24. ročník, úloha I . 3 ... *houpací kůň* *(4 body; průměr 1,59; řešilo 22 studentů)*

Nehmotná tyč délky h je ve středu připevněna na nehmotný oblouk o vrcholovém úhlu 2φ a poloměru R. Na konci tyče je závaží m. Pohyb probíhá pouze v rovině. Určete podmínky stability a periodu kmitů takovéhoto houpacího koně.

Při studiu materiálů od ČEZu vymyslel Jakub

Nejprve si udělejme v celé situaci jasno. Na obrázku je nakreslena rovnovážná poloha a vychýlená poloha společně s působícími silami. Gravitační sílu netřeba ozřejmovat. Normálová síla podložky F_N působí proti ní a třecí síla F_t zajišťuje, aby se kůň kromě otáčení kolem bodu O a posouval ve směru osy x, a tím pádem neprokluzoval.

a) Aby byla soustava stabilní, musí při vychýlení z rovnováhy vzniklá síla působit proti této výchylce. Z obrázku a hlavně zakreslených působících sil vidíme, že tato podmínka bude splněna, pokud $R > h$. Tehdy bude vzniklý moment síly F_g působit proti natočení koně.

b) Protože houpací kůň neprokluzuje a než ho pustíme, tak se nehýbe, musí platit $a = h\varepsilon$, kde a je zrychlení závaží a ε je úhlové zrychlení koně kolem závaží. Moment setrvačnosti koně kolem závaží je nulový, jelikož veškerá jeho hmota je soustředěna právě v závaží. Moment působících sil vůči tomuto bodu tak musí být nulový, jinak bychom dostali nekonečné úhlové zrychlení. Pro malé kmity tak dostaneme

$$mg(R-h)\alpha \approx F_\mathrm{N}(R-h)\sin\alpha = F_\mathrm{t}h(1-\cos\alpha) \approx F_\mathrm{t}h\,,$$

$$F_\mathrm{t} = mg\alpha\left(\frac{R}{h}-1\right)\,.$$

Dále z Newtonova zákona

$$mh\varepsilon = ma = -F_\mathrm{t} = -mg\alpha\left(\frac{R}{h}-1\right)\,,$$

v čemž poznáváme rovnici harmonického oscilátoru[1], ze které vyčteme[2]

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\frac{1-q}{q^2}}\,,$$

kde $q = h/R$.

Všimněme si limitních případů. Pro $q \to 1$ je $\omega \to 0$, což odpovídá prosté kouli. Ta při vychýlení také nekmitá. Pro $q > 1$ je frekvence imaginární, což koresponduje s tím, že soustava v takovém případě není stabilní. Pro $q \to 0$ máme $\omega \to \infty$, což odpovídá například míčku skákajícímu do nekonečně malé výšky. Pro $q \to -\infty$ je konečně $\omega \sim \sqrt{g/|h|}$, což odpovídá matematickému kyvadlu, ve které houpací kůň přechází.

Jan Hermann
honzah@fykos.cz

[1] Pro harmonický oscilátor platí (zrychlení) = −(konstanta) × (výchylka).

[2] $\omega = \sqrt{(\text{konstanta})}$