23. ročník, úloha V . 1 ... *fotonová fontánka* *!!! chybí statistiky !!!*

Honza není spokojen se současným standardem postelí, a proto začal testovat levitaci na laseru. Koupil si malou kuličku s dokonale vyleštěným zrcadlovým povrchem o hmotnosti m, poloměru r a položil ji na zem. Podlaha se rozzářila lasery o vlnové délce λ_0 a plošném výkonu P. V jaké výšce nad zemí se kulička ustálila? Za bonusové body můžete vyřešit situaci, kdy je kulička skleněná. V obou případech uvažujeme, že ji laser neroztaví a že se experiment odehrává v homogenním gravitačním poli. *Do fyziklání přinesl Honza Humplík.*

Ze symetrie problému je zřejmé, že kulička může konat pouze vertikální pohyb. Poloměr kuličky označíme a a vzdálenost bodu dopadu fotonu od svislé osy kuličky jako r. Všechny fotony, které dopadnou ve vzdálenosti r od osy se odrazí pod stejným úhlem. Pro celkovou hybnost před nárazen označíme p a po nárazu p'. Pro hybnost koule budeme používat p_{k}, resp. p'_{k}.

Jestliže označíme α úhel, pro který platí, že $\cos\alpha = r/a$, potom bude svislá složka hybnosti odražených fotonů rovna $p'\cos 2\alpha$ (kreslete si obrázek!). Předaná svislá složka hybnosti kuličce fotony ve vzdálenosti r je tedy

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{k}} = p - p'\cos 2\alpha\,.$$

Naopak ze zákona zachování energie dostáváme, že

$$pc + \frac{p_{\mathrm{k}}^2}{2m} = \frac{(p_{\mathrm{k}} + \mathrm{d}p_{\mathrm{k}})^2}{2m} + p'c\,,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Nás zajímá pouze situace, kdy je hybnost kuličky nulová a také víme, že $\mathrm{d}p_{\mathrm{k}}$ bude velmi malé vzhledem k hybnosti předané celé kuličce (je to diferenciál) a tudíž jeho druhé mocniny můžeme zanedbat. Ze zákona zachování energie tedy dostáváme $p = p'$.

Nyní nás zajímá hybnost dopadajících fotonů. Vzhledem k tomu, že fotony ztrácí energii kvůli přítomnosti gravitačního pole, jejich hybnost bude klesat s výškou. Jestliže má laser plošný výkon P je energie a tedy i hybnost vyzářená za jednotku času z malého plošného elementu $\mathrm{d}S$ rovna

$$p_0 = \frac{\mathrm{d}E}{c} = \frac{P\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t}{c}\,.$$

Pro změnu vlnových délek fotonů v homogenním gravitační poli platí vztah

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{gz}{c^2}\lambda_0\,,$$

kde z je změna výšky nad povrchem. Tento vztah lze snadno najít v různých tabulkách, popřípadě si ho můžete sami odvodit. Uvažujte dva rovnoměrně zrychlující pozorovatele letící ve stejném směru. Jeden vystřelí foton směrem k druhému a ten ho za nějaký čas zachytí. Touto dobou se už ale pohybuje rychleji. Použijte klasický Dopplerův efekt k určení vlnové délky přijatého fotonu. Poslední ingredience je takzvaný princip ekvivalence, jenž byl pro Einsteina hlavní motivací k formulaci jeho gravitačního zákona.[1] Zajisté je fascinující, že takový přirozený a jednoduchý princip implikuje věci jako gravitační rudý posuv!

Jestliže víme, jak se mění vlnová délka, lze z de Broglieho vztahu $p = H/\lambda$ vyjádřit

$$p = \frac{p_0}{1 + \frac{gz}{c^2}}\,.$$

[1] Pokud jste o tomto principu nikdy neslyšeli, podívejte se například na Wikipedii.

Označme výšku, ve které se míček drží jako H. Pro výšku z, ve které fotony naráží do míčku tedy bude platit $z = H - \sqrt{a^2 - r^2}$. My si ale uvědomíme, že faktor před z ve vztahu pro hybnost je úměrný c^{-2}, což je strašně malé číslo a tak můžeme předpokládat, že na kuličku dopadají fotony všude se stejnou hybností, neboli $z = H$. Výpočet by byl možný i bez tohoto předpokladu, ale potom by jsme museli integrovat složitější funkci, než je polynom.

Finální krok je vypočítat celkovou hybnost předanou všemi fotony míčku. Zatím známe jen $\mathrm{d}p_\mathrm{k}$, což je hybnost předaná pouze fotony narážejícími ve stejné výšce. Celkovou předanou hybnost spočítáme integrací přes plochu, ale nejdříve si uvědomíme, že tato celková změna hybnosti bude rovna impulsu gravitační síly $mg\,\mathrm{d}t$.

$$mg\,\mathrm{d}t = \int_0^a \mathrm{d}p_k = \int_{r=0}^{r=a} p(1 - \cos 2\alpha)\,.$$

(Diferenciál nechybí – připomeňte si definici p a p_0.) Za použití $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2r^2/a^2 - 1$, plošného elementu $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ a dosazením p dostáváme

$$mg = \frac{4\pi P}{c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{gH}{c^2}} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r\,\mathrm{d}r = \frac{a^2 \pi P}{c + \frac{gh}{c}}\,.$$

Pokud je například $m = 1\,\mathrm{kg}$ a $a = 1\,\mathrm{m}$ dostáváme $H = \pi c P/g^2 - c^2/g$. Pokud by pravá strana vyšla záporně, odpovídá to situaci, kdy je laser moc slabý na to, aby kuličku udržel. Abychom se ale dostali ke kladné pravé straně, musel by být výkon řádově $10^9\,\mathrm{J\cdot m^{-2}\cdot s^{-1}}$, což není zrovna malé číslo. Také vidíme, že jakmile se dostaneme na kladné hodnoty, přítomnost konstanty c v prvním členu způsobí, že i malá změna v plošném výkonu způsobí velký vzestup kuličky. Na závěr můžeme říci, že naše tvrzení o neroztavitelnosti kuličky zjevně nebylo pravdivé.

Jan Humplík
honza@fykos.mff.cuni.cz