23. ročník, úloha VI . 4 ... podkritické polokoule *(4 body; průměr 2,33; řešili 3 studenti)*

Když Lukáše přestala bavit ionizace jednotlivých atomů, objednal si uranu víc. Doručili mu dvě přesné polokoule, každou o hmotnosti m ($m_k/2 < m < m_k$, kde m_k je kritická hmotnost). Lukáš je nastavil rovnými stranami k sobě a začal je přibližovat. V jaké vzdálenosti d mezi koulemi byl jeho pokus přerušen zažehnutím řetězové reakce?

Přinesl v ranečku Pavel Motloch.

Situace, kterou popisujeme v zadání, je sice kvůli protiteroristickým opatřením poměrně nepravděpodobná, ale má reálný podklad. Chcete-li totiž sestrojit atomovou pumu, musíte si na tento efekt dát pozor. Pokud je zbraň tzv. dělového typu a při odpálení selže roznětka, což má za následek jen pomalé přiblížení podkritických polokoulí k sobě, dojde při určité vzdálenosti k výbuchu a zbytek štěpného materiálu bude odhozen od sebe, aniž by v něm řetězová reakce proběhla podle původních požadavků.

Za štěpení uranu může např. následující reakce:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{93}_{36}\mathrm{Kr} + {}^{140}_{56}\mathrm{Ba} + 3{}^{1}_{0}\mathrm{n} + \gamma \,.$$

Přičemž produkty reakce nesou energii 193 MeV. To je v jaderných rozměrech poměrně dost (samotné neutrony mají asi 6 MeV). Na rozštěpení je totiž potřeba neutron, který je pomalý a tedy pravděpodobnost, se kterou některý z emitovaných elektronů spustí další reakci, je také velmi malá. Řetězovou reakcí pak rozumíme stav, kdy ze štěpení v jedné generaci neutronů vznikne minimálně stejný počet reakcí v generaci následující. Budeme uvažovat rovnost

$$n_\mathrm{r}^2 = n_\mathrm{r}^1 = p(kn_\mathrm{r} - n_\mathrm{u}) \,, \tag{1}$$

kde n_r^1 (resp. n_r^2) je počet reakcí v první resp. druhé generaci, p pravděpodobnost záchytu neutronu do reakce, k počet neutronů vzniklých jednou reakcí a n_u počet uniklých neutronů.

Jak spočítáme počet reakcí? Na tom se podílí plno různých faktorů, zvláště tzv. účinný průřez, ale pro naše účely bude stačit říct, že bude přímo úměrný počtu jader.

$$n_\mathrm{r} = a\,\frac{m}{M} \,,$$

přičemž do konstanty a jsme zahrnuli vše, co ovlivňuje pravděpodobnost srážky a reakce.

Kolik neutronů uteče? To závisí především na povrchu tělesa, o které se zajímáme. Uvážíme-li, že z něj unikají rovnoměrně, můžeme psát

$$n_\mathrm{u} = bS \,,$$

kde S je povrch tělesa a b je počet neutronů emitovaných z jednotky plochy. Tedy po dosazení do rovnice (1) dostaneme vztah pro kritickou hmotnost pro zapálení reakce

$$m_\mathrm{k} = \frac{aM}{k - \dfrac{1}{p}}\, bS_\mathrm{k} \,. \tag{2}$$

Jak to bude s polokoulemi? Z protilehlých rovinných částí jsou emitovány neutrony, které by, pokud by byly polokoule spojeny, prošly na druhou stranu a normálně by vstupovaly do reakcí. Jenže tím, jak mezi koulemi vytvoříme skulinu, jich část uteče. To způsobí změnu v rovnici (1).

$$n_r = p(kn_\mathrm{r} - n_\mathrm{u} - n_\mathrm{uv}) \,,$$

přidáme nový člen popisující neutrony unikající vzduchovou štěrbinou n_{uv}. Ten si pomocí rovnice (2) můžeme jednoduše vyjádřit. Teď již ale použijeme hodnoty ze zadání – kouli o hmotnosti $2m$ a povrchu S.

$$n_{\mathrm{uv}} = bS_{\mathrm{k}} \left(\frac{m}{m_{\mathrm{k}}} - \frac{S}{S_{\mathrm{k}}} \right) .$$

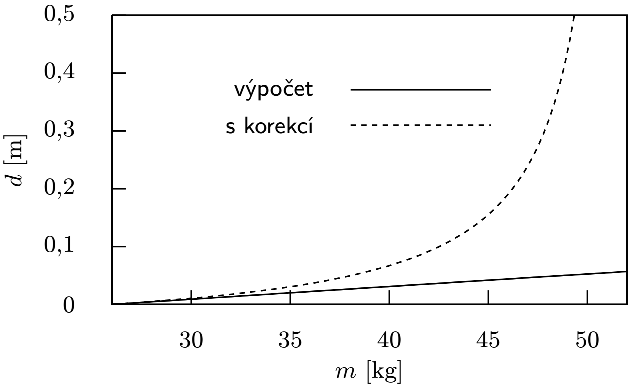
Budeme uvažovat, že ze vzduchové štěrbiny vylétají neutrony stejně jako z povrchu uranu, tedy $n_{\mathrm{uv}} = 2\pi r d b$. Dosadíme do minulé rovnice (také využijeme toho, jaký je vzájemný vztah r, S a m) a dostaneme výsledek

$$d = \left(2\sqrt[3]{\frac{m}{m_{\mathrm{k}}}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\varrho}} .$$

Pro náš výsledek by měly platit dvě okrajové podmínky. Pro $m/m_{\mathrm{k}} = 1/2$ by mělo platit, že $d = 0$. To platí, při této hodnotě se závorka, tedy i celý výraz, vynuluje. Ovšem druhá podmínka splněna není, pro $m/m_{\mathrm{k}} = 1$ by měla stačit libovolná vzdálenost na zážeh reakce (tedy, že i nekonečně vzdálené polokoule vybuchnou[1]). Výsledek bychom mohli opravit např. do tohoto tvaru

$$d = \frac{1}{2\left(1 - \dfrac{m}{m_{\mathrm{k}}}\right)} \left(2\sqrt[3]{\frac{m}{m_{\mathrm{k}}}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi\varrho}} ,$$

ovšem otázka je, nakolik tento výsledek odpovídá reálným hodnotám. Dosadíme-li správné materiálové konstanty ($m_{\mathrm{k}} \approx 52\,\mathrm{kg}$, $\varrho \approx 19000\,\mathrm{kg/m^3}$), dostaneme pro $m/m_{\mathrm{k}} = 3/4$ hodnotu okolo 10 cm, což je docela dobré. Jak si vede výsledek s korekcí oproti vypočtenému je zobrazeno v obrázku 1.



Obr. 1. Porovnání obou metod

Řešení bohužel moc nedorazilo, o to víc si pochvalu zaslouží *Petr Ryšavý*, který došel ke správnému výsledku.

Aleš Podolník
ales@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky

[1] Zde schválně nediskutujeme jejich tvar. Kritická hmotnost pro polokouli vyjde větší než pro kouli.