

23. ročník, úloha IV.3 ... smrtící kolotoč !!! chybí statistiky !!!

Na kůl o poloměru r zabodnutý do země je lanem délky l přivázané závaží hmotnosti m . Lano je napnuté a závaží leží na zemi. Lukáš se rozběhne a nakopne závaží kolmo na lano tak, že bude mít rychlost v . Lano se po tomto rázu začne navíjet na kůl. Spočítejte, jak se musí měnit koeficient smykového tření mezi závažím a zemí v závislosti na vzdálenosti od kůlu, aby při navíjení zůstala rychlost závaží konstantní.

Vymyslel Lukáš během zvracení na Matějské.

S komplexními čísly se pracuje jako s reálnými čísly, pokud definujeme $i^2 = -1$. Označme body podle obrázku a φ orientovaný úhel natočení, $l_0 = l(0)$ počáteční délku provázku. Obvyčejné násobení komplexních čísel značíme bez tečky, skalární součin dvou komplexních čísel značíme s tečkou. V této úloze si vystačíme s tím, že dvě komplexní čísla jsou na sebe kolmá, pokud se liší o násobek imaginární jednotky (násobení imaginární jednotkou má totiž u komplexních čísel názorný význam otočení o pravý úhel). Značíme stručně derivace podle času tečkou a podle úhlu čárkou, velikost komplexního čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Potom zapisujeme komplexní číslo ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

Bod T v komplexní symbolice leží vždy na kružnici poloměru r a plně ho určuje úhel φ , takže platí

$$OT = re^{i\varphi}.$$

Provázek TP je vždy kolmý na OT , takže jeho směr určíme jako násobek $ie^{i\varphi}$, protože při násobení se sčítají fáze a číslo i má fázi právě $\pi/2$. Tím máme ošetřen směr; velikost ovšem určitě bude délka nenavinutého provázku $0 < l(\varphi) = l_0 - r\varphi$, $l' = -r$, takže celkem

$$TP = ile^{i\varphi}.$$

Proto lze polohu vyjádřit

$$z = OP = OT + TP = e^{i\varphi}(r + il).$$

Tím jsme získali množinu bodů v \mathbf{C} , po níž se závaží musí pohybovat – řešíme úlohu s vazbou. Spočítejme první derivaci, která určuje směr tečný k trajektorii

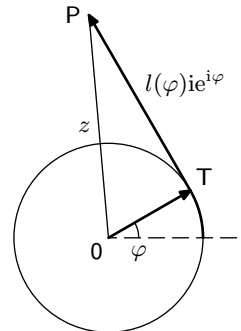
$$z' = \frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi}(r + il_0 - ir\varphi) - e^{i\varphi}ir = -e^{i\varphi}l.$$

Tak jsme ověřili první předpoklad, který většina řešitelů nezdůvodnila, že TP a z' jsou navzájem kolmé. Dále využijeme toho, že \dot{z} a z' mají stejný argument:

$$v = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = z' \dot{\varphi} = |v|e^{i\varphi},$$

kde jsme rozepsali komplexní rychlost na velikost a argument (velikost rychlosti je konstantní).

Teď přichází na řadu fyzika: Použijeme Newtonův druhý zákon jen ve směru pohybu, tj. z' , protože ve směru kolmém na směr pohybu se přeci kvůli vazbě těleso pohybovat nemůže (dostali



Obr. 1. Komplexní symbolika

bychom jen napětí vlákna, které nás nezajímá). Pro projekci do směru pohybu z' platí podle Newtonova zákona

$$m\ddot{z} \cdot z' = mgf(r) \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} \cdot z',$$

protože třecí síla je dána výrazem $mgf(r)$ ve směru jednotkového vektoru rychlosti $\dot{z}/|\dot{z}| = z'/|z'|$ a $r = |z|$. Tím se vztah zjednoduší na explicitně vyjádřenou závislost

$$f(r) = \frac{1}{g} \frac{\ddot{z} \cdot z'}{|z'|}.$$

Nakonec spočteme zrychlení

$$\dot{v} = \ddot{z} = |v| e^{i\varphi} i\varphi.$$

Teď již vidíme, že komplexní čísla \ddot{z} a z' jsou na sebe kolmá (protože se liší o násobek imaginární jednotky), takže platí $f(r) = 0$. Správná řešení poslali jen *Kristýna Kohoutová*, *Tomáš Pikálek* a *Jakub Klemsa*. Fyzikální podstatu, pro kterou jsme v tomto řešení připravili matematický model použitelný i pro složitější závislosti, shrneme: Hmotný bod se pohybuje po vazebné křivce a vazebná síla je kolmá na vazebnou křivku, takže nekoná práci. Aby se energie, zcela tvořená pohybovou energií, zachovávala, nesmí ji bod ztrácet třením.

Jakub Michálek

jmi@fykos.mff.cuni.cz