23. ročník, úloha V . 4 ... *drtivý dopad* *!!! chybí statistiky !!!*

Všichni dobře víme, že se 21. prosince 2012 se na své cestě ke Slunci srazí se Zemí asteroid (pohybuje se ve stejné rovině jako Země). Uvažme, že se pohybuje po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou délky 4 AU a excentricitou 0,2 AU. Lidstvo bylo moc zaneprázdněno, a tak se problém začal řešit až 1. prosince 2012. Po jaké dráze musí udatná světová autorita vystřelit raketu s jadernou hlavicí, aby včas odvrátila konec světa? *Napadlo Honzu Humplíka.*

Uvažujme, že raketa vystřelí v okamžik, kdy jsou splněny předpoklady, že všechny trajektorie v uvažovaném čase můžeme nahradit přibližně úsečkami a zároveň tak, aby k výbuchu došlo dostatečně daleko od Země, aby ji trosky minuly. V dalším budeme uvažovat, že autorita vystřelí, hned jak se to dozví.

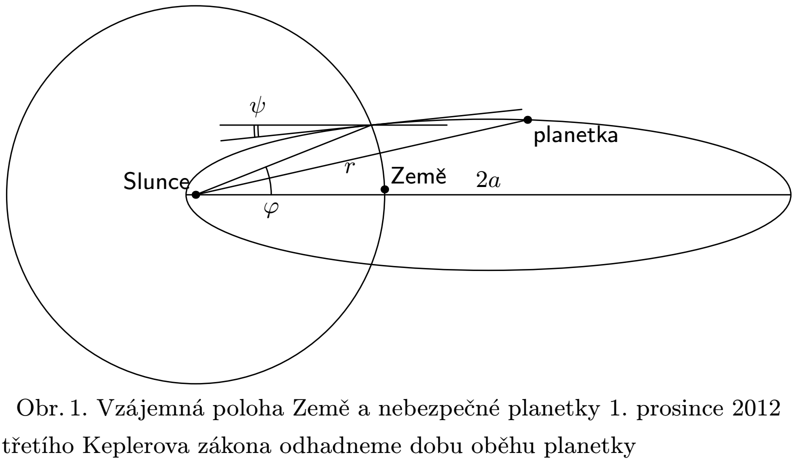
Zopakujme nejprve základní poznatky o Keplerově úloze. Platí Keplerovy zákony: 1) planetka se pohybuje po elipse se Sluncem v ohnisku, 2) moment hybnosti planetky se zachovává a 3) pro různá tělesa je čtverec oběžné doby dělený krychlí velké poloosy stejný.

Pokud napíšeme zákon zachování energie pro přísluní a odsluní (které nadále se společným ohniskem tvoří souřadnou soustavu) a uvážíme, že v těchto polohách je stejný moment hybnosti, dostaneme pro celkovou mechanickou energii

$$E = -\frac{GM}{2aI}\,.$$

kde G značí gravitační konstantu, M hmotnost Slunce a a je délka hlavní poloosy elipsy. Proto ve vzdálenosti r od Slunce má planetka rychlost

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}\,.$$



Obr. 1. Vzájemná poloha Země a nebezpečné planetky 1. prosince 2012

Podle třetího Keplerova zákona odhadneme dobu oběhu planetky

$$T' = \left(\frac{a'}{a}\right)^{3/2} T = 3000\,\mathrm{d}\,,$$

takže z tohoto hlediska je 20 dnů kratičká doba a nahrazení přímkou trajektorii planetky je ospravedlněné. Za trajektorii Země budeme dále považovat kružnici. Za 20 dní se Země posune přibližně o 20°.[1] Planetka se pohybuje po elipse, a tedy musí platit

$$r = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1 - e\cos\varphi}\,,$$

kde numerická excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a \doteq 0{,}99875$. Odsud vyjádříme úhel průsečíku se Zemí

$$\cos\varphi = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{b^2}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 7{,}59^\circ\,.$$

Teď zjistíme směrnici tečny k elipse v tomto bodě. Uvažujme rovnici elipsy ve středovém tvaru

$$\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Jejím diferencováním zjistíme směrnici tečny

$$\frac{(x - ae)}{a^2}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{b^2}\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x - ae}{y} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{r\cos\varphi - ae}{r\sin\varphi}\,.$$

Dosazením φ a $r = 1\,\mathrm{AU}$ zjistíme úhel, který svírá tečna trajektorie planetky v očekávaném místě střetu se zemí s ohniskovou osou

$$\mathrm{tg}\,\psi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \doteq 0{,}05686 \quad \Rightarrow \quad \psi = 3{,}25^\circ\,.$$

Proto můžeme psát pro pohyb planetky obdobně jako u vrhu šikmého s rychlostí v ve vakuu

$$x_\mathrm{p} = v\cos\psi\cdot(20\,\mathrm{d} - t) + \cos\varphi\,,$$
$$y_\mathrm{p} = v\sin\psi\cdot(20\,\mathrm{d} - t) + \sin\varphi\,.$$

Pro úhel, který oběhne planeta Země za dvacet dnů, platí $\vartheta = \frac{20}{365}\cdot 360^\circ$. Můžeme napsat rovnice pro pohyb rakety vystřelené rychlostí w, kterou zvolíme tečnou k trajektorii v místě odpalu,

$$x_\mathrm{r} = -w\sin(\varphi - \vartheta)\cdot t + \cos(\varphi - \vartheta)\,,$$
$$y_\mathrm{r} = w\cos(\varphi - \vartheta)\cdot t + \sin(\varphi - \vartheta)\,.$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých t a w. Tato soustava má řešení

$$t = 17{,}33\,\mathrm{d}\,,$$
$$w = 0{,}0204\,\mathrm{AU{\cdot}d^{-1}}\,.$$

Zbývá uvědomit si, že Země má na své oběžné dráze rychlost $2\pi\cdot 1/365 = 0{,}0172\,\mathrm{AU{\cdot}d^{-1}}$ a rozdíl těchto rychlostí tvoří rychlost $5526\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, se kterou musí jaderná hlavice opuštět ve směru tečném k trajektorii Země základnu, která je umístěná na oběžné dráze tak, abychom mohli zanedbat rozdíl potenciální energie gravitačního pole Země.

[1] Už chápete, proč má plný úhel 360°?

Závěrem zbývá konstatovat, že kdyby malé planetky nestřežily americké radary, ale posádka Fyzikálního korespondenčního semináře, tak se tím vyřeší vlastně všechny problémy. Civilizace by totiž zanikla; řešitelé nedodali žádný správný výsledek a autorské řešení se do 20 dnů určitě nevešlo.

Jakub Michálek
`jmi@fykos.mff.cuni.cz`