23. ročník, úloha I . S … *petřínská* *(6 bodů; průměr 2,69; řešilo 26 studentů)*

a) *Co uvidí člověk stojící mezi dvěma spojenými na sebe kolmými zrcadly, jejichž spojnice je svislá?*

b) *Mějme rovinné zrcadlo skloněné pod úhlem 45°, pohybující se zleva doprava rychlostí v. Zprava na něj dopadá paprsek světla rychlostí c (úhel dopadu je tedy 45°) a odráží se zhruba nahoru. Pomocí Huyghensova principu určete úhel mezi dopadajícím a odraženým paprskem, tedy vlastně opravte zákon odrazu a dopadu pro pohybující se zrcadlo.*

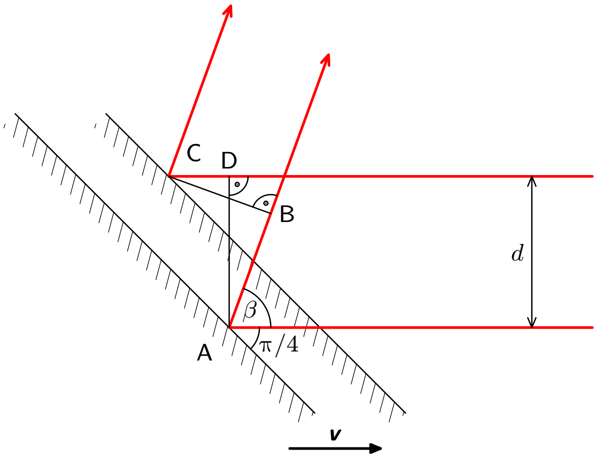
Z dílny Dalimilovy.

Človíček a zrcadla

Člověk uvidí tři obrazy sama sebe, přičemž dva z nich (po stranách) budou normálně zrcadlově převrácené a obraz přímo naproti němu (ve zlomu zrcadel) bude zrcadlově převrácen dvakrát, takže se uvidí tak, jak ho vidí ostatní lidé.

Pohybující se zrcadlo

Na obrázku 1 je naznačena daná situace. Máme dva rovnoběžné paprsky p_1 a p_2 mezi nimiž je vzdálenost d. Tyto paprsky dopadají na zrcadlo Z, které jim letí vstříc rychlostí u,



Obr. 1. Odraz paprsků

přičemž paprsek p_1 dopadne jako první a odráží se pod úhlem β. Paprsek p_2 dopadne o čas τ později, kde, vzhledem k tomu, že zrcadlo je nakloněno pod úhlem $\pi/4$, tento čas splňuje rovnici $d = u\tau + c\tau$ a tedy víme, že

$$\tau = \frac{d}{u+c}\,. \tag{1}$$

Z geometrie obrázku za použití vztahu (1) dále můžeme psát

$$|\mathsf{AB}| = |\mathsf{CD}| = \frac{cd}{u+c}\,, \tag{2}$$

$$|\mathsf{AC}| = \sqrt{d^2 + |\mathsf{CD}|^2} = d\sqrt{1 + \frac{c^2}{(u+c)^2}}\,, \tag{3}$$

$$|\mathsf{CB}| = \sqrt{|\mathsf{AC}|^2 - |\mathsf{AB}|^2} = d\,, \tag{4}$$

kde rovnice (2) vyplývá z Huyghensova principu, a zbytek je geometrie.

Označíme-li $|\angle \mathsf{CAB}| = \varphi$, z trojúhelníku ABC s použitím vztahů (3) a (4) plyne

$$\sin\varphi = \frac{|\mathsf{BC}|}{|\mathsf{AC}|} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2+(u+c)^2}}\,.$$

Přičemž z trojúhelníku CAD plyne pro úhel při vrcholu A (označme jej α)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{u+c}\,.$$

Z obrázku je dále vidět, že $\varphi = \alpha + \pi/2 - \beta$, a tedy

$$\sin\varphi = \frac{u+c}{\sqrt{c^2+(u+c)^2}} = \cos(\alpha-\beta)\,, \tag{5}$$

což je již rovnice, ve které vystupuje pouze jedna neznámá, β. Po rozepsání kosinu součtu a použití vztahů

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \qquad \text{a} \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

z rovnice (5) dostaneme

$$\frac{u+c}{\sqrt{c^2+(u+c)^2}} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2+(u+c)^2}}\cos\beta + \frac{c}{\sqrt{c^2+(u+c)^2}}\sin\beta\,,$$

což je po přímočaré úpravě rovnice pro $\sin\beta$. Tedy

$$1 = \sqrt{1-\sin^2\beta} + \frac{c}{u+c}\sin\beta\,.$$

Tuto rovnici můžeme snadno řešit převedením odmocniny na jednu stranu a umocněním, výsledkem je

$$\sin\beta = \frac{2uc+2c^2}{u^2+2uc+2c^2}\,.$$

K tomuto výsledku můžeme dospět i trochu rychleji; stačí si všimnout, že se jedná o klasický zákon odrazu jen ne pro plochu zrcadla nýbrž pro plochu danou AC. Z obrázku je patrné, že pokud řekneme, že pro plochu AC platí zákon odrazu jako ho známe, dostaneme rovnici

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\alpha\,,$$

a proto

$$\sin\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2uc+2c^2}{u^2+2uc+2c^2}\,,$$

jak jsme již jednou viděli.

Jak tento výsledek interpretovat? Pro $u > 0$ je $\sin\beta < 1$ a $\beta < \pi/2$ a paprsek se tedy odrazí „víc od zrcadla“ než kdyby zrcadlo stálo. Pokud je rychlost zrcadla zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, nebo rovnou nulová, dostaneme $\sin\beta = 1$ a tedy $\beta = \pi/2$, tak jak bychom to očekávali.

K výsledku lze velmi snadno dospět pomocí speciální teorie relativity, a sice tak, že se transformujeme do soustavy, ve které zrcadlo stojí (pozor, v této soustavě má jiný sklon) v této soustavě dojde k normálnímu odrazu, a pak se transformujeme zpátky a dostaneme výsledný sklon pohybu fotonů. Kdo chce, může si to vyzkoušet a zjistí, že dostane stejný výsledek. Na závěr připojíme otázku k zamyšlení: Proč se dá očekávat, že z Huyghensova principu dostaneme stejný výsledek jako z STR?

Martin Výška
martin.vyska@centrum.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.