}{\varrho r}}\,.$$

Někteří řešitelé používali ve svých řešeních integrální počet, ale v tomto případě nepřináší příliš větší přesnost. Kde to není nutné, zkuste raději úlohy řešit bez použití vyšší matematiky.

Tomáš Jirotka
`byrot@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.