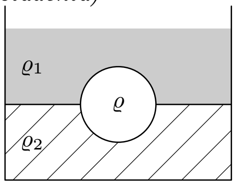
24. ročník, úloha I.1 ... *rozcvička* *(4 body; průměr 2,78; řešilo 41 studentů)*



a) **mezi vodami**

Na rozhraní dvou nemísitelných kapalin se vznáší pevná homogenní koule o hustotě ϱ (viz obrázek). Horní kapalina má hustotu ϱ_1, dolní ϱ_2, přičemž víte, že $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. Jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině?

b) **sesterská planeta**

V posledních několika letech již byla objevena spousta planet velikosti Jupitera ležících mimo Sluneční soustavu. Daleko zajímavější by bylo ovšem objevovat planety, které jsou podobné Zemi. Předpokládejte, že chcete objevit planetu podobnou Zemi (terestrická planeta s podobným poloměrem jako Země), která obíhá svou hvězdu podobnou Slunci (stejná spektrální třída – podobná hmotnost, podobný poloměr) jednou za pozemský rok. Předpokládejte, že tato soustava je vzdálená od našeho Slunce zhruba 10 parseků. Určete podmínky, za kterých by šlo pozorovat planetu přímo z poklesu jasnosti hvězdy a odhadněte dobu, na kterou tato situace nastane. Jak se zkomplikuje hledání takové hvězdy, když soustava bude mít víc planet?

Z ruských bylin vyčetl Marek, zatímco Karel toužil po hvězdných dálavách.

Mezi vodami

Koule je z části v kapalině s indexem 1 a z části v kapalině 2; označme příslušné objemy V_1 a V_2. Tyto části se nazývají kulová úseč.

Podle Archimédova zákona je část ponořená v dolní kapalině nadnášena silou $F_2 = V_2\varrho_2 g$. Podobně na horní část koule působí vztlaková síla $F_1 = V_1\varrho_1 g$. Nyní nám stačí přidat působení tíhové síly a máme rovnováhu sil $F_1 + F_2 = F_\mathrm{g}$, kam dosadíme předchozí výsledky a zkrátíme g. Obdržíme $V_1\varrho_1 + V_2\varrho_2 = (V_1 + V_2)\varrho$.

V zadání jsme se ptali, jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině? Zajímá nás tedy poměr V_1 a V_2. Ten získáme několika úpravami předchozí rovnice.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{-\varrho_2 + \varrho}{\varrho_1 - \varrho}\,.$$

Adéla Skoková
`adela@fykos.cz`

Sesterská planeta

Hned na začátek si zavedeme rozumné předpoklady, ze kterých budeme dále vycházet. Vzhledem k tomu, že planetu velikosti Země nejspíše chceme objevit, protože by nás zajímalo, kde by mohly žít podobné formy života jako na Zemi, tak od planety požadujeme, aby obíhala po dráze s nízkou excentricitou – konkrétně pro jednoduchost budeme uvažovat, že se pohybuje po kružnici (vysoké excentricita by způsobovala velké rozdíly teplot v průběhu roku).

Je zřejmé, že k poklesu jasnosti dojde v okamžiku, kdy planeta přechází přes hvězdu. Tato metoda objevování exoplanet se nazývá fotometrická metoda. K zákrytu může dojít pouze u hvězdných soustav, jejichž rovina, ve které obíhají planety, protíná naši Sluneční soustavu. To je relativně vzácné a proto je tato metoda prakticky nepoužitelná pro objevování planet. Pro to se prakticky používá často například Dopplerova metoda, která z posunu spektrálních čar v průběhu času určuje změnu radiální rychlosti a z toho pak i přítomnost exoplanety.

Ale zpět k teoretickému využití naší metody. Na obrázku 1 můžete vidět schematický náčrt toho, jak by se nám mohly jednotlivé polohy planet jevit (jedná se vlastně o různé projekce kružnice s koulí ve středu) Možnost a) je pro naše pozorování vůbec nejlepší – planeta přechází blízko středu hvězdy a přechod jí tedy bude trvat nejdelší čas. Při přechodu u soustavy b), kdy planeta přechází sice přes svou hvězdu, ale prochází blíže ke kraji a přechod jí bude trvat kratší čas. V případech c) a d) bychom touto metodou planetu vůbec nemohli objevit. V případě c), kdy je orbita alespoň nakloněná, pak lze použít např. zmíněnou Dopplerovu metodu. V případě d) (kdy planeta obíhá v rovině kolmé na spojnici pozorovatel – hvězda) se dá použít např. astrometrická metoda, která přítomnost planety určuje na základě změn polohy hvězdy na obloze.

Nyní již k samotnému výpočtu doby přechodu planety. Předpokládáme, že jev můžeme vůbec pozorovat (soustava má zvolenou dobu oběhu právě takovou, že pokud je soustava v nevhodné pozici pro pozorování (např. z našeho pohledu za Sluncem), tak je v nevhodné pozici každý rok). Určíme maximální dobu přechodu (případ a) z obrázku 1. V zadání je přímo řečeno, že planeta oběhne hvězdu jednou za rok a tedy tak často také budeme moci pozorovat přechod. Označme vzdálenost pozorované soustavy od nás jako $d = 10\,\mathrm{pc}$. Jak bylo v zadání uvedeno, tak můžete pokládat rozměry v soustavě obdobné jako v Sluneční soustavě a pro řádový odhad vezmeme z matematicko-fyzikálních tabulek údaje na dvě platné cifry. Poloměr hvězdy je $R_\mathrm{S} = 7{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$, hmotnost hvězdy $M_\mathrm{S} = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Vzhledem k tomu, že roli dostředivé síly F_d hraje síla gravitační F_g, dá se vyjádřit jako

$$F_\mathrm{d} = M_\mathrm{P}\frac{v^2}{r}\,, \qquad F_\mathrm{g} = \varkappa\frac{M_\mathrm{P}M_\mathrm{S}}{r^2}\,,$$

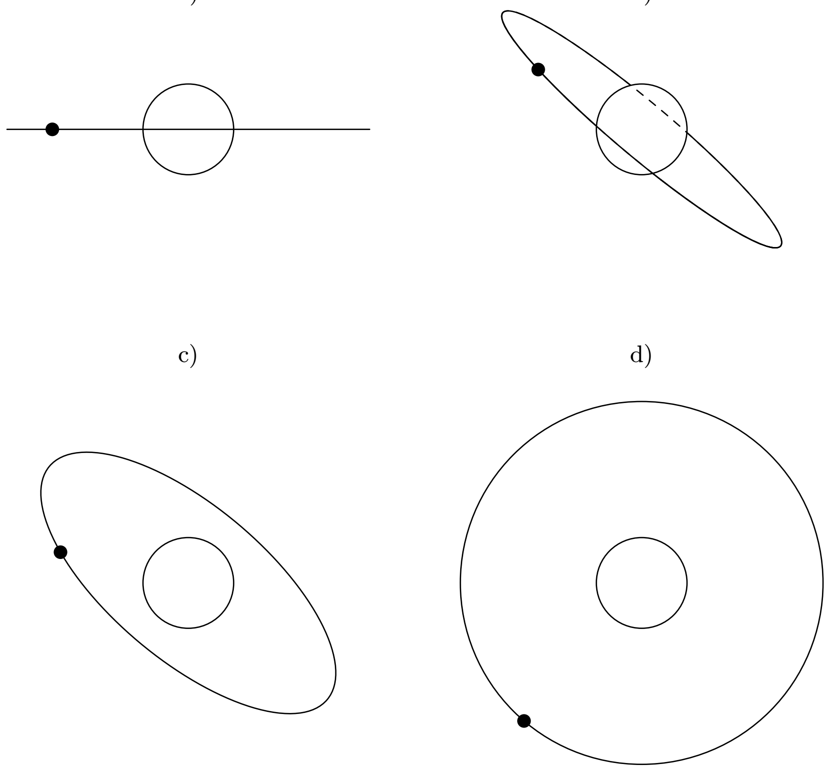
kde M_P je hmotnost planety a M_S hmotnost hvězdy a tyto splňují podmínku $M_\mathrm{S} \gg M_\mathrm{P}$. Dále $\varkappa \doteq 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta a r je vzdálenost mezi těžišti planety a hvězdy. Z toho dále plyne

$$M_\mathrm{P}\frac{v^2}{r} = \varkappa\frac{M_\mathrm{P}M_\mathrm{S}}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\varkappa\frac{M_\mathrm{S}}{r}}\,.$$

Přičemž pro pohyb po kružnici platí $v = \frac{2\pi r}{T}$, kde T je doba oběhu (1 rok). Odtud pak zase plyne

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \varkappa\frac{M_\mathrm{S}}{r} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{\varkappa}{4\pi^2}T^2 M_\mathrm{S}\,.$$

Vzhledem k tomu, že všechny proměnné na pravé straně rovnice jsou stejné jako pro Zemi, tak obíhá planeta kolem cizí hvězdy také po dráze o poloměru $r = 1\,\mathrm{AU} \doteq 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.



Obr. 1. Možné pozice orbity planety vůči nám jako pozorovateli (ve zkresleném měřítku)

Zbývá si už jenom výpočet výrazně zjednodušit zdůrazněním splněných předpokladů a to, že $d \gg r \gg R_\mathrm{S}$. Proto můžeme brát, že dráha, kterou planeta z našeho pohledu urazí před svým sluncem, je $2R_\mathrm{S}$. Potom už dobu přechodu t spočítáme jednoduše z rychlosti oběhu planety v

$$t = \frac{2R_\mathrm{S}}{v} = \frac{2\sqrt{r}R_\mathrm{S}}{\sqrt{\varkappa M_\mathrm{S}}} \approx 13\,\mathrm{hodin}\,.$$

Přechod planety přes hvězdu tedy bude trvat maximálně cca 13 hodin.

Kdyby nás zajímal odhad o kolik procent klesne v této době hvězdě jas L, pak si to můžeme vypočítat z poměrů průřezů hvězdy S_S a planety S_P vzorcem

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{S_\mathrm{P}}{S_\mathrm{S}} = \frac{R_\mathrm{P}^2}{R_\mathrm{S}^2} \approx 0{,}008\%$$

Pokles jasnosti je tedy velmi malý a měření by bylo náročné i na rozlišovací schopnost dalekohledu.

V případě, že by v soustavě bylo více planet (což se zdá z dosavadních pozorování daleko pravděpodobnější, než že by planeta byla v soustavě sama), pak budeme pozorovat ročně průměrně více poklesů. To, jak často, by záleželo na tom, jestli vůči planetě, kterou jsme pozorovali, obíhá po dráze bližší své hvězdě (pak obíhá častěji než za rok), nebo po vzdálenější. Teoreticky by mohla obíhat i po stejné dráze, ale je vysoce nepravděpodobné, že by taková soustava vznikla. Právě díky tomu, že je nepravděpodobný výskyt dvou a více planet na stejné oběžné dráze, pak můžeme rozpoznat planety právě díky různým dobám oběhu. Dalším rozlišovacím znakem může být právě rozdílný pokles jasnosti při přechodu planety, která má jinou velikost. Mohlo by se i stát, že bude přecházet víc planet zároveň, ale to právě můžeme teoreticky také rozpoznat pomocí toho, že pokles jasu bude mít složitější průběh než u přechodu jedné planety.

Karel Kolář
karel@fykos.cz