

ALEŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXIII. ročník – 2009/10





Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	12
Zadání experimentálních úloh	60
Řešení experimentálních úloh	61
Seriál o světle	77
1. Co je světlo	77
2. K Fermatovu principu a ještě dál	82
3. Vlnová optika	88
4. Světlo jako elektromagnetické vlnění	94
5. Interakce světla s látkou	103
6. Einsteinův odkaz	110
Řešení úloh ze seriálu	116
Akce FYKOSu	133
Podzimní soustředění v Nesměři	133
Jarní soustředění v Uhelné Příbrami	134
FYKOSí Fyziklání 2010	137
Pořadí nejlepších řešitelů	139



Předmluva

Milá čtenářko či čtenáři!

Knížka, kterou právě otvíráš, shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXIII. ročníku, který probíhal ve školním roce 2009/2010.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol u nás. Je organizován především studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK a také zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po sedmi úlohách, z nichž jedna je experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nežádka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení ať už klasickou poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro naše řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblábnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutků české země. Jejich účastníci si užijí atraktivní program, založený na dopoledních matematických nebo fyzikálních přednáškách a odpoledních hrách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

Relativně nejmladší, zato však nejmasovější akcí je FYKOSí Fyziklání, soutěž pětičlenných týmů v řešení palčivých úloh na čas. Vyhrává ten nejrychlejší počtář. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 46 družstev z Česka i ze Slovenska. To je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o fyziku a přírodní vědy mezi mladými lidmi stále ještě existuje.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXIII. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamyšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy

je Seriál o optice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 526

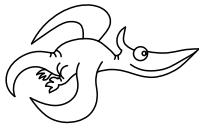
www: <http://www.fykos.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

A jak vypadal XXIII. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 59 studentů ze 37 středních škol z pěti evropských států a Turecka. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 583 došlých řešení.

Pořadí škol

<u>Název školy</u>	<u>Počet řešitelů</u>	<u>Průměr</u>	<u>Celkem</u>
Gymnázium Boskovice	4	65,5	262
Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín	10	24,8	248
Gymnázium J. Heyrovského Praha	2	75	150
Gymnázium Matyáše Lercha Brno	1	112	112
Gymnázium Chr. Dopplera Praha	3	31,7	95
Gymnázium Žamberk	1	89	89
Gymnázium J. Vrchlického Klatovy	1	87	87
Gymnázium Valašské Meziříčí	1	54	54
Gymnázium P. de Coubertina Tábor	3	17,7	53
Gymnázium Ludka Pika Plzeň	1	49	49
Matematika Gimnazija Belgrade	2	24	48



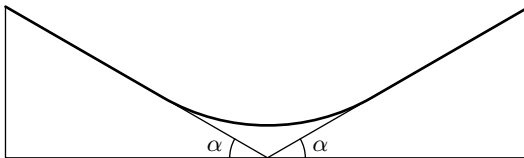
Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... skrolování v metru

Informační systém v pražském metru má jednu zajímavou vlastnost. Při skrolování textu směrem doleva se písmo *nakloní*. Jak je možno jednoduchým způsobem „hardwarově“ docílit tohoto efektu a jaký vliv má tato úprava pro text, který skroluje vertikálně? Poznamenejme, že světelný panel se skládá z LED diod rozmístěných v pravoúhlém rastru. (řešení str. 12)

Úloha I.2 ... lano na klínech

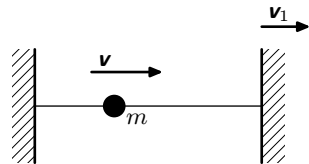
Na dvou klínech (viz obrázek) je položeno lano tak, že se uprostřed nedotýká podložky. Situace je osově souměrná. Vypočítejte, jaká jeho maximální část může takto viset ve statické rovnováze. Bonus: pro jaký úhel nakloněných rovin je tento poměr největší? (řešení str. 13)



Obr. 1. Schéma symetrické situace

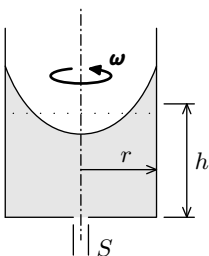
Úloha I.3 ... adiabatický invariant

Mezi dvěma zarážkami se po přímce rovnoměrně pohybuje hmotný bod o hmotnosti m rychlostí v . Jednu ze zarážek začneme oddalovat rychlostí $v_1 \ll v$. Jak se změní energie hmotného bodu? (řešení str. 14)



Obr. 2. Míček mezi stěnami

Úloha I.4 ... vypouštění odstředivky



Obr. 3. Rotující odstředivka

Máme dostatečně vysokou válcovou nádobu s vodou (poloměr r , výška hladiny vody h) a roztočíme ji úhlovou rychlostí ω . Do středu dna uděláme malou díрку plochy S , přičemž nádoba stále rotuje. Kolik vody z nádoby vyteče ven? (řešení str. 16)

Úloha I. P ... teploměr

Kapilára lékařského rtuťového teploměru je pod stupnicí zaškrčená, aby se rtuť nemohla vracet do baňky a my mohli v klidu odečíst změřenou teplotu. Jak jistě víte, od června je zakázán prodej rtuťových teploměrů. Při této historické příležitosti se zamyslete, proč je zúžené místo pro rtuť průchodné pouze jedním směrem při ohřívání a proč se stejným způsobem nemůže rtuť při ochlazení zase samovolně vrátit do baňky. (řešení str. 18)

Úloha II. 1 ... kalamita

Jeden z organizátorů jel vlakem domů a zapadl ve vánici. Z dlouhé chvíle počítal sněhové vločky padající za oknem. A napadlo jej – kolik jich je asi v jednom kilogramu sněhu? Provedl kvalifikovaný odhad a spokojeně umrzl. Co mu vyšlo? (řešení str. 20)

Úloha II. 2 ... rušit krok

Jak rychle máme jít po visutém mostě, abychom jej co nejvíce rozkmitali? Úlohu vhodně parametrizujte a následně vyřešte. (řešení str. 21)

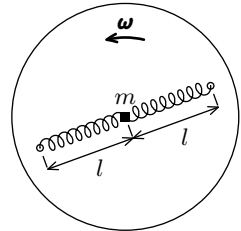
Úloha II. 3 ... brnkačka

Prodává se váleček, na kterém jsou malé výstupky. Váleček otáčeje se brnká o hranu ocelové destičky, která je nařezaná na proužky rozdílné délky. Ve skladbě na válečku se vyskytují všechny noty v daném neprázdném rozsahu (dejme tomu stupnice C dur). Dokážete zjistit tvar funkce konců nařezaných proužků? (řešení str. 22)

Úloha II. 4 ... Márovy pružiny

Kutil Mára si doma sestavil takovouto hračku: Na dřevěný kruh do jedné přímky procházející středem disku přimontoval dvě zarážky (stejně daleko od středu), mezi které na dvou pružinách o tuhosti k napnul závaží o hmotnosti m . Závaží může bez tření klouzat po disku. Mára hračku položil na stůl a roztočil okolo osy disku úhlovou rychlostí ω , přičemž závaží mírně vychýlil z rovnovážné polohy. Kvalitativně popište pohyb závaží, a pokud si věříte, vypočítejte jej (za bonusové body).

(řešení str. 24)



Obr. 4. Pohled shora

Úloha II. P ... telekineze

Odkud bere magnet energii na zvedání věcí, když magnetická síla nemůže konat práci? Lorentzův vzorec $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ říká, že magnetická síla je kolmá na rychlost pohybujícího se náboje, a tedy pouze mění jeho směr hybnosti.

(řešení str. 26)

Úloha III. 1 ... na potkání nejsme k rozeznání

Jak nejdále od sebe mohou být dva lidé, aby je nikdo třetí na Zemi nerozeznal, kdykoliv jsou viditelní? Nezapomeňte, že lidé jsou bodové světelné zdroje ve výšce 2 m a Země je koule. (řešení str. 28)

Úloha III. 2 ... hlučný dav kol mého prahu

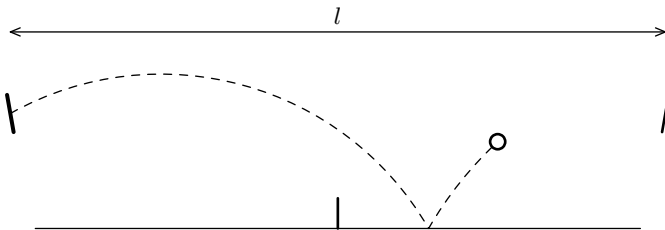
Uvažujte dvoukřídlové dveře do budovy, mezi nimiž je i v zavřené poloze mezírka, kterou může proudit vzduch. Každé křídlo má pružinu, která ho vrací do výchozí zavřené polohy. Jedno křídlo vychýlíme a pustíme z klidu. Co se bude dít, třeba s druhým křídlem? (řešení str. 29)

Úloha III. 3 ... Hospodine, pomiluj ny!

Jak roste hlasitost (definujte si sami) sboru s počtem jeho členů? Co z toho plyne? Členy sboru uvažujte jako bodové zdroje zvuku stejné amplitudy a frekvence, ale posunuté o náhodnou fázi. Všichni bodoví zpěváci se nacházejí v jednom místě. (řešení str. 30)

Úloha III. 4 ... pane Würfl, ale na Měsíci

Pana Broučka při měsíční příhodě pronásledovala Ethera, kterou lze připodobnit hmotnému bodu. Pan Brouček ale, potom co si objednal vepřové se zelím, se jí zbavil tím, že ji uvěznil mezi dvěma pevně uchopenými pálkami ve vzdálenosti l , které jsou každá natočena o nějaký úhel, a Ethera mezi nimi skákala jako pingpongový míč tak, že se odrazila vždy ve stejné výšce. Aby ji potrápil strachem, vložil doprostřed síť výšky h . Pan Brouček je důmyslný šibal, a tak chtěl, aby (stejně jako v ping-pongu) na každé polovině spadla aspoň jednou na zem. Vypočtete, s jakou frekvencí v závislosti na všemožných parametrech (natočení pálek, počáteční rychlost míčku, úhel, ...) Ethera létá, a kdy je tato frekvence nejvyšší. Předpokládejte, že pohyb je rovinný a při odrazu od překážky (od Měsíce nebo od páčky) se akorát mění rychlost na opačnou; celý pohyb probíhá ve vakuu. (řešení str. 32)



Obr. 5. Modifikovaný ping-pong

Úloha III . P ... aljeja, niti! Jsou shnilé

Zkoumejte dvojitý uzel, kterým jsou spojena dvě vlákna o poloměru r a součiniteli klidového tření f . Jakou silou musíme tahat za konce vláken, aby se uzel „proklouzl“? Dosadte typické hodnoty pro nitky a zjistíte, zda se přitom nepřetrhne vlákno. (řešení str. 35)



Obr. 6. Uvažovaný uzel

Úloha IV . 1 ... modrá nebo zelená?

Hlavním zdrojem atmosférického kyslíku jsou fotosyntetizující rostliny. Představte si, že dojde k jejich masovému vymření. Na jak dlouho vystačí světové zásoby kyslíku, předpokládáme-li, že lidstvo a zbytek planety nijak nezmění svou spotřebu. Potřebné údaje určitě najdete na internetu. (řešení str. 37)

Úloha IV . 2 ... horečka

Janap šla domů z hvězdárny a při pohledu na východ Slunce ji napadlo, jak by asi jednoduše šla spočítat jeho teplota. Prozradíme vám, že Země je absolutně černé těleso s teplotou 0°C . (řešení str. 38)

Úloha IV . 3 ... smrtící kolotoč

Na kůl o poloměru r zabodnutý do země je lanem délky l přivázané závaží hmotnosti m . Lano je napnuté a závaží leží na zemi. Lukáš se rozběhne a nakopne závaží kolmo na lano tak, že bude mít rychlost v . Lano se po tomto rázu začne navíjet na kůl. Spočítejte, jak se musí měnit koeficient smykového tření mezi závažím a zemí v závislosti na vzdálenosti od kůlu, aby při navíjení zůstala rychlost závaží konstantní. (řešení str. 39)

Úloha IV . 4 ... Terka skáče

Terka skáče z metrové zídky. Na začátku má ruce natažené zvednuté nad hlavu, během pádu ruce ale spouští. O kolik takto zmenší svou rychlost při dopadu? Kvalifikovaně odhadněte hmotnost, zrychlení a rychlost Terčiných rukou, jakožto i další potřebné parametry jejího těla, a úlohu vyřešte. (řešení str. 41)

Úloha IV . P ... úleva u ohradníku

Zamyslete se nad tím, jak je to s odporem tekoucího elektrolytu. Je jeho velikost závislá na tom, jestli teče po směru elektrického proudu v něm, nebo naopak? Zkuste odhadnout rozdíl, je-li. (řešení str. 42)

Úloha V . 1 ... fotonová fontánka

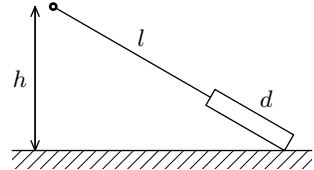
Honza není spokojen se současným standardem postelí, a proto začal testovat levitaci na laseru. Koupil si malou kuličku s dokonale vyleštěným zrcadlovým povrchem o hmotnosti m , poloměru r a položil ji na zem. Podlaha se rozzářila lasery o vlnové délce λ_0 a plošném výkonu P . V jaké výšce nad zemí se kulička ustálila? Za bonusové body můžete vyřešit situaci, kdy je kulička skleněná. V obou případech uvažujeme, že ji laser neroztaví a že se experiment odehrává v homogenním gravitačním poli. (řešení str. 43)

Úloha V. 2 ... Lukášovo péro

Ve starém gauči našel Lukáš pružinu o tuhosti k , poloměru závitů r , délky l a počtu závitů n . Protože se nudil, připojil ji ke stabilnímu zdroji elektrického proudu I . Jak se změnila její tuhost? (řešení str. 45)

Úloha V. 3 ... vozík

Na pevném závěsu ve výšce $h = 1$ m nad zemí je upevněn provázek délky $l = 1,5$ m. Na konci provázku je přivázána deska délky $d = 0,5$ m tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímkě (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření f . Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.



Obr. 7. Závěs s tyčí

(řešení str. 47)

Úloha V. 4 ... drtivý dopad

Všichni dobře víme, že se 21. prosince 2012 se na své cestě ke Slunci srazí se Zemí asteroid (pohybuje se ve stejné rovině jako Země). Uvažme, že se pohybuje po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou délky 4 AU a excentricitou 0,2 AU. Lidstvo bylo moc zaneprázdněno, a tak se problém začal řešit až 1. prosince 2012. Po jaké dráze musí udatná světová autorita vystřelit raketu s jadernou hlavicí, aby včas odvrátila konec světa? (řešení str. 49)

Úloha V. P ... tunelářská

Kryštof se vydal na cestu vlakem a spokojeně usnul. Když se probudil v tunelu, cítil, že jej nějaká síla táhne směrem na jednu stranu. Ve vlaku bylo sice světlo, ale ven neviděl. Vzpomněl si, že je v zatáčkách trať klopená a uvědomil si, že i když si pamatuje původní směr jízdy, vůbec neví, na kterou stranu vlak zatáčí. Nepoznává totiž rozdíl mezi stavem, kdy vlevo zatáčející vlak jede dostatečně pomalu a výsledná síla míří směrem do zatáčky, a situací, kdy je vlak dostatečně rychlý, zatáčí vpravo a síla směřuje ven ze zatáčky. Navrhněte experiment, který Kryštofovi pomůže tuto situaci vyřešit. Čím víc variant, tím lepší bodové hodnocení. (řešení str. 51)

Úloha VI. 1 ... husitská

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α stojí směrem po spádnici vozová hradba. Vozy jsou stejně těžké, mezi sousedními dvěma je vzdálenost s , celkem jich je N . Na počátku jsou všechny zabrzděné. Mazaný bratr Žižka odbrzdí horní z nich a ten se začne pohybovat směrem dolů a bere s sebou další vozy (hned po nárazu se nabouraný vůz odbrzdí a pokračuje dolů spolu s tím, který do něj narazil). Vypočítejte, jakou rychlost bude mít celá vozová hradba po posledním nárazu.

Jako bonus můžete určit, jaké by měly být hmotnosti vozů tak, aby se rychlost hradby mezi dvěma nárazy nezměnila. (řešení str. 52)

Úloha VI.2 ... šmírák Honza

Honza stojí na Žižkovské věži a hledí lidem do oken. Okna jsou všechna namířena k němu, mají stejnou velikost a jsou ve stejné výšce od země. V jak vzdáleném okruhu mají nejméně soukromí? Honza nemá dalekohled. (řešení str. 54)

Úloha VI.3 ... atomový kondenzátor

Lukáš si koupil uranový atom a nenapadlo jej nic lepšího, než z něj postupně odebírat elektrony. Když odebral n -tý, s údivem zjistil, že se hmotnost atomu zvětšila. Co způsobilo tento jev? Jaké bylo ono n ? (řešení str. 55)

Úloha VI.4 ... podkritické polokoule

Když Lukáše přestala bavit ionizace jednotlivých atomů, objednal si uranu víc. Doručili mu dvě přesné polokoule, každou o hmotnosti m ($m_k/2 < m < m_k$, kde m_k je kritická hmotnost). Lukáš je nastavil rovnými stranami k sobě a začal je přibližovat. V jaké vzdálenosti d mezi koulemi byl jeho pokus přerušen zažehnutím řetězové reakce? (řešení str. 56)

Úloha VI.P ... tora tora tora

Japonský pilot za druhé světové války dostal ve výšce 5 km nad zemí žízeň. Zjistil však, že mu dali jen láhve s limonádou. Co má dělat? (řešení str. 58)



Řešení teoretických úloh

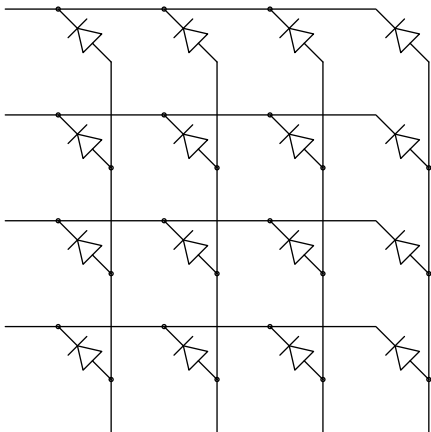
Úloha I.1 ... skrolování v metru

Informační systém v pražském metru má jednu zajímavou vlastnost. Při skrolování textu směrem doleva se písmo nakloní. Jak je možno jednoduchým způsobem „hardwarově“ docílit tohoto efektu a jaký vliv má tato úprava pro text, který skroluje vertikálně? Poznamenejme, že světelný panel se skládá z LED diod rozmístěných v pravoúhlém rastru.

Nejprve se podíváme „dovnitř“ displeje. Kdyby každá dioda měla své vodiče, byla by výroba světelného panelu příliš nákladná, proto se používá jiné zapojení. Anody diod jsou připojeny na řádky a katody na sloupce (viz obrázek). Přivedením napětí na určitý řádek a sloupec se rozsvítí příslušná dioda.

Světelný panel nesvítí najednou celý, ale obnovuje se buď po řádcích, nebo po sloupcích (dále uvažujme že po řádcích). Díky setrvačnosti lidského oka (po zániku fyzikálního podnětu doznívá vjem ještě $1/7$ až $1/3$ sekundy) se nám zdá, že svítí celý panel najednou. Aby oko vnímalo pohyb jako přirozeně spojitý, je třeba mu nabídnout 50 obrázků za sekundu. Celý panel se tedy musí obnovit jednou za 20 ms.

Sklon písma závisí na směru pohybu a na tom, zdali se řádky obnovují shora, nebo zdola. Představte si písmeno „I“ skrolující doleva. Začínáme se statickým „I“. Pak se začne vykreslovat kousek vedle, ovšem naše oko ho ze setrvačnosti vidí stále na stejném místě spolu s nově vykreslenými pixely. Zdá se být nakloněné doleva (oko stále vnímá poslední obnovené řádky zpožděné, ale zároveň už i ty nově obnovené, posunutě doleva). Z estetických důvodů je ovšem lepší mít písmo skloněné na druhou stranu, jako je to *obvyklé*. Proto je lepší obnovovat řádky odspodu.

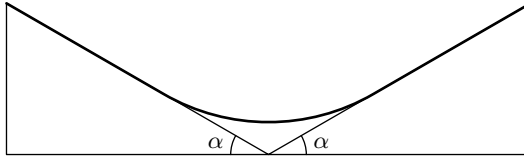


Obr. 8. Schéma obvodu

Při vertikálním skrolování směrem dolů se projeví nepatrné protáhnutí písmen oproti normálu (stále ještě vnímáme naposledy obnovené horní řádky, ale už svítí i ty nově obnovené, o pixel posunutě dolů).

Úloha I.2 ... lano na klínech

Na dvou klínech (viz obrázek) je položeno lano tak, že se uprostřed nedotýká podložky. Situace je osově souměrná. Vypočítejte, jaká jeho maximální část může takto viset ve statické rovnováze. Bonus: pro jaký úhel nakloněných rovin je tento poměr největší?



Obr. 9. Schéma symetrické situace

Lano můžeme rozdělit na tři části. Dvě, které leží na klínech a třetí, která visí ve vzduchu. Ze symetrie je zřejmé, že části na klínech mají stejnou délku. Jejich hmotnosti označíme m_1 . Hmotnost visící části pak m_2 . Aby bylo lano ve statické rovnováze, výslednice sil působících na libovolnou část musí být nulová. Díky symetrii úlohy se můžeme soustředit jen na jednu ležící část. Působí na ni síla gravitační F_g , síla třecí F_f a napětí mezi m_2 a m_1 (označme jej T).

Víme, že síla třecí je přímo úměrná normálové síle působící na m_1 . Rozložíme tedy gravitační sílu na složku normálovou a složku paralelní k nakloněné rovině. Velikosti těchto složek jsou $m_1 g \cos \alpha$ a $m_1 g \sin \alpha$. Koeficient úměrnosti mezi normálovou složkou gravitační síly a silou třecí označme f . Podmínka $\sum F = 0$ pro část m_1 je tedy

$$T + m_1 g \sin \alpha - m_1 g f \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

Napětí T určíme z podmínky statické rovnováhy pro část m_2 . Stejným napětím T působí na m_2 jak ležící část nalevo tak i napravo. Směr tohoto napětí je vždy paralelní s nakloněnou rovinou. Pro složku y celkové síly působící na m_2 tudíž platí

$$2T \sin \alpha - m_2 g = 0.$$

Vyjádřením a dosazením T do (1) dostáváme

$$m_1 g \sin \alpha + \frac{m_2 g}{2 \sin \alpha} - m_1 g f \cos \alpha = 0,$$

neboli

$$\frac{m_2}{m_1} = f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha.$$

Fraci lana, která visí ve vzduchu dostaneme za pomoci jednoduché algebry.

$$\frac{m_2}{2m_1 + m_2} = \frac{f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha}{2 + f \sin 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha}.$$

Pokud nás zajímá úhel, kdy bude tento poměr největší, stačí nám položit derivaci m_2/m_1 nule.

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{m_2}{m_1} \right) = 2f \cos 2\alpha - 4 \sin \alpha \cos \alpha = 2f \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha = 0$$

Je zřejmé, že naše řešení by se mělo nacházet v intervalu $(0, \pi/2)$. Po lehké úpravě nalézáme řešení

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} f,$$

kteří zcela jistě do daného intervalu náleží. Z vlastností funkce arctg dokonce vidíme, že pro všechna $f > 0$ platí $\alpha \in (0, \pi/4)$.

Pomocí druhé derivate se ujistíme, že v daném bodě máme opravdu maximum.

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \left(\frac{m_2}{m_1} \right) = -4f \sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha.$$

Na intervalu $(0, \pi/4)$ je tato funkce zcela jistě záporná a tudíž, pro všechna f je frakce maximální opravdu pro nalezené α .

Úloha I. 3 ... *adiabatický invariant*

Mezi dvěma zarážkami se po přímce rovnoměrně pohybuje hmotný bod o hmotnosti m rychlostí v . Jednu ze zarážek začneme oddalovat rychlostí $v_1 \ll v$. Jak se změní energie hmotného bodu?

Přidržíme se následujícího značení: L , L_0 jsou po řadě aktuální a počáteční vzdálenost zarážek a v , v_0 aktuální a počáteční rychlost hmotného bodu.

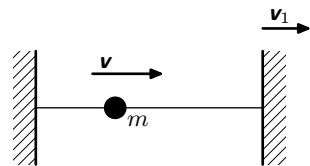
Podívejme se na situaci v soustavě spojené s jedoucí zarážkou. Z pohledu jedoucí zarážky se hmotný bod (kulička) přibližuje rychlostí $v' = v - v_1$. Stejnou rychlostí kulička letí i po odrazu (vzhledem k zarážce), jde-li o pružný ráz. Výsledná rychlost v_f po odrazu na jedoucí stěně v „nehybné“ soustavě je proto

$$v_f = v - 2v_1. \quad (2)$$

Každým odrazem na jedoucí stěně se rychlost kuličky zmenší o $2v_1$. Doba mezi dvěma odrazy na jedoucí stěně se ovšem zvyšuje se vzrůstajícím L . Ubývání rychlosti kuličky je tedy postupem času čím dál pozvolnější.

Pokusme se získat vztah mezi rychlostí kuličky v a vzdáleností zarážek L . Počet nárazů N kuličky na jedoucí zarážku během posunutí zarážky o malý kousek dL lze vyjádřit

$$N = \frac{dL/v_1}{2L/v}, \quad (3)$$



Obr. 10. Míček mezi stěnami

příčemž čítec vyjadřuje dobu potřebnou k posunutí zarážky o dL a jmenovatel dobu mezi nárazy kuličky o jedoucí stěnu. Malá ztráta rychlosti dv během posunutí zarážky o dL je tudíž dle (2) a (3)

$$dv = -2Nv_1 = -\frac{v dL}{L}. \quad (4)$$

Poslední rovnici upravíme do tvaru

$$L dv + v dL = 0. \quad (5)$$

Nyní si všimneme, že $L dv + v dL = d(vL)$; to jsme jen vyjádřili, jak se změní hodnota výrazu vL , pokud v a L změněme o malé kousky dv a dL . Na základě toho přepíšeme (5) jako

$$d(vL) = 0. \quad (6)$$

Co to znamená? Změna hodnoty výrazu vL je nulová a součin vL se tedy během pohybu nemění! Jinými slovy, součin vL je v daném případě invariant a lze psát $vL = v_0L_0 = \text{konst.}$ Umocněním na druhou dostaneme podobný vztah pro kinetickou energii kuličky E_k , a sice

$$v^2L^2 = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad E_kL^2 = \text{konst}. \quad (7)$$

Řešení je správné pouze v případě, že mezi dvěma nárazy kuličky je relativní změna L jen nepatrná, což však zajišťuje předpoklad $v \gg v_1$.

Slovo adiabatický v nás zpravidla vyvolává vzpomínku na termodynamiku. A skutečně, zadaný příklad představuje jakýsi primitivní model adiabatického rozpínání jednorozměrného plynu. Sledujme určité analogie. Vzdálenost L je analogie k objemu nádoby V . Kinetická energie E_k , případně v^2 , je analogie teploty plynu T . Tlak plynu p je analogický výrazu v^2/L .¹ Rychlost kuličky se s rostoucím L zmenšuje, analogicky k tomu plyn chladne při adiabatické expanzi s rostoucím objemem V . Naopak izotermický děj by v případě naší kuličky znamenal stále stejnou rychlost v , což by vyžadovalo „postrkování“ kuličky na stěnách (v podstatě ohřívání, přenos tepla). Ztráta rychlosti částic na pohybujícím se pístu je právě příčinou chladnutí plynu při adiabatické expanzi.

Vztah (7) nám jistě svým tvarem připomíná známou rovnici rovnovážné adiabaty ideálního plynu $pV^\kappa = \text{konst.}$ Z termodynamických úvah lze pro exponent odvodit vztah $\kappa = (s + 2)/s$, kde s je počet stupňů volnosti molekuly plynu. Pro jednoatomový plyn omezený na jeden rozměr máme $s = 1$ a tedy $\kappa = 3$. Přesně to samé ovšem plyne z (7), uvědomíme-li si analogii tlaku s výrazem v^2/L .

¹⁾ Teplota T je úměrná střední kinetické energii částic z definice. Tlak je tím větší, čím rychleji, ale také čím častěji částice narážejí na stěnu, přičemž četnost nárazů je úměrná v/L .

Úloha I.4 ... vypouštění odstředivky

Máme dostatečně vysokou válcovou nádobu s vodou (poloměr r , výška hladiny vody h) a roztočíme ji úhlovou rychlostí ω . Do středu dna uděláme malou díрку plochy S , přičemž nádoba stále rotuje. Kolik vody z nádoby vyteče ven?

Nejprve odvodíme, jaký tvar bude mít hladina vody v roztočené odstředivce a následně tento poznatek využijeme pro výpočet objemu vyteklé vody.

Předpokládejme, že odstředivka se točí již dostatečně dlouho a vnitřní tření v kapalině už rozpochovalo všechnu vodu v odstředivce tak, že voda se v odstředivce točí všude stejnou úhlovou rychlostí ω a my tak můžeme snadněji problém řešit v neinerciální vztažné soustavě spojené s odstředivkou.

Hladina kapaliny zaujme v silovém poli tvar ekvipotenciální plochy. V našem případě musíme počítat se dvěma potenciály – tíhovým a odstředivým. Tíhový potenciál je dán vztahem

$$\varphi_G(z) = gz,$$

kde z je svíslá vzdálenost ode dna nádoby. Odstředivý potenciál vypočítáme přes práci potřebnou na přemístění od osy otáčení do vzdálenosti ϱ , přičemž tuto práci vztahují na jednotku hmotnosti

$$\varphi_O(\varrho) = -\frac{1}{m} \int_0^{\varrho} m\omega^2 x dx = -\frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2.$$

Výsledný potenciál získáme superpozicí odstředivého a tíhového potenciálu

$$\varphi(z, \varrho) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2.$$

Vidíme, že potenciál je symetrický podle osy otáčení, a tak se stačí zabývat tvarem hladiny jen v rovině kolmé na dno a určené osou otáčení.

Pro oblast konstantního potenciálu platí

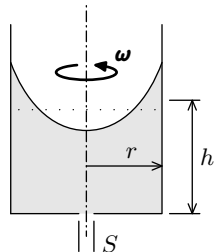
$$\varphi(z, \varrho) = gz - \frac{1}{2}\omega^2 \varrho^2 = \varphi_h = \text{konst}, \quad (8)$$

kde φ_h je hodnota potenciálu daná množstvím vody v odstředivce.

Z rovnice (8) můžeme snadno odvodit, jakým způsobem závisí výška hladiny na vzdálenosti od osy odstředivky

$$z(\varrho) = K + \frac{\omega^2 \varrho^2}{2g},$$

kde $K = \varphi_h/g$. Hladina tedy bude mít tvar rotačního paraboloidu.²



Obr. 11. Rotující odstředivka

²⁾ Uvedný vztah pro $z(\varrho)$ platí jen pro oblast, kde $K + \omega^2 \varrho^2 / 2g$ je nezáporné, což může mít vliv na množství vyteklé vody, jak je řečeno v závěru.

Předpokládejme, že otvor ve dně má kruhový tvar a jeho poloměr označme $r_0 = \sqrt{S/\pi}$. Objem vody V_R , která v odstředivce zůstane, bude stejný jako objem doplňku paraboloidu zespodu „uříznutého“ na poloměr r_0 . Tento objem vypočítáme určitým integrálem jako součet nekonečně mnoha válcových vrstev o tloušťce $d\rho$

$$\begin{aligned} V_R &= \int_{r_0}^r (z(\rho) - z(r_0)) 2\pi\rho d\rho = \int_{r_0}^r \left(\frac{\omega^2}{2g} \rho^2 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} \right) 2\pi\rho d\rho = \\ &= \pi \frac{\omega^2}{g} \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{r_0^2 \rho^2}{2} \right]_{r_0}^r = \frac{\pi \omega^2}{4g} (r^2 - r_0^2)^2. \end{aligned}$$

Objem V' vody, která vyteče je rozdíl objemu zbylé vody V_R a původního objemu

$$V' = V - V_R = \pi r^2 h - \frac{\pi \omega^2}{4g} \left(r^2 - \frac{S}{\pi} \right)^2.$$

Je jasné, že objem vyteklé vody musí být nezáporný. Proto musíme ještě zjistit, kdy platí $V' \geq 0$. Snadno ověříme, že tato podmínka je splněna, platí-li

$$\omega^2 \leq \frac{4gr^2h}{\left(r^2 - \frac{S}{\pi} \right)^2}.$$

Jak tento výsledek interpretovat? Jestliže se bude odstředivka točit dostatečně rychle, tak se na dně udělá suché „kolečko“, a pokud poloměr této oblasti bude větší než poloměr výtokového otvoru, žádná voda nevyteče.

Co se děje s momentem hybnosti?

Sledujeme-li odstředivku v inerciální vztažné soustavě, rotující tekutina má nějaký moment hybnosti a s odtékající tekutinou z nádoby „odtéká“ i moment hybnosti.

Výše uvedeně řešení předpokládalo, že odteklý moment hybnosti je právě takový, aby se zachovávala stále stejná úhlová rychlost rotující tekutiny³. Pokud vyjdeme z odlišného předpokladu, sice že otvor je tak malý, aby odtékající voda neodnášela žádný moment hybnosti, dojdeme k poněkud odlišnému výsledku. Označme po řadě ω a ω' úhlovou rychlost rotace vody v „zašpuntované“ a vypuštěné odstředivce. Dále označme po řadě I a I' moment setrvačnosti rotující vody v „zašpuntované“ a ve vypuštěné odstředivce.

Moment setrvačnosti v plné odstředivce vypočítáme jako součet příspěvků⁴ všech elementárních vrstev tloušťky dx

$$I = \int_0^r 2\pi\rho x z(x) x^2 dx = \int_0^r 2\pi\rho x^3 \left(z_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2g} \right) dx = \frac{1}{3} \pi \rho r^6 \frac{\omega^2}{2g} + \frac{1}{2} \pi \rho z_0 r^4.$$

³) Tento předpoklad by ve skutečnosti platil jen pro výtokový „otvor“ přes celé dno. Pro obecně velký otvor je výpočet množství vyteklé vody analyticky nezládnutelný.

⁴) Výška nejnižšího bodu hladiny při plné odstředivce je $z_0 = h - \omega^2 r^2 / 4g$.

Podobně vypočítáme i moment setrvanosti ve vypuštěné odstředivce

$$I' = \frac{1}{3} \pi \rho r^6 \frac{\omega'^2}{2g}.$$

Využijeme-li nyní zákon zachování momentu hybnosti uvnitř odstředivky $I' \omega' = I \omega$, získáme pro výslednou úhlovou rychlost rotace vody vztah

$$\omega' = \sqrt[3]{\omega^3 + \frac{3z_0 g \omega}{r^2}}.$$

S tímto již není problém vypočítat nový tvar hladiny a určit pro něj objem vyteklé vody

$$V' = \pi r^2 h - \frac{\pi r^4}{g} \left(\omega^3 + \frac{3z_0 g \omega}{r^2} \right)^{2/3}.$$

Úloha I. P ... teploměr

Kapilára lékařského rtuťového teploměru je pod stupnicí zaškrčená, aby se rtuť nemohla vracet do baňky a my mohli v klidu odečíst změřenou teplotu. Jak jistě víte, od června je zakázán prodej rtuťových teploměrů. Při této historické příležitosti se zamyslete, proč je zúžené místo pro rtuť průchodné pouze jedním směrem při ohřívání a proč se stejným způsobem nemůže rtuť při ochlazení zase samovolně vrátit do baňky.

Odpověď na to, proč se rtuť dostane přes zaškrčené místo nahoru do stupnice je poměrně jednoduchá. Je to kvůli tomu, že se stoupající teplotou se zvětšuje objem rtuť (a to na intervalu, kde je používán lékařský teploměr velice dobře lineárně s koeficientem objemové roztažnosti $\beta = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$), rtuť je prakticky nestlačitelná (její stlačitelnost je $\kappa = 0,04 \text{ GPa}^{-1}$) a teplotní roztažnost skla je vůči teplotní roztažnosti rtuť zanedbatelná. Rtuť se tedy zahřeje, zvětší svůj objem a pokud teploměr nemá prasknout, tak se rozšíří přes zaškrčené místo do stupnice.

Složitější částí úlohy je zjistit, proč se rtuť zase po ochlazení nevrátí do baňky. Klíčem k řešení je ukázat, že je to pro rtuť výhodnější a tedy že k tomu nemůže z fyzikálního hlediska dojít. V podstatě jde použít dva základní přístupy. Jednou možností je řešení vést přes kapilární tlak a další možností je věnovat se energetické bilanci. Jedná se o postupy, které jsou v podstatě obdobné, protože tlak je spjatý se silou a ta zase s prací, která se pak právě projeví na změně povrchové energie. Ukažme si tedy postup pro výpočet pomocí kapilárního tlaku.

Postup bude takový, že odhadneme, jak úzké musí být zúžení trubice a posoudíme, zda-li je to reálné, či ne.

Uvažujme obvyklý lékařský teploměr, které má ještě valná většina domácností. Rozdílu teploty o $\Delta T = 1 \text{ }^\circ\text{C}$ odpovídá délkový rozdíl $\Delta h = 1 \text{ cm}$ na stupnici.

Baňka přibližně tvaru válce, která obsahuje většinu rtuti teploměru (můžeme tedy uvažovat, že obsahuje celý její objem na počátku), má vnější rozměry zhruba $D_{\text{vn}} = 4 \text{ mm}$ průměru a $H_{\text{vn}} = 13 \text{ mm}$ délky – můžeme tedy odhadnout, že její vnitřní poloměr bude $R = 1,5 \text{ mm}$ a výška $H = 12 \text{ mm}$. Pro naše účely také velice dobře platí vzorec pro objemovou roztažnost

$$V = V_0 (1 + \beta \Delta T) = \pi R^2 H (1 + \beta \Delta T) .$$

Chceme odhadnout poloměr trubice (kapiláry) teploměru, což lze jednoduše provést z objemové změny a výše uvedených informací.

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta h = V_0 \beta \Delta T \quad \Rightarrow \quad r = R \sqrt{\frac{H \beta \Delta T}{\Delta h}} .$$

Pokud dosadíme zmiňované hodnoty, tak získáváme odhad $r \approx 20 \mu\text{m}$. Přestože se to na první pohled může zdát jako příliš malé číslo, tak je reálné, protože rtuť v trubici není vidět pod libovolným úhlem a je potřeba si teploměr vhodně natočit, aby trubice sloužila jako čočka pro zvětšení šířky sloupce.

V teploměru je nad rtuťí buď téměř vakuum (respektive rtuťové páry o nízkém tlaku), nebo je tam relativně řídká dusíková atmosféra. Pokud by tam bylo vakuum, tak by stačilo, aby bylo zúžení nepatrné a už by se kvůli vyššímu kapilárnímu tlaku rtuť odtrhla a nevrátila by se do baňky. Proto dále předpokládejme, že nad rtuťí je tlak zhruba $p_a = 10^5 \text{ Pa}$, který můžeme brát jako horní odhad, a pokusme se zjistit na jaký poloměr l by musela být kapilára zúžena, aby došlo k odtržení (pravdou je, že s roztahováním rtuti stoupá tlak v plynu, protože se zmenšuje jeho objem, ale vzhledem k tomu, že by plyn nad rtuťí měl být opravdu relativně řídký, tak atmosférický tlak poslouží velice dobře jako horní odhad). Pro kapilární tlak platí vztah svazující ho s povrchovým napětím (které je pro rtuť $\sigma = 0,48 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$):

$$p_r = \frac{2\sigma}{r} .$$

A dále postupujeme

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_l - p_r > p_a , \\ p_a &< \frac{2\sigma}{l} - \frac{2\sigma}{r} , \\ l &< \frac{2\sigma r}{2\sigma + r p_a} \doteq 6 \mu\text{m} . \end{aligned}$$

Výsledkem je, že kdyby byla trubice zúžena méně jak na třetinu, tak by teploměr měl fungovat opravdu poměrně dobře jako maximální teploměr (tzn. kdykoliv můžeme odečíst správně nejvyšší teplotu, která byla od nějaké doby naměřena; pravdou je, že s nižší teplotou se sice i rtuť v kapiláře mírně smrští, ale to je pro lidské oko neznatelný rozdíl). Takové zúžení není technicky těžké vytvořit a opticky se i zdá, že je zúžení v teploměru dokonce ještě užší, takže tím spíš se rtuť oddělí v okamžiku, kdy se začne ochlazovat.

Úloha II.1 ... *kalamita*

Jeden z organizátorů jel vlakem domů a zapadl ve vánici. Z dlouhé chvíle počítal sněhové vločky padající za oknem. A napadlo jej – kolik jich je asi v jednom kilogramu sněhu? Provedl kvalifikovaný odhad a spokojeně umrzl. Co mu vyšlo?

Úvodem přiznejme, že tento příklad má mnoho způsobů řešení a mnoho různých výsledků. Už z toho důvodu, že každý má jiný „kvalifikovaný“ odhad. Můžeme s klidem říct, že neexistuje nejsprávnější řešení. Níže jsou uvedeny dva z možných způsobů výpočtu, jeden experimentální a jeden teoretický, s využitím informací z internetu.

Experimentální verze

S trochou štěstí v intervalu zadání úlohy nasněží. V takovém případě je možné nacytat několik sněhových vloček, nechat je roztát (sníh je přece voda a o té toho víme spoustu) a pak dopočítat hmotnost vloček. Můžeme předpokládat, že z průměrné vločky se stane průměrná kapka. Když zjistíme kolik vody se stalo ze známého počtu vloček, můžeme velmi jednoduše zjistit, kolik váží jedna vločka. Pokud nemáme štěstí a nesněží, můžeme provést ten stejný experiment s vodou z kohoutku, kde stále předpokládáme, že z průměrné vločky by se stala průměrná kapka.

Kde je možný problém? V tom, že zjišťování hmotnosti jedné kapky je zatíženo poměrně velkou chybou. Dále také v tom, že pokud chytáme vločky, těžko se nám podaří chytit přesný počet vloček (ony se mohou různě slepovat atp.). Rovněž je třeba si uvědomit, že tvorba vloček, tedy to, jak budou velké, závisí na okolní teplotě.

Teoretická verze

Na internetu⁵ lze najít údaj, že průměrná vločka obsahuje 10^{18} molekul vody, toto množství označíme N , M je molární hmotnost vody a N_A je Avogadrova konstanta. Použijeme Avogadrův vzorec

$$n = \frac{N}{N_A}, \quad n = \frac{m}{M}, \quad m = \frac{NM}{N_A}.$$

Molární hmotnost vody pak můžeme spočítat pomocí periodické soustavy prvků. Známe $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Výsledek je pak dílem dosazení, hmotnost vločky vychází řádově 10^{-8} kg. Počet vloček v jednom kilogramu sněhu získáme coby převrácenou hodnotu. Můžeme tedy říct, že v kilogramu sněhu se nachází desítky miliónů navzájem různých sněhových vloček.

⁵⁾ <http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/alike/alike.htm>

Úloha II.2 ... rušit krok

Jak rychle máme jít po visutém mostě, abychom jej co nejlépe rozkmitali? Úlohu vhodně parametrizujte a následně vyřešte.

Ve fyzice je dobrým zvykem veškeré reálné jevy nahrazovat idealizovanými modely. V tomto případě budeme postupovat naprosto stejně a visutý most nahradíme strunou ve vakuu a v místě, ve kterém na něj nepůsobí žádná gravitace. Největších výchylek mostu dosáhneme tak, že v něm budeme budit kmity frekvencí rovnou vlastní frekvenci mostu, a tím dojde k takzvané rezonanci. Když si představíme kmitající most například v prvním módu, je zřejmé, že bychom ho měli rozkmitávat periodickým působením síli právě uprostřed mostu. Nicméně můžeme předpokládat, že pokud budeme po mostě kráčet, efekt bude naprosto stejný (pokud nevěříte, tak vyzkoušejte s nití). Pokud tedy jdeme rychlostí v_k a délka kroku je x_k , potom budeme v mostě budit kmity frekvencí v_k/x_k . Chceme, aby se tato frekvence rovnala vlastní frekvenci mostu, kterou však musíme ještě zjistit. Vztah pro frekvenci kmitající struny lze zcela jistě najít na internetu. Bude záviset na rychlosti, kterou se po dané struně šíří vlny a také na volbě módu, v kterém struna kmitá. Nicméně, když už jsme na problematiku kmitající struny narazili, je zajímavé se podívat, odkud tento vztah pro frekvenci kmitů vlastně pochází a z čeho vůbec plyne, že na struně vzniknou nějaké módy. K tomu budeme potřebovat umět derivovat. Pokud Vám tento pojem nic neříká, třeba Vás následující odvození trochu namotivuje se tuto jednoduchou matematickou metodu naučit.

Ze zkušenosti známe, že po struně se mohou šířit vlny. To znamená, že pokud na jedné straně strunu chynete a cuknete s ní nahoru a dolů, začne se po ní šířit deformace, kterou lze popsat funkcí tvaru $u(x, t) = \gamma(2\pi(x/\lambda - t/T))$, kde λ je vlnová délka, T perioda kmitu a γ odpovídá tvaru křivky. To že se po strunách mohou šířit vlny znamená, že pro výchylku $u(x, t)$ platí vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

kde c je rychlost vlny.

Předpokládejme řešení ve tvaru $u = f(x) \cos \omega t$, což je přesně to, co bychom od stojatých vln na struně očekávali. Dosazením do vlnové rovnice získáme novou rovnici

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2 f}{c^2},$$

jejímž řešením je funkce

$$f = A \sin \frac{\omega x}{c}.$$

Řešení vlnové rovnice je tedy

$$u(x, t) = A \sin \frac{\omega x}{c} \cos \omega t.$$

Víme, že struna má délku L a že je na obou koncích upevněná. Tudíž musí být splněny podmínky

$$u(0, t) = 0 \quad \text{a} \quad u(L, t) = 0.$$

První omezení je triviální, protože jsme si za funkci f zvolili sinus. Z druhého omezení plyne, že $\sin(L\omega/c) = 0$ neboli $\omega = \pi nc/L$, kde n je libovolné přirozené číslo a je to právě to číslo, které značí daný mód. Víme, že rychlost c pro strunu je rovna $\sqrt{\sigma/\rho}$, kde nyní σ značí sílu, kterou je struna napínána a ρ délkovou hustotu struny. Ze vztahu $f = \omega/2\pi$ tak můžeme dopočítat frekvenci struny pro daný mód. Parametry si můžeme zvolit opravdu skoro libovolné. Přesné určení například rychlosti vlny po daném mostě je otázkou experimentu a ne teoretického odvození.

Úloha II.3 ... brnkačka

Prodává se váleček, na kterém jsou malé výstupky. Váleček otáčeje se brnká o hranu ocelové destičky, která je nařezaná na proužky rozdílné délky. Ve skladbě na válečku se vyskytují všechny noty v daném neprázdném rozsahu (dejme tomu stupnice C dur). Dokážete zjistit tvar funkce konců nařezaných proužků?

Žebro z nařezané kovové destičky budeme modelovat kvádrem délky l , šířky w a tloušťky h , jehož jeden konec je pevný.

Sledujme, co se děje s kvádříkem, pokud na jeho volný konec působíme silou F . Nejprve se zaměříme na velmi malý úsek žebra o délce ξ . Předpokládejme, že vrstvy v rovině destičky, které byly původně rovnoběžné, jsou i nyní v ekvidistantní poloze. Je vidět, že některé vrstvy ze zkrátily, zatímco jiné se prodloužily. My využijeme toho, že existuje vrstva, která má stále stejnou délku ξ . Tato vrstva je uprostřed tloušťky h průřezu žebra⁶. Jelikož pracujeme s velmi krátkým úsekem, vezmeme poloměr zakřivení na celém úseku jako konstantní r . Jednoduchou geometrickou úvahou pak zjistíme, že relativní prodloužení vrstvy vzdálené λ od středu průřezu je λ/r .

Provedme myšlený řez ve vzdálenosti x od pevného konce žebra. Na uříznutý konec působí dva opačné momenty. Počítejme je vzhledem k ose kolmé na ohyb, rovnoběžné s řezem a procházející jeho středem. Moment M_1 je způsoben silou na volném konci

$$M_1 = F(l - x). \quad (9)$$

Druhý je vyvolán silami pružnosti z upevněné části žebra. Velikost tohoto druhého momentu se určí jako součet dílčích momentů všech deformovaných vrstev

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda dF = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda E \frac{\lambda w}{r} dz = \frac{1}{12} \frac{Ewh^3}{r} = \frac{K}{r}. \quad (10)$$

Nyní označme $y(x)$ odchýlení žebra od výchozí polohy ve vzdálenosti x od pevného konce. Předpokládejme celkově jen malé výchylky (tedy $|y'| \ll 1$), potom je poloměr křivosti žebra dán jako

$$r = \frac{1}{y''}, \quad (11)$$

⁶⁾ Toto tvrzení je uvedeno bez důkazu, dá se však dokázat, že obecně tato nedeformovaná plocha prochází těžištěm průřezu.

kde y'' značí druhou derivaci y podle x .

Dosadíme-li nyní poloměr (11) do vztahu (10) a využijeme-li poznatek o rovnosti momentů, získáme jednoduchou diferenciální rovnici pro y , kterou vyřešíme dvojitou integrací podle x

$$Ky'' = F(l - x) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{F}{6K} (3lx^2 - x^3),$$

přičemž integrační konstanty volíme tak, aby platilo $y(0) = 0$ a $y'(0) = 0$ (žebro je propojeno s destičkou).

Nyní víme, jakým způsobem závisí výchylka proužku na působící síle, pokusme se tedy vyšetřit pohyb vychýleného proužku.

Potenciální energie ohnutého žebra je rovna práci, kterou musela vykonat síla na jejím konci. Označme $y_l = y(l)$ vychýlení volného konce, potom

$$E_p = \int_0^{y_l} F dy = \int_0^{y_l} \frac{3K}{l^3} y dy = \frac{3K}{2l^3} y_l^2. \quad (12)$$

Pro výpočet kinetické energie bude výhodné si výchylku $y(x)$ vyjádřit pomocí y_l jako

$$y(x) = \frac{y_l}{2l^3} (3x^2l - x^3),$$

z čehož po derivaci podle času získáme rychlost kousku žebra ve vzdálenosti x

$$\dot{y}(x) = \frac{\dot{y}_l}{2l^3} (3x^2l - x^3).$$

Kinetická energie takového kousku je potom

$$dE_K = \frac{1}{2} \rho wh dx \dot{y}^2,$$

kde ρ je hustota materiálu proužku. Kinetická energie celého proužku je

$$E_K = \int_0^l dE_K = \frac{1}{8} \int_0^l \rho wh \frac{\dot{y}_l^2}{l^6} (3x^2l - x^3)^2 dx = \frac{33}{280} \rho wh l \dot{y}_l^2. \quad (13)$$

Pokud zanedbáme ztráty energie, tak platí $E_p + E_k = \text{konst}$, tedy $\dot{E}_p + \dot{E}_k = 0$, z čehož po dosazení zderivovaných vztahů (12) a (13) získáme (kupodivu) pohybovou rovnici harmonického kmitavého pohybu

$$\frac{33}{140} \rho wh l \ddot{y}_l + \frac{3K y_l}{l^3} = 0.$$

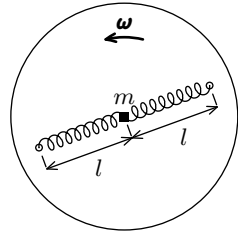
Odpovídající frekvence je tedy

$$f = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{35 E}{33 \rho}}.$$

Na závěr zbývá zmínit, jak tedy závisí délka proužku na pořadí tónu. Obvykle platí, že každé dva sousední půltóny mají stejný poměr frekvencí, nejčastěji $\sqrt[3]{2}$. Vezmeme nějaký tón ze stupnice s frekvencí f_0 , potom tón posunutý o n půltónů má frekvenci $f = f_0 \sqrt[3]{2^n}$. Délka proužku l je přímo úměrná $\sqrt{f^{-1}}$, na pořadí půltónu bude tedy záviset exponenciálně jako $l = l_0 \sqrt[3]{2^{-n}}$.

Úloha II.4 ... Márovy pružiny

Kutil Mára si doma sestavil takovouto hračku: Na dřevěný kruh do jedné přímky procházející středem disku přimontoval dvě zarážky (stejně daleko od středu), mezi které na dvou pružinách o tuhosti k napnul závaží o hmotnosti m . Závaží může bez tření klouzat po disku. Mára hračku položil na stůl a roztočil okolo osy disku úhlovou rychlostí ω , přičemž závaží mírně vychýlil z rovnovážné polohy. Kvalitativně popište pohyb závaží, a pokud si věříte, vypočítejte jej (za bonusové body).



Obr. 12. Pohled shora

První věc, kterou je potřeba rozmyslet, je v jaké soustavě celý problém řešit. Na výběr jsou v podstatě dvě. Buď je možné úlohu řešit v neinerciální soustavě spojené s rotujícím diskem, nebo v inerciální spojené se stolem. Je zřejmé, že oba přístupy musejí dávat stejné výsledky.

Řešení pro názornost provedeme v soustavě spojené se stolem. V této soustavě působí na závažíčko pouze elastické síly.

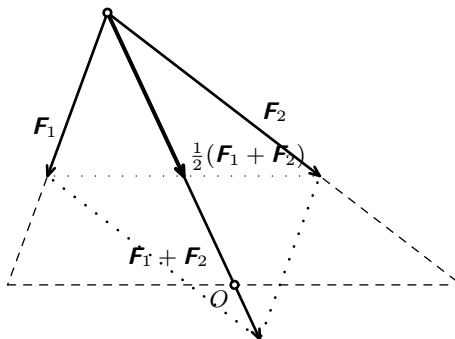
Síla, kterou působí pružina na těleso, je úměrná prodloužení pružiny, v našem případě to je ale přímo vzdálenost od zarážky, viz obrázek. Z obrázku je též vidět, že celková síla působící na závažíčko je radiální a přímo úměrná vzdálenosti. Její velikost je

$$F_e(r) = 2kr,$$

kde r značí vzdálenost od středu a je nezávislá na směru vychýlení.

Směr i velikost působící síly závisí pouze na poloze závažíčka, nikoliv na poloze zarážek. Proto víme, že v soustavě spojené se stolem bude těleso harmonicky kmitat okolo středu rotujícího disku s úhlovou rychlostí

$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$



Obr. 13. Skládání sil

Zavedeme-li souřadnice x_s a y_s , které jsou pevně spojené se stolem a mají počátek ve středu disku, můžeme popsat pohyb rovnicemi

$$\begin{aligned}x_s &= x_{s0} \sin(\Omega(t - t_0)), \\y_s &= 0,\end{aligned}$$

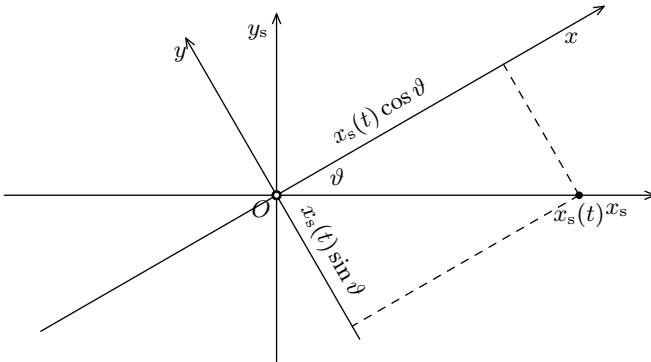
kde x_{s0} je počáteční výchylka.

Označme x a y souřadnice v soustavě spojené s diskem, které budou natočené vzhledem k souřadnicím x_s a y_s o úhel ϑ , viz obrázek 14. Protože se disk otáčí konstantní úhlovou rychlostí, platí

$$\vartheta = \omega t.$$

Proto můžeme popsat trajektorii pohybu rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= x_{s0} \sin(\Omega t) \cos(\omega t), \\y &= -x_{s0} \sin(\Omega t) \sin(\omega t).\end{aligned}$$



Obr. 14. Transformace souřadnic

Druhou metodou, jak řešit úlohu, je přechod do neinerciální soustavy spojené s rotujícím diskem. Nyní je však nutné správně započítat všechny působící síly, převážně neinerciální.

Celková síla působící na závaží je součtem elastické – způsobené pružinami a neinerciálních sil – Coriolisovy a odstředivé

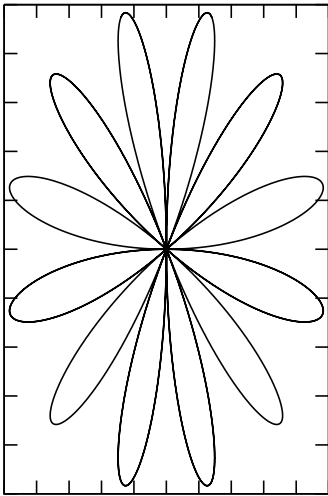
$$\mathbf{F}_c = -2k\mathbf{r} + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

Celková síla je dle první impulsové věty rovna $m\mathbf{a}$. Můžeme proto sestavit pohybové rovnice

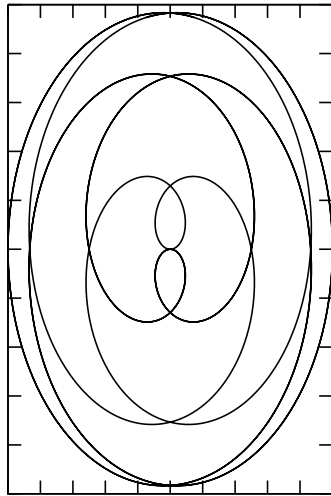
$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\omega^2 - \Omega^2)x - 2\omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= (\omega^2 - \Omega^2)y + 2\omega\dot{x}.\end{aligned}$$

Jednoduchým dosazením ověříme, že výše uvedené řešení řeší také tuto soustavu diferenciálních rovnic.

Pokud by byla klidová délka pružin jiná než nulová, nedala by se již elastická síla vyjádřit v jednoduchém tvaru a bylo by nutné úlohu řešit numericky.



Obr. 15. Graf pro $\Omega/\omega = 6$



Obr. 16. Graf pro $\Omega/\omega = 1/6$

Úloha II. P ... telekineze

Odkud bere magnet energii na zvedání věcí, když magnetická síla nemůže konat práci? Lorentzův vzorec $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ říká, že magnetická síla je kolmá na rychlost pohybujícího se náboje, a tedy pouze mění jeho směr hybnosti.

Z uvedeného Lorentzova vzorce vyplývá, že homogenní magnetické pole působící na pohybující se bodový náboj nekoná práci. Avšak umístíme-li hmotný testovací magnetický dipól do nehomogenního vnějšího magnetického pole (například vytvářeného jiným magnetickým dipólem), kinetická energie testovacího dipólu už se může měnit, zjevně tedy magnetická síla koná práci.

Abychom si ujasnili, proč tomu tak je, představme si dipól jako kruhovou proudovou smyčku o malém poloměru r na ose osově souměrného magnetického pole (tedy např. na ose vytvářejícího dipólu). Pokud se po obvodu smyčky rozbíhá magnetické pole o úhel α od osy, pak podle zadaného vzorce bude na elementární náboj e pohybující se po obvodu smyčky působit ve směru osy síla o velikosti

$$F_{ze} = evB \sin \alpha.$$

Pohyb daného elementárního náboje je však vázán na vodivou smyčku, na niž se přeneše uvedená síla.

Pokud se podél smyčky pohybuje rovnoměrně rozložený náboj o celkové velikosti Q , dostáváme celkovou sílu působící na náboje ve smyčce podél osy

$$F_z = QvB \sin \alpha = 2\pi rIB \sin \alpha,$$

kde I je proud tekoucí smyčkou. Tvrzení, že „magnetická síla“ nemůže konat práci, je tedy chybné. Pokud na náboje působí nějaké další (vazebné) síly, zjevně ji přes tvar Lorentzova vzorce konat může. Zejména koná práci tehdy, pokud působí proti gradientu skalárního potenciálu (zde elektrostatického, vytvářeného atomovými jádry).

Často se uvádí⁷ vztah silového působení na magnetický dipól

$$\mathbf{F} = \text{grad}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}).$$

Zde \mathbf{m} je *magnetický moment* dipólu. V případě proudové smyčky ztotožňujeme $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, kde \mathbf{S} udává plochu smyčky (orientovanou ke kolmici). Magnetické pole je pole vírové, a tedy siločáry magnetického pole jsou uzavřené křivky, hustota siločar pak vypovídá o velikosti intenzity pole. Není pak těžké dokázat, že pro dostatečně malou proudovou smyčku opravdu v našem případě opravdu platí $r|\text{grad } B| = 2B \sin \alpha$, a tedy námi odvozené silové působení na smyčku odpovídá uváděnému vztahu pro dipól.

V úvaze jsme se dopustili několika zjednodušení. Například samotná jednoduchá proudová smyčka, kde elektrony samovolně obíhají dokola a nezastaví se, se realizuje špatně, pokud nemáme k dispozici supravodič. Navíc dráha elektronu běžně nebude vázána na kruh, protože jakákoliv reálná proudová smyčka uskutečněná pomocí (supra)vodiče bude mít konečné rozměry. To nám však nevádí, protože pohyby elektronů v jiných směrech se vystředují, a spolu s nimi i silové účinky magnetického pole.

Zkušenosti z každodenního života navíc ukazují, že jakýkoliv (i permanentní) magnet přitahuje také věci, které se jinak samy o sobě magnety býti nezdaří, jejich celkový magnetický moment je nulový. Jedná se o *ferromagnetika*, tedy látky, jež po vystavení vnějšímu magnetickému poli získají vlastní magnetický moment a vytvoří kolem sebe vlastní magnetické pole. Atomy, resp. částice, z nichž se atomy skládají, mají svůj vlastní magnetický moment (což klasická fyzika nedovede vysvětlit; jedná se o důsledek symetrií a kvantové teorie, což poněkud přesahuje rámec našeho semináře). Magnetické momenty jsou však u spousty látek náhodně orientovány a po vystředování je výsledný magnetický moment nulový.

Ferromagnetika (kam patří mj. železo s většinou druhů ocelí, kobalt, nikl, ...) mají tu vlastnost, že sousedící atomy mají tendenci orientovat své magnetické momenty stejně a po vystavení vnějšímu magnetickému poli se snaží svůj dipólový moment orientovat ve shodě s vnějším polem a výsledný moment již není nulový.

⁷⁾ Zájemcům o hlubší pochopení problematiky lze doporučit například studijní texty dr. Ledvinky, jež jsou poměrně vyčerpávajícím úvodem do klasické elektrodynamiky a jsou k dispozici na <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka/?278656>.

Některá ferromagnetika si magnetický moment zachovají i po vypnutí vnějšího magnetického pole – a mohou tedy sloužit jako permanentní magnety.

Úloha III.1 ... na setkání nejsme k rozeznání

Jak nejdále od sebe mohou být dva lidé, aby je nikdo třetí na Zemi nerozeznal, kdykoliv jsou viditelní? Nezapomeňte, že lidé jsou bodové světelné zdroje ve výšce 2 m a Země je koule.

Při řešení použijeme Rayleighova kritéria, které udává vztah mezi vlnovou délkou světla λ , průměrem štěrbinu čočky D a úhlovým rozlišením ϑ .

$$\sin \vartheta = 1,22 \frac{\lambda}{D}.$$

Stačí se zabývat pouze situacemi, kdy má pozorovatel k oběma osobám stejně daleko – v ostatních případech stejně vzdáleného pozorovatele bude porovnaný úhel vždy menší. Dále, vzhledem k poměrům mezi λ a D , můžeme využít aproximace $\sin \alpha \approx \alpha$ a získáme

$$\frac{d}{2l} = \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{2} \Rightarrow d = 1,22 \frac{\lambda l}{D}.$$

Hledáme maximum d ; to je zřejmě lineárně závislé na l . Tedy čím blíže třetí osoba bude, tím menší hodnotu získáme. Zde narážíme na omezení lidského oka, které je schopno zaostřit až od určité minimální vzdálenosti (předpokládejme, že na bližší vzdálenost je lepší teoretické rozlišení kompenzováno díky neschopnosti zaostřit). Pro dosažení minima musíme také dosadit minimální vlnovou délku viditelného světla a maximální možnou šířku zornice.

$$d_0 = 1,22 \cdot 0,05 \cdot \frac{400 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 10^{-3}} = 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Maximální možná vzdálenost dvou nerozlišitelných lidí tedy je přibližně čtyři mikrometry.

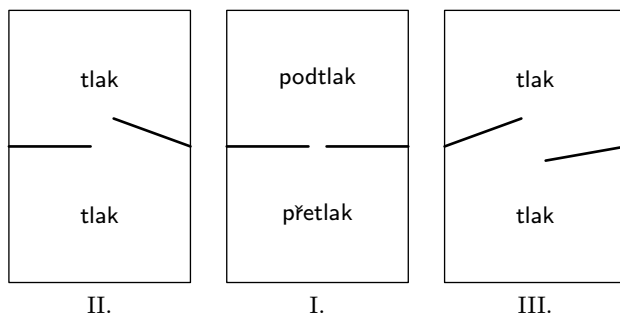
Úloha III.2 ... hlučný dav kol mého prahu

Uvažujte dvoukřídlé dveře do budovy, mezi nimiž je i v zavřené poloze mezírka, kterou může proudit vzduch. Každé křídlo má pružinu, která ho vrací do výchozí zavřené polohy. Jedno křídlo vychýlíme a pustíme z klidu. Co se bude dít, třeba s druhým křídlem?

Zkusíme se zamyslet nad soustavou dvou dveří. Jak se bude chovat jedno křídlo a jak se budou chovat křídla dvě. Obě křídla mají pružinky a jsou ve vzduchu. To znamená, že po vychýlení začnou kmitat tam a zpět. Kmitání bude díky odporu prostředí tlumené, takže za určitou dobu ustane. Ale tak by se chovalo i jen jedno křídlo dveří. Jakmile máme křídla dvě, bude zajímavé sledovat, jak vychýlení jednoho křídla ovlivní křídlo druhé. Zde je třeba si uvědomit vliv prostředí. Dveře jsou totiž obklopeny vzduchem, který nemůžeme zanedbat.

Dveře představují přepážku mezi dvěma místnostmi, ve kterých jsou stejné tlaky, všechno je v rovnováze. Pokud bychom uměli zařídit, že otevírání jednoho křídla dveří je rovnovážné (tedy dostatečně pomalé, kdy zavření je sled rovnovážných poloh), nic zajímavého by se nedělo, protože tlak v obou místnostech by se pořád vyrovnával. Běžné otevření dveří však rovnovážné není a způsobuje proudění vzduchu.

Dveře vychýlíme a pustíme. Dveře vženu do místnosti za nimi vzduch a zde vznikne přetlak (můžeme si říct, že za stejné teploty se zmenšil objem místnosti, zatímco teplota zůstala stejná). Směle tedy můžeme předpokládat, že před nimi vznikne podtlak. Jediná šance, jak tyto dva tlaky vyrovnat je zvětšit mezeru mezi dveřmi, což jde zařídit tak, že mezeru mezi dveřmi zvětšíme. Druhé křídlo se v důsledku toho pohne proti prvnímu.



Obr. 17. Jednotlivé fáze lítání dveří

Efekt pootevření druhého křídla dveří v opačném směru závisí na tom, jak velký je prostor za dveřmi, hmotnosti dveří, velikosti mezery mezi dveřmi a síle pružiny dveře držící.

Úloha III.3 ... *Hospodine, pomiluj ny!*

Jak roste hlasitost (definujte si sami) sboru s počtem jeho členů? Co z toho plyne? Členy sboru uvažujte jako bodové zdroje zvuku stejné amplitudy a frekvence, ale posunuté o náhodnou fázi. Všichni bodoví zpěváci se nacházejí v jednom místě.

Jako „definici hlasitosti“ budeme používat intenzitu zvuku I – ta je rovna střední hodnotě akustického plošného výkonu. Co nás však vede k této volbě především, je jednoduchý vztah k akustickému tlaku p (za běžných podmínek): $I \sim \langle p^2 \rangle$, tedy je úměrná střední hodnotě čtverce akustického tlaku. To je podstatné především z toho důvodu, že akustický tlak se chová vcelku lineárně, takže je možné v libovolném okamžiku vypočítat akustický tlak pouhým sečtením příspěvků všech zpěváků.

Míníme-li navíc „stejnou amplitudu“, nejspíš máme na mysli právě amplitudu akustického tlaku.

Vyšetřujme tedy akustický tlak v čase pro různý počet zpěváků. Budeme předpokládat, že průběh příspěvku p_i od jednoho (i -tého) zpěváka bude kosinový (komu se to zdá jako přílišné zjednodušení, nechť si provede příslušný rozklad do Fourierovy řady – z kolmosti jednotlivých členů řady pak vyplyne, že výsledná intenzita poroste stejně) s náhodnou počáteční fází φ_i a úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi/T$, kde T je perioda. Tedy

$$p_i(t) = A \cos(\omega t + \varphi_i)$$

a pro N zpěváků máme celkový akustický tlak

$$p(t) = \sum_{i=1}^N A \cos(\omega t + \varphi_i).$$

Příslušnou zvukovou intenzitu vypočteme jako integrál čtverce akustického tlaku přes celou periodu, tedy

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T c p(t)^2 dt = c \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N A \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_i\right) \right)^2 dt,$$

kde c zahrnuje všechny možné multiplikatívni konstanty (závisující na prostředí, vzdálenosti od chóru, ...). Je vidět, že intenzita se může v závislosti na fázovém posunu pohybovat od 0 (každý zpěvák má druha zpívajícího v protifázi) do $N^2 c A^2$ (všichni zpěváci mají fázi stejnou).

Naši snahou bude dále nalézt střední hodnotu intenzity pro všechny možné fázové posuny (vůči prvnímu zpěvákovi). Předpokládáme, že tyto posuny jsou zcela rovnoměrně rozděleny, tudíž budeme hledat střední hodnotu v $(N-1)$ -rozměrném intervalu $(0, 2\pi)^{N-1}$,

$$\langle I \rangle = c A^2 \frac{1}{(2\pi)^{N-1}} \int_{(0, 2\pi)^{N-1}} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^N A \cos(\omega t + \varphi_i) \right)^2 dt dU;$$

kde $dU = d\varphi_2 d\varphi_3 \dots d\varphi_N$ je element objemu v $(0, 2\pi)^{N-1}$. Uvědomme si však, jak počítáme intenzitu – počítáme střední hodnotu funkce $\cos^2 x$ přes periodu v čase. Zřejmě se nic nestane, když místo času budeme integrovat přes bezrozměrnou fázi

$$\frac{1}{T} \int_0^T f\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi_0) d\varphi_0,$$

a vzhledem k tomu, že integrovaná funkce je podél všech φ_i periodická, můžeme si libovolně (pevně) posunout počáteční fázi a dostáváme

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \frac{cA^2}{(2\pi)^N} \int_{(0, 2\pi)^N} \left(\sum_{i=1}^N \cos \varphi_i \right)^2 d\boldsymbol{\varphi} = \\ &= \frac{cA^2}{(2\pi)^N} \int_{(0, 2\pi)^N} \left(\sum_{i=1}^N \cos^2 \varphi_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \cos \varphi_i \cos \varphi_j \right) d\boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

přičemž nyní integrujeme již přes všechny $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$.

Každý člen první sumy dá po zintegrování $2^{N-1}\pi^N$, neboť

$$\int_{(0, 2\pi)^N} \cos^2 \varphi_i dV = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi_i d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_i \dots d\varphi_N,$$

při integraci podél daného fázového posunu dostáváme $\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi_i d\varphi_i = \pi$, podél ostatních fázových posunu se výraz chová jako konstanta a při každé integraci tak pouze přibude činitel rovný délce intervalu, tj. 2π . Integrál z druhé sumy dá nulu, protože $\int_0^{2\pi} \cos \varphi_i \cos \varphi_j d\varphi_i = 0$, $i \neq j$.

Celkem tedy dostáváme

$$\langle I \rangle = \frac{NcA^2}{2},$$

zvuková intenzita je tedy (v průměru) přímo úměrná počtu pěvců, což není překvapivé – dalo se očekávat, že každý zpěvák bude dodávat konstantní výkon nezávisle na jejich počtu.

Z lineární závislosti intenzity na N pak dále plyne, že průměrná velikost akustického tlaku poroste přímo úměrně s \sqrt{N} .

Některí se pokoušeli řešit úlohu pomocí fázorů. Pokud dílčí příspěvek jednoho zpěváka k akustickému tlaku vyjádříme pomocí komplexní exponenciály $p_j = A_j \cos(\omega t + \varphi_j) = \operatorname{Re}(A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)})$, celkový akustický tlak je potom

$$p = \sum_j p_j = \sum_j \operatorname{Re}(A_j e^{i(\omega t + \varphi_j)}) = \operatorname{Re} \left(e^{i\omega t} \sum_j A_j e^{i\varphi_j} \right).$$

Pokud tedy dávají jednotliví zpěváci harmonický příspěvek k akustickému tlaku se stejnou frekvencí, celkový akustický tlak bude mít také harmonický průběh (s touž frekvencí), a to i při různých dílčích amplitudách. Celková amplituda je pak dána

výrazem $\left| \sum_j A_j e^{i\varphi_j} \right|$. Ve fázorovém diagramu bude každému členu $A_j e^{i\varphi_j}$ příslušet vektor o velikosti A_j natočený o příslušný úhel φ_j .

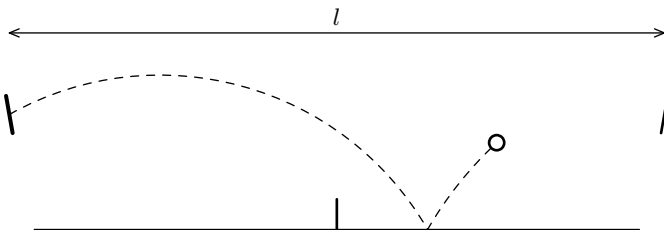
Pokud budou všechny $A_j = A$ stejné a všechny fázové posuny φ zcela náhodné, výsledná amplituda bude dána vzdáleností od počátečního bodu při náhodné procházce při kroku délky A . Tato vzdálenost je v průměru přímo úměrná druhé odmocnině počtu kroků, takže amplituda akustického tlaku bude taktéž přímo úměrná odmocnině počtu zpěváků

$$\left\langle \left| \sum_{j=1}^N A e^{i\varphi_j} \right| \right\rangle \sim \sqrt{N},$$

což souhlasí s našim výsledkem výše.

Úloha III.4 ... pane Wurfl, ale na Měsíci

Pana Broučka při měsíční příhodě pronásledovala *Etherea*, kterou lze připodobnit hmotnému bodu. Pan Brouček ale, potom co si objednal vepřové se zelím, se jí zbavil tím, že ji uvěznil mezi dvěma pevně uchopenými pálkami ve vzdálenosti l , které jsou každá natočena o nějaký úhel, a *Etherea* mezi nimi skákala jako pingpongový míč tak, že se odrazila vždy ve stejné výšce. Aby ji potrápil strachem, vložil doprostřed síť výšky h . Pan Brouček je důmyslný šibal, a tak chtěl, aby (stejně jako v ping-pongu) na každé polovině spadla aspoň jednou na zem. Vypočtete, s jakou frekvencí v závislosti na všemožných parametrech (natočení pálek, počáteční rychlost míčku, úhel, ...) *Etherea* létá, a kdy je tato frekvence nejvyšší. Předpokládejte, že pohyb je rovinný a při odrazu od překážky (od Měsíce nebo od pátky) se akorát mění rychlost na opačnou; celý pohyb probíhá ve vakuu.



Obr. 18. Modifikovaný ping-pong

Při řešení úlohy využijeme převážně symetrii úlohy a dále zákonů zachování.

Jak ze zadání víme, *Etherea* se odráží vždy ve stejné výšce. Dále víme, že při odrazu na zemi se nemění vodorovná složka rychlosti. Z první podmínky použitím zákona zachování energie vidíme, že velikost rychlosti je stejná pro každý odraz. Z druhé, víme-li, že se nemění celková velikost rychlosti při odrazu, plyne, že se nemění ani velikost svislé složky rychlosti.

Z této úvahy plyne, že během jednoho přeletu se zachovávají velikosti vodorovné i svislé složky rychlosti.

Studujme nyní pohyb Etherey geometricky. Pohybuje se mezi pálkami po parabole, resp. dvou shodných parabolách vzájemně posunutých.

Pokud by Etherea začínala svůj pohyb směrem dolů a dopadla až za sítkou, tak by vzdálenost průsečíku paraboly s osou x od x -ové souřadnice vrcholu byla větší než $l/2$, potom by ale již nestihla vystoupit do dostatečné výšky pro odraz od druhé páčky.

Etherea se musí tedy začít pohybovat vzhůru. Pokud by však k druhé páčce přiletěla shora, znamenalo by to, že se Etherea odrazila v polovině „stolu“, kde je síťka.

Nyní již víme: Etherea začíná svůj pohyb směrem vzhůru, k páčce přilétá zdola, velikosti vodorovné i svislé složky se během letu nemění.

Z obrázku v zadání je vidět, že část trajektorie „po odrazu od země“ a „před odrazem od páčky“ jsou shodné. Označíme-li dobu letu zleva doprava T , v_{x0} , v_{y0} velikost vodorovné, resp. svislé složky rychlosti v okamžiku odrazu od stolu, g velikost gravitačního zrychlení na povrchu měsíce a E celkovou energii Etherey platí

$$v_{x0} = \frac{l}{T}, \quad (14)$$

$$v_{y0} = g \frac{T}{2}, \quad (15)$$

$$\frac{2E}{m} = v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = \frac{1}{4}g^2T^2 + l^2T^{-2}. \quad (16)$$

Nezávislými parametry úlohy jsou l , E , m a g . Zavedeme nyní redukovanou energii $\tilde{E} = E/(mg^2)$ a redukovanou délku $\tilde{l} = 2l/g$. Dobu pohybu T můžeme vyjádřit úpravou rovnice (16) jako

$$T_{1,2} = \sqrt{\tilde{E} \pm \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{l}^2}},$$

jak je vidět, pro jednu počáteční rychlost existují i dvě trajektorie mezi pálkami splňující zadání. Počáteční energie také musí splňovat podmínku $\tilde{E} > \tilde{l}$, jinak by došlo k více než jednomu odrazu od měsíce, a to my nechceme.

Etherea se může pohybovat po libovolné (první, nebo druhé) trajektorii tam a po libovolné zpět. Z této volby plynou také úhly natočení pálek. Zajímá-li nás maximální frekvence pohybu musí pohyb probíhat stejný čas tam i zpět (pokud pro rychlejší trajektorii přeskočí Etherea síťku cestou tam, zdolá ji i cestou zpět).

Pro toto nastavení se nemění velikost vodorovné složky rychlosti a svislá složka se změní na opačnou, a tedy páčky musí být nastaveny svisle.

Aby byla frekvence pinkání co nejvyšší, musíme maximalizovat vodorovnou složku rychlosti v_{x0} . Čím bude vyšší vodorovná složka rychlosti, tím musí být podle vztahů (14) a (15) menší výška, do které se Etherea během pohybu dostane.

Možná trajektorie je však díky síťce omezená ze spodu. Proto by měla Ethera, aby byla co nejvyděšenější, při svém pohybu míjet sítku co nejbliže.

Uvažujme nyní situaci na obrázku, páčka je ve výšce p nad stolem. Pro trajektorii mezi minutím sítky a dopadem na stůl platí první výraz níže. Studujeme-li trajektorii mezi odrazem od země a dopadem na páčku platí druhý výraz níže. Vzdálenost mezi sítkou a místem dopadu značíme x , proto platí, že vzdálenost mezi bodem dopadu a koncem stolu je $l/2 - x$. Za výraz $v_{x0}v_{y0}$ dosazujeme z (14) a (15).

$$\begin{aligned}
 hv_{x0}^2 &= \frac{gl}{2}x - \frac{g}{2}x^2, \\
 pv_{x0}^2 &= \frac{gl}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)^2.
 \end{aligned}$$

Odečtením těchto dvou rovnic od sebe, následným vyjádřením x a dosazením do první z nich, použitím $f = v_{x0}/(2l)$, dostáváme pro periodu pohybu Etherey

$$f_{\max} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{2} \left(\frac{(h+p) + 2\sqrt{h^2 - hp + p^2}}{(h-p)^2} \right)}.$$

Pokud se však budeme ptát na nejvyšší možnou frekvenci, ideální trajektorii je parabola, která protíná osu x na okrajích stolu a vrchol je totožný s horním okrajem sítky.

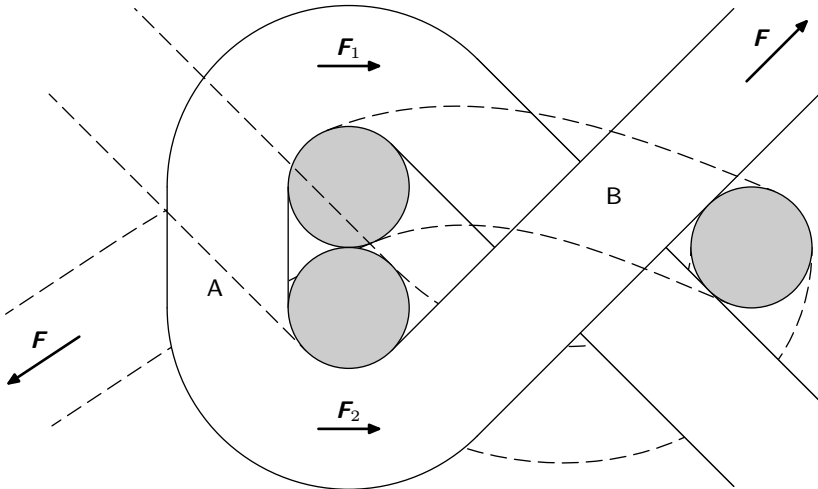
Úloha III. P ... aljeja, niti! Jsou shnilé

Zkoumejte dvojitý uzel, kterým jsou spojena dvě vlákna o poloměru r a součiniteli klidového tření f . Jakou silou musíme tahat za konce vláken, aby se uzel „proklouzl“? Dosaďte typické hodnoty pro nitky a zjistěte, zda se přitom nepřetrhne vlákno.



Obr. 19. Uvažovaný uzel

Nejprve si ujasněme, za jaké konce uzlu budeme tahat. Předpokládejme, že uzel už je utážený. Pak, budeme li tahat za horní dva konce (dle obrázku v zadání) nebo za spodní dva, uzel bude prokluzovat o poznání lépe, než když budeme tahat za levý horní a pravý dolní konec (levý dolní a pravý horní). Je to tím, že se smyčky po lanu mohou odvalovat a valivý odpor je obecně menší než smykové tření. (Vyzkoušejte si, lana se vám budou v ruce kroutit, což je způsobeno tím odvalováním.) Budeme-li tahat za levé (respektive pravé) konce, uzel se jen přesmykne, a protože taháme za konce stejného provazu, budeme tahat tak dlouho, až provaz přeskubneme.



Obr. 20. Podrobný náčrt uzlu

Pojďme se zabývat tím případem, kdy se lana po sobě nevalí, ale jen se smýkají.

- Tření v místě A: Aby klouzal bílý provázek po čárkovaném, musí síly F_1 a F_2 splňovat rovnici vláknového tření

$$F_2 > F_1 e^{\varphi f},$$

kde φ je úhel opásání (vnitřní úhel oblouku, na kterém se dotýká vlákno druhého vlákna). V našem případě je φ přibližně rovno 2π . Tedy

$$F_2 > F_1 e^{2\pi f}.$$

- Tření v místě B: Lanka bílé smyčky jsou v tomto místě překřížena a šedou smyčkou jsou tlačena k sobě. Problém smyček je symetrický, takže síla, která bílá lanka tlačí k sobě je rovna $F_1 + F_2 = F$ (uvažte si uzel a zjistíte, že lanka jsou v místě B téměř rovnoběžná). Lanka se třou jednak o sebe navzájem a pak ještě o lanka šedé smyčky, takže třecí síla připadající na jedno z nich je $F_t = Ff$.

Potřebujeme dopočítat síly F_1 a F_2 . Z obrázku je vidět, že

$$F_1 = F_t = Ff,$$

$$F_2 = F - F_t = F(1 - f).$$

Dosadíme do podmínky klouzání smyčky z bodu A, kde se pak vykrátí tažná síla F a po úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{1 - f}{e^{2\pi f}} - 1 > 0.$$

Z výsledného vzorce je vidět, že klouzání nezávisí na tažné síle, protože ona sama způsobuje tlak, který způsobuje tření, jakožto i tah, který ho musí překonat. Výsledná podmínka si klade nároky tedy pouze na koeficient tření. Tato podmínka bude splněna, pokud f bude z intervalu 0 až zhruba 0,25. To vše ovšem platí, zanedbáme-li schopnost uzlu udržet nějaké napětí, které vznikne, když uzel utáhneme. Ve skutečnosti ale toto napětí existuje a proto se proklouznutí uzlu jeví jako hraniční záležitost, která má určitou limitní sílu, za kterou začne uzel proklouzávat. Na určení této hraniční síly by bylo potřeba znát Youngův modul pružnosti nitě v obou směrech a Poissonův poměr, abychom určili napětí uzlem držené. Uzel totiž začne proklouzávat, až tažná síla překročí sílu odpovídající zadrženému napětí.

Úloha IV.1 ... modrá nebo zelená?

Hlavním zdrojem atmosférického kyslíku jsou fotosyntetizující rostliny. Představte si, že dojde k jejich masovému vymření. Na jak dlouho vystačí světové zásoby kyslíku, předpokládáme-li, že lidstvo a zbytek planety nijak nezmění svou spotřebu. Potřebné údaje určitě najdete na internetu.

Než začneme počítat, musíme si promyslet, co vlastně počítáme a co všechno je tedy nutné zahrnout. Zásoby kyslíku považujeme za dostatečné, dokud budeme schopni dýchat, a tedy přežít. Na druhou stranu nebudeme rozebírat problematiku potravních řetězců, které jsou zcela jistě taktéž závislé na kyslíku a jsou pro náš život nezbytné. Nebudeme také uvažovat žádné další zdroje kyslíku než rostliny ze zadání, objem průmyslové produkce kyslíku (100 milionů tun ročně) je totiž v porovnání se spotřebou zanedbatelný (méně než jedno procento). Nakonec musíme zvážit všechny významné konzumenty zásob kyslíku. Ty rozebereme podrobněji dále.

Nejprve se věnujme zásobám kyslíku. V atmosféře je 23 hmotnostních procent kyslíku. Vypočítáme hmotnost atmosféry m_{atm} . Dobrým odhadem je výpočet pomocí atmosférického tlaku p při aproximaci Země koulí o poloměru $r = 6378$ km. Vyjde

$$m_{\text{atm}} = \frac{4\pi r^2 p}{g},$$

Dosadíme-li hodnoty $p = 101,3$ kPa a $g = 9,81$ m·s⁻², zjistíme, že celá atmosféra váží $5,3 \cdot 10^{18}$ kg.⁸ Hmotnost atmosférického kyslíku tedy můžeme odhadnout hodnotou $m_{\text{O}_2} = 1,2 \cdot 10^{18}$ kg. Nemůžeme jej však spotřebovat do poslední molekuly, běžně se uvádí, že člověk potřebuje obsah kyslíku v dýchaném vzduchu 10 až 12 %. Jeho koncentrace tedy může klesnout přibližně na polovinu, k dispozici máme $6 \cdot 10^{17}$ kg kyslíku.

Poněkud složitější otázkou je množství spotřebovávaného kyslíku. Opomeneme-li rostliny, pak naprostou většinu kyslíku spotřebovávají lidé a ostatní živočichové při dýchání a lidé pro spalování. Udává se, že člověk spotřebuje asi 360 litrů kyslíku za den. Roční spotřebu 6,8 miliardy lidí odtud snadno určíme jako $1,3 \cdot 10^{12}$ kg.

Dále se pokusme odhadnout spotřebu kyslíku hořením v důsledku lidské činnosti. Při spalování uhlí spotřebujeme 32 kg kyslíku při vzniku 44 kg oxidu uhličitého. Tyto roční emise oxidu uhličitého odhaduje [Marland, 2006] na $2,7 \cdot 10^{13}$ kg, což hrubě odpovídá roční spotřebě $2,0 \cdot 10^{13}$ kg kyslíku. Spotřebu kyslíku živočichy odhadl před deseti lety řešitel FYKOSu Jan Kunc⁹ na $8,5 \cdot 10^{12}$ kg. Sečteme-li tyto tři hlavní faktory spotřeby kyslíku, dostáváme odhad roční spotřeby kyslíku na Zemi $3 \cdot 10^{13}$ kg. Porovnáním se zásobami kyslíku se dostáváme k odhadu 20 000 let. Toto je jistě velice dlouhá doba, navíc v atmosféře je pouze 0,36 % všeho

⁸⁾ Ve skutečnosti je to asi o 2,5 % méně. Nepřesnost je způsobená nepravidelností zemského povrchu.

⁹⁾ Viz úloha VI.3 ze XIII. ročníku FYKOSu.

kyslíku vyskytujícího se na Zemi, a tak by jeho případná produkce z oxidů byla možná.

Úloha IV.2 ... horečka

Janap šla domů z hvězdárny a při pohledu na východ Slunce ji napadlo, jak by asi jednoduše šla spočítat jeho teplota. Prozradíme vám, že Země je absolutně černé těleso s teplotou 0°C .

Ze zadání víme, že Země se chová jako absolutně černé těleso o teplotě 0°C , tedy $T = 273\text{ K}$. To znamená, že stejnou energii, kterou Země přijme, musí i vyžářit. Na pomoc si vezmeme Stefan-Boltzmanův zákon, který říká, jak se k sobě mají zářivý výkon (energie) a efektivní teplota tělesa.

$$\frac{L}{S} = \sigma T^4,$$

kde σ je Stefanova konstanta, L zářivý výkon a T je termodynamická teplota.

Indexy Z a S budeme značit hodnoty příslušející Zemi, resp. Slunci. Plochu Země, kterou zachytává sluneční svit, známe, takže vztah pro zářivý výkon můžeme vyjádřit rovnicí

$$L = 4\pi R_Z^2 \sigma T^4.$$

Zamyslíme se nad tím, jak vypadá intenzita slunečního záření ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky (poloměr dráhy označme r_d), tedy na Zemi. Intenzita záření je nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti. V našem případě budeme počítat s kruhovou drahou Země, neboť excentricita elipsy, po které Země Slunce obíhá je minimální a náš výsledek příliš neovlivní. Intenzitu záření označíme I . Platí

$$I = \frac{L}{4\pi r_d^2} = \frac{R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

Následně musíme vzít v úvahu, že velikost Slunce a Země je odlišná, tedy spočteme pouze energii, resp. zářivý výkon, který dopadne na povrch Země. Zářivý výkon, který dopadne na Zemi indexujeme písmenkem Z , tedy

$$L_Z = I \pi R_Z^2 = \frac{\pi R_Z^2 R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

V tuto chvíli můžeme opět použít Stefan-Boltzmanův zákon, ale tentokrát pro Zemi,

$$L_Z = 4\pi R_Z^2 \sigma T_Z^4.$$

Nyní využijeme toho, že efektivní teplotu Země známe ze zadání. Protože v našich úvahách uvažujeme, že Země je absolutně černým tělesem, není nutné počítat s žádnou další interakcí. Položíme rovny oba výrazy pro L_Z .

$$4\pi R_Z^2 \sigma T_Z^4 = \frac{\pi R_Z^2 R_S^2 \sigma T^4}{r_d^2}.$$

Hledaná efektivní teplota Slunce je

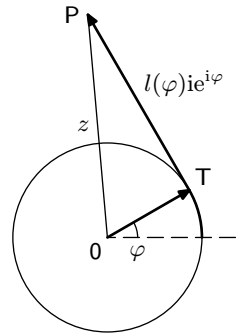
$$T = T_z \sqrt{\frac{2r_d}{R_s}}.$$

Poměr poloměru Slunce a vzdálenosti Země od Slunce je úhlový poloměr Slunce (udávaná hodnota je půl stupně). Po dosažení vychází teplota okolo 5600 K. Tato hodnota se velmi blíží běžně udávaným 5778 K.

Úloha IV.3 ... smrtící kolotoč

Na kůl o poloměru r zabodnutý do země je lanem délky l přivázané závaží hmotnosti m . Lano je napnuté a závaží leží na zemi. Lukáš se rozběhne a nakopne závaží kolmo na lano tak, že bude mít rychlost v . Lano se po tomto rázu začne navíjet na kůl. Spočítejte, jak se musí měnit koeficient smykového tření mezi závažím a zemí v závislosti na vzdálenosti od kůlu, aby při navíjení zůstala rychlost závaží konstantní.

S komplexními čísly se pracuje jako s reálnými čísly, pokud definujeme $i^2 = -1$. Obyčejné násobení komplexních čísel značíme bez tečky, skalární součin dvou komplexních čísel značíme s tečkou. V této úloze si vystačíme s tím, že dvě komplexní čísla jsou na sebe kolmá, pokud se liší o násobek imaginární jednotky (násobení imaginární jednotkou má totiž u komplexních čísel názorný význam otočení o pravý úhel). Značme stručně derivace podle času tečkou a podle úhlu čárkou, velikost komplexního čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Potom zapisujeme komplexní číslo ve tvaru $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi}$. Označme body podle obrázku 21 a φ orientovaný úhel natočení, $l_0 = l(0)$ počáteční délku provázku.



Obr. 21. Komplexní symbolika

Bod dotyku T leží vždy na kružnici poloměru r a v komplexní symbolice ho plně určuje úhel φ , takže platí

$$OT = re^{i\varphi}.$$

Provázek TP je vždy kolmý na OT, takže jeho směr určíme jako násobek $ie^{i\varphi}$. Tím máme ošetřen směr; velikost ovšem určitě bude délka nenavinutého provázku $0 < l(\varphi) = l_0 - r\varphi$, $l' = -r$, takže celkem

$$TP = ile^{i\varphi}.$$

Proto lze polohu vyjádřit

$$z = OP = OT + TP = e^{i\varphi}(r + il).$$

Tím jsme získali množinu bodů v \mathbf{C} , po níž se závaží musí pohybovat – řešíme úlohu s vazbou. Spočítejme první derivaci, která určuje směr tečný k trajektorii

$$z' = \frac{dz}{d\varphi} = ie^{i\varphi} (r + il) - e^{i\varphi} ir = -e^{i\varphi} l.$$

Tak jsme ověřili první předpoklad, který většina řešitelů nezdůvodnila, že TP a z' jsou navzájem kolmé. Dále využijeme toho, že \dot{z} a z' mají stejný argument:

$$v = \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = z' \dot{\varphi} = |v| e^{i\varphi},$$

kde jsme rozepsali komplexní rychlost na velikost $|v| = \dot{\varphi} l = \text{konst}$ a argument (velikost rychlosti je konstantní).

Teď přichází na řadu fyzika: Použijeme Newtonův druhý zákon jen ve směru pohybu, tj. z' , protože ve směru kolmém na směr pohybu se přeci kvůli vazbě těleso pohybovat nemůže (dostali bychom jen napětí vlákna, které nás nezajímá). Pro projekci do směru pohybu z' platí podle Newtonova zákona

$$m\ddot{z} \cdot z' = mgf(\varrho) \frac{\dot{z}}{|\dot{z}|} \cdot z',$$

protože třecí síla je dána výrazem $mgf(\varrho)$ ve směru jednotkového vektoru rychlosti $\dot{z}/|\dot{z}| = z'/|z'|$ a $\varrho = |z|$. Tím se vztah zjednoduší na explicitně vyjádřenou závislost

$$f(\varrho) = \frac{1}{g} \frac{\ddot{z} \cdot z'}{|z'|}.$$

Nakonec vypočteme zrychlení

$$\dot{z} = \dot{v} = \ddot{z} = -|v| e^{i\varphi} i\dot{\varphi}.$$

Teď již vidíme, že komplexní čísla \ddot{z} a z' jsou na sebe kolmá (protože se liší o násobek imaginární jednotky), takže platí $f(r) = 0$. Fyzikální podstatu, pro kterou jsme v tomto řešení připravili matematický model použitelný i pro složitější závislosti, shrneme: Hmotný bod se pohybuje po vazebné křivce a vazebná síla je kolmá na vazebnou křivku, takže nekoná práci. Aby se energie, zcela tvořená pohybovou energií, zachovávala, nesmí ji bod ztrácet třením.

Úloha IV.4 ... Terka skáče

Terka skáče z metrové zídky. Na začátku má ruce natažené zvednuté nad hlavu, během pádu ruce ale spouští. O kolik takto zmenší svou rychlost při dopadu? Kvalifikovaně odhadněte hmotnost, zrychlení a rychlost Terčiných rukou, jakožto i další potřebné parametry jejího těla, a úlohu vyřešte.

Bez ohledu na to, zda Terka hýbe či nehýbe rukama, její těžiště se pohybuje směrem dolů se zrychlením g , protože gravitace je jedinou vnější silou (odpor vzduchu jako tradičně zanedbáváme). Pohybem rukou dolů způsobilíme, že se trup i nohy pohybují směrem vzhůru vůči těžišti těla a dopad je tak zmírněn.

Zkoumejme Terku ve volně padající soustavě S' . V této soustavě nepozorujeme žádné vnější síly a situace se jeví jako v beztížném stavu. Poloha těžiště vůči S' je proto stálá a platit

$$m_r v_r' + m_z v_z' = 0,$$

kde v_r' a v_z' jsou po řadě rychlosti těžiště rukou a zbytku těla v S' a m_r , m_z hmotnosti rukou a zbytku těla. Rychlost rukou v_r' budeme pro jednoduchost považovat za konstantní. Odtud máme

$$v_z' = -\frac{m_r}{m_z} v_r',$$

přičemž polohová souřadnice přibývá ve směru pádu.

Rychlost těžiště celého těla v momentě dopadu na zem je

$$v_T = \sqrt{2g(h + \Delta)},$$

kde h je výška zídky a Δ je rozdíl polohy těžiště před skokem a po dopadu vyplývající ze spuštění rukou.

Rychlost v_z zbytku těla bez rukou, v soustavě spojené se zemí, je dána vztahem

$$v_z = v_T + v_z' = \sqrt{2g(h + \Delta)} - \frac{m_r}{m_z} v_r'.$$

Poměr rukama „ztlumené“ rychlosti dopadu vůči neztlumené rychlosti $v_n = \sqrt{2gh}$ je po malých úpravách

$$\frac{v_z}{v_n} = \sqrt{1 + \frac{\Delta}{h}} - \frac{m_r}{m_z} \frac{v_r'}{\sqrt{2gh}}$$

Nyní již stačí dosadit vhodné realistické hodnoty, například $h = 1$ m, $v_r' = 3$ m·s⁻¹, $m_r/m_z = 0,1$. Vzdálenost Δ odhadneme z poměru hmotností, uvážíme-li, že ruce váží desetinu hmotnosti těla, jako $\Delta = 5$ cm. Vyjde

$$\frac{v_z}{v_n} \approx 0,95.$$

Zbrždění není úplně zanedbatelné. Pro ztlumení nárazu je výhodné minimalizovat Δ a maximalizovat v_r' , tedy krátce a rychle mávnout rukama ve chvíli dopadu.

Úloha IV . P ... úleva u ohradníku

Zamyslete se nad tím, jak je to s odporem tekoucího elektrolytu. Je jeho velikost závislá na tom, jestli teče po směru elektrického proudu v něm, nebo naopak? Zkuste odhadnout rozdíl, je-li.

Elektrolyt je jakákoli látka obsahující volné ionty, které mohou vést elektrický proud. Moč je vodný roztok obsahující velké množství různých organických i anorganických látek, z nichž některé disociují na ionty, tedy je to elektrolyt. Abychom si úvahu zjednodušili, budeme místo o moči uvažovat o vodném roztoku kuchyňské soli. Co se stane, když do něj vložíme dvě elektrody?

Na anodě probíhá děj, při kterém chloridový anion odevzdá elektron a vybublá ven z roztoku jako elementární chlor. Na katodě přijímá molekula vody elektron a rozkládá se na hydroxidový anion a elementární vodík, který opět uniká. Když se podíváme na celý proces na větším časovém měřítku, vidíme, kterak v okolí anody ubývají chloridové anionty a v okolí katody vznikají hydroxidové anionty. To vede ke vzniku kladné nábojové hustoty v okolí anody a záporné v okolí katody, následkem čehož vzroste odpor elektrolytu (snížením koncentrace chloridových iontů kolem anody) a dochází k redistribuci iontů v prostoru.

Bylo by ovšem mylné si představovat nějaký proud jednotlivých částic. Chaotický tepelný pohyb je hlavním motivem! Ionty se k elektrodám „stahují“ z celého objemu elektrolytu. V nejjednodušším přiblížení si můžeme elektrody představit jako bodové náboje a za předpokladu lineárního chování celého jevu se potom ionty pohybují ve smělu siločar dipólu.

Z výše uvedeného snad už jasně plyne, že elektrolyza jsou spíše dva oddělené jevy, které spolu příliš nesouvisí. Proudění elektrolytu kterýmkoli směrem (tedy i prosté míchání roztoku) bude mít za následek zachování homogenity elektrolytu, tedy stavu před spuštěním elektrolyzy. Tím bude odpor pravděpodobně o něco menší, než pokud bychom elektrolyt nechali v klidu. Provedení jakéhokoli kvantitativního odhadu je mimo možnosti fykosih řešení a pravděpodobně i pisatele tohoto textu. Zakončit snad můžeme tím, že unikání bublinek vodíku a chloru má reálně za následek taktéž promíchávání elektrolytu, a tak je celá diskuze dosti akademická, měřitelné efekty budou minimální.

Úloha V.1 ... fotonová fontánka

Honza není spokojen se současným standardem postelí, a proto začal testovat levitaci na laseru. Koupil si malou kuličku s dokonale vyleštěným zrcadlovým povrchem o hmotnosti m , poloměru r a položil ji na zem. Podlaha se rozzářila lasery o vlnové délce λ_0 a plošném výkonu P . V jaké výšce nad zemí se kulička ustálila? Za bonusové body můžete vyřešit situaci, kdy je kulička skleněná. V obou případech uvažujeme, že ji laser neroztaví a že se experiment odehrává v homogenním gravitačním poli.

Ze symetrie problému je zřejmé, že kulička může konat pouze vertikální pohyb. Poloměr kuličky označíme a a vzdálenost bodu dopadu fotonu od svislé osy kuličky r . Všechny fotony, které dopadnou ve vzdálenosti r od osy, se odrazí pod stejným úhlem. Celkovou hybnost fotonů před nárazem označíme p a po nárazu p' . Pro hybnost koule budeme používat p_k , resp. p'_k .

Jestliže označíme α úhel, pro který platí, že $\cos \alpha = r/a$, bude svislá složka hybnosti odražených fotonů rovna $p' \cos 2\alpha$ (kreslete si obrázek!). Předaná svislá složka hybnosti kuličky fotonu ve vzdálenosti r je tedy

$$dp_k = p - p' \cos 2\alpha.$$

Naopak ze zákona zachování energie dostáváme, že

$$pc + \frac{p_k^2}{2m} = \frac{(p_k + dp_k)^2}{2m} + p'c,$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Nás zajímá pouze situace, kdy je hybnost kuličky nulová. Také víme, že dp_k bude velmi malé vzhledem k hybnosti předané celé kuličce (je to diferenciál), a tudíž jeho druhé mocniny můžeme zanedbat. Ze zákona zachování energie tedy dostáváme $p = p'$.

Nyní nás zajímá hybnost dopadajících fotonů. Vzhledem k tomu, že fotony ztrácí energii kvůli přítomnosti gravitačního pole, jejich hybnost bude klesat s výškou. Jestliže má laser plošný výkon P je energie a tedy i hybnost vyzářená za jednotku času z malého plošného elementu dS rovna

$$p_0 = \frac{dE}{c} = \frac{P dS dt}{c}.$$

Pro změnu vlnových délek fotonů v homogenním gravitačním poli platí vztah

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{gz}{c^2} \lambda_0,$$

kde z je změna výšky nad povrchem. Tento vztah lze snadno najít v různých tabulkách, popřípadě si ho můžete sami odvodit. Uvažujte dva rovnoměrně zrychlující pozorovatele letící ve stejném směru. Jeden vystřelí foton směrem k druhému a ten ho za nějaký čas zachytí. Touto dobou se už ale pohybuje rychleji. Použijte

klasický Dopplerův efekt k určení vlnové délky přijatého fotonu. Poslední ingredience je takzvaný princip ekvivalence, jenž byl pro Einsteina hlavní motivací k formulaci jeho gravitačního zákona.¹⁰ Zajisté je fascinující, že takový přirozený a jednoduchý princip implikuje věci jako gravitační rudý posuv!

Jestliže víme, jak se mění vlnová délka, lze z de Broglieho vztahu $p_f = h/\lambda$ (p_f je hybnost jednoho fotonu a h Planckova konstanta) vyjádřit

$$p = \frac{p_0}{1 + \frac{gz}{c^2}}.$$

Označme výšku, ve které se míček drží jako H . Pro výšku z , ve které fotony naráží do míčku tedy bude platit $z = H - \sqrt{a^2 - r^2}$. My si ale uvědomíme, že faktor před z ve vztahu pro hybnost je úměrný c^{-2} , což je strašně malé číslo, a tak můžeme předpokládat, že na kuličku všude dopadají fotony se stejnou hybností, neboli $z = H$. Výpočet by byl možný i bez tohoto předpokladu, ale potom bychom museli integrovat složitější funkci než je polynom.

Finální krok je vypočítat celkovou hybnost předanou všemi fotony míčku. Zatím známe jen dp_k , což je hybnost předaná pouze fotony narážejícími ve stejné výšce. Celkovou předanou hybnost spočítáme integrací přes plochu, ale nejdříve si uvědomíme, že tato celková změna hybnosti bude rovna impulsu gravitační síly $mg dt$.

$$mg dt = \int_0^a dp_k = \int_{r=0}^{r=a} p(1 - \cos 2\alpha).$$

(Diferenciál nechybí – připomeňte si definici p a p_0 .) Za použití $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2r^2/a^2 - 1$, plošného elementu $dS = 2\pi r dr$ a dosazením p dostáváme

$$mg = \frac{4\pi P}{c} \cdot \frac{1}{1 + \frac{gH}{c^2}} \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r dr = \frac{a^2 \pi P}{c + \frac{gH}{c}}.$$

Pokud je například $m = 1 \text{ kg}$ a $a = 1 \text{ m}$ dostáváme $H = \pi cP/g^2 - c^2/g$. Pokud by pravá strana vyšla záporně, odpovídá to situaci, kdy je laser moc slabý na to, aby kuličku udržel. Abychom se ale dostali ke kladné pravé straně, musel by být výkon řádově $10^9 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, což není zrovna malé číslo. Také vidíme, že jakmile se dostaneme na kladné hodnoty, přítomnost konstanty c v prvním členu způsobí, že i malá změna v plošném výkonu způsobí velký vzestup kuličky. Na závěr můžeme říci, že naše tvrzení o neroztavitelnosti kuličky zjevně nebylo pravdivé.

¹⁰⁾ Pokud jste o tomto principu nikdy neslyšeli, podívejte se například na Wikipedii.

Úloha V.2 ... Lukášovo péro

Ve starém gauči našel Lukáš pružinu o tuhosti k , poloměru závitů r , délky l a počtu závitů n . Protože se nudil, připojil ji ke stabilnímu zdroji elektrického proudu I . Jak se změnila její tuhost?

Jak víme již ze školy, pokud protéká proud dvěma vodiči stejným směrem, tyto se přitahují. Na rozdíl od dvou vodičů se však vodiče v cívice vzájemně odpuzují. Proto se po připojení proudu do obvodu celá pružina prodlouží, ale kromě prodloužení se také kupodivu změní její tuhost. Vypočtěme nyní tuto změnu kvantitativně.

V mnohých fyzikálních úlohách je vhodné místo počítání sil, vypočíst energii systému. Energie je totiž skalární veličina, zatímco síla je veličina vektorová. Pokud se v systému nikde neztrácí energie, např. třením, platí, že síla je derivací energie dle polohy. Platí totiž, že $W = Fs$, kde s je dráha, na které je konána práce a pokud budeme uvažovat jen malé posunutí s , změna energie systému bude také malá a dostáváme $F = dW/ds$.

Začneme nejdříve s energií stlačené pružiny. Uvažme, její klidová délka je l_0 , její aktuální délka je l a její tuhost nechť je k . Potom její energie je

$$E = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2. \quad (17)$$

Je zajímavé, že pokud posuneme počátek soustavy souřadné do rovnovážné polohy, tak energie na malém okolí nezávisí lineárně na této posunuté souřadnici. Je to náhoda, nebo to platí obecně? Představme si situaci, když by energie závisela lineárně na poloze, potom by se v jistém směru zmenšovala energie systému a ten by se začal pohybovat tímto směrem, jako na houpačce, houpe-me-li se. To by ovšem byl spor s předpokladem o rovnovážné poloze. Dále je z této úvahy vidět, že koeficient před kvadratickým členem odpovídá polovině tuhosti fiktivní pružinky.

Další fyzikálně vděčná úvaha souvisí s aproximacemi funkcí na malém okolí jistého bodu. Funkce se nejjednodušeji aproximuje polynomem. Uvažujme polynom

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Chceme nalézt takové koeficienty a_k , takové aby původní funkce co nejlépe odpovídala tomuto polynomu na okolí bodu x_0 . Máme širokou paletu možností. Jedna z metod, jak tohoto cíle dosáhnout je požadovat rovnost derivací původní funkce a tohoto polynomu v bodě x_0 . Takto vzniklému rozvoji se říká Taylorův rozvoj. Pro něj platí

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

kde x_0 je střed rozvoje.

Vraťme se nyní k našemu problému. Chceme-li vypočíst celkovou energii systému, je možno odděleně vypočíst mechanickou energii a elektromagnetickou energii.

Označme N počet závitů cívky, l její aktuální délku, I proud, který jí prochází, k její tuhost bez procházejícího proudu a R její poloměr. Pro mechanickou energii platí

$$E_{\text{mech}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2.$$

Víme, že energie elektromagnetického pole cívky o indukčnosti L je $E_{\text{EM}} = LI^2/2$. Naším dalším cílem bude vypočítat indukčnost této cívky a zjistit, jak závisí na l .

Víme, že pokud se nachází cívka v magnetickém poli, pro indukované napětí platí $U = -d\Phi/dt$, kde Φ je magnetický tok cívkou. Dále víme, že pro indukované napětí na cívce platí $U = -L dI/dt$, kde I je proud protékající cívkou a L její indukčnost. V našem případě tok Φ budí sama cívka. Srovnáním těchto výrazů dostáváme

$$L = \frac{d\Phi}{dI}.$$

Cívku budeme aproximovat solenoidem. Z Ampérova zákona pro intenzitu magnetického pole uvnitř cívky platí

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

a pro celkový tok magnetického pole platí

$$\Phi = BSN = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l} I \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2}{l},$$

kde $S = \pi R^2$ je plocha jednoho závitu.

Celková energie pružiny, kterou protéká proud je tedy

$$E = E_{\text{mech}} + E_{\text{EM}} = \frac{1}{2} \left(k(l - l_0)^2 + \mu_0 \frac{\pi R^2 N^2 I^2}{l} \right). \quad (18)$$

Označme nyní $A = \frac{1}{2} \mu_0 \pi R^2 N^2 I^2$. Potom pro elektromagnetickou energii platí

$$E_{\text{EM}} = \frac{A}{l} = \frac{A}{l_0 \left(1 + \left(\frac{l}{l_0} - 1 \right) \right)} = \frac{A}{l_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l_0}}.$$

kde jsme označili $\Delta l = l - l_0$. Druhý zlomek je však součtem geometrické řady s kvocientem $-\Delta l/l_0$. Lze však též nahlédnout, že jde o výše zmiňovaný Taylorův rozvoj. Proto můžeme psát

$$E_{\text{EM}} = \frac{A}{l_0} \left(1 - \frac{\Delta l}{l_0} + \left(\frac{\Delta l}{l_0} \right)^2 - \dots \right). \quad (19)$$

Zajímalo-li by nás přesné určení rovnovážné polohy, museli bychom vypočítat, pro jaké l platí, $dE/dl = 0$. Vzhledem k malé elektromagnetické síle ve srovnání s mechanickou můžeme posunutí střední polohy zanedbat.

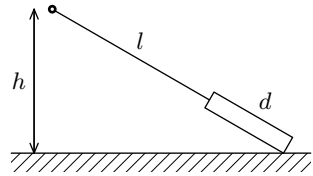
Než budeme moci postupovat dále je potřeba si ujasnit řádové velikosti výše používaných veličin. Uvažujme nyní pružinu s těmito parametry: tuhost pružiny $k \approx 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, klidová délka $l_0 \approx 0,1 \text{ m}$, počet závitů $N \approx 100$, poloměr pružiny $R \approx 0,01 \text{ m}$, procházející proud $I \approx 1 \text{ A}$ a uvažovaná výchylka $\Delta l = 0,01 \text{ m}$. Pro tyto parametry vychází síla, vyvolaná pružinou při maximální výchylce $F_p \approx 0,1 \text{ N}$, síla vyvolaná proudem v pružině $F_{EM_0} \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ N}$. Z toho plyne, že rovnovážná poloha pružiny se změní jen nepatrně. Proto lze při určování změny tuhosti pružiny použít rozvoj okolo l_0 a uvažovat kvadratický člen. S odvoláním na diskusi výše víme, že tuhost fiktivní pružinky je rovna dvojnásobku koeficientu a_2 . Z rovnic (18) a (19) plyne

$$k_{\text{celk}} = k + \frac{\mu_0 \pi R^2 N^2 I^2}{l_0^3}.$$

Pro výše uvedené hodnoty vychází $k_{\text{celk}}/k - 1 \approx 4 \cdot 10^{-4}$. Změna tuhosti připojením zdroje proudu je překvapivě pouze o tři řády menší, než je mechanická tuhost uvažované pružiny. Znamená to tedy, že změna tuhosti je bez větších problémů měřitelná.

Úloha V.3 ... vozík

Na pevném závěsu ve výšce $h = 1 \text{ m}$ nad zemí je upevněn provázek délky $l = 1,5 \text{ m}$. Na konci provázku je přivázána deska délky $d = 0,5 \text{ m}$ tak, že provázek je napnut a spolu s deskou leží v jedné přímce (viz obrázek). Když soustavu uvolníme, deska nejprve po hraně klouže bez tření, dokud nedopadne celou svou délkou na zem. Potom se pohybuje proti třecí síle s koeficientem smykového tření f . Spočítejte, jaká musí být jeho hodnota, aby deska svým bližším koncem doklouzala přesně pod závěs.



Obr. 22. Závěs s tyčí

Řešení tohoto příkladu začneme odzadu. Když deska dopadne na zem, bude mít x -ovou složku rychlosti v_x a její levý okraj bude od závěsu ve vodorovné vzdálenosti, kterou jednoduše vypočteme z Pythagorovy věty

$$s = \sqrt{l^2 - h^2}.$$

Dál bude deska konat rovnoměrně zpomalený pohyb se zrychlením gf , než se zastaví. Analogicky volnému pádu máme $v_x = \sqrt{2gf s}$, a tedy

$$f = \frac{v_x^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2}}.$$

Teď už zbývá pouze vypočítat x -ovou složku rychlosti těžiště desky. Použijeme k tomu zákon zachování energie. Pro to ale potřebujeme zjistit, jaká část potenciální energie se přemění na rotaci okolo těžiště a jaká část se přemění na jeho

posun. K tomu musíme vědět, jakou rychlostí se bude těžiště pohybovat a jaká bude úhlová rychlost rotace tyče kolem něj.

Co se stane po dopadu? Kdybychom uvažovali, že tyč i podložka jsou dokonale tuhé, proběhne pružný ráz a následný pohyb nebude tak jednoduchý, jak se píše v zadání. Protože se deska neodrazí, musí se ve směru osy y úplně zastavit. Při dopadu dojde k nějakým ztrátám energie, ale vzhledem k tomu, že v ose x nejsou žádné zábrany, rychlost v tomto směru zůstane nezměněna.

Zaměříme se na situaci těsně před dopadem. Konec závěsu se pohybuje po kružnici se středem v závěsu a poloměrem r a proto má rychlost \mathbf{v}_1 kolmou na provázek. Tu si můžeme rozepsat po složkách na $\mathbf{v}_1 = (v_x, -v_y)$ (mínus proto, že rychlost směřuje dolů). Když se podíváme na druhý konec tyče, vidíme, že se pohybuje směrem podél země. Protože je tyč dokonale tuhá, musí být x -ová složka rychlosti druhého konce stejná, tedy $\mathbf{v}_2 = (v_x, 0)$. Jaká teď bude rychlost těžiště? Bude to aritmetický průměr rychlosti levého a pravého krajního bodu. Rychlost jednotlivých bodů podél tyče totiž musí spojitě přecházet z hodnoty napravo v hodnotu nalevo. Tedy rychlost těžiště bude

$$\mathbf{v}_t = \left(v_x, -\frac{v_y}{2} \right).$$

Jaká bude úhlová rychlost rotace? Když odečteme rychlost těžiště od rychlostí obou krajních bodů, měli bychom dostat navzájem opačné rychlosti, ze kterých bychom už měli být schopni úhlovou rychlost vypočítat, protože $\omega = v/r = 2v/d$. Opravdu vyjdou dvě opačné rychlosti o velikosti $v_y/2$, a úhlová rychlost rotace tedy bude $\omega = v_y/d$.

Zapišme tedy zákon zachování energie s tím, co víme:

$$\begin{aligned} mgy &= \frac{m}{2} \left(v_x^2 + \frac{v_y^2}{4} \right) + \frac{v_y^2 J}{2d^2}, \\ \frac{ghd}{l+d} &= v_x^2 + \frac{v_y^2}{3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Ve druhém řádku jsme dosadili za počáteční výšku těžiště a moment setrvačnosti tyče vůči těžišti (všeobecně známá hodnota $md^2/12$) a rovnici dále zjednodušili.

Nicméně stále máme příliš neznámých na jednu rovnici. Využijeme tedy již zmíněného poznatku o směru rychlosti levého konce desky. Protože známe parametry závěsu, umíme říct, pod jakým úhlem α je skloněno lanko při doteku desky se zemí. Protože je rychlost na lanko kolmá, známe vztahy mezi jejími složkami

$$\mathbf{v}_1 = (v_x, -v_y) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha),$$

tedy $v_y = \operatorname{tg} \alpha$, $v_x = \sqrt{(l/h)^2 - 1}$. Dosazením do (20) máme

$$v_x = h \sqrt{\frac{3ghd}{(l+d)(2h^2 + l^2)}}.$$

Takže se po dosazení konečně dostáváme k výsledku

$$f = \frac{v_x^2}{2g} \frac{1}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{3h^3 d}{2(l+d)(2h^2 + l^2)\sqrt{l^2 - h^2}} \approx 0,08.$$

Úloha V.4 ... drtivý dopad

Všichni dobře víme, že se 21. prosince 2012 se na své cestě ke Slunci srazí se Zemí asteroid (pohybuje se ve stejné rovině jako Země). Uvažme, že se pohybuje po protáhlé eliptické dráze s hlavní poloosou délky 4 AU a excentricitou 0,2 AU. Lidstvo bylo moc zaneprázdněno, a tak se problém začal řešit až 1. prosince 2012. Po jaké dráze musí udatná světová autorita vystřelit raketu s jadernou hlavicí, aby včas odvrátila konec světa?

Uvažujme, že raketa vystřelí v okamžik, kdy jsou splněny předpoklady, že všechny trajektorie v uvažovaném čase můžeme nahradit přibližně úsečkami a zároveň tak, aby k výbuchu došlo dostatečně daleko od Země, aby ji trosky minuly. V dalším budeme uvažovat, že autorita vystřelí, hned jak se to dozví.

Zopakujme nejprve základní poznatky o Keplerově úloze. Platí Keplerovy zákony: 1) planetka se pohybuje po elipse se Sluncem v ohnisku, 2) moment hybnosti planetky se zachovává a 3) pro různá tělesa je čtverec oběžné doby dělený krychlí velké poloosy stejný.

Pokud napíšeme zákon zachování energie pro přísluní a odsluní (které nadále se společným ohniskem tvoří souřadnou soustavu) a uvažíme, že v těchto polohách je stejný moment hybnosti, dostaneme pro celkovou mechanickou energii

$$E = -\frac{GM}{2aI}.$$

kde G značí gravitační konstantu, M hmotnost Slunce a a je délka hlavní poloosy elipsy. Proto ve vzdálenosti r od Slunce má planetka rychlost

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Podle třetího Keplerova zákona odhadneme dobu oběhu planetky

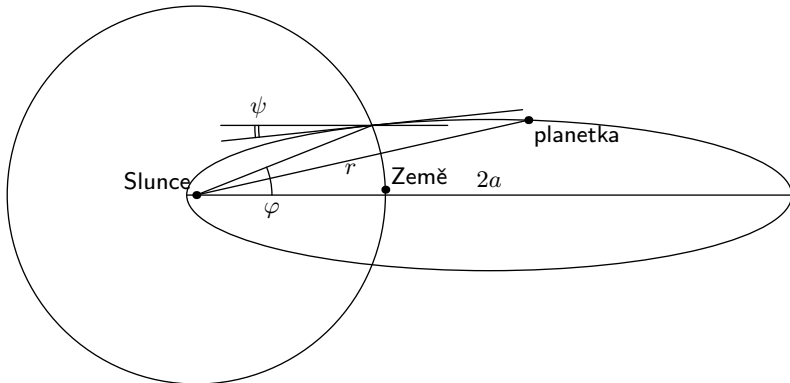
$$T' = \left(\frac{a'}{a} \right)^{3/2} T = 3000 \text{ d},$$

takže z tohoto hlediska je 20 dnů kratičká doba a nahrazení přímkou trajektorii planetky je ospravedlněné. Za trajektorii Země budeme dále považovat kružnici. Za 20 dní se Země posune přibližně o 20° . Planetka se pohybuje po elipse, a tedy musí platit

$$r = \frac{b^2}{a} \frac{1}{1 - e \cos \varphi},$$

kde numerická excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a \doteq 0,99875$. Odsud vyjádříme úhel průsečíku se Zemí

$$\cos \varphi = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{b^2}{a} \right) \Rightarrow \varphi = 7,59^\circ.$$



Obr. 23. Vzájemná poloha Země a nebezpečné planety 1. prosince 2012

Teď zjistíme směrnicí tečny k elipse v tomto bodě. Uvažujme rovnici elipsy ve středovém tvaru

$$\frac{(x - ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jejím diferencováním zjistíme směrnicí tečny

$$\frac{(x - ae)}{a^2} dx + \frac{y}{b^2} dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x - ae}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{r \cos \varphi - ae}{r \sin \varphi}.$$

Dosazením φ a $r = 1 \text{ AU}$ zjistíme úhel, který svírá tečna trajektorie planety v očekávaném místě střetu se zemí s ohniskovou osou

$$\text{tg } \psi = \frac{dy}{dx} \doteq 0,05686 \Rightarrow \psi = 3,25^\circ.$$

Proto můžeme psát pro pohyb planety obdobně jako u vrhu šikmého s rychlostí v ve vakuu

$$x_p = v \cos \psi \cdot (20 \text{ d} - t) + \cos \varphi,$$

$$y_p = v \sin \psi \cdot (20 \text{ d} - t) + \sin \varphi.$$

Pro úhel, který oběhne planeta Země za dvacet dnů, platí $\vartheta = (20/365) \cdot 360^\circ$. Můžeme napsat rovnice pro pohyb rakety vystřelené rychlostí w , kterou zvolíme tečnou k trajektorii v místě odpalu,

$$x_r = -w \sin(\varphi - \vartheta) \cdot t + \cos(\varphi - \vartheta),$$

$$y_r = w \cos(\varphi - \vartheta) \cdot t + \sin(\varphi - \vartheta).$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých t a w . Tato soustava má řešení

$$t = 17,33 \text{ d},$$

$$w = 0,0204 \text{ AU} \cdot \text{d}^{-1}.$$

Zbývá uvědomit si, že Země má na své oběžné dráze rychlost $2\pi \cdot 1/365 = 0,0172 \text{ AU} \cdot \text{d}^{-1}$ a rozdíl těchto rychlostí tvoří rychlost $5526 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, se kterou musí jaderná hlavice opustět ve směru tečném k trajektorii Země základnu, která je umístěná na oběžné dráze tak, abychom mohli zanedbat rozdíl potenciální energie gravitačního pole Země.

Závěrem zbývá konstatovat, že kdyby malé planetky nestřežily americké radary, ale posádka Fyzikálního korespondenčního semináře, tak se tím vyřeší vlastně všechny problémy. Civilizace by totiž zanikla; řešitelé nedodali žádný správný výsledek a autorské řešení se do 20 dnů určitě nevešlo.

Úloha V. P ... tunelářská

Kryštof se vydal na cestu vlakem a spokojeně usnul. Když se probudil v tunelu, cítil, že jej nějaká síla táhne směrem na jednu stranu. Ve vlaku bylo sice světlo, ale ven neviděl. Vzpomněl si, že je v zatáčkách trať klopená a uvědomil si, že i když si pamatuje původní směr jízdy, vůbec neví, na kterou stranu vlak zatáčí. Nepozná totiž rozdíl mezi stavem, kdy vlevo zatáčející vlak jede dostatečně pomalu a výsledná síla míří směrem do zatáčky, a situací, kdy je vlak dostatečně rychlý, zatáčí vpravo a síla směřuje ven ze zatáčky. Navrhněte experiment, který Kryštofovi pomůže tuto situaci vyřešit. Čím víc variant, tím lepší bodové hodnocení.

Popíšeme přímočaré řešení, které naprostá většina řešitelů opomenula. K jeho realizaci stačí olovnice. Změříme úhel který svírá olovnice vůči podlaze na přímce kolmé ke směru pohybu ve třech bodech. Budou-li tyto body od sebe vzdáleny r , pak při poloměru zatáčky R bude odstředivá síla úměrná $1/(R - r)$, $1/R$ a $1/(R + r)$. Rozdíl mezi úhlem naměřeným na vnitřní straně zatáčky a středem bude vždy větší než mezi úhlem na vnější straně zatáčky a opět středem. Tato vlastnost souvisí s monotonií funkce $\text{arctg}(1/x)$ pro kladné hodnoty. Toto si rozmyslete, případně si sami ozkoušejte pro vhodně zvolené parametry. Pokud bychom měli siloměr, tak by nám dokonce stačila pouze dvě měření, neboť výsledná síla s rostoucí odstředivou silou samozřejmě roste.

Kdybychom si náhodou nepamatovali směr pohybu, nebylo by nic snazšího než se projít po a proti směru jízdy opět s olovnicí v ruce a pozorovat, jak se mění výchylka. Směr odstředivé síly už známe z minulého měření, a tak nám stačí sledovat změnu její velikosti. Nakonec již snadno určíme, kterým směrem jsme svoji rychlost vůči Zemi zvýšili, a kdy naopak snížili.

Z dalších řešení uvedme nejčastěji navrhovaný kompas, jehož střílka ukazuje neustále na sever a snadno tedy určíme směr otáčení. Dále pak Foucaultovo kyvadlo, kterým byla v roce 1851 demonstrována rotace Země, což je problém v zásadě

obdobný. Naopak některými navrhovaný poslech frekvence hluku od kol a následné odvození rychlosti by k řešení nevedlo, neboť směr výsledné síly není určen ani tak rychlou, resp. pomalou jízdou, jako spíše jízdou, na kterou bylo projektováno klopení zatáčky. Tato rychlost se však samozřejmě mezi tratěmi a zatáčkami liší.

Řešení nedošlo mnoho, většina z nich však obsahovala některou ze správných metod. Nebojte se v podobných úlohách popsat více nápadů a popustte uzdu fantazii, ve fyzice se přeci kreativita cení.

Nakonec dodejme, že popisovaná situace skutečně nastává. Například v pražském metru je na lince B v ranní špičce takový provoz, že mezi stanicemi Anděl a Karlovo náměstí, kde je pravotočivá zatáčka, jedou vlaky pomaleji, než bylo původně plánováno. Klopení zatáčky je pro tak nízké rychlosti moc velké, a tak je patrné působení výsledné síly do středu zatáčky. Zkušenost naopak velí, že výslednice působících sil míří ze zatáčky ven a pasažérům se zdá, že metro zatáčí doleva. Prudké klopení zatáček metra je dobře pozorovatelné při výjimečných situacích, kdy metro v zatáčce dokonce zastaví.

Úloha VI.1 ... husitská

Na nakloněné rovině s úhlem sklonu α stojí směrem po spádnici vozová hradba. Vozy jsou stejně těžké, mezi sousedními dvěma je vzdálenost s , celkem jich je N . Na počátku jsou všechny zabrzděné. Mazaný bratr Žižka odbrzdí horní z nich a ten se začne pohybovat směrem dolů a bere s sebou další vozy (hned po nárazu se nabouraný vůz odbrzdí a pokračuje dolů spolu s tím, který do něj narazil). Vypočítejte, jakou rychlost bude mít celá vozová hradba po posledním nárazu. Jako bonus můžete určit, jaké by měly být hmotnosti vozů tak, aby se rychlost hradby mezi dvěma nárazy nezměnila.

Předpokládejme, že srážky mezi vozy jsou dokonale nepružné, tzn. po nárazu se vozy spojí a pokračují spolu (podobně jako vagónky v železničních modelech).

Necheť má horní vůz index 1, dolní N . Dále označme w_i rychlost vozů 1, ..., i těsně po srážce a v_i rychlost týchž vozů před následující srážkou.

Abychom zjistili rychlost prvních i vozů po srážce využijeme zákon zachování hybnosti

$$v_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} m_j = w_i \sum_{j=1}^i m_j \quad \Rightarrow \quad w_i = v_{i-1} \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j}.$$

Dále potřebujeme znát rychlost i vozů po rozjetí. Pomůže nám zákon zachování energie

$$\frac{1}{2} v_i^2 \sum_{j=1}^i m_j = \frac{1}{2} w_i^2 \sum_{j=1}^i m_j + gs \sin \alpha \sum_{j=1}^i m_j \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{w_i^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

Výše uvedené vztahy použijeme k vytvoření rekurentního vzorce pro w_i ; první člen je $w_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a dále máme

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} m_j}{\sum_{j=1}^i m_j} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

Stejné hmotnosti rekurenci zjednoduší na

$$w_i = \frac{i-1}{i} \sqrt{w_{i-1}^2 + 2gs \sin \alpha}.$$

To je diferenční rovnice, jejíž řešení lze „uhodnout“¹¹ a správnost výsledku lze dokázat indukcí. Speciálně pro $i = N$ máme

$$w_N = \sqrt{\frac{(N-1)(2N-1)}{3N}} gs \sin \alpha.$$

Proberme nyní případ, kdy požadujeme stejné rychlosti soustavy vozů po nárazu. Rychlost, kterou chceme zachovat je

$$w_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_1.$$

Dále musí platit $w_{i+1} = w_i$, což při využití rekurentního vztahu dává

$$m_{i+1} = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} - 1 \right) \sum_{j=1}^i m_j.$$

V případě stejné rychlosti před srážkou je jasné, že první vůz musí před prvním nárazem získat vyšší rychlost než ostatní vozy. Nechť je tedy mezeru mezi prvním a druhým vozem λ -násobek normální vzdálenosti s . Nyní máme podmínky $m_1 = m$ a $v_i = v_1 = \sqrt{2g\lambda s \sin \alpha}$. Jejich dosazením do rekurentních vztahů a úpravou získáváme

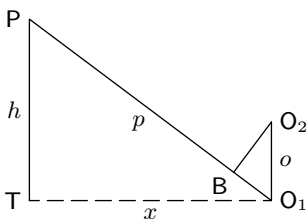
$$\lambda = \lambda \left(\frac{\sum_{j=1}^i m_j}{\sum_{j=1}^i m_j + m_{i+1}} \right)^2 + 1 \Rightarrow m_{i+1} = \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} - 1 \right) \sum_{j=1}^i m_j.$$

Často jste při srážkách používali zákon zachování kinetické energie, což by odpovídalo pružným srážkám, jelikož však vozy pokračovaly spojené, jednalo se o srážky nepružné. Mnoho z vás též uvažovalo, že rychlost spojených vozů mezi srážkami vzroste vždy o konstantu, což však není pravda, takto se mění jen kinetická energie vozů. Rekurentních posloupností se nehlédíc na množství nejméně lekali bratři *Patrik Švančara* a *Lubomír Grund*.

¹¹⁾ Jako odrazový můstek poslouží stránka <http://www.wolframalpha.com/>.

Úloha VI.2 ... šmírák Honza

Honza stojí na Žižkovské věži a hledí lidem do oken. Okna jsou všechna namířena k němu, mají stejnou velikost a jsou ve stejné výšce od země. V jak vzdáleném okruhu mají nejméně soukromí? Honza nemá dalekohled.



Obr. 24. Honzova situace

$|\text{PO}_1| = p$, rovnici

$$\text{tg } \varphi = \frac{|\text{O}_2\text{B}|}{|\text{BP}|} = \frac{\frac{x\text{o}}{p}}{p - \frac{oh}{p}} = \frac{x\text{o}}{x^2 + h^2 - oh}.$$

Protože tangens je prostá a rostoucí, stačí hledat maximum vnitřní funkce $\text{tg } \varphi(x)$. Zkuste si nakreslit graf funkce $f(x) = x/(x^2 + a^2)$. Uvažujme vodorovnou přímku C , která se právě dotýká $f(x)$ v maximum. Pak dostaneme rovnici $f(x) = C$, neboli kvadratickou rovnici

$$Cx^2 - x + Ca^2 = 0,$$

která musí mít právě jeden kořen, takže její diskriminant $D = 1 - 4C^2a^2$ musí zmizet. Proto $C = \pm 1/2a$ a rovnici řeší $x = 1/2C = a$ (záporný kořen je minimum). Úhlový průměr má tedy maximum pro okna ve vzdálenosti $x = a = \sqrt{h(h - o)}$.

Úloha VI.3 ... atomový kondenzátor

Lukáš si koupil uranový atom a nenapadlo jej nic lepšího, než z něj postupně odebrat elektrony. Když odebral n -tý, s údivem zjistil, že se hmotnost atomu zvětšila. Co způsobilo tento jev? Jaké bylo ono n ?

Zamysleme se nejprve nad tím, jak vypadá atom. První teorie, která smyslu- plně popisovala elektrony obíhající kolem jádra, byla Bohrova. Bohr předpoklá- dal, že elektron obíhá kolem jádra po kružnici, a pro jeho moment hybnosti platí kvantovací podmínka $L = n\hbar$. Vypočteme-li možné energie takto se pohybujícího elektronu, zjistíme, že platí

$$E = Z^2 \frac{R}{n^2}. \quad (21)$$

kde Z je protonové číslo tohoto prvku, R je tzv. Rydbergova konstanta, která má velikost 13,6 eV.

Tento popis je vhodný především pro atomy, které mají malý počet elektronů v obalu. Uvažujeme-li však těžší atomy, které jsou jen slabě ionizované, na vytrhá- vaný elektron nepůsobí elektrostaticky pouze kladně nabitě jádro, které je přita- huje, ale také ostatní přítomné elektrony, které je odpuzují. Proto celková energie potřebná k odtržení elektronu od atomu je menší, než vypočtená dle vztahu (21). Zavádí se proto tzv. konstanty stínění s . Pro energii potřebnou k odtržení elek- tronu na n -té slupce platí vztah

$$E = (Z - s)^2 \frac{R}{n^2}.$$

Zamysleme se nyní ještě nad tím, co považujeme za hmotnost atomu. Celková hmotnost atomu je rovna součtu jeho klidové hmotnosti a hmotnosti elektrosta- tického pole v jeho okolí. Hmotnost tohoto pole určíme ze známého Einsteinova vztahu $E = mc^2$. Energie tohoto pole je však rovna práci, kterou jsme vyko- nali při odtrhávání elektronu od atomu. Budeme-li nyní působit silou na atom, tento se začne pohybovat konkrétním směrem, ale spolu s ním musíme též urych- lit elektrostatické pole, jež se nachází v jeho okolí. Použijeme-li ještě všeobecně uznávanou rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti, máme všechny podklady pro vyřčení výše uvedené myšlenky o celkové hmotnosti ionizovaného atomu.

Vraťme se nyní k našemu problému. Atom uranu má protonové číslo $Z = 92$. Pokud bychom užili vztah (21) a odtrhli elektron ze slupky 1s, elektrostatické pole v okolí tohoto atomu bude mít energii 115 keV, což je asi pětina klidové hmotnosti elektronu. Je sice možné vytrhnout elektron z této slupky, ale ostatní elektrony v atomu toto volné místo zaplní v řádu femtosekund, popřípadě dojde ještě k vyzaření tzv. Augerových elektronů. Tyto elektrony se původně nacházely na vyšších elektronových hladinách, ale vlivem velkého množství energie jsou od atomu nakonec odtrženy. Z tohoto je vidět, že odtrhneme-li libovolný elektron tohoto atomu, jeho celková hmotnost se sníží. Odtrhneme-li další elektron, kon- stanta stínění se sice zmenší, ale není to postačující vliv ani v případě odtržení posledního elektronu, kdy je konstanta stínění rovna 0.

Zamysleme se ještě nad tím, kolik protonů v jádře by musel mít atom, aby při hypotetickém odtržení elektronu s nejnižší energií došlo ke zvýšení jeho hmotnosti. K tomuto výsledku se dostaneme nejjednodušeji použitím vztahu (21), kde položíme $n = 1$, což odpovídá slupce nejbližší k jádru. Za energii E budeme dosazovat klidovou energii elektronu, tj. 511 keV. Konstantu stínění budeme pro jednoduchost uvažovat nulovou, i když konkrétně pro případ mědi $Z = 32$ je konstanta stínění rovna přibližně 6. Z této úvahy dostáváme pro protonové číslo Z podmínku

$$Z \geq \sqrt{\frac{E}{R}} = \sqrt{\frac{511 \cdot 10^3}{13,6}} \doteq 194,$$

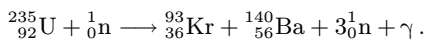
kteří však nepřísluší žádnému známému prvku.

Úloha VI.4 ... podkritické polokoule

Když Lukáše přestala bavit ionizace jednotlivých atomů, objednal si uranu víc. Doručili mu dvě přesné polokoule, každou o hmotnosti m ($m_k/2 < m < m_k$, kde m_k je kritická hmotnost). Lukáš je nastavil rovnými stranami k sobě a začal je přibližovat. V jaké vzdálenosti d mezi koulemi byl jeho pokus přerušen zažehnutím řetězové reakce?

Situace, kterou popisujeme v zadání, je sice kvůli protiteroristickým opatřením poměrně nepravděpodobná, ale má reálný podklad. Chcete-li totiž sestrojít atomovou pumu, musíte si na tento efekt dát pozor. Pokud je zbraň tzv. dělového typu a při odpálení selže roznětka, což má za následek jen pomalé přiblížení podkritických polokoulí k sobě, dojde při určité vzdálenosti k výbuchu a zbytek štěpného materiálu bude odhozen od sebe, aniž by v něm řetězová reakce proběhla podle původních požadavků.

Za štěpení uranu může např. následující reakce:



Přičemž produkty reakce nesou energii 193 MeV. To je v jaderných rozměrech poměrně dost (samotné neutrony mají asi 6 MeV). Na rozštěpení je totiž potřeba neutron, který je pomalý a tedy pravděpodobnost, se kterou některý z emitovaných elektronů spustí další reakci, je také velmi malá. Řetězovou reakcí pak rozumíme stav, kdy ze štěpení v jedné generaci neutronů vznikne minimálně stejný počet reakcí v generaci následující. Budeme uvažovat rovnost

$$n_r^2 = n_r^1 = p(kn_r - n_u), \quad (22)$$

kde n_r^1 (resp. n_r^2) je počet reakcí v první resp. druhé generaci, p pravděpodobnost záchytu neutronu do reakce, k počet neutronů vzniklých jednou reakcí a n_u počet uniklých neutronů.

Jak spočítáme počet reakcí? Na tom se podílí plno různých faktorů, zvláště tzv. účinný průřez, ale pro naše účely bude stačit říct, že bude přímo úměrný počtu jader.

$$n_r = a \frac{m}{M},$$

přičemž do konstanty a jsme zahrnuli vše, co ovlivňuje pravděpodobnost srážky a reakce.

Kolik neutronů uteče? To závisí především na povrchu tělesa, o které se zajímáme. Uvážíme-li, že z něj unikají rovnoměrně, můžeme psát

$$n_u = bS,$$

kde S je povrch tělesa a b je počet neutronů emitovaných z jednotky plochy. Tedy po dosazení do rovnice (22) dostaneme vztah pro kritickou hmotnost pro zapálení reakce

$$m_k = \frac{aM}{k - \frac{1}{p}} bS_k. \quad (23)$$

Jak to bude s polokoulemi? Z protilehlých rovinných částí jsou emitovány neutrony, které by, pokud by byly polokoule spojeny, prošly na druhou stranu a normálně by vstupovaly do reakcí. Jenže tím, jak mezi koulemi vytvoříme skulinu, jich část uteče. To způsobí změnu v rovnici (22).

$$n_r = p(kn_r - n_u - n_{uv}),$$

přidáme nový člen popisující neutrony unikající vzduchovou štěrbinou n_{uv} . Ten si pomocí rovnice (23) můžeme jednoduše vyjádřit. Teď již ale použijeme hodnoty ze zadání – kouli o hmotnosti $2m$ a povrchu S .

$$n_{uv} = bS_k \left(\frac{m}{m_k} - \frac{S}{S_k} \right).$$

Budeme uvažovat, že ze vzduchové štěrbinou vylétají neutrony stejně jako z povrchu uranu, tedy $n_{uv} = 2\pi rdb$. Dosadíme do minulé rovnice (také využijeme toho, jaký je vzájemný vztah r , S a m) a dostaneme výsledek

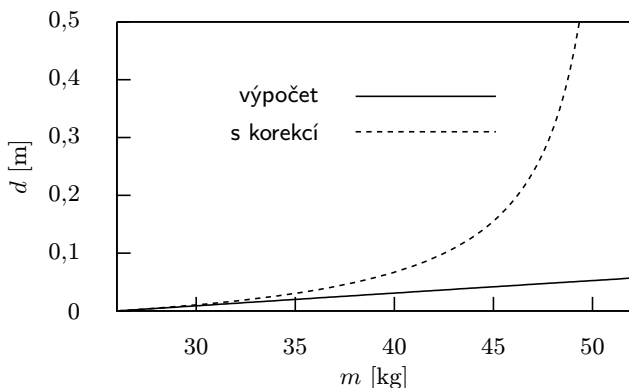
$$d = \left(2\sqrt[3]{\frac{m}{m_k}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \varrho}}.$$

Pro náš výsledek by měly platit dvě okrajové podmínky. Pro $m/m_k = 1/2$ by mělo platit, že $d = 0$. To platí, při této hodnotě se závorka, tedy i celý výraz, vynuluje. Ovšem druhá podmínka splněna není, pro $m/m_k = 1$ by měla stačit libovolná vzdálenost na zážeh reakce (tedy, že i nekonečně vzdálené polokoule vybuchnou¹²⁾). Výsledek bychom mohli opravit např. do tohoto tvaru

$$d = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{m}{m_k} \right)} \left(2\sqrt[3]{\frac{m}{m_k}} - 2^{2/3} \right) \sqrt[3]{\frac{3m}{\pi \varrho}},$$

¹²⁾ Zde schválně nediskutujeme jejich tvar. Kritická hmotnost pro polokouli vyjde větší než pro kouli.

ovšem otázka je, nakolik tento výsledek odpovídá reálným hodnotám. Dosadíme-li správné materiálové konstanty ($m_k \approx 52 \text{ kg}$, $\rho \approx 19000 \text{ kg/m}^3$), dostaneme pro $m/m_k = 3/4$ hodnotu okolo 10 cm, což je docela dobré. Jak si vede výsledek s korekcí oproti vypočtenému je zobrazeno v obrázku 25.



Obr. 25. Porovnání obou metod

Úloha VI. P ... *tora tora tora*

Japonský pilot za druhé světové války dostal ve výšce 5 km nad zemí žízeň. Zjistil však, že mu dali jen láhve s limonádou. Co má dělat?

Zamysleme se nad tím, kde je jádro problému. První problém je ve výšce. V pěti tisících metrech nad mořem už je pořádná zima (cca -18°C) a mohli bychom namítnout, že pilot za druhé světové války neměl bůhvíjakou techniku a za chvíli by umrzl, popřípadě by se nevyrovnal s výškovou nemocí (na takovou výšku si horolezci zvykají i několik dní). Teplota napovídá také tomu, že by mu jakékoliv pití zmrzlo. Ale podívejme se na hypotetický případ (v reálu by pilot letadla v této nadmořské výšce už skutečně musel mít nějaký přístroj na podporu dýchání), kdy pilot přežije takovou výšku, řídký vzduch a nepotřebuje kabinu, co umí vyrovnat tlaky, která je dnes přítomna ve všech dopravních letadlech. V tu chvíli přijde na řadu ona limonáda.

Proč by měl pilot hořekovat nad limonádou? Pomiňme případ, že mu nechutná. Problém limonády tkví v přítomnosti bublinek, tedy oxidu uhličitého. Většina již okusila, co se stane, když neopatrně otevřete limonádu. Vyublá. Důvody pro to mohou být dva:

- S limonádou se zatřepe.
- Limonáda zůstane ve velmi horkém prostředí (auto za horkého letního dne, podle Mythbusters limonáda může v takovém případě dokonce sama vybuchnout).

Proč se tomu tak děje? Když se vyrábí soda, je do ní pod velkým tlakem vpraven oxid uhličitý, v tekutině se ho v tomto případě rozpustí mnohem více, než za normálního atmosférického tlaku. Zatřesení limonádou způsobí, že se bublinky usadí na stěnách lahve a po otevření nadšeně vyletí i s tekutinou (Boylův zákon, tlak se bude vyrovnávat a poroste objem bublinek). Trik pro otevření takové limonády je vskutku jednoduchý, stačí prsty poklepat na stěny, aby se bublinky usadily nahoře. Toto chování je pro ně poměrně normální, neboť plyn je lehčí než tekutina a pokludně unikne z lahve a nevytlačí limonádu.

Jak je to s teplým prostředím? Napadlo vás, proč se sekt chladí než se otevře? Zde přijde ke slovu Henryho zákon, který nám poskytne hned dvě informace relevantní pro „limonádový problém“. Zákon říká: *s rostoucím tlakem roste rozpustnost plynů v kapalinách*. Tedy s rostoucí teplotou tato vlastnost klesá. Proto pokud v autě necháme plechovku s limonádou, plyn z ní bude vytlačován, až to plechovka nevydrží a praskne,¹³ kromě toho zde přijde ke slovu Charlesův zákon, který říká, že zahřátý plyn se rozpíná.

V našem případě nás ale zajímá spíše případ s tlakem. Jak známo, s nadmořskou výškou řídne vzduch a klesá tlak. Tedy rozpustnost plynu v kapalině klesá. Předpokládejme, že zde na zemi nám rychle vybublá limonáda při teplotě 20 °C. Pak vysoko v oblacích musí při stejné teplotě zákonitě také vybublat, a to ještě rychleji! K odhadu rychlosti použijeme Poiseuilleho rovnici, která aproximativně rychlost úniku limonády může popsat

$$v = \frac{\Delta p r^4 \pi}{8L\eta},$$

kde r je průměr trubice (hrdla lahve), L její délka a η je viskozita. Vidíme, že rychlost přímo úměrně závisí na rozdílu tlaků, tedy je-li rozdíl tlaků vyšší, je únik limonády z lahve vyšší. Ve míněné pětikilometrové výšce je tlak o cca 50 % menší než na hladině moře,¹⁴ tedy limonáda unikne dvakrát rychleji.

Jak docílit toho, aby nám nevybublala? Opět se zamyslíme nad Henryho zákonem, pokud klesne teplota limonády, zvýší se rozpustnost plynu v ní a dle Charlesova zákona budou i bublinky oxidu uhličitého menší. Jediná šance, jak se rozumně napít, je tedy limonádu vychladit, ostatně jako již zmíněný sekt.

¹³⁾ Podívejte se např. na <http://mythbustersresults.com>.

¹⁴⁾ Zdroj http://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... *fridex*

Organizátoři jedou na severní pól. Mají motorové saně a i přes třeskuté mrazy okolo točny musí lít do chladiče Fridex. Poradte jim, jakou mají volit směs alkoholu s vodou, to znamená, určete, jaká je závislost teploty tuhnutí směsi alkoholu s vodou na jeho koncentraci. Nemáte-li dostatečně výkonný mrazák, změřte, při jaké koncentraci směs zmrzne při nějaké pevně dané teplotě.

(řešení str. 61)

Úloha II. E ... *metronom*

Hrajete-li na hudební nástroj, určitě občas máte problémy udržet rytmus. Navrhnete experiment a změřte, jakou frekvenci (úderů o stůl, stisků klávesy...) dokáže člověk nejlépe udržet. Existuje nějaká korelace mezi ní a jinými přirozeně se vyskytujícími jevy?

(řešení str. 63)

Úloha III. E ... *kroky*

Postavte dlouhé domino a hurá do toho! Změřte rychlost padání pro známé rozměry kvádríků a proměnnou vzdálenost mezi nimi. Ustálí se vůbec rychlost?

(řešení str. 66)

Úloha IV. E ... *MacGyver a teploměr*

Z materiálů, které máte doma k dispozici, zkonstruujte funkční teploměr a pomocí vhodných známých teplot nakalibrujte jeho stupnici. Nezapomeňte nám poslat fotografii výsledku vašeho snažení.

(řešení str. 69)

Úloha V. E ... *ozvěna*

Když stojíte v malém prostoru a zahučíte správný tón, můžete objevit jeho rezonanční frekvenci. Protože rezonanční frekvence přímo souvisí s rozměry rezonátoru, umíme je z její znalosti určit. Vyhlédněte si doma vhodnou místnost (ideální jsou malé rozměry a holé stěny; třeba toaleta), tímto způsobem ji změřte a porovnejte výsledky se skutečností.

(řešení str. 70)

Úloha VI. E ... *kapička*

V této úloze budeme zkoumat kapičku vody jakožto optickou čočku. Nanesete-li kapičku vody na nějakou tenkou skleněnou nebo průhlednou umělohmotnou destičku, dostanete improvizovanou lupu – spojnou čočku. Zkoumejte ohniskovou vzdálenost a maximální zvětšení „kapkové lupy“ v závislosti na jejich rozměrech a porovnejte s teorií. Všimněte si různých zobrazovacích vad kapky. Speciálně prozkoumejte, co se děje, když naši lupu přiblížíme např. k barevnému displeji počítače.

(řešení str. 74)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... fridex

Organizátoři jedou na severní pól. Mají motorové saně a i přes třesuté mrazy okolo točny musí lít do chladiče Fridex. Poradte jim, jakou mají volit směs alkoholu s vodou, to znamená, určete, jaká je závislost teploty tuhnutí směsi alkoholu s vodou na jeho koncentraci. Nemáte-li dostatečně výkonný mrazák, změřte, při jaké koncentraci směs zmrzne při nějaké pevně dané teplotě.

Teorie

Hledáme rovnovážný stav směsi za normálního tlaku kapaliny a pevné látky. Řekněme, že měrná tepelná kapacita c nezávisí na teplotě a použijeme tedy hodnoty z tabulek. V řešení budeme užívat následující značení a konstanty: měrná tepelná kapacita kapalné vody $c_v = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita ledu $c_{\text{led}} = 2,10 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita kapalného etanolu $c_{e1} = 2,44 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, měrná tepelná kapacita pevného etanolu $c_{e2} = 0,97 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, měrné latentní teplo tání vody l_v , měrné latentní teplo tání etanolu l_e , poměrná hmotnost vody m_v , poměrná hmotnost etanolu m_e , teplota tání čisté vody $t_v = 0,00 \text{ }^\circ\text{C}$ a teplota tání 98% roztoku etanolu $t_e = -144,4 \text{ }^\circ\text{C}$.

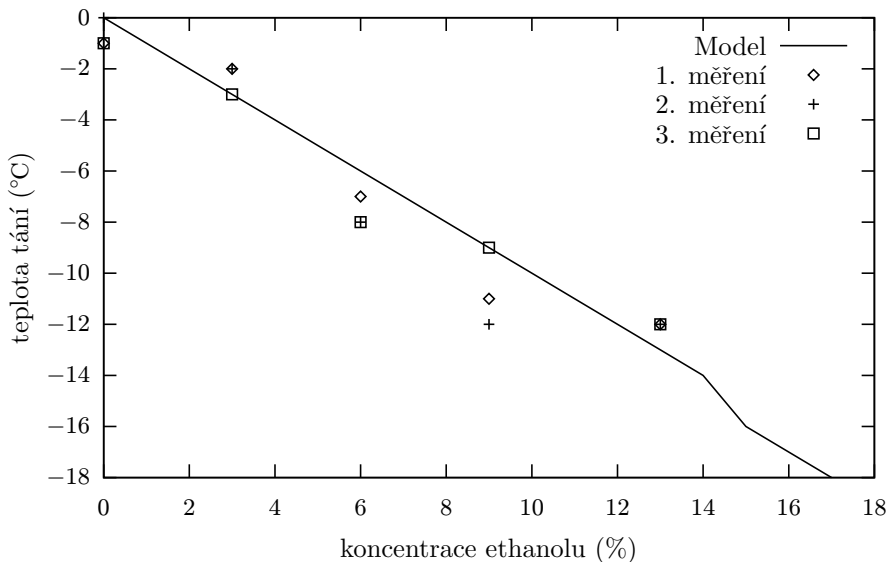
U latentního tepla a hmotnosti nebudeme konkrétní hodnoty potřebovat. Poměr hmotností látek musí splňovat rovnost $1 = m_v + m_e$. Při postupném ochlazování vody a posléze etanolu z teploty t_{poc} pod bod tuhnutí na teplotu t_{vysl} , nebo při ochlazování směsi těchto kapalin na tutéž výslednou teplotu je odevzdané teplo stejné. Můžeme tedy napsat rovnici

$$\begin{aligned} & m_v (c_v(t_{\text{poc}} - t_v) + c_{\text{led}}(t_v - t_{\text{vysl}}) + l_v) + \\ & + m_e (c_{e1}(t_{\text{poc}} - t_e) + c_{e2}(t_e - t_{\text{vysl}}) + l_e) = \\ & = m_v (c_v(t_{\text{poc}} - t_t) + c_{\text{led}}(t_t - t_{\text{vysl}}) + l_v) + \\ & + m_e (c_{e1}(t_{\text{poc}} - t_t) + c_{e2}(t_t - t_{\text{vysl}}) + l_e), \end{aligned}$$

podle níž teplota tání směsi je

$$t_t = \frac{m_v t_v (c_v - c_{\text{led}}) + m_e t_e (c_{e1} - c_{e2})}{m_v (c_{\text{led}} - c_v) + m_e (c_{e2} - c_{e1})}.$$

Podle tohoto předpisu by změna teploty tání na základě procentuálního obsahu alkoholu ve směsi měla mít průběh jako křivka „Model“ v grafu na obrázku 26.



Obr. 26. Srovnání teoretického modelu s experimentem

Experiment

Jako chladicí médium použijeme tekutý dusík. Pokud jej nemáme k dispozici, použijeme mrazák. Do šesti nádobek jsme vлили po 25 ml směsi kapalin a pokus opakovali třikrát. Připravili jsme si různé objemové koncentrace lihu s vodou a z nich jednoduchým převodem koncentraci hmotnostní (známe poměr hustot kapalin). Pro přesné výsledky jsme vzorky připravovali injekční stříkačkou; vzhledem k mrazákové verzi úlohy, a tedy nedosažitelných $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ jsme vypočítali, že bude stačit 17% koncentrace lihu. V malých nádobkách jsme nechali všechny materiál zmraznout. Jelikož změna skupenství směsi je charakterizována teplotní rovnováhou, zmrazené nádoby (bohužel jedna se nám nezmrazila ani po několika hodinách – právě těch hraničních 16 hmotnostních procent).

Plastové odměrky mráz vydržely; poté, co vše zmrazilo, vyndali jsme vzorky do teplého prostředí a bedlivě sledovali. Čekali jsme na postupné rozmrazování vzorků. Nechtěli jsme nechat teploměry do vzorků přímo zamrznout, aby se nepoškodily.

Jakmile vzorek začal tát, měřili jsme teplotu natáté ledovité vrstvy v okamžiku, kdy se celá špička (líhového) teploměru ponořila. Získali jsme tak data tání vrstev, která jsme zanesli do tabulky na další stránce.

Vzhledem k nepřilíživému teploměru bylo možné měřit pouze s přesností na stupně.

Porovnáme-li námi naměřené hodnoty – kde mimochodem vychází teplota tání čisté vody výrazně pod $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ – s hodnotami z modelu, získáváme graf na obrázku 26.

Tuhnutí vzorků

Objem alkoholu (z 25 ml)	Procento hmotnosti	$t_t(1)$	$t_t(2)$	$t_t(3)$	\bar{t}_t
0 ml	0	-1	0	-1	$(-0,7 \pm 0,5)^\circ\text{C}$
1 ml	3	-2	-2	-3	$(-2,3 \pm 0,5)^\circ\text{C}$
2 ml	6	-7	-8	-8	$(-7,7 \pm 0,5)^\circ\text{C}$
3 ml	9	-11	-12	-9	$(-10,7 \pm 1,1)^\circ\text{C}$
4 ml	13	-12	-12	-12	$(-12,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}$
5 ml	16				

Velká nepřesnost vznikla metodou měření – teploty byly podhodnocené, je zde patrný mnohem větší gradient než v modelu. S tímto problémem si můžeme poradit měřením pomocí diody. Pro velmi nízké teploty arktických mrazů se však naše výsledky vesměs shodují na minimálně 35 hmotnostních procentech etanolu.

Úloha II. E ... metronom

Hrajete-li na hudební nástroj, určitě občas máte problémy udržet rytmus. Navrhněte experiment a změřte, jakou frekvenci (úderů o stůl, stisků klávesy...) dokáže člověk nejlépe udržet. Existuje nějaká korelace mezi ní a jinými přirozeně se vyskytujícími jevy?

Teorie

Udržet tempo je klíčová schopnost každého hudebníka. Dá se tedy očekávat, že většina hráčů na hudební nástroje to bude mít nacvičené a nebude jim činit potíže zachovat většinu frekvencí v oblastech, které se v hudbě nejčastěji vyskytují (přibližně od 60 do 150 úderů za minutu). Zato netrévaný člověk může mít s udržením tempa problémy a některé frekvence mu přirozeně mohou jít a jiné naopak. Typicky by to mohly být ty, se se kterými se běžně setkáváme (tep, dýchání, chůze), a jejich násobky.

Co znamená udržet tempo? To, jak dobře zvládneme reprodukovat frekvence, se dá měřit různými způsoby. Především budeme muset nejprve vytvořit vzor, který budeme dále napodobovat. K tomu může posloužit např. metronom z názvu úlohy, ale i jednoduchý program, vydávající tón v předem určeném intervalu. Potom budeme měřit počet úderů, za který se dostaneme mimo rytmus. Jak ale určíme, že jsme tempo nedodrželi? Je totiž nutné si uvědomit, že to, co hledáme, jsou změny v pravidelnosti délek intervalů. Pro získání přesných výsledků to vylučuje možnost měřit se stopkami, protože potřebujeme znát délku každého intervalu a musí jich být hodně.

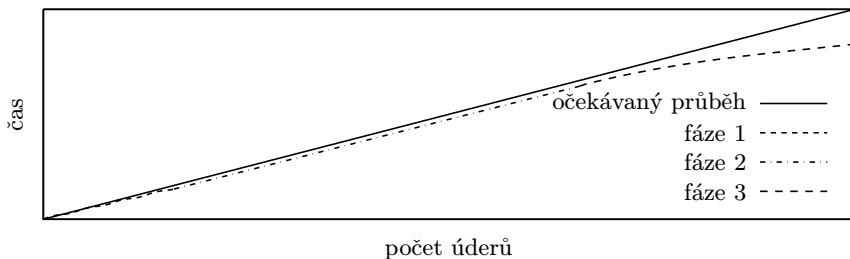
Typický průběh měření bude mít tři fáze.

1. *Učení:* Podle zdroje impulzů si zvykneme na rytmus. Musíme ovšem počkat i chvíli po jeho vypnutí, abychom odfiltrovali vliv toho, že vzor zmlkne.
2. *Pravidelný rytmus:* Tempo určíme pravidelně.

3. *Nepravidelnosti a následná ztráta tempa:* Po určité době ztratíme pozornost a budeme střídavě zpomalovat a zrychlovat, abychom se dostali zpátky.

Jako okamžik ztráty tempa nás zajímá přechod mezi druhou a třetí fází, dobu počítáme od konce první fáze. Určíme jej nejlépe z grafu, na který si vyneseme dvě závislosti v závislosti na číslu odpočítávaného impulzu: Čas, který jsme odpočítali, a čas, který jsme odpočítat měli. Jak by to mohlo vypadat, vidíme na obrázku 27.

Čím zkušenější experimentátor je, tím je jeho 1. fáze kratší, směrnice přímky



Obr. 27. Očekávaný typický průběh měření

ve 2. fázi se přibližuje směrnici ideální a 3. fáze nastává později. Matematicky to znamená, že budeme určovat druhou časovou derivaci funkce, která je závislostí odpočítaného času na pořadí úderu (nebo první derivaci funkce délky pulzu). Nicméně pro naše účely postačí porovnání podle kvalifikovaného odhadu nebo zobrazení rozdílu mezi naměřenou a ideální funkcí. Měření ve druhé fázi nám pomůže odhalit, jakou délku pulzu jsme se naučili.

Experiment

Pro měření jsme použili jednoduchý program napsaný tak, aby nejdříve v daném intervalu přehrál krátké pípnutí a potom měřil délku 500 pulzů. Po kroku 250 ms jsme proměřili intervaly 250 ms až 1500 ms. S kratším počtem pulzů jsme proměřili frekvence 60 bpm až 150 bpm (bpm – úderů za minutu) ve fázi 2.

V tabulce A vidíme, že naučený interval je většinou kratší než by měl být, pokaždé průměrně o 35 ms. Tato vlastnost tedy asi bude souviset s procesem učení a v dalším měření budeme hledat ustálenou frekvenci na přibližně takto opravených hodnotách.

Z tabulky B pak vidíme, že čas udržení intervalů se pohybuje mezi dvěma až pěti minutami. Na obrázku 28 vidíme typický průběh měření. Fáze 1 nastává asi do 50. úderu, fáze 2 do 280.

Úkolem úlohy bylo odpovědět na otázku, jestli je udržitelnost tempa nějak korelovaná s jinými jevy. Na první pohled to vypadá, že není. Měření delších intervalů než dvě sekundy bylo mimo tempo již ze začátku, objektu se většinou nepovedlo frekvenci ani naučit, natož reprodukovat. Studium grafů naměřených závislostí ale přineslo několik poznatků.

- a) Počítač úderů do klávesnice neměří s přesností na milisekundy, ale přibližně v patnáctimilisekundových intervalech, což bude dáno pravděpodobně připojením klávesnice.

- b) Po vybočení z tempa většinou dojde k ustálení jiné frekvence úderů, podobně jako při učení, která se dále zvyšuje. Zajímavé je, že občas dochází ke změnám skokovým, což potvrzuje hypotézu, že udržování tempa je nějak závislé.
- c) Nepotvrdila se domněnka korelace delších intervalů se srdečním tepem. Při standardních podmínkách v relativně tiché místnosti tep není vůbec slyšet a pravidelnost úderů závisí na tom, jakou zvolíme metodu učení se intervalu (toto asi také souvisí se skokovými změnami při upadání tempa). Dokonale tichá místnost bohužel nebyla k dispozici. Pozorovatelnou souvislost udržitelnosti frekvence a tepu zjistil Jakub Vošmera, který při měření nepoužil vzor, podle kterého se učil, ale vhodné intervaly odhadoval. U takového způsobu je pravděpodobnější, že se trefíme do snáze udržitelné frekvence, než když jsme nuceni napodobovat nepřírozený metronom.

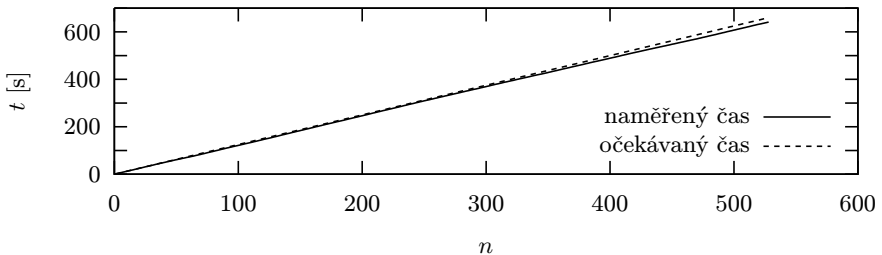
Při zadávání problému jsme chtěli zjistit, budou-li udržitelné frekvence souviset se srdečním tepem apod. Tato domněnka byla částečně vyvrácena – časové intervaly s přibližně celočíselným násobkem sekundy nejdou udržet o nic lépe než ostatní. Nicméně jak jsme zjistili studiem došlých řešení, nejlepší výsledky jsou právě okolo oblasti šedesáti úderů za minutu.

Tabulka A. Výsledky měření

f [bpm]	T [ms]	T_1 [ms]	ΔT [ms]
60	1000	961	39
65	923	870	53
70	857	826	31
75	800	771	29
80	750	724	26
85	706	658	48
90	667	642	25
95	632	602	30
100	600	575	25
105	571	546	26
110	545	511	34
115	522	490	32
120	500	471	29
125	480	417	63
130	462	415	47
135	444	411	33
140	429	393	35
145	414	393	21
150	400	376	24

Tabulka B. Výsledky měření

T [ms]	t_u [s]
250	> 125
500	250
750	150
1000	110
1250	300
1500	120
1750	130
2000	180


 Obr. 28. Naměřená data pro $T = 1250$ ms

Úloha III.E ... kroky

Postavte dlouhé domino a hurá do toho! Změřte rychlost padání pro známé rozměry kvádríků a proměnnou vzdálenost mezi nimi. Ustálí se vůbec rychlost?

Teorie

V následujícím textu načrtneme odvození exaktního vztahu pro rychlost šíření čela vlny, jak jej uvádí literatura. Zájemci o hlubší studium doporučujeme si článek přečíst; není ani příliš dlouhý, ani nějak zásadně náročný.

Předem ale zkusme použít intuici. Po šouchnutí do první kostičky bude nejprve nějakou dobu trvat, než se rychlost šíření vlny ustálí. Předpokládejme tedy, že jsme již v ustálené situaci, kdy je rychlost padání konstantní, a zamysleme se, na čem všem tato rychlost závisí. Rozhodující roli hraje poměr výšky kostky a vzdáleností mezi nimi. Očekáváme, že čím je tato vzdálenost větší, tím bude rychlost menší, neboť padající kostička narazí do následující v nižší poloze a předá jí menší hybnost.

Abychom získali konkrétnější teoretickou představu o tom, jak hledaná závislost vypadá, potřebujeme nejprve úlohu formalizovat a zjednodušit. Označme d a h po řadě tloušťku a výšku jedné dominové kostičky a necht m je její hmotnost.

Předpokládejme, že jde o homogenní kvádr s těžištěm v geometrickém středu. Rovněž si dovolíme předpokládat, že kostky po podložce nekloužou, a tedy v úvahu stačí brát pouze rotační pohyb. Vzdálenost mezi kostičkami značme s a písmeno n použijme k označení jejich počtu.

Podívejme se nejprve na situaci po celém ději, kdy jsou již všechny kostky popadané. Z této polohy lze vyčíst úhly ϑ_i , které svírají kostky se svislým směrem. Zjevně $\vartheta_n = \pi/2$ a pro $i < n$ je možné z goniometrie situace vyjádřit ϑ_i jako funkci ϑ_n , což se hodí pro zpětnou rekonstrukci pohybu. Jelikož nás zajímá především experimentální řešení úlohy a protože tato fáze je velmi pracná, omezíme se pouze s tímto pozorováním a faktem, že předposlední domino je na konci pokusu v poloze $\vartheta_{n-1} = \arctg(s/d)$, kterou budeme pro zjednodušení situace považovat za shodnou pro všechny kvádříky.

Úhlovou rychlost rotace padajícího i -tého domina označme ω_i . Jejím přesným analytickým vyjádřením se zde zabývat nebudeme, neboť je lze nalézt v literatuře.

Zaměříme se nyní na energii padajících kostek. Jistě platí zákon zachování energie, který tudíž hojně využijeme. Na začátku má soustava potenciální energii $nmg h/2$, jejíž část (těžiště mají na konci děje nenulovou výšku nad povrchem podložky; v souladu s naší aproximací je to $h' = d(h+s)/2\sqrt{d^2+h^2}$) se postupně proměňuje v energii rotační a nakonec se ztrácí v podobě tepla do okolního prostředí. Pro energii rotačního pohybu známe vztah

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

kde I je dobře známá konstanta – moment setrvačnosti

$$I = \frac{1}{3} m(h^2 + d^2),$$

vzhledem k poloze osy rotace.

Nyní ještě uveďme, že doba pádu i -té kostičky se dá vypočítat jako integrál, známe-li průběh úhlové rychlosti a počáteční a koncovou polohu.

Z těchto všech údajů, které jsme zde pouze nastínili, lze odvodit asymptotickou rychlost (tj. pro $n \rightarrow \infty$ a po ustálení děje) šíření čela vlny

$$v = \sqrt{gh \left(\frac{3}{1 + \frac{d^2}{h^2}} \right)} \frac{s+h}{h} \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{t_i}. \quad (24)$$

V této formulce vystupující proměnná t_i se odvolává na dobu pádu i -té kostičky z předchozího odstavce a počítá se jako bezrozměrná veličina.

Literatura

Náš text vychází z článku J. M. J. van Leeuwen, The Domino Effect, 2004, který lze stáhnout na adrese <http://www.ilorentz.org/~jmjvanl/domino.pdf>.

Experiment

Záhy se ukázalo, že doba pádu standardních 28 kostiček domina je velmi krátká a že bude nutné použít sofistikovanější metodu měření času nežli pouhé stopky. Vzhledem k faktu, že padající domino způsobuje hluk, rozhodli jsme se pro měření pomocí mikrofону a software pro zpracování zvuku (konkrétně Audacity). Naše dominové kostičky měly hmotnost $m = (4,5 \pm 0,1)$ g a rozměry $h = (45 \pm 1)$ mm a $d = (21 \pm 1)$ mm. Postupně jsme je rozestavovali ve vzdálenostech odpovídajících násobkům jejich tloušťky, neboť tak šlo poměrně rychle a přesně i tak časově náročnou výstavbu provést.

Pro každou hodnotu s jsme provedli tři různá měření, jejichž výsledky jsou zaneseny v tabulce. Časové údaje jsou v milisekundách a znamenají, jak dlouho trval pád celého hada. V posledním řádku tabulky jsou zaneseny absolutní rychlosti v_a .

Tabulka výsledků měření

s [mm]	7	14	21	28	35
ns [mm]	385	574	763	952	1141
t_1 [ms]	840	790	1160	1854	2585
t_2 [ms]	790	827	1111	1649	2393
t_3 [ms]	655	889	1114	1630	2294
\bar{t} [ms]	761	835	1128	1711	2424
$\sigma_{\bar{t}}$ [ms]	96	50	28	125	148
v_a [m·s ⁻¹]	$0,51 \pm 0,13$	$0,69 \pm 0,06$	$0,68 \pm 0,03$	$0,56 \pm 0,08$	$0,47 \pm 0,07$

Závěr

Z našich měření je evidentní, že se zvětšující se vzdáleností klesá rychlost šíření vlny, měříme-li ji relativně jako počet spadlých domin za jednotku času. Ovšem, uvědomíme-li si, že jednotlivé bloky jsou od sebe zároveň dál, situace tak jednoznačná není. Dokazuje to řádek „absolutní rychlost“ výsledné tabulky. Ten naznačuje, že maximální rychlost šíření se dosahuje při vzdálenosti mezi kostkami zhruba 14 mm. Tento náš závěr je ve shodě i s výsledky některých řeštelů.

Měli bychom ještě vystělit, proč máme v měření tak velkou chybu. Především je třeba ji přičíst nepřesnostem při stavbě domina a hlavně při odečítání dat z Audacity. Během padání vznikaly různé ozvěny a dozvuky, a tudíž ne vždy se podařilo naměřit „čistou“ dobu padání.

Úloha IV.E ... MacGyver a teploměr

Z materiálů, které máte doma k dispozici, zkonstruuje funkční teploměr a pomocí vhodných známých teplot nakalibrujte jeho stupnici. Nezapomeňte nám poslat fotografii výsledku vašeho snažení.

Teorie

Pro měření teploty můžeme využít mnoho jednoduchých principů. V běžném životě se nejčastěji setkáte s teploměry využívajícími roztažnost kapalin a dnes čím dál tím rozšířenějšími elektronickými teploměry. Méně obvyklé, ale také využívané, jsou bimetalové teploměry. V tomto řešení zkonstruuje jeden z možných elektronických teploměrů, který bude využívat závislosti velikosti schodku napětí na PN přechodu křemikové diody na teplotě.

Přiložíme-li k sobě dva polovodiče s různou vodivostí, vytvoříme PN-přechod. Ustaví se na něm rovnováha v difuzních tocích nosičů náboje, jejímž výsledkem je skok napětí v oblasti přechodu. Protože difuze je teplotně závislá, bude na teplotě záviset i velikost schodku napětí.

Experiment

Pro provedení kalibrace teploměru nepotřebujeme příliš mnoho vybavení. Stačí vhodná dioda (v našem případě přechod báze-emitor tranzistoru 2N2222A, který se dodává v provedení s kovovým pouzdem, což je pro naši aplikaci výhodné – přenos tepla je efektivnější a budoucí teploměr bude mít rychlejší odezvu), pár spojovacích drátů, voltmetr a teploměr. Voltmetr přepneme do režimu zkoušečky diod, kdy měří přímo napěťový schodek na PN-přechodu.

Pomocí vařící vody a kostek ledu si dokážeme namíchat libovolnou teplotu z rozsahu 0–100 °C. Teplotu vzniklé směsi měříme rtuťovým teploměrem se stejným rozsahem. Musíme dávat pouze pozor na to, aby se nám kvůli teplotě vzduchu v okolí směs neohřívala či nechladila příliš rychle, důležité je také měřit oběma měřidly přibližně ve stejné oblasti. Naměříme tak několik bodů kalibrační závislosti, které najdete v tabulce. Chybu měření odhadujeme na 1 °C, resp. 1 mV.

Tabulka výsledků měření

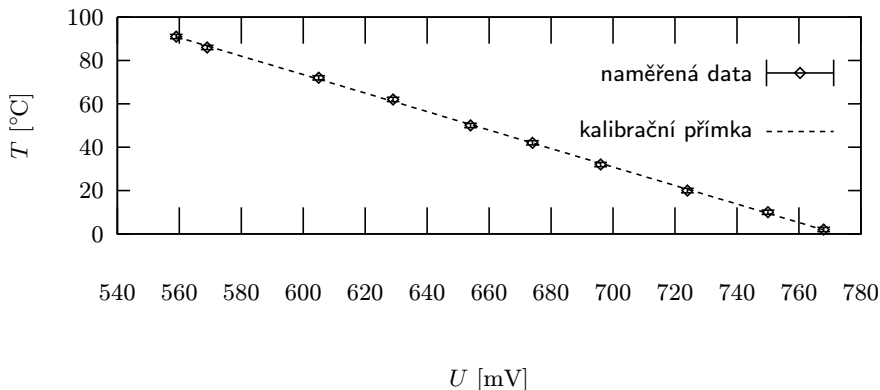
T [°C]	2	10	20	32	42	50	62	72	86	91
U [mV]	768	750	724	696	674	654	629	605	569	559

Po vynesení do grafu (obr. 29) vidíme, že kalibrační závislostí bude přímka popsaná závislostí $T(U) = -aU + b$, kde a a b jsou konstanty a U napětí na PN přechodu. Fitováním v programu gnuplot¹⁵ získáme hodnoty konstant a a b . Výsledek je

$$T(U) = (-0,426U + 329) \text{ °C},$$

¹⁵⁾ Návod najdete např. na našich stránkách v Sekci experimentů.

příčemž za napětí U dosazujeme v milivoltech. Přesnost kalibrace je dána zejména přesností kalibračního teploměru, bude tedy přibližně $1\text{ }^{\circ}\text{C}$.



Obr. 29. Fitovaný graf závislosti napětí na teplotě

Úloha V. E ... ozvěna

Když stojíte v malém prostoru a zahučíte správný tón, můžete objevit jeho rezonanční frekvenci. Protože rezonanční frekvence přímo souvisí s rozměry rezonátoru, umíme je z její znalosti určit. Vyhlédněte si doma vhodnou místnost (ideální jsou malé rozměry a holé stěny; třeba toaleta), tímto způsobem ji změřte a porovnejte výsledky se skutečností.

Nejdříve je potřeba se zamyslet na tím, co to je vlastně zvuk. Náš ušní bubínek či mikrofon reagují na změny tlaku vzduchu. Tyto změny jsou však velmi malé v porovnání s atmosférickým tlakem.

Zamysleme se nejdříve nad tím, co se děje v místnosti, když začneme vyluzovat jistý zvuk. Zvuková vlna, resp. oblast, kde je zvýšený tlak vzduchu, se začne šířit od reproduktoru nebo hudebního nástroje atp. Narazí-li zvuková vlna na zeď, odrazí se, toto odrazení vlny je analogické odrazu vlny na volném konci provázku. Takto odražená vlna začne postupovat stejnou rychlostí zpět, kde ale opět narazí na protější zeď, od této se opět odrazí a tak dále. Jak ale všichni dobře víme, všechny takto odražené vlny spolu začnou interferovat. Pokud nebude násobek jejich délky půlvlny roven rozměru místnosti, tak dojde k destruktivní interferenci a pokud bychom měli dokonale odrazivé stěny, tak bychom neslyšeli nic. Avšak v našem případě začne intenzita velmi rychle klesat, budeme-li se vzdalovat od rezonanční frekvence.

Teorie

Nyní se podívejme, jak úlohu řešit analyticky. Pro vlnění obecně platí vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

kde $p = p(x, y, z, t)$ značí tlak v místnosti a c je rychlost šíření zvuku.

Nechť rozměry místnosti tvaru kvádra jsou a, b, c . Jakožto okrajovou podmínku uvažujeme maximální tlak na stěnách místnosti. Proto budeme řešení hledat ve tvaru

$$p(x, y, z, t) = p_0 \cos\left(\frac{k\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{l\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{m\pi}{c}z\right) \cos(\omega t),$$

kde p_0 je konstanta a $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Dosadíme-li do vlnové rovnice dostáváme známý vztah pro frekvenci vlnění v rezonátoru pravoúhlého tvaru

$$f_{klm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{a}\right)^2 + \left(\frac{l}{b}\right)^2 + \left(\frac{m}{c}\right)^2}. \quad (25)$$

Postup měření

Nejdříve změříme ku příkladu svinovacím metrem rozměry místnosti. Toto měření bychom měli provádět na několika různých místech, abychom se vyvarovali hrubých chyb měření a také abychom mohli určit chybu měření rozměrů místnosti.

Způsobů, jak proměřit rezonanční frekvence, je mnoho. Někteří řešitelé použili hudebního nástroje ke generování tónu a vlastní sluch pro nalezení maximální intenzity.

Další metodou je použití počítače. Do měřené místnosti umístíme reproduktor a mikrofon. Do reproduktoru budeme přehrávat zvuky různých frekvencí a měřit hlasitost uvnitř místnosti pomocí mikrofonu. Jsou v podstatě dvě možnosti, jaký zvuk přehrávat v reproduktorech; jednak to může být zvuk s kontinuálně se zvyšující frekvencí, jednak to může být šum.

Při měření jsme použili šumovou metodu. Pokud totiž přehrajeme šum, a vzniklý záznam opět přehrajeme v místnosti, docílíme velmi silného zesílení právě rezonančních frekvencí a potlačení ostatních. Výsledný záznam převedeme pomocí Fourierovy transformace do frekvenčního spektra. Mezní rozlišovací schopnost odpovídá tzv. Nyquistově frekvenci. Měřitelné jsou tyto frekvence

$$\omega_n = \frac{2\pi k}{n\Delta t},$$

kde Δt je vzorkovací frekvence, n je počet vzorků a $k \in \{0, 1, \dots, n/2\}$. Proto je mezní rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1}{n\Delta t}.$$

Další používaná, ne však úplně správná metoda měření spočívá v diskrétní změně přehrávané frekvence. Tato metoda však nemusí postihnout všechna maxima, která jsou užší než volený frekvenční skok.

Měření

Zamysleme se nejdříve nad tím, co bychom měli změřit. Rezonanční frekvence se budou opakovaným přehráváním nahrávky zesilovat a nerezonanční frekvence se budou oslabovat. Problém je, že kromě nerezonančních frekvencí se oslabují i slabší rezonanční a dalším problémem je samotné měřící zařízení. Používaný mikrofon jistě nemá stejnou odezvu na podnět pro různé frekvence. Je naprosto jisté, že na malé frekvence nebude tak citlivý, jako na frekvence střední a na vysoké bude opět méně citlivý. Je totiž optimalizován pro mluvenou řeč.

Další slabinou je zpracování v programu Audacity. Zde je bohužel možno zpracovávat pomocí FT maximálně 16 384 vzorků. Proto je mezní frekvenční rozlišovací schopnost 3 Hz. Fitováním maxima se však lze dosáhnout rozlišovací schopnosti 1 Hz.

Nejdříve jsme změřili svinovacím metrem rozměry místnosti každý v různých místech, abychom tyto rozměry změřili co nejpřesněji. Vlastní chyba měření svinovacím metrem byla 0,5 cm. Změřené rozměry místnosti jsou:

$$a = (2,788 \pm 0,010)\text{m},$$

$$b = (2,788 \pm 0,010)\text{m},$$

$$a = (2,966 \pm 0,010)\text{m}.$$

Důležitým faktorem je rovněž teplota vzduchu v místnosti, která byla $(25 \pm 1)^\circ\text{C}$. Proto rychlost zvuku je¹⁶ $c = (345,1 \pm 0,5)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Protože je rezonančních frekvencí je mnoho a pro vyšší frekvence jsou si velmi blízké, převážně pokud jde o vyšší frekvence, je prakticky nemožné ze změřených maxim určit, jaké frekvenci f_{klm} odpovídají. Další vadou na kráse je i fakt, že místnost, jež jsme použili, nebyla úplně prázdná – uvnitř zůstalo umyvadlo a skříň. Skříň byla obložena matracemi, tedy její vliv na měření byl minimální, avšak umyvadlo zde mohlo způsobit posunutí maxim ve frekvenční charakteristice, ale také další falešná maxima.

Pokusíme se proto spíše o opačný postup: ze změřených rezonančních frekvencí se pokusíme odhadnout, jakému módu přísluší, a tím ověříme teorii.

Přímé měření by šlo provést pouze pokud by se nám povedlo přesně změřit módy 100, 010 a 001. Dále bychom mohli extrapolovat další rezonanční frekvence a nakonec přes všechny takto určené frekvence fitovat rozměry místnosti. Vzhledem k příliš velké měřené místnosti, které odpovídají základní rezonanční frekvenci okolo 60 Hz, kde mikrofon nesnímal dosti kvalitně, není tento postup možný.

Z rozměrů místnosti vycházejí následující teoretické rezonanční frekvence. Byly vypočteny ze vztahu (25) a zaneseny do tabulky níže.

První pozorovaný peak je na frekvenci 57 Hz, tento nejspíše odpovídá první harmonické ve směru m , teoretická hodnota je 58,2 Hz. Další, již patrnější peak je na frekvenci 64 Hz, což se řádově shoduje s první harmonickou ve směru k

¹⁶⁾ <http://www.sengpielaudio.com/calculator-speedsound.htm>

nebo l . Porovnáme-li další velká maxima 112 Hz a 124 Hz s teorií, lze vytušit, že odpovídají módům 002 a 020 resp. 200. Třetí harmonické jsou naopak oproti druhým velmi slabé.

Tabulka výsledků měření

k	l	m	f [Hz]	k	l	m	f [Hz]	k	l	m	f [Hz]
0	0	1	58	1	2	1	150	3	1	1	204
1	0	0	62	0	2	2	170	2	2	2	210
0	1	0	62	2	0	2	170	2	0	3	214
1	0	1	85	0	0	3	175	3	0	2	219
0	1	1	85	2	2	0	175	0	3	2	219
1	1	0	88	1	2	2	181	2	3	0	223
1	1	1	105	2	1	2	181	3	2	0	223
0	0	2	116	2	2	1	184	1	3	2	228
0	2	0	124	1	0	3	185	3	1	2	228
2	0	0	124	0	1	3	185	3	2	1	231
1	0	2	132	3	0	0	186	2	3	1	231
0	1	2	132	0	3	0	186	2	3	2	252
2	0	1	137	0	3	1	195	3	2	2	252
0	2	1	137	3	0	1	195	3	0	3	255
1	2	0	138	1	3	0	196	3	3	0	263
2	1	0	138	3	1	0	196	3	3	1	269
1	1	2	146	1	3	1	204	3	3	2	287
2	1	1	150								

Jak je vidět z naměřených spekter, maxim je opravdu hodně a přesné namapování na teorii je téměř nemožné. Můžeme se ještě zkusit zamyslet nad tím, proč jsou některá maxima intenzivnější, než jiná. Jednak intenzita zvukového vjemu závisí na poloze reproduktoru; bude-li v uzlu bude přispívat mnohem méně než v kmitně. Dalším faktorem je poloha mikrofonu, který zachytí zvuk pouze v kmitně. Nakonec má na intenzitu vliv materiál stěn, podlahy a stropu, od kterých se zvuk odráží.

Diskuse

Jak je vidět z porovnání teorie a měření, první a druhé harmonické rozměry místnosti a a b byly změřeny dobře, ale výška místnosti, tj. rozměr c nebyl změřen správně, neboť odraz od podlahy, na které bylo lino, způsobil odchylku. Buď došlo k chybě při určení výšky místnosti nebo odraz zvukových vln probíhá jinde než na svrchní části lina, což je pravděpodobnější. Další chyby jsou zaneseny z důvodu nepravidelnosti měřené místnosti, tj. výklenky, obklady, ...

V celém měření dále není zanesena chyba mikrofonu, reproduktoru nebo zvukové karty. Tyto chyby jsou normálními prostředky neměřitelné.

Z praktického pohledu je toto měření velmi nepraktické pro zjištění rozměrů místnosti. Mnohem lepších výsledků bychom dosáhli, pokud bychom mikrofon i s reproduktorem umístili do trubky se stěnami, které absorbují zvuk. Takto

bychom pozorovali pouze rezonance v jednom směru, které jsou frekvenčně ekvidistantně rozdělené. A změřili bychom jen jeden konkrétní rozměr místnosti velmi přesně.

Úloha VI. E ... kapička

V této úloze budeme zkoumat kapičku vody jakožto optickou čočku. Naneste-li kapičku vody na nějakou tenkou skleněnou nebo průhlednou umělohmotnou destičku, dostanete improvizovanou lupu – spojnou čočku. Zkoumejte ohniskovou vzdálenost a maximální zvětšení „kapkové lupy“ v závislosti na jejích rozměrech a porovnejte s teorií. Všimněte si různých zobrazovacích vad kapky. Speciálně prozkoumejte, co se děje, když naši lupu přiblížíme např. k barevnému displeji počítače.

Kapičky jsme nanášeli na podložní sklíčko pro mikroskopování, a to injekční stříkačkou s jehlou. Menší kapičky byly vytvořeny nanesením z hrotu špejle. Zdroj světla v nekonečnu libovolná spojná čočka zobrazí do svého ohniska. Vzdálenost kapky a obrazu vytvořeného na stínítku odpovídá obrazové ohniskové vzdálenosti f kapky. Za zdroj v nekonečnu lze považovat např. Slunce. Nám však postačila obyčejná žárovka ve výšce 2 metry, neboť i tato vzdálenost je mnohem větší, než pozorované obrazové vzdálenosti (vzpomeň na zobrazovací rovnici).

Rozměry kapek byly určeny z digitální fotografie. Kapky nanesené na okraj podložního sklíčka byly nejdříve vyfoceny svrchu, přičemž na sklíčko vedle kapek byl přilepen kousek milimetrového papíru. Rovněž bylo sklíčko s kapkami vyfoceno z boku, kde nám jako srovnávací míra poslouží tloušťka skla 1 mm. V prohlížeči obrázků potom byly odměřeny rozměry kapek – průměr d a výška h . Kapku předpokládáme přibližně ve tvaru kulového vrchlíku, což fotografie potvrzují. Ohnisková vzdálenost byla odměřena šuplerou následujícím způsobem. Na jednu čelist šuplery jsme lepidlem připevnili podložní sklíčko, na druhou čelist pak stínítko – čtvereček tuhé čtvrtky. Šupleru jsme posouvali dokud nebylo na čtvrtce co nejlépe zaostřeno vlákno žárovky, a tato vzdálenost byla zaznamenána. Je obtížné rozhodnout, kdy je obraz nejostřejší, a proto bylo trochu zbytečné měřit vzdálenosti šuplerou. Bohatě bychom si vystačili jednoduchým posouváním sklíčka po pravítku či trojúhelníku. Při měření je dobré neotálet, protože se kapka vypařuje.

Poloměr křivosti R pak vypočteme pomocí Pythagorovy věty, a sice

$$R = \frac{\frac{1}{4}d^2 + h^2}{2h}. \quad (26)$$

Takzvaná rovnice výrobců čoček¹⁷ umožňuje pomocí poloměrů křivosti R_1, R_2 ohraničujících kulových ploch určit ohniskovou vzdálenost čočky ve vzduchu,

$$\frac{1}{f} = \frac{(n-1)^2 h + n(R_2 - R_1)}{nR_1 R_2}, \quad (27)$$

¹⁷⁾ Petr Malý: Optika, Karolinum, 2008

kde n značí index lomu materiálu čočky. V našem případě je jedna stěna kapky rovinná, tudíž $R_2 = \infty$. Potom se rovnice (27) zjednodušuje až na

$$f = \frac{R}{n - 1}. \quad (28)$$

Ještě si musíme uvědomit, že světlo prochází skrz sklíčko indexu lomu n_s a tím se posouvá obraz o $b(1 - 1/n_s) \approx 0,3$ mm, a toto posunutí od naměřených vzdáleností odečíst.

Výsledky měření jsou uvedeny v tabulce a v grafu. Z naměřených rozměrů je vypočten podle (26) poloměr křivosti kapky. S použitím indexu lomu vody $n = 1,33$ je dle (28) určena teoretická předpověď ohniskové vzdálenosti, kterou porovnáváme s měřením (v tabulce značeno po řadě indexy f_{teo} a f_{exp}). Chyba teoretické předpovědi vychází z odhadu nepřesnosti určení d a h , které odhadujeme po řadě na 0,4 mm a 0,1 mm, nepřesnost měření ohniskové vzdálenosti je odhadnuta na 0,5 mm.

Je patrné, že větší kapky mají menší poloměr křivosti a větší ohniskovou vzdálenost, což vede k menšímu zvětšení. Naměřené ohniskové vzdálenosti jsou systematicky menší než ty vypočtené, ovšem v rámci chyby se shodují.

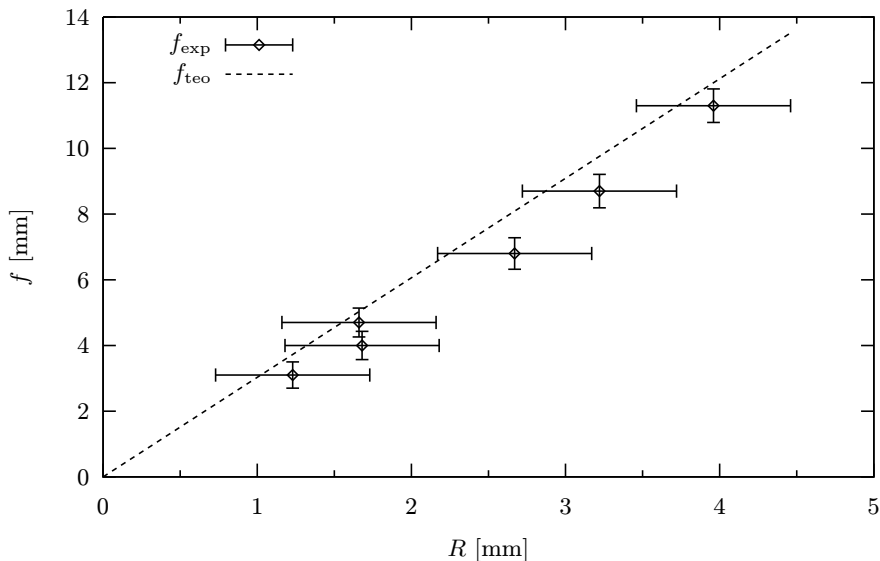
Tabulka výsledků měření

číslo měření	d [mm]	h [mm]	R [mm]	f_{teo} [mm]	f_{exp} [mm]
1	2,04	0,55	$1,2 \pm 0,4$	$3,7 \pm 1,2$	$3,1 \pm 0,5$
2	2,73	0,70	$1,7 \pm 0,4$	$5,1 \pm 1,3$	$4,0 \pm 0,5$
3	2,63	0,65	$1,7 \pm 0,4$	$5,0 \pm 1,3$	$4,7 \pm 0,5$
4	4,04	0,92	$2,7 \pm 0,5$	$8,1 \pm 1,5$	$6,8 \pm 0,5$
5	4,70	1,02	$3,2 \pm 0,5$	$9,8 \pm 1,6$	$8,7 \pm 0,5$
6	5,97	1,36	$4,0 \pm 0,5$	$12,0 \pm 1,5$	$11,3 \pm 0,5$

Zvětšení kapky jakožto lupy jsme zkoušeli určit pozorováním dvou blízkých měřítek, přičemž jedno pozorujeme přes lupu a druhé jen okem. Pro pozorování byla použita kapka číslo 6. Maximální prakticky použitelné zvětšení bylo určeno jako čtyřnásobné, přestože teoreticky by mohlo dosahovat až hodnoty d/f , kde $d = 25$ cm je konvenční zraková vzdálenost. Při snaze o další zvětšení již začaly dominovat zobrazovací vady a obraz se stal nečitelným.

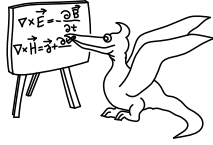
Kulatý povrch čočky, byť by byl dokonalý, nezajistí ostré zobrazení, protože okrajovým částem čočky odpovídá jiná ohnisková vzdálenost, než jejímu středu. Tím méně bude obraz ostrý pro naši kapku. Zvláště u větších kapek se projeví zploštění v důsledku vlastní tíže, což vede ještě k většímu rozdílu ohniskových vzdáleností středu a okrajů. Rozdílné poloměry křivosti na různých místech kapky a její nepravidelný tvar se projeví tím, že předmět, např. Slunce nebo vlákno žárovky, nelze zcela zaostrit, kolem nejsvětlejší skvrny je ještě světlý „obláček“ a obraz jeví různé deformity. Deformaci obrazu lze nejlépe sledovat pozorováním pravidelného rastru skrz kapku, např. milimetrového papíru. Okrajové části kapky

jsou zpravidla zakřivenější a více zvětšují, což se projeví rozestupováním linek rastru při okraji kapky. Hovoříme potom o poduškovitém zkreslení. Zobrazujeme-li na stínítko Slunce, které svítí pod určitým úhlem k optické ose kapky, obraz připomíná tvarem kometu a hovoříme pak o vadě s názvem koma. Barevná vada se u kapkové čočky tolik neprojeví, protože dříve jmenované vady jsou daleko silnější.



Obr. 30. Výsledný graf závislosti ohniskové vzdálenosti na poloměru kapičky

Kapička na barevném displeji notebooku nebo mobilního telefonu umožňuje pozorovat barevné složení pixelu. Vedle sebe jsou červená, zelená a modrá políčka. Různých barev je dosaženo změnou intenzity jednotlivých barevných políček. V bílém pixelu svítí všechna barevná políčka, v žlutém pixelu pouze červená a zelená, ve fialovém jen červená a modrá. Zvědavci si jistě všimli rozdílného rozložení barevných elementů v LCD a CRT monitoru počítače.



Seriál o světle

V letošním seriálu se budeme zabývat analýzou fyzikálního jevu, se kterým se denně setkáváme na každém kroku, a přesto lidstvo již od nepaměti fascinuje – středem výkladu totiž bude světlo a množství fyzikálních situací, které s ním souvisejí. Jistě si bez něj jen těžko dokážeme představit okolní svět – světlo je díky fotosyntéze základní podmínkou života na Zemi a pomocí zraku umožňuje asi nejdůležitější způsob našeho vnímání a zkoumání světa.

I přes jeho všudypřítomnost trvalo něco okolo dvou a půl tisíce let, než se po spoustě částečně úspěšných teorií podařilo najít matematicko-fyzikální popis, který správně předpovídá všechny jevy a procesy, na nichž se světlo podílí. Dobře se tak hodí pro náš seriál, protože máme příležitost ilustrovat celou škálu fyzikálních principů a matematických metod, které se při popisu záření používají.

Pozoruhodné je, že světlo hrálo zásadní roli u téměř všech velkých průlomů v (především teoretické) fyzice. V druhé polovině 19. století stálo u Maxwellova slavného sjednocení zákonů elektřiny, magnetismu a světla, na začátku 20. století pak podnítilo vznik obou hlavních pilířů moderní fyziky: řada teoretických úvah ohledně rychlosti světla vedla Alberta Einsteina k formulaci speciální teorie relativity a „fotonová hypotéza“ Maxe Plancka dala základy kvantové teorii. Konečně v polovině století dvacátého uspěli pánové Feynman, Schwinger, Dyson a Tomonaga v dovršení kvantové elektrodynamiky, tedy teorie popisující interakci fotonů s elektrony, čili vlastně světla a hmoty¹⁸, která se později stala nejúspěšnější (nejpřesněji experimentálně prověřenou) teorií v historii fyziky a zároveň základem pro současný popis zákonů mikrosvěta.

Dobrych důvodů pro studium chování světla se najde celá řada. Pokud vás tedy zajímá, co je to difrakce, Fermatův princip, Maxwellovy rovnice, proč hrají olejové louže všemi barvami nebo proč je obloha modrá, pusťte se do čtení našeho seriálu a řešení úloh. Zároveň vás prosíme, abyste nám poslali jakékoli připomínky a návrhy na témata, o kterých byste si rádi přečetli v některém z příštích dílů.

Kapitola 1: Co je světlo

Jak šla historie

Jak bylo nastíněno v úvodu, způsob, jakým fyzikové nahlíželi na světlo, prodělal v minulosti mnoho změn. Již antičtí Řekové znali zákon odrazu světelného paprsku od zrcadla, který říká, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu, a dokonce za pomoci experimentu získali i tabulku čísel pro zákon lomu: zkoumali paprsek vstupující ze vzduchu do vody a měřili úhly, které tento paprsek svírá s hladinou v obou prostředích. Trvalo ale až do roku 1621, než se Snelliiovi podařilo najít

¹⁸⁾ Pro zájemce o populárně podané shrnutí doporučujeme Feynmanovu knihu *Neobyčejná teorie světla a látky: kvantová elektrodynamika*.

následující matematický vzorec, dnes známý jako Snellův zákon, který vyjadřuje zákon lomu na rozhraní dvou prostředí s indexy lomu¹⁹ n_1 a n_2

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (29)$$

kde α , β jsou úhly, které paprsek svírá s kolmicí na rozhraní v materiálu 1, resp. 2. Ani Snellius ale nevěděl, odkud tato zákonitost pochází. První teoretické modely, které správně předpovídaly zákony lomu a odrazu, nabídli záhy Pierre de Fermat, jehož elegantní princip nejkratšího času podrobně vyložíme v příštím díle seriálu, a Christian Huygens, o jehož pravidle pojednáme níže. Žádný z těchto principů ale nijak nerozebíral fyzikální podstatu světla, tedy co světlo ve skutečnosti je. V tomto směru se postupně objevily dva názory (viz také druhý díl minulého ročníku seriálu FYKOSu).

Podle jednoho z nich mělo světlo vlnovou povahu a šířilo se velkou rychlostí jako vibrace záhadného, vševyplňujícího materiálu, pro který se později ujal název *éter*. Konkurenční názor, vyjádřený Newtonem, tvrdil, že světlo sestává z částic, které se mohou lážít jistou vlastností, kterou my vnímáme jako barvu, což sám Newton demonstroval svým slavným rozložením bílého světla na barevné složky za pomoci skleněného hranolu. Asi také díky Newtonově nesmírné intelektuální autoritě se „částicový“ názor udržel v popředí dlouhou stovku let, než byli fyzikové pod tíhou experimentálních důkazů nuceni uznat, že se světlo chová spíše jako vlna. Jednalo se zejména o (ob)jev difrakce, o kterém blíže pohovoříme v některém z příštích dílů. Velkou zásluhu na rozvoji teorie světla jako mechanického vlnění pružného éteru měl především Fresnel, který ohromnou škálu pozorovaných jevů zahrnujících světlo dokázal vypočítat z několika elementárních předpokladů o vlastnostech éteru.

Snad největší moment v rozvoji našeho chápání světla měl ale teprve přijít. Spolu s optikou (tedy odvětvím fyziky zabývajícím se světlem) se v 19. století úplně nezávisle rozvíjela také teorie elektřiny a magnetismu. Po mnohaletém hromadění výsledků o chování nabitých objektů se Maxwellovi podařilo sestavit rovnice, které ze známých rozložení proudů a nábojů umožňují vypočítat elektrická a magnetická pole. Zjednodušeně řečeno v nich figurovaly dvě experimentálně určené konstanty: *permittivita vakua* $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ a *permeabilita vakua* $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$, které jsou analogií Newtonovy gravitační konstanty G pro elektřinu a magnetismus.

Maxwell poté zkušel, jaká řešení jeho rovnice dovolují, a zjistil, že existuje speciální typ řešení bez přítomnosti nábojů a proudů, a sice vlnění elektromagnetického pole šířící se volným prostorem rychlostí

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

To je přesně rychlost, kterou se podle tehdejších měření šířilo světlo. Maxwell tedy interpretoval světlo právě jako vlnění elektromagnetického pole a dosáhl tak

¹⁹⁾ Pro úplnost poznamenejme, že index lomu n daného prostředí je poměr rychlosti světla ve vakuu a v daném materiálu, tj. $n = c/v$. Ve většině případů je tedy $n \geq 1$.

největšího triumfu fyziky devatenáctého století tím, že sjednotil zákony elektřiny, magnetismu a světla. Viditelné světlo je tedy „jen“ malá část celého spektra elektromagnetického záření, charakterizovaná vlnovými délkami od zhruba 380 do 750 nanometrů. Tak k němu budeme v našem seriálu přistupovat – spousta odvozených výsledků platí obecně pro jakékoli vlnové délky (rádiové vlny na jedné a záření gamma na druhé straně spektra).

Ve dvacátém století ještě přišla již zmíněná kvantová teorie a s ní i částečný návrat k částicovému modelu; na podrobnější pojednání zde bohužel nemáme místo, ale v případě zájmu řešitelů tomuto tématu věnujeme některý z pozdějších dílů seriálu.

Aproximace

Odhlédneme-li od kvantových efektů, světlo je přesně popsáno jako vlnění elektromagnetického pole. Teoreticky vzato jdou tedy všechny světelné jevy, se kterými se setkáváme kolem sebe (duha, modrá obloha, lom, odraz, ...) odvodit z Maxwellovy teorie. To je ale často nepraktické, protože ve spoustě případů (jako je například právě odraz a lom) se vůbec neprojeví vlnové vlastnosti světla.

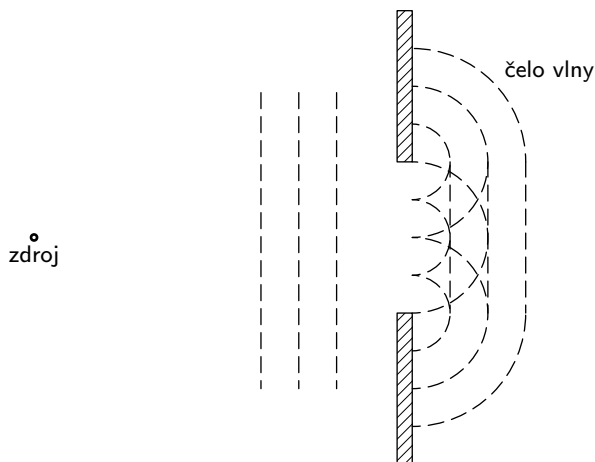
Obecně v případech, kdy je vlnová délka mnohem menší než typická velikost měřicího přístroje, můžeme na vlnovou povahu světla zapomenout a pracovat s jednodušším teoretickým modelem zvaným *geometrická optika*, který na světlo nahlíží jako na jednoduché paprsky šířící se optickou soustavou. Za výchozí bod geometrické optiky lze použít již zmiňované principy Fermata a Huygense (podrobněji níže). Měli bychom mít ale stále na paměti, že oba tyto principy se dají odvodit přímo z Maxwellových rovnic v případě malých vlnových délek.

Opačný extrém nastává, když je vlnová délka světla srovnatelná s velikostí měřicího přístroje, a vlnový charakter světla se tak naplno projeví. V takovém případě mluvíme o *vlnové optice*.

Huygensův princip

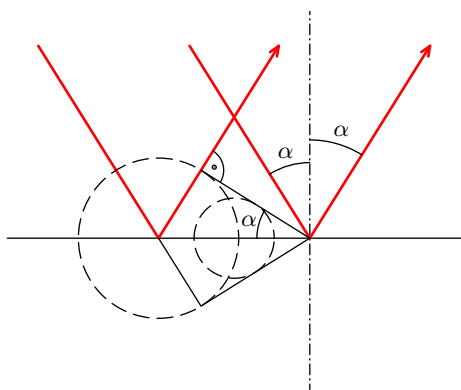
Tento princip nám umožňuje zjistit tvar a polohu čela šířící se vlny, známe-li čelo vlny v nějakém okamžiku předtím. Doslova říká, že když z každého bodu původního čela vlny necháme šířit kulovou (ve dvourozměrném prostoru kruhovou) vlnu na všechny strany rychlostí světla v daném prostředí, dostaneme nové čelo vlny jako „obálku“ takto vzniklých kulových vln.

Huygensův princip platí dost obecně pro libovolné vlnění a třeba pro zvuk má nám známý důsledek. Hraje-li v místnosti hudba a my stojíme v předsíni za otevřenými dveřmi tak, že zdroj hudby přímo nevidíme, přesto hudbu slyšíme. Je tomu tak proto, že když zvuk dorazí k otevřeným dveřím, každý bod této plochy funguje jako zdroj kulových vln, šířících se na všechny strany a vyplňujících tak celou místnost (viz obrázek 31). Z Huygensova principu také jednoduše vyplývá fakt, že paprsky se šíří po přímkách: je-li čelo vlny rovné v jednom okamžiku, zůstane rovné a bude se rovnoměrně posouvat kupředu rychlostí světla.



Obr. 31. Šíření zvuku dveřmi

O něco méně triviální je předpověď zákona odrazu. Ve dvourozměrném prostoru si představme rovinné zrcadlo a paprsek jako nekonečný obdélník, který se šíří směrem k němu a s kolmicí na zrcadlo svírá úhel α .



Obr. 32. K zákonu odrazu

lomu n_1 a n_2 (světlo se v nich tedy šíří rychlostmi c/n_1 a c/n_2) a pro názornost předpokládejme $n_1 < n_2$. Opět situaci znázorníme v okamžiku, kdy k rozhraní dorazí vzdálenější roh obdélníku představujícího sledovaný paprsek (viz obrázek 33).

Zaměříme se na okamžik, kdy k zrcadlu právě přiletěl vzdálenější roh obdélníku (viz obrázek 32). Podle Huygensova principu fungují body zrcadla, kam už paprsek dorazil, jako nové zdroje kruhových vln. Po krátké úvaze nad obrázkem se ujistíme, že jejich obálka tvoří čelo vlny odraženého paprsku, který s kolmicí taktéž svírá úhel α .

Nakonec jsme si nechali odvození Snellova zákona lomu (29). Uvažujme podobné uspořádání jako v předchozím odstavci, tentokrát však mějme dvě prostředí s indexy

Nás bude zajímat v té chvíli největší kruhová vlna poloměru b , tedy ta, která se šíří z opačné strany paprsku. Pro ilustraci je čárkovane vynesena i fiktivní kruhová vlna poloměru a , kterou bychom podle Huygensova principu obdrželi, kdyby rychlost světla v obou prostředích byla stejná. Jednoduchou úvahou tedy

dostaneme

$$\frac{a}{b} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Označíme-li d šířku styčné plochy paprsku a zrcadla, můžeme psát

$$a = d \sin \alpha, \quad b = d \sin \beta.$$

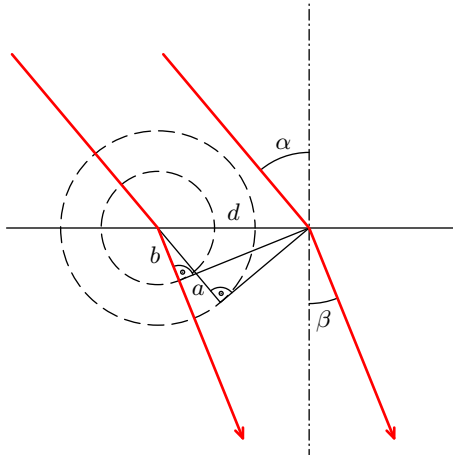
A tedy

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b} = \frac{n_2}{n_1},$$

z čehož už obdržíme přímo

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

V příštím díle si ukážeme Fermatův princip nejkratšího času, který je fundamentálně odlišný od Huygensova, nicméně dává stejné výsledky.



Obr. 33. K výkladu zákona lomu

Úloha I. S ... *petřínská*

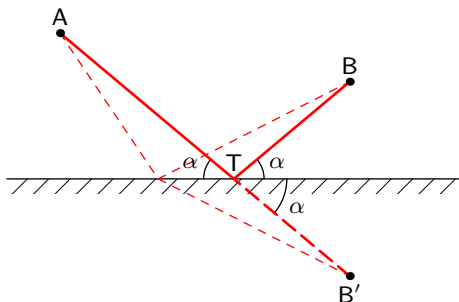
- a) Co uvidí člověk stojící mezi dvěma spojenými na sebe kolmými zrcadly, jejichž spojnice je svislá?
- b) Mějme rovinné zrcadlo skloněné pod úhlem 45° , pohybující se zleva doprava rychlostí v . Zprava na něj dopadá paprsek světla rychlostí c (úhel dopadu je tedy 45°) a odrazí se zhruba nahoru. Pomocí Huygensova principu určete úhel mezi dopadajícím a odraženým paprskem, tedy vlastně opravte zákon odrazu a dopadu pro pohybující se zrcadlo.

Kapitola 2: K Fermatovu principu a ještě dál

Fermatův princip

Ve druhém díle našeho seriálu o světle se budeme nadále zabývat především takzvanou *geometrickou optikou*, tedy tou částí nauky o světle, která se zabývá situacemi, kdy je vlnová délka zkoumaného záření mnohem menší než typická velikost měřících přístrojů, a vlnovou povahu světla tak v podstatě můžeme ignorovat. Prakticky to znamená, že na světlo se zde místo jako na pohybující se vlnu díváme jako na úzký paprsek či soustavu paprsků, letících prostorem. V minulém díle jsme hovořili o Huygensově principu, který nám říká, jak zkonstruovat čelo světelné vlny v daném okamžiku, známe-li jeho tvar v libovolném předcházejícím čase. Není však moc jasné, jak tento princip použít pro úzké světelné paprsky a odvodit tak například, jak se bude paprsek pohybovat v prostředí s proměnným indexem lomu. Zkusme tedy najít pravidlo, podle kterého se paprsky světla řídí.

V nejjednodušším případě máme paprsek světla šířící se volným prostorem; v takovém případě odpověď známe: světlo se bude pohybovat po přímce. Co když mu dáme do cesty zrcadlo? Přesněji řečeno, máme-li dva body, A a B libovolně umístěné na jedné straně zrcadla (viz obrázek), kudy se bude z bodu A pohybovat světlo, aby dorazilo právě do bodu B? Když pomíneme možnost přímé cesty, očekáváme, že paprsek poletí rovně k nějakému místu na zrcadle, od toho se odrazí a odtud poputuje přímo do cíle. Zbývá zjistit, od kterého bodu T zrcadla se paprsek odrazí.



Obr. 34. Odraz a dopad

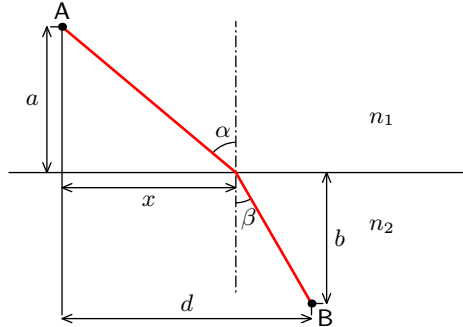
Odpověď našli už Řekové okolo počátku našeho letopočtu: Postavíme-li světlu do cesty libovolné množství zrcadel, bude se vždy šířit tak, aby celková uražená dráha byla co nejkratší. V našem případě to znamená, že bod T musíme nastavit tak, aby součet $|AT| + |TB|$ byl co nejmenší, a zde nám pomůže geometrický trik. Když zakreslíme B' jako zrcadlový obraz bodu B, všimneme si, že $|AT| + |TB|$ je to samé jako $|AT| + |TB'|$, tedy délka cesty z A do B' skrz T. Ale ta je nejmenší, když všechny tři body A, T a B' leží na přímce, z čehož už plyne rovnost úhlů α , vyznačených na obrázku. Dostali jsme tak známé pravidlo odrazu a dopadu.

Platí ale zmíněný „princip nejkratší dráhy“ opravdu vždy? Nám už známý příklad dvou prostředí s rozdílnými indexy lomu ukazuje, že ne, vždyť lomená dráha, kterou předpovídá Snellův zákon, rozhodně není nejkratší cesta z A do B na následujícím obrázku 35.

Pierra de Fermat tedy někdy okolo roku 1657 napadlo místo dráhy, kterou světelný paprsek urazí, uvažovat nad časem, jenž mu daná trajektorie zabere, a vyslovil slavný *princip nejkratšího času*, dnes známý také jako *Fermatův princip*:

Máme-li daný počáteční a koncový bod trajektorie, paprsek světla se mezi nimi bude šířit tak, aby mu cesta zabrala nejkratší možnou dobu.

Při pohledu zpět na obrázek znázorňující lom světla, které přechází z opticky řídkšího do opticky hustšího prostředí (tj. $n_1 < n_2$), zjišťujeme, že Fermatův princip kvalitativně správně předpovídá lom „ke kolmici“. Protože se paprsek šíří pomaleji ve druhém prostředí, snaží se v něm jít po kratší dráze, ne však té nejkratší možné (tedy kolmé na rozhraní), neboť ta by zase vedla k příliš dlouhé dráze v prvním prostředí. Výsledkem je tedy jistá kompromisní, mírně lomená dráha. Abychom ukázali, že Fermatův princip předpovídá přesně zákon lomu, musíme konečně trochu počítat.



Obr. 35. Snell a Fermat

Příklad – Snellův zákon lomu z Fermatova principu

Ukažte, že pro trajektorii s nejkratším časem platí $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$.

Řešení

Označme a a b vertikální vzdálenosti bodů A a B od rozhraní a d jejich horizontální vzdálenost (viz obrázek). Obecný paprsek dopadne do místa vzdáleném x od paty kolmice spuštěné z bodu A na rozhraní. Celkový čas pro takovou dráhu pak vychází

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{v_2} = \frac{1}{c} \left(n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2} \right).$$

Abychom našli minimum t v závislosti na x , položíme derivaci rovnou nule.

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left(n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} \right)$$

neboli

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}},$$

což je ekvivalentní nám již známému zákonu lomu

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta.$$

Přestože vidíme, že vše funguje, jak má, musíme se přiznat, že jsme Fermatův princip uvedli v podobě, která je jen speciálním případem správného a obecně platného zákona. Ve skutečnosti se totiž paprsky vždy nepohybují po dráze s *nejkratším* časem, ale po dráze, na které je čas *stacionární*. To jednoduše řečeno

znamená, že pozměníme-li virtuálně správnou trajektorii téměř nepatrným, ale libovolným způsobem, celkový čas, který jí přísluší, se prakticky nezmění. Situace je tedy podobná, jako když hledáme stacionární body funkce $f(x)$: derivace $f'(x)$ je nulová v místech, kde malé posunutí po ose x nepůsobí téměř žádnou změnu v $f(x)$. V našem případě ale místo stacionárních bodů funkce z reálných čísel do reálných čísel hledáme stacionární trajektorie zobrazení ze všech myslitelných trajektorií do reálných čísel.²⁰ Správné dráhy paprsků tedy mohou být lokální či globální minima, maxima ale i obdoby „sedlových bodů“. Matematická disciplína, která se zabývá tímto typem problémů, se nazývá *variální počet* (variací δf funkce f rozumíme její obecné diferenciální pozměnění) a je nedílnou součástí matematického aparátu fyziky.

Od šošovky, šošovice ke kvantové mechanice

Pomocí Fermatova principu můžeme elegantně vysvětlit funkci spojné čočky. Posvítné na ni z jedné strany bodovým zdrojem umístěným na její optické ose a sledujeme paprsky letící od této osy pod různými úhly. Trik čočky spočívá v tom, že čím více je paprsek odchýlený od osy, tím tenčí kus skla mu stojí v cestě, a ideální čočka má právě takový tvar, aby všechny myšlené paprsky sbíhající se na druhé straně do jednoho bodu odpovídaly přesně stejnému, minimálnímu času, nezávisle na úhlu odklonu od optické osy. Jinými slovy, pro každý paprsek odchýlený od osy se dráha navíc ve vzduchu přesně vyrovná s kratší drahou opticky hustým sklem. Světlo se tedy nemůže rozhodnout, kudy se šířit, a nezbyvá mu než zkusit všechny cesty skrz čočku, neboť všechny odpovídají minimálnímu času.

Podobná tvrzení dávají vzniknout spoustě otázek: Co to znamená, že se světlo rozhoduje? Jak může předem vědět, které dráhy odpovídají nejkratším časům? Částečná odpověď na tyto otázky je pěkně formulovaná v prvním díle *Feynmanových přednášek z fyziky* v kapitole *Princip nejkratšího času* a jejich analýza nás opět vede k hledání hranice mezi vlnovou a „paprskovou“ povahou světla. Víme totiž, že světlo v daném paprsku je schopné jistým způsobem prozkoumat bezprostředně sousedící dráhy a zjistit, na které je celkový čas pohybu nejkratší. Vzdálenost, na kterou je světlo schopné prozkoumávat okolní dráhy je ale řádově rovná jeho vlnové délce, a nutíme-li ho procházet užšími místy, žádné paprsky řídící se Fermatovým principem nepozorujeme.

To nás přivádí blíže k analogii mezi optikou a mechanikou. Podobně, jako jsme v optice vyslovili princip nejkratšího času pro paprsky, můžeme i v klasické mechanice místo Newtonových zákonů použít takzvaný princip nejmenší akce: definujeme Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - V$$

jako rozdíl kinetické a potenciální energie. Princip nejmenší akce tvrdí, že hmotný bod se bude pohybovat tak, aby průměrná hodnota Lagrangianu byla co nejmenší.²¹ Zájemce odkazujeme na FYKOSí seriál o teoretické mechanice z ročníku 2004/05.

²⁰⁾ Takovému zobrazení se obvykle říká *funkcionál*.

²¹⁾ Opět bychom místo nejmenší měli psát stacionární.

Analogie však sahá ještě mnohem dál. Podobně, jako je paprsková optika vyjádřená Fermatovým principem jen přibližnou verzí přesnější a mnohem bohatší teorie vlnové optiky (které se začneme věnovat v následujícím díle), tak se na počátku dvacátého století ukázalo, že klasická mechanika je „jen“ aproximací složitější teorie, známé jako *kvantová mechanika*, v níž se částice chovají částečně jako vlny, které splňují rovnici velice podobnou té pro světlo. To už ale opravdu překračujeme rámeček tohoto dílu.

Optická hybnost

Vraťme se teď od povídání k počítání; u analogie s mechanikou ovšem ještě zůstaneme. Možná jste slyšeli, že symetrie mechanického systému souvisejí se zachováním fyzikálních veličin. Nezávisí-li například potenciální energie na souřadnici x , bude se zachovávat hybnost v tomto směru.²²

$$m \frac{dv_x}{dt} = \text{konst.}$$

Podobně, je-li silové pole kulově symetrické, jako například v případě gravitačního pole Slunce, bude se zachovávat vektorová veličina známá jako moment hybnosti

$$\mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{konst.}$$

Pro hlubší pochopení vztahu symetrií a zákonů zachování opět doporučujeme závěrečné díly seriálu o teoretické mechanice z osmnáctého ročníku.

Dokážeme najít podobné „zákony zachování“ i v paprskové optice? Kupodivu ano a i zde se nám budou velice hodit při praktických výpočtech. V geometrické optice chceme nejčastěji zjistit, jak se bude pohybovat paprsek v prostředí se spojitě se měnícím indexem lomu $n(x, y, z)$. My budeme až do konce tohoto dílu pro jednoduchost uvažovat jen úlohy se spojitým indexem lomu $n(x, y)$ na dvou-rozměrné ploše, a paprskem popsáním funkcí $y(x)$. Jakou veličinu bychom měli nazvat *optickou hybností*? Z analogie s mechanikou bychom si přáli, aby se x -ová složka optické hybnosti zachovávala, pokud index lomu závisí jen na y . V takovém případě můžeme rozsekát naši plochu s indexem lomu na infinitesimální pásy rovnoběžné s osou x , takže n se v rámci jednoho pásku téměř nemění, a na každé rozhraní mezi nimi použít Snellův zákon lomu! Ten nám říká, že veličina $n(y) \sin \alpha$, kde $\alpha(x)$ je úhel, který paprsek svírá v daném místě x s rovnoběžkou na osu y , je stejná pod i nad rozhraním, což můžeme vyjádřit diferenciálně jako

$$n(y) \sin(\alpha(x)) = n(y + dy) \sin(\alpha(x + dx)).$$

Můžeme tedy projít kolik rozhraní chceme, ale $n(y) \sin \alpha$ se od počátečního do koncového bodu nezmění. Tato veličina je navíc díky faktoru $\sin \alpha$ úměrná x -ové složce rychlosti paprsku, takže ji můžeme směle označit za optickou hybnost, ačkoli fyzikální rozměr hybnosti nemá.

²²⁾ Důvod je prostý: nemění-li se potenciální energie v daném směru, nemůže v něm působit žádná síla, a není co by měnilo celkovou hybnost.

Ze zákona zachování optické hybnosti přímo vyplývá diferenciální rovnice pro $y(x)$. Zbývá vyjádřit $\sin \alpha$. Z výpočtu

$$\sin(\alpha(x)) = \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

obdržíme

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = k, \quad (30)$$

kde k je konstanta pro celou trajektorii. Získáváme tak diferenciální rovnici, která se dá ve většině jednoduchých případech řešit analyticky.

Příklad – lineární index lomu

Najděte trajektorie paprsků v materiálu s indexem lomu $n(y) = n_0(y/a)$ pro $y > 0$.

Řešení

V našem případě rovnice (30) nabývá tvar

$$n_0 \frac{y}{a} = k \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Jelikož posunutím jakéhokoli řešení podél osy x dostaneme opět řešení, stačí se omezit na ta, která mají $y'(0) = 0$, a všechna ostatní dostaneme vhodným posunutím.²³ Z počátečních podmínek $y'(0) = 0$ a $y(0) = y_0$ tak můžeme určit konstantu

$$k = n_0 \frac{y_0}{a},$$

což po dosazení vede k rovnici

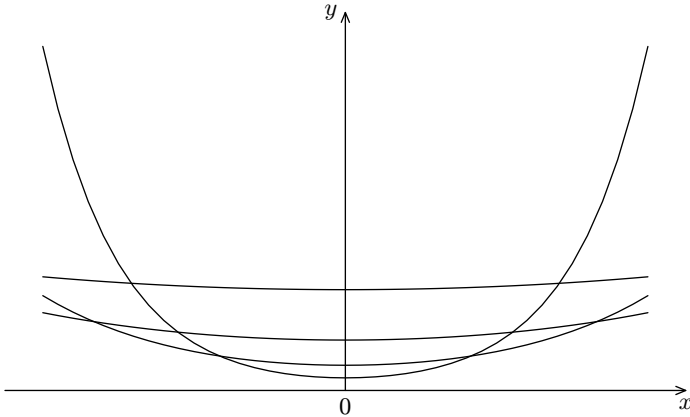
$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1},$$

kterou už můžeme řešit separací proměnných s výsledkem

$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x}{y_0}\right).$$

Paprsky tedy budou mít stejný tvar jako řetězy uchycené ve dvou bodech a volně visící v homogenním gravitačním poli. Na dalším obrázku jich na ukázkou pár nabízíme. Všimněte si především, že žádný z paprsků nikdy neprotne osu $y = 0$, neboť oblasti s nízkým indexem lomu, a tedy vysokou rychlostí světla, je efektivně odpuzují.

²³⁾ Zkuste si promyslet proč.



Obr. 36. Trajektorie světla pro lineární index lomu

Optický moment hybnosti

Jako třešničku na dortu ještě bez odvozování uvedeme, že v případech, kdy index lomu závisí jen na vzdálenosti od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, existuje zachovávací se veličina analogická momentu hybnosti. Vypočítáme ji jako

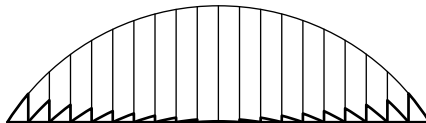
$$L = n(r) r \sin \alpha,$$

kde α je tentokrát úhel mezi paprskem a průvodičem daného bodu.

Tím jsme završili naše putování geometrickou optikou. Pokud se vám tento díl zdál matematicky až příliš náročný, netruchtele, protože v tom příštím začínáme úplně odznova – poprvé se podíváme do světa vlnové optiky.

Úloha II. S ... záhada meotaru a rybí oko

- a) Možná jste si všimli, že mezi zdrojem a průhlednou podložkou na fólie je v tradičním meotaru za účelem soustředění světla vložená dost zvláštní čočka, která vypadá spíš jako rýhovaná deska (viz také úloha VI.2 ze XVII. ročníku). Vznikne tak, že standardní ploskovypuklou čočku rozřezáme na soustředné prstence, z každého si necháme jen úplný konec a výsledek opět složíme, takže získáme něco jako „osově symetrické pahorkaté sklo“ (viz obrázek).



Obr. 37. Čočka z meotaru

Takto vzniklá čočka má všude stejný sklon jako původní spojka, a podle Snellova zákona tak očekáváme, že bude stejně dobře soustřeďovat světlo. Naproti tomu, z pohledu Fermatova principu, už každé dráze nepřislouží stejný

čas, neboť jsme v různých místech odebrali různě tlusté vrstvy skla – například úplně nejkratší čas teď odpovídá cestě po optické ose. Zdá se tedy, že Fermatův princip selhává – podle něj by čočka soustřeďovala jen světlo jdoucí po optické ose a nefungovala tak, jak má. Rozhodněte kdo má pravdu: Snell, Fermat? A proč?

- b) Najděte dráhy paprsků ve dvojrozměrné situaci, kdy závislost indexu lomu na vzdálenosti r od počátku je dána funkcí

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}.$$

- c) (Bonus.) Vložíme-li do prostoru s proměnlivým indexem lomu bodový zdroj světla, může se stát, že se velká část paprsků, které z něj vycházejí, sejde v jednom bodě, jako je tomu v případě spojné čočky. Takto vzniklý bod pak nazýváme obrazem bodu původního. Popište geometrické zobrazení zdroj \rightarrow obraz, které tímto způsobem indukuje prostředí s indexem lomu z předchozí úlohy.

Kapitola 3: Vlnová optika

Úvod

V předchozí kapitole seriálu jsme se zabývali velmi hrubou aproximací chování světla zvanou geometrická optika, která se na světlo dívá jako na jednoduché paprsky, jejichž pohyb se řídí principem nejkratšího času. Tato představa, ač nám dává do rukou dobrý návod, jak řešit jednoduché problémy, však nedává odpovědi na otázky jako „Proč platí princip nejkratšího času?“ nebo „Proč je rychlost světla v nějakém materiálu menší a proč toto závisí na barvě světla?“ atd. Abychom se mohli přiblížit odpovědím na podobné otázky, musíme svou pozornost obrátit na přesnější modely světla a prvním krokem může být právě vlnová optika. To, že chování světla není tak jednoduché, se dá snadno ilustrovat na dobře známém dvouštěrbinovém experimentu. Představme si, že světlo pouštíme skrze přepážku na stínítko, kde v přepážce jsou blízko vedle sebe dvě úzké štěrbin. Pokud zakryjeme jednu ze štěrbin, výsledkem bude úzký proužek světla na stínítku.

Pokud necháme obě štěrbinu odkryté, výsledkem nebudou dva úzké proužky (což by byl výsledek geometrické optiky) ale spíš soustava proužků naskládaných vedle sebe. Tento jev se nazývá *interference* a můžeme ho snadno zdůvodnit například pro vlny na vodě. Od obou „štěrbin“ by se šířily kruhové vlny, od každé štěrbinu jedna. V místech, kde se potkají maximum od jedné vlny a minimum od druhé, se výchylka vyruší a hladina bude klidná. V místech, kde se potkají dvě maxima, bude výchylka dvakrát větší a tak dále. Když si tedy představíme světlo jako vlnění, které se může navzájem odčítat (interferovat) a z každé štěrbinu se šíří do všech směrů, můžeme takto vysvětlit interferenční proužky. Jenže vlnění čeho? Na tuto otázku našel odpověď v polovině devatenáctého století James Clerk Maxwell, když studoval řešení rovnic popisujících časový vývoj elektromagnetického

pole (Maxwellovy rovnice). Zjistil, že tyto rovnice mají nenulové řešení i v prázdném prostoru, tedy i když kolem nejsou žádné náboje, které by pole generovaly. Toto řešení bylo ve tvaru vln šířících se prostorem rychlostí, která se ukázala být stejná jako tehdy už naměřená rychlost světla a tak se zrodila teorie popisující světlo jako elektromagnetické vlnění. Na tu si však budeme muset počkat do dalších dílů seriálu. V tomto díle budeme světlo studovat jednoduše jako kmitání něčeho, nazývejme to E , a pro popis jevů z toho plynoucích budeme používat komplexní čísla a tedy samotný text začneme krátkým úvodem do matematiky zde používané.

Trocha matematiky

Začneme rychlým zopakováním toho, co jsou to komplexní čísla a řekneme si něco o komplexní exponenciále a sčítání řad.

Komplexní číslo je číslo ve tvaru $z = a + ib$ kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $i^2 = -1$, a se nazývá reálná část čísla z , píšeme $a = \operatorname{Re}(z)$ a b se nazývá imaginární část, píšeme $b = \operatorname{Im}(z)$.

Máme-li dvě komplexní čísla z_1 a z_2 , pak platí $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$ a $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. Číslo $\bar{z} = a - ib$ je číslo komplexně sdružené k číslu z . Chceme-li podíl dvou komplexních čísel z_1 a z_2 , dostaneme

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \quad (31)$$

Komplexní číslo z můžeme zapsat i v polárních souřadnicích jako

$$z = R \sin \varphi + iR \cos \varphi. \quad (32)$$

Kde $R = |z| = z\bar{z} = a^2 + b^2$ a $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$. Kdo neví, o čem je řeč, měl by si to rychle zjistit, protože je to důležité pro pochopení dalšího textu.

Nejdůležitější vztah, který budeme používat je

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (33)$$

Tento vztah si můžete odvodit, například přes Taylorův rozvoj nebo zderivováním čísla $z = \cos x + i \sin x$ podle x a vyřešením vzniklé diferenciální rovnice separací proměnných. Jedná se o velmi zajímavou rovnici, která říká, že pro $x \in \mathbb{R}$ je exponenciální funkce e^{ix} periodická s periodou 2π a amplitudou $|e^{ix}| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. O tom, že je to rovnice velmi užitečná není pochyb, například se z ní dají elegantně odvodit vztahy pro sinus a cosinus součtu.

Často se hodí i vyjádření sinu a cosinu pomocí exponenciálních funkcí, ke kterému můžeme dospět komplexním sdružením rovnice (32), a sice

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad (34)$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

Toto se obzvláště hodí při sčítání řad obsahujících siny a cosiny. Umíme totiž snadno vypočítat součet tzn. geometrické řady S_n

$$S_n = \sum_{m=0}^n x^m$$

a to tak, že řadu vynásobíme výrazem $(1 - x)$ a všimneme si, že se vše až na dva členy odečte. Dostaneme

$$S_n(1 - x) = 1 - x^{n+1} \Rightarrow S_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Pro $x \neq 1$, v opačném případě je součet řady triviální. Co kdybychom chtěli součet řady

$$\sum_{m=0}^n \cos mx?$$

S komplexními čísly je to hračka. Stačí si všimnout, že $\cos mx = \operatorname{Re}(e^{imx})$, a dostáváme

$$\sum_{m=0}^n \cos mx = \sum_{m=0}^n \operatorname{Re}(e^{imx}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{m=0}^n (e^{ix})^m\right). \quad (35)$$

Toto je již normální geometrická řada, a můžeme ji sečíst. Obdržíme tak výsledek

$$\sum_{m=0}^n \cos mx = \operatorname{Re}\left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right).$$

Použitím vztahů (31) a (33) si můžete tuto reálnou část vypočítat přímo obecně pro x , nicméně výsledek je dost velký a není tak důležitý jako postup, takže ho sem psát nebudeme.

Poslední věc, kterou budeme potřebovat je, že pro $x \ll 1$ platí přibližně

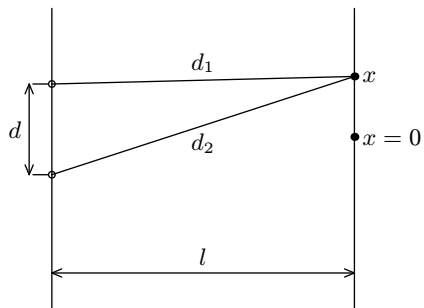
$$(1 + x)^n \approx 1 + nx. \quad (36)$$

Zájemci si opět mohou tento vztah odvodit z Taylorova rozvoje, pro celočíselné n i z binomické věty.

Nyní, vybaveni tímto skromným matematickým arzenálem, se můžeme pustit do studia interference.

Interference

Mějme dvě štěrbiny ve vzdálenosti d od sebe, které fungují jako bodové zdroje světla se stejnou počáteční fází a frekvencí. Ve vzdálenosti l od nich se nachází stínítko, $l \gg d$, viz. obrázek 38, pohled shora. Jaká bude intenzita světla na



Obr. 38. Interference na dvojtěrbíně

stínítku v bodě x ? Vzdálenost bodu x od spodní šterbiny nechtě je d_1 vzdálenost od horní nechtě je d_2 . Pak platí

$$d_1 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2},$$

$$d_2 = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}.$$

Jelikož se světlo chová jako vlnění pole E , můžeme pro pole v bodech na každé přímce parametrizované např. y vycházející z nějaké šterbiny psát

$$E = E_0 e^{iky}. \quad (37)$$

Tento zápis by měl být spíše $E = \text{Re}(E_0 e^{iky})$, ale reálnou část vynecháme a jen si budeme pamatovat, že kdyby nás někdy zajímala konkrétní čísla, musíme na vztahy aplikovat funkci Re . Písmeno k zde symbolizuje konstantu (vlnové číslo), která určuje vlnovou délku λ vlny

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Amplituda intenzity světla I je úměrná energii tohoto elektrického pole a energie elektrického pole je úměrná intenzitě pole na druhou (elektrostatika) a tudíž, až na konstantu úměrnosti, můžeme psát

$$I = |E_0 e^{iky}|^2 = E_0^2.$$

Tento vztah samozřejmě ve skutečnosti pro všechna y neplatí, protože energie se zachovává a proto její součet na každé kulové slupce se středem ve zdroji musí být stejný a protože plocha kulové slupky je úměrná y^2 je intenzita úměrná $1/y^2$ a vztah pro elektrické pole by tedy měl spíš být

$$E = \frac{E_0}{y} e^{iky}.$$

Nás však zajímá pouze tvar (vzdálenost) interferenčních proužků v blízkém okolí bodu $x = 0$, spíš než to, jak jejich intenzita ubývá ve vzdálenostech, takže toto zanedbáme a budeme dál používat vztah (37). Jak tedy vypočítáme rozložení intenzity na stínítku? Každá ze šterbin přispěje k celkové intenzitě podle vztahu (37) s y odpovídající vzdáleností. Tedy pro amplitudu intenzity v bodě x platí

$$I = E_0^2 \left| e^{ikd_1} + e^{ikd_2} \right|^2.$$

Nyní využijeme fakt, že d i x jsou hodně malé ve srovnání s l , neboť kdyby d bylo příliš velké, šterbiny by o sobě „nevěděly“, a kdyby x bylo moc velké, začal

by se příliš projevoval úbytek intenzity. Jakmile jsou však malé, můžeme radostně použít vztah (36) a dostaneme, že $d_{1,2} = l + (x \pm d/2)/2l = A \pm kxd/2l$, kde A je výraz stejný pro obě vzdálenosti. Dosadíme-li toto do vztahu pro intenzitu, dostaneme

$$I(x) = E_0^2 \left| e^{iA} \right|^2 \cdot \left| e^{ikxd/2l} + e^{-ikxd/2l} \right|^2,$$

Což vypadá podezřele podobně jako rovnice (34), a tedy dostáváme konečný výsledek

$$I(x) = 4E_0^2 \cos^2 \left(\frac{kdx}{2l} \right).$$

Předpovědi vlnové optiky tedy skutečně jsou světlé a tmavé proužky na stínítku, kde světlé odpovídají maximům intenzity a tmavé místům kde je cosinus nula. Pro $x = 0$ máme maximum a nejbližší další je když argument cosinu je π , pro vzdálenost proužků x_0 tak dostáváme

$$x_0 = \frac{2\pi l}{kd} = \frac{\lambda l}{d}.$$

Kdybychom d zmenšili skoro na nulu, tedy vzali pouze jednu štěrbinu, cosinus se roztáhne do nekonečna a na stínítku dostaneme jednoduše osvětlení. To je proto, že jsme zanedbali úbytek intenzity se vzdáleností, takže je vše v pořádku. Podobně, pokud budeme vzdálenost d zvětšovat nade všechny meze, interference vymizí a dostaneme opět jednoduše osvětlení, opět ze stejného důvodu.

Interference na více štěrbínách

Co se stane, budeme-li mít štěrbín více, konkrétně opravdu hodně štěrbín, hodně blízko u sebe? Dostaneme něco, čemu se říká difrakční mřížka, viz. obrázek 39, pohled shora. Vzdálenost mezi štěrbínami nechť je $d \ll 1$ a vzdálenost stínítka od mřížky nechť je $l \gg d$. Pokusíme se vypočítat, jak bude vypadat intenzita světla na stínítku v závislosti na x . Zvolme počátek osy x tak, aby byly štěrbiny mřížky symetricky rozloženy. Potom se můžeme na mřížku dívat jako na soustavu soustředných dvouštěrbín, které mají vzdálenosti ve tvaru $d_n = (2n+1)d$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$ Musíme si však dát pozor, vzhledem k tomu, že nepočítáme s úbytkem intenzity se vzdáleností, musí být vždy $(2n+1)d \ll l$ tedy musíme počítat jen se štěrbínami až do nějakého $n = N$, pro které nerovnost ještě dobře platí, a dál už ne. Z kapitoly o interferenci víme, že pole v bodě x na stínítku je

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \cos \left(\frac{kxd_n}{2l} \right).$$

Pole od mřížky bude jednoduše součet přes všechny dvouštěrbiny

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \sum_{n=0}^N \cos((2n+1)\alpha),$$

kde $\alpha = kxd/2l$. Odtud můžeme vydedukovat první zajímavý výsledek. Pokud je $x = 0$, pak jsou všechny hodnoty kosinů rovny jedné a výsledek je tedy úměrný

$2(N + 1)E_0$, což je velké číslo, neboť šěrbin je hodně. Takže v počátku máme jedno velké maximum, jeden velmi světlý proužek. Zároveň jakmile $x \neq 0$, můžeme dostávat další maxima, ale příspěvky od spousty členů se budou navzájem odčítat, takže další maxima budou mnohem menší než to v počátku. Tuto řadu můžeme podle rovnice (35) přepsat do tvaru

$$E(x) = 2E_0 e^{il} \operatorname{Re} \left(e^{i\alpha} \sum_{n=0}^N (e^{2i\alpha})^n \right).$$

Vzniklou sumu lze sečíst jako geometrickou řadu a následně vzít její reálnou část. Postup je zdoluhavý, ale přímočarý, takže zde uvedeme pouze výsledek

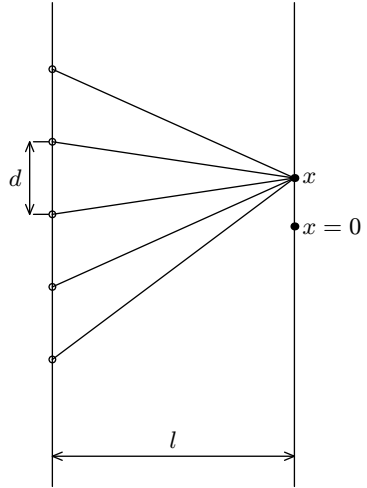
$$E = E_0 e^{il} \frac{\sin(2(N + 1)\alpha)}{\sin \alpha}. \quad (38)$$

Graf této funkce nalezneme na následující stránce.

Intenzita světla je potom $|E|^2$. Vzhledem k tomu, že funkce sinus se pro malý argument chová stejně jako funkce $y = x$, jinými slovy blízko nuly se tyto dvě funkce dotýkají, můžeme pro malá x psát $\sin x = x$, tudíž pro x (a tedy i α) jdoucí k nule skutečně dostaneme velké maximum. Pokud bychom například chtěli vědět, kde se nachází první minimum, to znamená tmavý proužek, musíme zjistit pro jaké x je $E = 0$. Vzhledem k tomu, že $\sin(2(N + 1)\alpha)$ kmitá nejrychleji, dostane se do nuly první, a tedy pozice prvního minima je dána rovnicí

$$2(N + 1)\alpha = \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\lambda l}{2d(N + 1)}.$$

V příští kapitole představíme světlo jako vlnění vektorů elektrického a magnetického pole, jež se řídí Maxwellovými rovnicemi. Tato vektorová povaha světla dává vzniknout mnoha zajímavým jevům jako je například polarizace.



Obr. 39. K výkladu interference na mřížce

Kapitola 4: Světlo jako elektromagnetické vlnění

Nyní se budeme zabývat, jak již název napovídá, popisem světla jako vlnění elektromagnetického pole. Otázku, co světlo ve skutečnosti je, si lidé kladli po dlouhou dobu, a uspokojivou²⁴ odpověď našel až James Clerk Maxwell při studiu elektrických a magnetických polí. Všiml si, že do té doby známé zákony elektromagnetismu jsou neúplné a sestavil rovnice, jež dnes nesou jeho jméno. Zároveň pak jejich pečlivým studiem došel k závěru, že světlo není nic jiného než elektromagnetické pole. Abychom zjistili, co Maxwella na tuto myšlenku přivedlo, nejprve se stručně seznámíme s matematickým aparátem potřebným pro pochopení jeho rovnic, následně pak s Maxwellovými rovnicemi samotnými a jejich speciálním řešením (vlněním). Ve druhé části se pak zaměříme na jednu vlastnost, kterou tak světlo v novém kabátě získá, tedy polarizaci.

Některé matematické pojmy

Než se pustíme do fyzikálního významu Maxwellových rovnic, je třeba si vysvětlit některé pojmy a značení. Elektrické (či magnetické) pole si matematicky představujeme jako vektorové pole, např. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, tedy jako předpis, který každému bodu prostoru v každém čase přiřadí určitý tříložkový vektor. Pokud máme dané vektorové pole \mathbf{E} a plochu S v prostoru, můžeme v každém bodě plochy S vypočítat skalární součin $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$, kde \mathbf{n} je jednotkový vektor v daném bodě kolmý na S , a vynásobit toto elementem plochy. Pokud tuto veličinu sčítáme přes celou plochu, neboli zintegrujeme $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ přes plochu S , dostaneme takzvaný tok pole \mathbf{E} danou plochou.

Tok pole \mathbf{E} ven z elementární krychličky, jejíž hlavní diagonála jde z bodu (x, y, z) do bodu $(x + \delta, y + \delta, z + \delta)$, v poměru ku objemu krychličky se nazývá *divergence* pole a značí se $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Takový tok můžeme snadno dopočítat. Uvažujme například tok krychličkou ve směru osy x

$$\delta^2 (E_x(x + \delta, y, z) - E_x(x, y, z)) = \delta^3 \frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Podobným způsobem můžeme vypočítat tok ve směru y a ve směru z , a celkový tok vydělený δ^3 , tedy divergence, je pak dán rovnicí

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Značení $\nabla \cdot \mathbf{E}$ se používá proto, že výraz vypadá jako pole \mathbf{E} skalárně vynásobené s „vektorem“ ∇ , kde

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

K čemu je taková divergence dobrá? Mějme vektorové pole \mathbf{E} a uzavřenou plochu S , která obklopuje objem V . Pokud si představíme tento objem slepený

²⁴⁾ ze současného pohledu ale nikoli konečnou

z elementárních krychliček, můžeme tok pole skrz S napsat jako součet toků skrz všechny tyto krychličky, neboť u krychliček, které stěnami sousedí s ostatními, se tok vyruší a zbude jen na okrajích V , tedy na S . Avšak součet toku přes všechny krychličky ve V není nic jiného než divergence \mathbf{E} integrovaná přes objem V . Můžeme tedy psát

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (39)$$

Tomuto výsledku se v matematice říká *Gaussův zákon*.

Podobně jako jsme definovali tok pole plochou, můžeme definovat cirkulaci pole podél křivky. Je to zcela přirozeně v každém místě složka \mathbf{E} tečná ke křivce, zintegrováno podél křivky. Pokud vezmeme elementární čtvereček, vektor s velikostí cirkulace podél stran čtverečku vydělený plochou a směrem kolmým na plochu čtverečku se nazývá *rotace* pole a značí se $\nabla \times \mathbf{E}$. Pokud je například čtvereček orientován ve směru osy x (tedy leží v rovině yz), dostaneme pro x -ovou složku rotace

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}.$$

Z podobnosti s vektorovým součinem plyne také značení rotace. Mějme uzavřenou křivku Γ ohraničující plochu S . Ze stejného důvodu jako výše plyne, že rozdělíme-li tuto plochu na elementární čtverečky, je cirkulace podél Γ rovna součtu přes všechny cirkulace kolem těchto čtverečků. Jinými slovy

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \, dS = \int_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (40)$$

Matematici tento vztah nazývají *Stokesova věta*. Nyní, vyzbrojeni novým matematickým aparátem, se můžeme pustit do studia Maxwellových rovnic, které ho využívají v míře větší než hojně.

Maxwellovy rovnice

Elektromagnetismus (EM) je třída fyzikálních interakcí, kterými proudy a náboje působí na dálku na jiné náboje. Máme situaci podobnou Newtonově teorii gravitace, kde přítomnost předmětů s vlastností nazývanými se *hmotnost* způsobuje působení na dálku úměrné této hmotnosti a nepřímou úměrné druhé mocnině vzdálenosti od předmětu. V EM roli hmotnosti jakožto zdroje působení přebírají proudy a náboje. Na rozdíl od jednoduchého vztahu pro gravitační působení je ale v EM velice těžké přesně zapsat způsob, jakým toto probíhá. Z toho důvodu si práci rozdělujeme do dvou kroků. V prvním kroku řekneme, že přítomnost proudů \mathbf{j} a nábojů ρ v prostoru dává vzniknout elektrickému (\mathbf{E}) a magnetickému (\mathbf{B}) poli. Ve druhém kroku ze znalosti $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ vypočítáme sílu působící na „testovací“ náboj q v daném místě \mathbf{r} jako

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

kde \mathbf{v} je rychlost, kterou se náboj v dané chvíli pohybuje. Maxwellovy rovnice plní svou úlohu v první části, tedy umožňují vypočítat \mathbf{E} a \mathbf{B} z nábojů a proudů. Dá

se ukázat, že (ač to není na první pohled úplně jasné) známe-li proudy a náboje, Maxwellovy rovnice jednoznačně určují elektromagnetické pole v celém prostoru.

První z Maxwellových rovnic je

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (41)$$

kde ρ označuje hustotu náboje a ε_0 je konstanta nazvaná permitivita vakua. Význam této rovnice je prostý: Pokud je v prostoru rozložen nějaký náboj, tedy $\rho \neq 0$, potom je také přítomno nenulové elektrické pole. Například pro jeden bodový náboj Q zafixovaný v počátku souřadnic dostáváme pro velikost intenzity ve vzdálenosti r s pomocí Gaussova zákona (39)

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\text{koule}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

A protože na povrchu koule je $E(r) = \text{konst}$, neboť problém je středově symetrický, výsledkem je

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E(r) \int_{\text{koule}} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

neboli

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

což není nic jiného než Coulombův zákon. První Maxwellova rovnice fyzikálně říká, že elektrické pole vzniká v nábojích. Řečeno více barvitě: siločáry elektrického pole „vytékají“ z oblastí s náboji.

Druhá Maxwellova rovnice zní

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (42)$$

což v kontextu výše řečeného fyzikálně znamená, že neexistují magnetické náboje²⁵. Magnetické pole, na rozdíl od elektrického, nemá žádná místa v prostoru, kde by vznikalo, protože nenulová divergence znamená přesně to, že v daném bodě pole vzniká (pokud je divergence větší než nula, do elementárního čtverečku vtéká méně pole než z něj vytéká).

Třetí Maxwellova rovnice je o něco zajímavější

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (43)$$

Často se nazývá Faradayův zákon a říká, že když se někde v čase mění magnetické pole, vzniká elektrické. Jde v podstatě o zákon elektromagnetické indukce.

²⁵⁾ Existence magnetických nábojů, jinak také nazývaných *magnetické monopóly*, nebyla nikdy potvrzena, ovšem ani vyvrácena. Klasická teorie EM s nimi nepočítá, ale není příliš těžké je do Maxwellových rovnic zahrnout. Některé sjednocené teorie silné, slabé a EM interakce jejich existenci dokonce vyžadují.

Vzmemme-li si například drát Γ ohraničující plochu S , pak ze Stokesovy věty (40) dostaneme

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

kde Φ je tok magnetického pole plochou S . Integrál na pravé straně není nic jiného než definice napětí a dostáváme tedy známý vztah pro elektromagnetickou indukci

$$\frac{d\Phi}{dt} = -U.$$

Konečně čtvrtá Maxwelllova rovnice zní

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (44)$$

kde \mathbf{j} je vektor hustoty proudu a μ_0 konstanta zvaná permeabilita vakua. Tato rovnice říká, že když někde teče proud nebo se s časem mění elektrické pole, vznikne kolem pole magnetické. Poslední rovnice v sobě navíc obsahuje jeden hluboký princip, a sice zákon zachování náboje. Pokud totiž vezmeme divergenci obou stran, pak protože divergence rotace je vždy nula (zkuste dokázat), dostaneme za použití (41)

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

což je takzvaná rovnice kontinuity pro proud a náboj. Pokud na ni aplikujeme Gaussův zákon s uzavřenou plochou S a objemem V , dostaneme

$$-\frac{dQ}{dt} = I,$$

kde Q je náboj obsažen v objemu V a I proud tekoucí plochou S . Rovnice kontinuity matematicky vyjadřuje, že pokud nějaký náboj ubude uvnitř objemu V , musí existovat nenulový proud ven z tohoto objemu, neboli náboj se nemůže jen tak ztratit, ani se najednou objevit; odtud zákon zachování náboje.

Na celé věci je pozoruhodné, že původně jsme chtěli Maxwellovy rovnice formulovat tak, aby nám z daných nábojů a proudů dovolily vypočítat elektromagnetické pole. Nyní ale zjišťujeme, že z nich vyplývají konzistentní tvrzení pro náboje a proudy samotné. Jakoby nám příroda naznačovala, že jsme při hledání rovnic EM na správné stopě. Člen $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ve čtvrté rovnici nebyl před Maxwellem znám, a byl to právě on, kdo si uvědomil, že se v rovnici musí objevit, aby se náboj zachovával.

Světlo

Spolu s novým členem dostávají Maxwellovy rovnice i jednu pozoruhodnou vlastnost. Ve volném prostoru, tedy bez přítomnosti nábojů a proudů rovnice (44) říká, že měnící se elektrické pole způsobuje vznik pole magnetického (neboť nenulové prostorové derivace $\nabla \times \mathbf{B}$ implikují i nenulovost \mathbf{B}). Dříve jsme z Faradayova zákona (43) naopak viděli, že měnící se magnetické pole dává vzniknout elektrickému poli. Aplikujeme-li obě tyto rovnice ve volném prostoru, ukazuje se, že mají

řešení, ve kterém se \mathbf{E} a \mathbf{B} periodicky mění, navzájem se v těchto změnách podporují a šíří se tak prostorem rychlostí světla.

Vskutku, položíme-li v rovnicích $\rho = \mathbf{j} = 0$ a aplikujeme rotaci na obě strany (43), dostaneme

$$-\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Použitím vztahu (zkuste odvodit)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (45)$$

se toto zredukuje na takzvanou vlnovou rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (46)$$

kde ∇^2 je zkrácený zápis pro $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. Stejnou rovnici můžeme odvodit i pro vektor \mathbf{B} magnetického pole tak, že nejprve vezmeme časovou derivaci rovnice (43), pak v ní dosadíme za $\partial \mathbf{E}/\partial t$ z (44) s $\mathbf{j} = 0$, a nakonec využijeme diferenciální vektorovou identitu (45) spolu s $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Máme tedy také

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Elektrické a magnetické pole ve vakuu splňují stejné rovnice! Navíc, ačkoli to tak na první pohled nevypadá, tyto rovnice mají jednoduše pochopitelné řešení. Očividným řešením rovnice (46) je $\mathbf{E} = 0$, ovšem ne jediným. Jelikož (46) je vektorová rovnice a platí tedy pro každou složku \mathbf{E} zvlášť, zaměřme se například na komponentu E_x . Abychom si zbytečně nekomplikovali život, uvažujme navíc takové E_x , které je pouze funkcí z a t . Potom dostaneme rovnici

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0.$$

Přímočarým zderivováním si můžete ověřit, že jedním z řešení takovéto rovnice je

$$E_x = f \left(z - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \right)$$

pro libovolnou funkci f , třeba $f(\varphi) = \sin(\varphi)$. Není důležitý tvar funkce f jako spíš skutečnost, že se v čase celá posouvá směrem doprava rychlostí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (47)$$

Pole tedy může v prostoru existovat i bez přímé přítomnosti nábojů, a to ve formě vln, či jiných tvarů, pohybujících se rychlostí v . Permittivitu ε_0 a permeabilitu μ_0

můžeme snadno změřit z elektro- a magnetostatických experimentů s vybavením dostupným na kterékoli lepší univerzitě v Evropě okolo roku 1864, a tak si i Maxwell²⁶ mohl ověřit, že $v \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, tedy přesně rychlost světla ve vakuu. Odtud už byl jen malý krůček k myšlence, že námi nalezené řešení je právě světlo, a jeho nová teorie byla na světě spolu s teorií rádiových, mikrovlnných, gama a dalších paprsků, které jsou všechny stejným druhem EM vlnění lišící se pouze vlnovou délkou.

Zajímá-li nás tedy, jak se bude světlo podle klasické fyziky chovat v libovolné situaci, od průchodu světla krystalem po rádiové vysílání, stačí ho zapsat jako elektromagnetické pole (na detaily se podíváme za chvíli), a použít Maxwellovy rovnice pro výpočet následného vývoje.

Podíváme se nyní přesněji, jak vypadá „světelné“, tedy vlnové řešení Maxwellových rovnic. V obecném případě se světlo může šířit prostorem libovolným směrem, a stejně tak i čelo vlny²⁷ smí mít libovolný tvar (kulový v případě bodového zdroje, válcový v případě zdroje tvaru přímky, atd.). Zaměříme se nyní na nejjednodušší situaci, takzvanou rovinnou vlnu. Čelo rovinné vlny je nekonečná rovná plocha posunující se rychlostí světla c , my se ale budeme zajímat jen o oblasti, kudy už čelo prošlo a kde už tedy „je vidět“, hovoříme-li o světle. V místech se stejnou fází, tedy v rovinách rovnoběžných s čelem vlny, bude navíc elektrické pole všude stejné, s maximální amplitudou \mathbf{E}_0 . Řešení pro $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ pak můžeme zapsat jako

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ct)}, \quad (48)$$

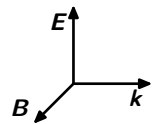
kde \mathbf{k} je jednotkový vektor ve směru šíření vlny. Podobně, jako v předchozím díle seriálu používáme komplexní exponenciálu namísto sinů a cosinů. Pole \mathbf{E} ve skutečnosti není komplexní, takže v rovnicích podobných té předchozí si vždy představujte jen reálnou část. Konstantní vektor \mathbf{E}_0 ale budeme mít obecně komplexní, což nám dovolí popisovat takzvané kruhově polarizované světlo (viz následující secke). Sami si můžete ověřit, že řešení (48) splňuje vlnovou rovnici.

Ne všechny rovinné vlny (48) jsou ale v přírodě dovoleny. Maxwellovy rovnice totiž pro řešení představují „tvrdší“ podmínky než pouhá vlnová rovnice²⁸, a dostaneme z nich vztahy, které musí platit mezi \mathbf{E}_0 a \mathbf{k} , a také zjistíme, jak je ve světelné vlně zastoupeno \mathbf{B} . Dosadíme-li (48) do první Maxwellovy rovnice (41) s nulovou pravou stranou, tedy bez nábojů, dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ct)} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

tedy $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ neboli elektrické pole je kolmé na směr šíření vlny. Nyní uděláme to samé se třetí Maxwellovou rovnicí (43), a najdeme tak tvar \mathbf{B}

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-ct)} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$



Obr. 40.
Vzájemná poloha \mathbf{k} , \mathbf{E} a \mathbf{B} ve světle

²⁶⁾ <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/A.Dynamical.Theory.of.the.Electromagnetic.Field.pdf>

²⁷⁾ Čelo vlny je plocha, která se posunuje prostorem rychlostí c , přičemž v prostoru před ní je pole nulové a za ní nenulové.

Pokud tedy vezmeme

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ct)}, \quad (49)$$

vše funguje, jak má. Z geometrických úvah vyplývá, že i magnetické pole musí být kolmé na směr pohybu a navíc i na pole elektrické (viz obrázek 40). Navíc zjišťujeme, že velikosti intenzit polí v elektromagnetické vlně jsou spojeny vztahem $E = cB$.

Polarizace

Tím, že jsme světlo začali popisovat jako elektromagnetické vlnění, jsme mu zároveň připsali jednu novou vlastnost. Elektrické pole²⁹ (48) v daném bodě je šipka ležící v rovině kolmé na směr pohybu světla. Délka této šipky (přesněji řečeno její druhá mocnina) nám říká, jak velkou intenzitu světlo má, její orientace ale může být libovolná, což je novinka oproti předchozím dílům. Tuto novou vlastnost paprsku světla nazýváme *polarizace*.

Polarizace světla v rovinné vlně je tedy určena směrem vektoru \mathbf{E}_0 ze vztahu (48). Na chvíli zapomeňme, že \mathbf{E}_0 může být komplexní, a podívejme se, co dostaneme pro elektrické pole. Mějme světelný paprsek šířící se podél osy z . Podle předchozích úvah tedy musí být $E_z = 0$, a vektor \mathbf{E}_0 leží v rovině xy , $\mathbf{E}_0 = (E_x, E_y, 0)$. Elektrické pole v celém prostoru pak dostaneme jako reálnou část (48)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kz - ct).$$

O takovémto světle říkáme, že je *lineárně polarizované* ve směru (E_x, E_y) . Všimněte si, že světlo šířící se podél osy z a lineárně polarizované ve směru (E_x, E_y) je superpozicí (součtem) světla polarizovaného ve směru $(1, 0)$ a ve směru $(0, 1)$, tedy čistě podél souřadných os x a y . Tato skutečnost má následující, velmi zajímavé, fyzikální důsledky, opomineme-li možná ještě zajímavější fyzikální důvody související se spinem fotonu.

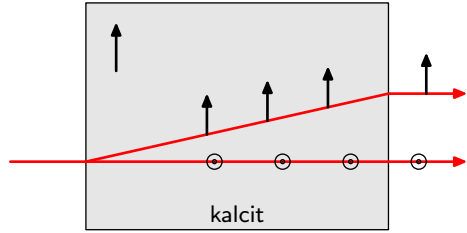
²⁸⁾ Platí tedy implikace: „Jestliže (\mathbf{E}, \mathbf{B}) splňují Maxwellovy rovnice ve volném prostoru, pak (\mathbf{E}, \mathbf{B}) řeší vlnovou rovnici“, ale opačná nikoli.

²⁹⁾ Na magnetické pole teď můžeme zapomenout, protože už víme, že ve světle je beze zbytku určené polem elektrickým a směrem šíření pomocí vztahu (49).

Dvojlom

Některé v přírodě se vyskytující krystaly, jako například kalcit, mají tu zvláštnost, že světlo, které na ně kolmo dopadne, se zpravidla rozdělí na dva paprsky, z nichž jeden pokračuje v průchodu původním směrem, ale druhý se odkloní o určitý úhel a pokračuje dál vlastní cestou, než dojde na konec krystalu, odkud pokračuje v předchozím směru (viz obrázek 41). Tomuto jevu se běžně říká *dvojlom*.

V dvojlomných krystalech totiž v důsledku molekulové struktury³⁰ existuje preferovaný směr, a světlo v tomto směru polarizované podléhá mírně odlišným zákonům, než světlo polarizované ve směru na něj kolmém. Necháme-li tedy na krystal dopadat paprsek polarizovaný přesně v preferovaném směru, celý se zlomí pod daným úhlem, zatímco paprsek polarizovaný kolmo na preferovaný směr bude krystalem procházet celý beze změny směru.



Obr. 41. Světelné paprsky v dvojlomném krystalu

Dvojlomný krystal můžeme použít i jako polarizační filtr, neboli přístroj, který je schopný z libovolně polarizovaného světla oddělit složku polarizovanou v libovolném směru. Stačí natočit preferovaný směr krystalu směrem, ve kterém chceme mít polarizované výsledné světlo, a zablokovat průchod světla, které prochází rovnoběžně.

Jak jsme řekli v předcházející sekci, světlo polarizované *lineárně* v libovolném směru \mathbf{E}_0 můžeme napsat jako součet světél polarizovaných ve dvou na sebe kolmých směrech. Zvolíme-li si za tyto dva směry preferovaný směr našeho krystalu a směr na něj kolmý, píšeme

$$\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_p \\ E_\perp \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ E_\perp \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Filtrem projde jenom složka $(E_p, 0, 0)$, a výsledný paprsek bude mít intenzitu v poměru $E_p^2 : |\mathbf{E}_0|^2$ k intenzitě původní.

Co když ale do filtru posvítíme *nepolarizovaným* světlem, tedy světlem, kde vektor elektrického pole nedrží konstantní směr? Taková je většina světla, se kterým se v přírodě setkáme, neboť procesy, při kterých vzniká (například ve Slunci) zahrnují nabitě částice pohybující se náhodným směrem. Ve většině případů si můžeme představit, že nepolarizované světlo dané intenzity $|\mathbf{E}|^2$ má možný směr polarizace rovnoměrně náhodně rozložený na obvodu celého kruhu $E_p^2 + E_\perp^2 = |\mathbf{E}|^2$.

Někoho by možná napadlo, že pustíme-li toto světlo do polarizačního filtru, projde jím jen nepatrná část, protože drtivá většina světla bude polarizovaná

³⁰⁾ Zjistěte si, jak vypadá krystalová mřížka kalcitu a jiných dvojlomných látek.

v nějakém jiném náhodném směru. Princip superpozice, úzce související s kvantově-mechanickým podkládajícím popisem³¹, ale zaručuje, že nepolarizované světlo můžeme v každém okamžiku rozložit do složek E_p a E_\perp , a protože původní směr byl zcela náhodný, tyto dvě složky budou zastoupeny stejnou měrou. Dostáváme tedy, že filtrem projde paprsek přesně poloviční intenzity.

Kruhová polarizace

Co se stane, když vezmeme vektor \mathbf{E}_0 v rovnosti (48) komplexní? Ukazuje se, že taková volba nám dá typ polarizace, se kterým jsme se ještě přímo nesetkali. Pracujme opět s rovinnou vlnou šířící se ve směru z a zkusme vzít například $\mathbf{E}_0 = E(1/\sqrt{2}, -i/\sqrt{2})$. Reálná část pravé strany rovnice (48) pak nabude tvaru

$$\mathbf{E}_- = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ \sin(kz - ct) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Vypočítáme-li v libovolném místě prostoru velikost vektoru

$$|\mathbf{E}|^2 = \frac{E^2}{2} (\cos^2(kz - ct) + \sin^2(kz - ct)) = \frac{E^2}{2} = \text{konst},$$

vidíme, že je konstantní. Navíc, necháme-li běžet čas t , zůstaneme stát na místě a díváme se proti přicházejícímu světlu, vektor (50) se bude z našeho pohledu otáčet stálou úhlovou rychlostí po směru hodinových ručiček. Dostali jsme takzvané *levotočivé kruhově polarizované* světlo, kdy koncové vektory elektrického pole opisují v prostoru levotočivou kruhovou spirálu. Volba $\mathbf{E}_+ = E(1/\sqrt{2}, i/\sqrt{2})$ by nám dala *pravotočivé kruhově polarizované* světlo. Pozoruhodné je, že stejně jako jsme mohli libovolně polarizované světlo zapsat jako superpozici x -ově a y -ově polarizovaného světla $\mathbf{E}_x = E(1, 0)$ a $\mathbf{E}_y = (0, 1)$, můžeme ho rozložit i do levo- a pravotočivého světla \mathbf{E}_- a \mathbf{E}_+ . Speciálně máme

$$\mathbf{E}_x = \frac{\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathbf{E}_y = \frac{\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-}{\sqrt{2}}.$$

V případě obecných komplexních hodnot E_x a E_y bude výsledné pole nějakou kombinací lineárně a kruhově polarizovaného světla, a koncový vektor elektrického, a tedy i magnetického pole bude v prostoru opisovat eliptickou (splácnutou) spirálu.

Závěr

Náročnost tohoto dílu seriálu byla záměrně vyšší než u předcházejících kapitol, protože vyložit teorii elektromagnetického vlnění bez vektorového aparátu a Maxwellových rovnic dost dobře nejde. Nepředpokládáme, že by každý čtenář hned

³¹⁾ Správně bychom totiž měli mluvit o fotonech majících amplitudu $1/\sqrt{2}$ být polarizované v preferovaném směru a $1/\sqrt{2}$ ve směru kolmém. Pro základní kurz kvantové mechaniky viz například seriál XX. ročníku FYKOSu.

po prvním přečtení pochopil každou uvedenou rovnost, ale snad jsme vám skrz rychlý a přímočarý výklad nastínili, jak vypadají pokročilejší partie fyziky, než na které jste zvyklí ze střední školy. Věříme, že i řešitelé, kteří stále dost dobře nechápou, co znamená trojúhelník postavený na špičku, si z textu odnesou nové znalosti, a naopak ti, kterým se výklad zdál až příliš povrchní a neúplný, najdou odpovědi v některém z dostupných textů. Pro první seznámení s elektromagnetismem skrz Maxwellovy rovnice můžeme doporučit seriál o elektromagnetismu ze XVII. ročníku FYKOSu. Obtížnost následujících úloh je nastavená tak, aby se do nich mohli pustit všichni, kdo se dočetli až sem, i když zatím všemu z tohoto dílu dopodrobna nerozumí.

Úloha IV. S ... maxwellobraní

- a) Co se stane, když do krystalu kalcitu kolmo posvítíme kruhově polarizovaným světlem?
- b) Představte si, že je právě čas $t = 0$, široko daleko není žádný náboj ($\rho = \mathbf{j} = 0$), a my známe počáteční elektromagnetické pole v celém prostoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Z rovnic (43) a (44) tedy můžeme vyjádřit časové derivace $\partial\mathbf{B}/\partial t$ a $\partial\mathbf{E}/\partial t$ pomocí prostorových a vypočítat tak \mathbf{E} a \mathbf{B} v následujícím okamžiku. Tento postup můžeme iterativně opakovat a dostat tak celý časový vývoj pole pro $t > 0$. Jak je možné, že vůbec nemusíme použít první a druhou Maxwellovu rovnici?
- c) Uvažujte náboj velikosti q , který je v klidu pro $t < 0$, a v čase $t = 0$ na něj začne dopadat rovinná světelná vlna. Jak se bude náboj následně pohybovat, když světlo je polarizované (i) lineárně (ii) kruhově? Promyslete nejprve kvalitativně, přesný výpočet, případně počítačová simulace obdrží bonus.

Kapitola 5: Interakce světla s látkou

Úvod

V předchozím díle našeho seriálu jsme vybudovali teorii světla jako elektromagnetického vlnění, ale zatím ji aplikovali jen na pár jednoduchých příkladů, vesměs na světlo šířící se ve vakuu. Naproti tomu v běžném životě se sotva setkáme se světlem ve vakuu – ve dne se k nám sluneční světlo šíří skrz atmosféru sestávající z molekul vzduchu, se kterými složitě interaguje a dává tak vzniknout modré barvě oblohy, nebo jindy, když prší, můžeme díky odlišnému chování světla v kapkách vody pozorovat duhu.

Ať už venku nebo v laboratoři, většina zajímavých efektů nastává, když světelná vlna prochází materiálem s elektromagnetickými vlastnostmi, tedy prakticky čímkoli, neboť každý atom obsahuje záporně nabitě elektrony a kladně nabitě protony. Zhruba řečeno je mechanismus interakce světla s látkou následující: oscilace elektromagnetického vlnění rozkmitávají elektrony³² v látce, jíž světlo prochází, a ty získanou energii vyzářují, přičemž vyzářené pole se pak skládá s polem původním.

³²⁾ Kromě elektronů může světlo rozkmitávat i molekuly jako celek (díky tomu funguje mikrovlnná trouba), anebo interagovat s jádry atomů.

Protože různé látky mají elektrony v atomech uloženy různým způsobem, budou se i jejich optické vlastnosti lišit. Relativně přesné předpovědi kupodivu dostaneme, pokud si představíme, že daný elektron je k jádru poután podobně jako závaží na pružině, tedy silou přímo úměrnou vzdálenosti od jádra. Stejně jako harmonický oscilátor tedy bude mít jistou přirozenou (rezonanční) frekvenci kmitání a daná látka bude vykazovat silné optické vlastnosti právě v okolí této frekvence. Jelikož v oblasti viditelného světla je frekvence totéž co barva, máme před sebou přibližný důvod, proč různé látky mají různou barvu.

Rezonanční frekvence elektronů v atomech nám umožňuje vypočítat kvantová mechanika – na této úrovni už klasické Newtonovy zákony neplatí. Teoreticky se tak dají přesně vypočítat optické vlastnosti, tedy především barva, libovolné látky. Pozoruhodným zjištěním je, že pro většinu materiálů, které jsou běžně k nalezení v přírodě, se rezonanční frekvence pohybují v oblasti viditelného světla. Kdybychom tedy měli k dispozici brýle umožňující vidění v libovolné části spektra, od rádiových vln $\lambda \approx 1 \text{ km}$ až po gamma paprsky $\lambda \approx 1 \text{ pm}$, svět by se nám jevil zajímavý jen v úzké oblasti $400 \text{ nm} < \lambda < 800 \text{ nm}$, tedy přesně v regionu, na který jsou naladěné naše oči. Jak asi toto souvisí s evolucí barevného vidění?

V našem seriálu bohužel není dost místa pro odvození optických vlastností jednoduchých látek ze základních principů, v následující části se proto omezíme na případ, kdy elektrony v atomech reagují na elektromagnetické pole lineárně. Jak již bylo zmíněno, pro většinu materiálů je tento model velmi blízký realitě. Uvidíme, že z tohoto jednoduchého předpokladu za použití Maxwellových rovnic vyplývá vlastnost látek, se kterou jsme se již setkali – index lomu. V přírodě ale existují látky, pro které náš zjednodušující „lineární“ předpoklad neplatí a ve kterých elektrony odpovídají budícímu poli složitějším (kvadratickým, kubickým, atd.) způsobem. Při průchodu světla těmito materiály se můžeme setkat se skutečně zajímavými jevy – index lomu závisí nejen na frekvenci světla, ale i na jeho intenzitě (viz seriálová úloha), může docházet ke generování vln s několikanásobnou frekvencí, efektivnímu zesilování paprsků a spoustě dalších pozoruhodných úkazů. Těmito látkami se zabývá obor *nelineární optika* a na internetu se o něm můžete dozvědět mnohem víc než z předcházejících řádků.

Dipólový moment

Jak můžeme výše zmíněné myšlenky zabudovat do naší teorie elektromagnetického vlnění? Rádi bychom měli veličinu, která popisuje, jak daná látka elektricky reaguje na přiložené pole. Protože ale budujeme makroskopickou teorii³³, nezabýváme se už o jednotlivé atomy a jejich elektrony, ale o veličiny zprůměrované přes objem mnohem větší než je objem elementárních částic. Vložíme-li kus nevodivého materiálu do elektrického pole, elektrony se vůči jádru mírně posunou. Celkový náboj se ale nezmění, protože máme pořád stejný počet protonů a elektronů. Co se ale změní, je takzvaný *elektrický dipólový moment*, což je vektorová veličina, která nám říká, jaké je průměrné vzájemné posunutí kladného a záporného náboje.

³³⁾ Tedy teorii, která se nestará, co se děje na mikroskopických vzdálenostech.

Máme-li v prostoru jeden kladný a jeden záporný náboj $+q$ a $-q$ (celkový náboj je tedy nula), přičemž $+q$ je oproti $-q$ posunutý o vektor \mathbf{d} , vypočítáme dipólový moment \mathbf{p} tohoto páru jako

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}.$$

Podobně, můžeme definovat hustotu dipólového momentu \mathbf{P} v daném místě jako celkový dipólový moment na jednotku objemu. Máme-li tedy v prostoru v jednom metru krychlovém n párů $+q, -q$ z předchozího příkladu, bude průměrný dipólový moment

$$\mathbf{P} = nq\mathbf{d}.$$

Smysl veličiny \mathbf{P} je v tom, že v našem přiblížení velice jednoduše souvisí s elektrickým polem \mathbf{E} , jak uvidíme za chvíli. Přesnou závislost $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ by nám správně měla poskytnout kvantově-mechanická teorie chování elektronů v atomech při nenulovém vnějším elektrickém poli, takže zatím žádný konkrétní předpis nepředpokládáme a lineární vztah použijeme až později.

Podobně, pokud přiložené elektrické pole závisí na poloze, bude i vektor \mathbf{P} záviset na poloze a nahromaděné posunuté elektrony tak v daném místě způsobí nenulovou nábojovou hustotu ϱ , kterou můžeme z \mathbf{P} vypočítat jako

$$\varrho = -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (51)$$

Pro pochopení tohoto vztahu si představte malou krychličku v prostoru. Náboj, který z ní díky měnícímu se \mathbf{P} vystoupí, je $(\nabla \cdot \mathbf{P})V$, kde V je objem krychličky, a protože se celkový náboj zachovává, dostaneme náboj v krychličce jako $-(\nabla \cdot \mathbf{P})V$, odtud (51).

Podobně, když se bude použité elektrické pole měnit s časem (a ve světle se rozhodně s časem mění), bude se měnit i \mathbf{P} , a posunující se náboje v atomech se budou zdálky jevit jako proudy. Takto způsobenou proudovou hustotu \mathbf{j} v daném místě vypočítáme jako (promyslete proč)

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (52)$$

Maxwellovy rovnice v látce

Nyní bychom rádi našli rovnice popisující světlo při průchodu látkou. V minulé kapitole jsme uvedli rovnice, kterými se vždy řídí elektromagnetické pole za přítomnosti libovolných nábojů a proudů. Protože jediné náboje a proudy v našem materiálu pocházejí z posunujících se elektronů a protonů, můžeme vzít Maxwellovy rovnice z předchozího dílu a dosadit do nich ϱ a \mathbf{j} ze vztahů (51) a (52). Přeskupením členů tak dostaneme

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) &= 0,\end{aligned}$$

kteří představují Maxwellovy rovnice pro elektromagnetické pole v látce. Vidíme, že vypadají téměř jako Maxwellovy rovnice ve vakuu z minulého dílu, s tím rozdílem, že v Gaussově a Ampérově zákoně se místo \mathbf{E} objevuje nová veličina $\mathbf{E} + \mathbf{P}/\varepsilon_0$. Abychom mohli tyto rovnice vyřešit, musíme vědět, jakým způsobem souvisí \mathbf{P} a \mathbf{E} . Jak už jsme několikrát zmínili, ve velkém množství případů je vztah mezi nimi lineární

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad (53)$$

kde konstanta³⁴ χ se nazývá *elektrická susceptibilita*³⁵; z praktických důvodů se faktor úměrnosti píše ve tvaru $\varepsilon_0 \chi$, neboť nová veličina z Gaussova a Ampérova zákona pak nabude tvaru $(1 + \chi)\mathbf{E}$. Dosazením (53) do Maxwellových rovnic v látce dostaneme novou sadu rovnic

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1 + \chi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0,\end{aligned}$$

kteří je identická s Maxwellovými rovnicemi ve vakuu s novou „rychlostí světla“

$$v = \frac{c}{\sqrt{1 + \chi}}. \quad (54)$$

Dostali jsme tedy pozoruhodnou předpověď – celá složitá záležitost s interakcí původního oscilujícího pole a atomových elektronů má za následek “pouze” to, že se bude světlo látkou šířit odlišnou fázovou rychlostí. Naše teorie tedy předpovídá index lomu! Vztah (54) nám říká, že index lomu v daném materiálu bude

$$n = \sqrt{1 + \chi}.$$

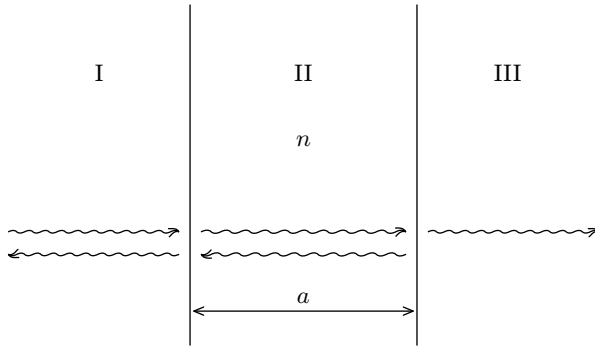
Získali jsme ale vůbec nějaký nový poznatek? Ano, kromě ospravedlnění námi dříve používaného modelu geometrické optiky teď můžeme teoreticky začít od základů a z elektronové struktury odvodit vzorec pro χ , a tedy i pro n v daném materiálu. Teorie indexu lomu se zároveň stala mnohem bohatší – ukazuje se, že $n = \sqrt{1 + \chi}$ může záviset na frekvenci, může být menší než jedna (pro záporné χ), a co teprve, když $\chi < -1$. Na podrobnější rozbor různých zajímavých situací zde ale není dost místa, a tak se v následujících částech omezíme na případ $\chi > -1$.

³⁴⁾ Vůbec ne konstanta, χ obecně závisí na frekvenci ozařujícího světla, ale může být funkcí prakticky čehokoli od intenzity až po vnější magnetické pole.

³⁵⁾ Anglicky *susceptible* = náchylný, citlivý.

Odraz a lom na tenké vrstvě

Použijme nyní získané výsledky na vyřešení následující úlohy: mějme světlo dané úhlové frekvence ω dopadající kolmo na desku tloušťky a vyrobené z materiálu (skla) o indexu lomu n , kde a může být srovnatelné s vlnovou délkou světla (viz obrázek 42). Předpokládejme, že mimo desku je index lomu rovný jedné (vzduch). Jaká bude intenzita a fázový posun odraženého o propustěného světla v závislosti na uvedených parametrech? Pro řešení potřebujeme ještě jednu ingredienci, kterou jsou takzvané okrajové podmínky na hranici mezi látkami s různou susceptibilitou (indexem lomu). Výše sepsané rovnice s konstaním χ nám poví řešení v každé oblasti zvlášť, a tato jednotlivá řešení pak musíme v souladu s Maxwellovými rovnicemi na rozhraních správně “sešít” právě pomocí okrajových podmínek.



Obr. 42. Světlo dopadající na tenkou vrstvu

Okrajové podmínky jsou obecně odlišné pro složky \mathbf{E} a \mathbf{B} tečné a kolmé na rozhraní, a můžete je najít ve standardních učebnicích elektromagnetismu. V naší jednoduché situaci jsou ale vektory pole rovnoběžné s rozhraním (jehož normálový vektor zvolíme ve směru z) a souřadný systém si tedy můžeme otočit tak, aby \mathbf{E} mělo složku jen ve směru x : $\mathbf{E} = (E(z, t), 0, 0)$. Okrajové podmínky na obou rozhraních pak nabydou jednoduchého tvaru

- a) $E(z, t)$ spojitě na rozhraní,
- b) $dE(z, t)/dz$ spojitě na rozhraní.

Obě podmínky se dají odvodit z Maxwellových rovnic aplikovaných na rozhraní, první s nich vyplývá z Faradayova zákona a druhá z Ampérova zákona, zkuste vymyslet přesné zdůvodnění.

Nyní už máme vše potřebné pro vyřešení naší úlohy. Označme si oblasti vzduch – sklo – vzduch po řadě I a II. Pro popis nám stačí elektrické pole, protože magnetické pole je jím plně určené (viz čtvrtá kapitola). Úhlová frekvence ω bude stejná ve všech oblastech, neboť dopadající světlo o frekvenci ω rozkmitává elektrony právě touto frekvencí a elektrony pak na stejné frekvenci vyzařují. Všechny veličiny v naší úloze tedy musejí záviset na čase jako $e^{-i\omega t}$. Jestliže je vlnové číslo dopadajícího světla ve vzduchu $k = \omega/c$, bude odpovídající vlnové číslo ve skle nk . V každé oblasti jsou možná dvě řešení – vlna jdoucí v kladném a záporném směru

osy z , přičemž v oblasti III chceme jen propuštěnou vlnu, záporně jdoucí složka je tedy nulová. Máme potom

$$\begin{aligned} E_{\text{I}}(z, t) &= E_{\text{I}} e^{i(kz - \omega t)} \\ E'_{\text{I}}(z, t) &= E'_{\text{I}} e^{i(-kz - \omega t)} \\ E_{\text{II}}(z, t) &= E_{\text{II}} e^{i(nkz - \omega t)} \\ E'_{\text{II}}(z, t) &= E'_{\text{II}} e^{i(-nkz - \omega t)} \\ E_{\text{III}}(z, t) &= E_{\text{III}} e^{i(k(z-a) - \omega t)}, \end{aligned}$$

kde indexy odpovídají jednotlivým oblastem a celková pole dostaneme jako $E_{\text{I}}(z, t) + E'_{\text{I}}(z, t)$, $E_{\text{II}}(z, t) + E'_{\text{II}}(z, t)$ a $E_{\text{III}}(z, t)$. Předpokládáme, že známe amplitudu E_{I} dopadajícího světla a snažíme se vypočítat zbylé amplitudy, zejména odraženou E'_{I} a propuštěnou E_{III} , hledáme tedy čtyři komplexní čísla. Na každém rozhraní musí platit okrajová podmínka pro E a jeho derivaci, dohromady tedy čtyři rovnice, čili přesně počet, který potřebujeme. Tyto rovnice po úpravě zní

$$\begin{aligned} E_{\text{I}} + E'_{\text{I}} &= E_{\text{II}} + E'_{\text{II}} \\ E_{\text{I}} - E'_{\text{I}} &= n(E_{\text{II}} - E'_{\text{II}}) \\ E_{\text{II}} e^{i(nka)} + E'_{\text{II}} e^{-i(nka)} &= E_{\text{III}} \\ n \left(E_{\text{II}} e^{i(nka)} - E'_{\text{II}} e^{-i(nka)} \right) &= E_{\text{III}}. \end{aligned}$$

Jejich vyřešením pro neznámé E'_{I} , E_{II} , E'_{II} a E_{III} dostaneme³⁶

$$\begin{aligned} E'_{\text{I}} &= - \frac{\left(n - \frac{1}{n} \right) \sin(kna)}{\left(n + \frac{1}{n} \right) \sin(kna) + 2i \cos(kna)} E_{\text{I}}, \\ E_{\text{III}} &= \frac{2i}{\left(n + \frac{1}{n} \right) \sin(kna) + 2i \cos(kna)} E_{\text{I}}. \end{aligned}$$

Druhá mocnina absolutní hodnoty těchto komplexních čísel reprezentuje intenzitu odraženého, resp. propuštěného světla, a jejich obecně nenulová imaginární část pak fázový posun oproti dopadajícímu světlu. Sami se přesvědčte, že $|E'_{\text{I}}|^2 + |E'_{\text{III}}|^2 = |E_{\text{I}}|^2$, jak očekáváme ze zákona zachování energie. Můžeme se ptát, za jakých okolností všechno světlo projde a žádné se neodrazí, tedy kdy $E'_{\text{I}} = 0$. Dostaneme tak podmínku

$$\left(n - \frac{1}{n} \right) \sin(kna) = 0,$$

³⁶⁾ Amplitudy elektrického pole uvnitř skla neuvádíme.

tedy buď $n = 1$ a žadná deska světlu v cestě nestojí, nebo $kna = m\pi$, pro $m \in \mathbf{N}$. Pro dobře zvolené tloušťky desky a tedy budeme pozorovat rezonanční efekt, kdy všechno světlo deskou prochází.

Tento rezonanční jev je zodpovědný za to, že olejové skvrny na loužích se často jeví duhové. Dochází zde k odrazu slunečního světla na dvou rozhraních vzduch – olej a olej – voda, a protože olejová vrstva nemá všude přesně stejnou tloušťku, bude se i rezonanční (v tomto případě maximálně odrazivá) frekvence měnit od místa k místu. Pro olejové vrstvy s řádovou tloušťkou stovek nanometrů pak pozorujeme výsledný efekt zahrnující celé viditelné spektrum.

Metoda transferových matic

Pro náročnější čtenáře ještě na závěr popíšeme elegantní matematickou metodu usnadňující výpočet chování světla při průchodu větším množstvím vrstev s obecnými tloušťkami a indexy lomu. V předcházející části jsme elektrické pole v oblasti II popisovali pomocí amplitud E_{II} a E'_{II} pravo- a levojdoucí vlny. To ale v obecném případě není moc praktické, neboť tyto amplitudy se na rozhraních mění nespojitě. Okrajové podmínky naproti tomu zaručují, že celkové E a jeho prostorová derivace se na rozhraní nikdy nezmění. Proto bude výhodné elektrické pole na každém rozhraní popisovat jako vektor

$$\begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix}.$$

Průchodu světla každou vrstvou pak bude odpovídat násobení tohoto vektoru maticí přiřazenou dané vrstvě. Nacházíme-li se v oblasti s indexem lomu n a naše světlo má vlnové číslo k , tak přechod mezi popisem (pravojdoucí, levojdoucí) a $(E, dE/dz)$ zajišťují navzájem inverzní matice

$$\begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} E^{\rightarrow} \\ E^{\leftarrow} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E^{\rightarrow} \\ E^{\leftarrow} \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} E \\ dE/dz \end{pmatrix}.$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ikn & -ikn \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i/kn \\ 1 & i/kn \end{pmatrix}.$$

Pravojdoucí a levojdoucí amplitudy E^{\rightarrow} a E^{\leftarrow} se při průchodu vrstvou tloušťky a a indexu lomu n změní na $E^{\rightarrow} e^{ikna}$ a $E^{\leftarrow} e^{-ikna}$, a vektor $(E, dE/dz)$ se tedy efektivně násobí maticí $A(a, n)$ připisanou dané vrstvě

$$A(a, n) = T \begin{pmatrix} e^{ikna} & 0 \\ 0 & e^{-ikna} \end{pmatrix} T^{-1},$$

$$A(a, n) = \begin{pmatrix} \cos(kna) & \sin(kna)/kn \\ -kn \sin(kna) & \cos(kna) \end{pmatrix}.$$

Dopadá-li nyní světlo kolmo na sérii N vrstev o tloušťkách a_j a indexech lomu n_j ($j = 1, \dots, N$), kdy každá vrstva je popsána maticí $A_j = A(a_j, n_j)$, obdržíme

výsledný vztah mezi amplitudami E_d , E_o a E_p po řadě dopadajícího, odraženého a procházejícího světla

$$\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1} A_N A_{N-1} \dots A_2 A_1 T \begin{pmatrix} E_d \\ E_o \end{pmatrix}.$$

Ačkoli tento výsledek může vypadat poněkud hrozně, pracuje se s ním mnohem lépe, než se soustavou $2N + 2$ rovnic, které bychom dostali aplikací okrajových podmínek na všech $N + 1$ rozhraní. Pokud se navíc vrstvy periodicky opakují, můžeme součin $A_N A_{N-1} \dots A_2 A_1$ často vypočítat přesně. Podobně jako v předcházející části se pak dá výsledek použít pro výpočet rezonančních frekvencí a dalších vlastností složené optické soustavy.

Úloha V. S ... světlo v látce

- a) Index lomu v nelineárním materiálu závisí na intenzitě světla I jako $n = n_1 + n_2 I$, kde n_1 a n_2 jsou konstanty větší než nula. Zamyslete se, co se bude dít s paprskem světla dané šířky, který tímto materiálem prochází. Předpokládejte, že intenzita paprsku klesá se vzdáleností od jeho středu. (Stačí kvalitativní úvaha, odvážnější se mohou pokusit vybudovat analytický model.)
- b) Deska tloušťky a sestává z $2N$ stejně širokých rovnoběžných destiček ze dvou materiálů o indexech lomu n_1 a n_2 poskládaných „na střídačku“. Světelná vlna dopadá kolmo na čelní destičku. Jaký bude efektivní index lomu této smíchané desky pro $N \rightarrow \infty$? Napadá vás proč? (Nápověda: pro libovolnou matici A platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A),$$

kde I je jednotková matice a $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$)

Kapitola 6: Einsteinův odkaz

Poslední kapitolu seriálu jsme se rozhodli pojmut trochu volněji než ty předchozí. Rámcově bychom ji mohli pojmenovat *Rychlejší než světlo?*, ale díky báječné skutečnosti, že ve fyzice všechno se vším souvisí, se dostaneme i k tématům jako je chování kvantově mechanické vlny relativistické částice. A teď už rychlostí světla vpřed! (Omlouváme se, ale rychleji to vážně nejde.)

Neposlušný index lomu

Starý známý index lomu jsme zavedli už v prvním díle vztahem $n = c/v$. Později jsme zjistili, že Maxwellova teorie skutečně předpovídá, že elektromagnetické vlny se budou v jednoduchých materiálech šířit rychlostí

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}, \quad (55)$$

kde ε_r , μ_r jsou relativní permitivita a permeabilita látky.³⁷ Tyto konstanty pak můžeme vypočítat z mikroskopické struktury materiálu.

³⁷⁾ Vlastně jsme toto ukázali jen pro elektrickou permitivitu, a magnetické vlastnosti zanedbávali, naše analýza se ale dá přímočaře zobecnit.

Jaké hodnoty ale může index lomu nabývat? Každý, kdo se trochu orientuje ve speciální teorii relativity a seriál *Star Trek* bere s mírným nadhledem, ví, že žádná informace, která by mohla kauzálně spojit dvě události, se z pohledu daného pozorovatele nesmí pohybovat rychleji než c , rychlostí světla ve vakuu. Očekávali bychom tedy, že index lomu bude reálné číslo větší nebo rovno jedné. Ani jeden ze zmíněných přívlastků ale není obecně pravdivý! Index lomu může být číslo menší než jedna, dokonce může být záporný a mít i nenulovou imaginární část. Skutečně nic nebrání existenci materiálů, které mají velmi exotické hodnoty ϵ_r a μ_r . Pro tyto látky se v poslední době uchytil název *metamateriály* a do jejich výzkumu a výroby se investuje hodně úsilí. Je tedy něco v nepořádku se speciální teorií relativity? Není, vždyť při odvozování vztahu pro index lomu se používají teorie, které principy speciální relativity neporušují. Musíme jen najít správnou interpretaci, co index lomu menší než jedna znamená.

Fázová a grupová rychlost

Je důležité zmínit, že index lomu v každém materiálu kromě vakua netriviálně závisí na vlnové délce světla $n = n(k)$. Výchozím bodem vysvětlení pak je, že vlnění v takovém materiálu přísluší dva druhy rychlosti. První je takzvaná *fázová rychlost* v_f , která říká, jak rychle se pohybují body dané fáze v monochromatické³⁸ vlně, tedy jak rychle se pohybují kopce a údolí sinusové vlny. Napíšeme-li takovou vlnu v komplexním tvaru jako

$$e^{i(\omega t - kx)}, \quad (56)$$

kde ω je úhlová frekvence a k vlnové číslo, vidíme, že celá vlna se posunuje doprava rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k}. \quad (57)$$

Právě o této rychlosti vypovídá index lomu. Je tomu tak proto, že vlnová rovnice s proměnlivou rychlostí vlnění se pro monochromatickou vlnu redukuje na obyčejnou vlnovou rovnici (viz čtvrtý díl seriálu). Monochromatické vlny se tedy pohybují fázovou rychlostí.

Trič je v tom, že jedna monochromatická vlna nemůže přenášet žádnou informaci. Když budete na svého kamaráda na druhé straně louky nepřetržitě svítit červeným laserem, těžko mu přenesete zprávu, že se k němu zezadu blíží rodinka rozzuřených divočáků. Mohli byste zkusit vysílat Morseovku přerušovaným signálem, ale přerušená vlna už není monochromatická, a čelo takové vlny se nebude šířit fázovou rychlostí. Kdo umí fourierovsky transformovat, může si ověřit, že Fourierova transformace sinu, který se rozprostírá jen na konečném úseku reálné osy, je nenulová i pro frekvence odlišné od té základní. Slovně to znamená, že monochromatická vlna se začátkem a koncem se dá složit jen za použití monochromatických vln odlišných frekvencí, takže už nemůžeme mluvit o pevně dané fázové rychlosti, protože různé vlnové délky se šíří různou rychlostí.

³⁸⁾ *Monochromatická* vlna obsahuje jen jednu frekvenci (barvu), a má tedy tvar funkce sinus.

Když chceme vysílat signál, snažíme se vytvořit modulovanou vlnu, tedy vlnu, jejíž frekvence je přibližně daná, ale jejíž amplituda se mění. Kdo už slyšel o *rážech*, toho nepřekvapí, že takový signál se dá získat složením vln s podobnými vlnovými délkami. Vypočítejme, co vznikne složením dvou vln tvaru (56) s vlnovými čísly $k_1 = k + \Delta$ a $k_2 = k - \Delta$. Vztah pro index lomu v závislosti na vlnovém čísle $n(k)$ jednoznačně určuje závislost $\omega(k) = kv_f = kc/n(k)$. Pro malá Δ jsou tedy frekvence přibližně

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega(k) + \frac{d\omega}{dk}\Delta, \\ \omega_2 &= \omega(k) - \frac{d\omega}{dk}\Delta.\end{aligned}$$

Složená vlna má tvar

$$\begin{aligned}e^{i\omega(k_1)t - ik_1x} + e^{i\omega(k_2)t - ik_2x} &= \left[e^{i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta} + e^{-i\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\Delta} \right] e^{i\omega(k)t - ikx} = \\ &= 2 \cos [\Delta(v_g t - x)] e^{i(v_f t - x)k},\end{aligned}$$

kde jsme použili označení

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}. \quad (58)$$

Vidíme, že výsledek vypadá jako monochromatická vlna s vlnovým číslem k (exponenciální faktor), modulovaná obálkou tvaru posunujícího se kosinu. Obálka se ale pohybuje jinou rychlostí, než původní vlna, a sice takzvanou *grupovou rychlostí* v_g . Protože modulace amplitudy vznikají složením více vln blízkých frekvencí, budou se vždy šířit přibližně grupovou rychlostí. Pro ilustraci si vezmeme vlny způsobené gravitací³⁹ na hluboké vodě. Ze zákonů hydrodynamiky se pro ně dá odvodit

$$\omega(k) = \sqrt{gk},$$

kde g je gravitační zrychlení. Rychlost sinusové vlny s vlnovým číslem k je tedy

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}},$$

zatímco rychlost pohybu vzruchů získáme jako

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}},$$

odkud vidíme, že když budeme po hluboké vodě posílat signál, bude se šířit poloviční rychlostí než hřbety a údolí monochromatických složek.

³⁹⁾ Na vzniku vln na hladině vody se kromě gravitace podílí i povrchové napětí, které hladině dává vlastnosti pružné membrány. Pro vlny s velkou vlnovou délkou je ale vliv povrchového napětí zanedbatelný.

Zjistili jsme, že i když $n < 1$, fyzika se ještě nemusí zhroutit, protože informace se vlnou šíří grupovou rychlostí (58), která je odlišná od fázové (57). Tím jsme samozřejmě nedokázali, že grupová rychlost je vždy menší než c , ale ukazuje se, že $v_g > c$ jen výjimečně, a v takových případech je rychlost šíření signálu menší než v_g i c . Einsteinův odkaz tedy odolává dál.

Případ $n < 1$ se nám podařilo vyřešit, nebo alespoň zamést pod sousedův koberec. Co ale znamená, když má index lomu imaginární část?

$$\tilde{n} = n + i\nu \tag{59}$$

Při přechodu z vakua do optického prostředí si světlo zachovává svoji frekvenci⁴⁰ a vlnové číslo se tedy změní z ω/c na

$$k = \frac{\tilde{n}\omega}{c}.$$

Vlna v materiálu má pak tvar

$$e^{i\tilde{n}\omega x/c} = e^{-\nu\omega x/c} e^{in\omega x/c}.$$

Imaginární část indexu lomu tedy světlo exponenciálně tlumí. Podařilo se nám tak popsat absorpci! V materiálech s částečně imaginárním indexem lomu elektrony v atomech nepracují jako dokonalé oscilátory, ale musí překonávat „tření“. Toto tření pak přeměňuje energii dopadajícího světla na vibrace mřížky apod., a světlo je absorbováno. Skutečně, číslo i ve vztahu (59) je stejné i , které se objevuje při studiu tlumeného harmonického oscilátoru

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

po dosažení $x = x_0 e^{i\omega t}$.

Relativistické částice v kvantové mechanice

Zde je na místě malá odbočka, která striktně řečeno nesouvisí přímo se světlem, ale krásně ilustruje fakt, že grupová rychlost bývá menší než c , zatímco fázová nemusí. V kvantové mechanice se částice nechovají vždy jako přesné body, ale mohou být „rozplízlé“ v prostoru. Například, když má volná částice pevně danou hybnost p (pro jednoduchost počítáme jen v jednom prostorovém rozměru), může se nacházet se stejnou pravděpodobností úplně kdekoliv a její stav je popsán vlnovou funkcí $\psi(t, x)$ tvaru komplexní exponenciály s vlnovým číslem k , které souvisí s hybností vztahem⁴¹

$$p = \hbar k,$$

⁴⁰⁾ Když světlo vstoupí do skla, rozkmitá elektrony v atomech svojí frekvencí a tyto atomy pak stejnou frekvencí vyzařují. Frekvence světla ve skle se tedy nezmění.

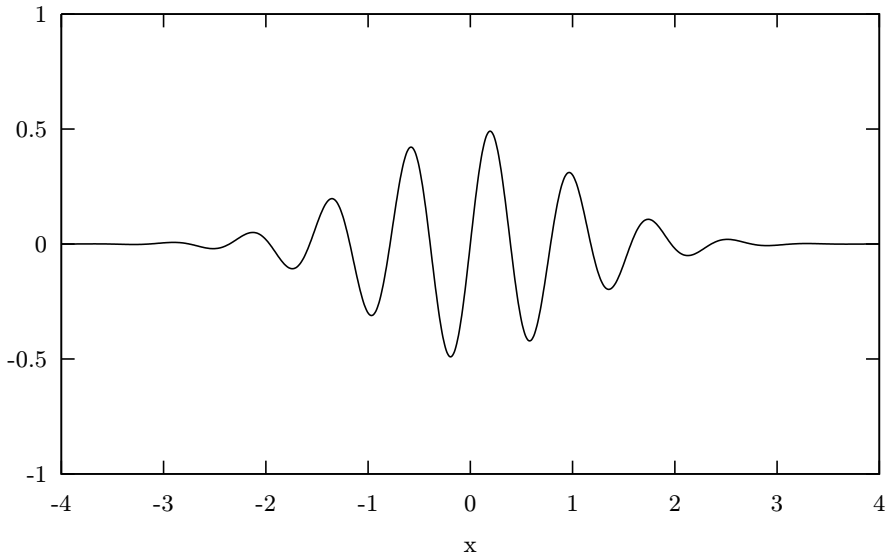
⁴¹⁾ Kdo nezná kvantovou mechaniku, a například nechápe, jak může dát vlnová funkce e^{ikx} všude stejnou pravděpodobnost, si může přečíst *Seriál o kvantové mechanice z XX. ročníku FYKOSu*.

kde \hbar je Planckova konstanta. Jak se ale tato vlna bude pohybovat, když necháme běžet čas? Kvantová mechanika nám říká, že se bude periodicky měnit s frekvencí ω , která souvisí s energií E zkušební částice

$$E = \hbar\omega,$$

a má tedy tvar

$$\psi(t, x) = \psi_0 e^{i(Et - px)/\hbar}. \quad (60)$$



Obr. 43. Vlnový balík

Dané hybnosti ale přísluší přesně daná energie, a máme stejnou situaci jako se světlem, kdy vlnové číslo udávalo frekvenci. Konkrétně Albert Einstein objevil správný vztah platný pro libovolnou rychlost

$$E(p) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4},$$

kde m je klidová hmotnost částice, a c rychlost světla. Necháme-li tedy prostorem běžet vlnovou funkci relativistické částice s pevně danou hybností, budou se vlnky pohybovat rychlostí

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = c \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}, \quad (61)$$

což je vždy víc než c ! My ale můžeme zůstat v klidu, protože už víme, že abychom mohli mluvit o lokalizované částici, musíme složit víc vln (60), a dostat tak vlnový balík, s modulovanou amplitudou (viz obrázek 43).

Tento balík se bude pohybovat grupovou rychlostí

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2}}, \quad (62)$$

kteřá je tentokrát vždy menší než c . Zdá se, že grupová rychlost je rychlostí pohybu částic s přesněji danou polohou, a skutečně si můžete ověřit, že po dosazení

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

do (62) vyjde $v_g = v$.

Čerenkovovo záření

Naši pouť světem světla zakončíme vysvětlením úkazu nesoucího jméno ruského experimentátora P. A. Čerenkova, který ho jako první pozoroval v roce 1934. Už mnohokrát bylo řečeno, že žádná částice ani signál se nemůže pohybovat rychleji než světlo ve vakuu. Přívlastek *ve vakuu* je zde ale zásadní, protože je to právě c , které se objevuje ve vztazích pro Lorentzovu transformaci a argumentech speciální relativity. Nic ale nebrání tomu, aby se částice pohybovaly rychleji než světlo v materiálu s indexem lomu větším než jedna, takže třeba ve vodě.

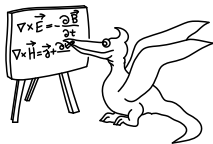
Nejčastěji se s takovou situací potkáme u jaderných reaktorů chlazených vodou – viditelné světlo se ve vodě pohybuje zhruba rychlostí $255\,564\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ a z reaktoru do ní běžně vylétávají elektrony téměř rychlostí c . Když se podíváte do reaktorového chlazení⁴², můžete vidět Čerenkovovo záření: étericky modré (i přes jméno svého objevitele) světlo, která jakoby vycházelo z celého objemu vody. Odkud se bere?

Mechanismus je podobný jako při vzniku rázové vlny za nadzvukovým letadlem nebo za lodí na vodě. Jak elektron letí, Coulombické pole se od něj nestíhá šířit dostatečně rychle a vytváří rázovou vlnu. Nahromaděná energie se pak projeví jako viditelné záření, které je silnější pro vyšší frekvence, a proto převládá modrá barva.

Závěr

Světem optiky jsme ušli dlouhou cestu. Od Huyghensova principu jsme se dostali až k metamateriálům, a vysvětlili si základy mnoha způsobů popisu světla, od paprsků, přes komplexní čísla, až po vektorová pole. Jsme rádi, že jste se dočetli až sem, a doufáme, že v našem textu najdete inspiraci pro další přemýšlení a studium, vždyť spousty témat jsme se jen dotkli a nechali mnoho otevřených otázek. A kdo ví, třeba až se jednou budete snažit rozluštit složitou fyzikální otázku, osvítlí vás analogie s úlohou ze Seriálu o světle, který jste četli před lety.

⁴²⁾ Taková příležitost se vám může naskytnout třeba na *Dni s experimentální fyzikou*, pořádaném našim seminářem.



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... petřínská

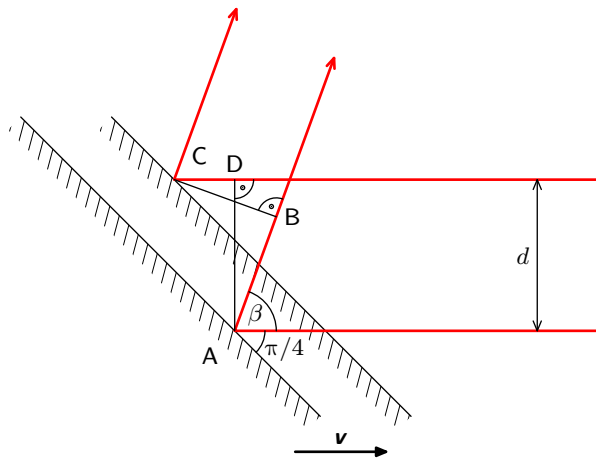
- Co uvidí člověk stojící mezi dvěma spojenými na sebe kolnými zrcadly, jejichž spojnice je svislá?
- Mějme rovinné zrcadlo skloněné pod úhlem 45° , pohybující se zleva doprava rychlostí v . Zprava na něj dopadá paprsek světla rychlostí c (úhel dopadu je tedy 45°) a odrazí se zhruba nahoru. Pomocí Huyghensova principu určete úhel mezi dopadajícím a odraženým paprskem, tedy vlastně opravte zákon odrazu a dopadu pro pohybující se zrcadlo.

Človíček a zrcadla

Člověk uvidí tři obrazy sama sebe, přičemž dva z nich (po stranách) budou normálně zrcadlově převrácené a obraz přímo naproti němu (ve zlomu zrcadel) bude zrcadlově převrácen dvakrát, takže se uvidí tak, jak ho vidí ostatní lidé.

Pohybující se zrcadlo

Na obrázku 44 je naznačena daná situace. Máme dva rovnoběžné paprsky p_1 a p_2 mezi nimiž je vzdálenost d . Tyto paprsky dopadají na zrcadlo Z , které jim



Obr. 44. Odraz paprsků

letí vstříc rychlostí u , přičemž paprsek p_1 dopadne jako první a odrazí se pod úhlem β . Paprsek p_2 dopadne o čas τ později, kde, vzhledem k tomu, že zrcadlo

je nakloněno pod úhlem $\pi/4$, tento čas splňuje rovnici $d = u\tau + c\tau$ a tedy víme, že

$$\tau = \frac{d}{u+c}. \quad (63)$$

Z geometrie obrázku za použití vztahu (63) dále můžeme psát

$$|AB| = |CD| = \frac{cd}{u+c}, \quad (64)$$

$$|AC| = \sqrt{d^2 + |CD|^2} = d\sqrt{1 + \frac{c^2}{(u+c)^2}}, \quad (65)$$

$$|CB| = \sqrt{|AC|^2 - |AB|^2} = d, \quad (66)$$

kde rovnice (64) vyplývá z Huyghensova principu, a zbytek je geometrie.

Označíme-li $|\angle CAB| = \varphi$, z trojúhelníku ABC s použitím vztahů (65) a (66) plyne

$$\sin \varphi = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}}.$$

Příčměž z trojúhelníku CAD plyne pro úhel při vrcholu A (označme jej α)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{u+c}.$$

Z obrázku je dále vidět, že $\varphi = \alpha + \pi/2 - \beta$, a tedy

$$\sin \varphi = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} = \cos(\alpha - \beta), \quad (67)$$

což je již rovnice, ve které vystupuje pouze jedna neznámá, β . Po rozepsání kosinu součtu a použití vztahů

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \text{a} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

z rovnice (67) dostaneme

$$\frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} = \frac{u+c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} \cos \beta + \frac{c}{\sqrt{c^2 + (u+c)^2}} \sin \beta,$$

což je po přímočaré úpravě rovnice pro $\sin \beta$. Tedy

$$1 = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} + \frac{c}{u+c} \sin \beta.$$

Tuto rovnici můžeme snadno řešit převedením odmocniny na jednu stranu a umocněním, výsledkem je

$$\sin \beta = \frac{2uc + 2c^2}{u^2 + 2uc + 2c^2}.$$

K tomuto výsledku můžeme dospět i trochu rychleji; stačí si všimnout, že se jedná o klasický zákon odrazu jen ne pro plochu zrcadla nýbrž pro plochu danou AC. Z obrázku je patrné, že pokud řekneme, že pro plochu AC platí zákon odrazu jako ho známe, dostaneme rovnici

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha) = \frac{\pi}{4} - \alpha \quad \Rightarrow \quad \beta = 2\alpha,$$

a proto

$$\sin \beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2uc + 2c^2}{u^2 + 2uc + 2c^2},$$

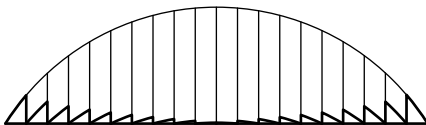
jak jsme již jednou viděli.

Jak tento výsledek interpretovat? Pro $u > 0$ je $\sin \beta < 1$ a $\beta < \pi/2$ a paprsek se tedy odrazí „víc od zrcadla“ než kdyby zrcadlo stálo. Pokud je rychlost zrcadla zanedbatelná vzhledem k rychlosti světla, nebo rovnou nulová, dostaneme $\sin \beta = 1$ a tedy $\beta = \pi/2$, tak jak bychom to očekávali.

K výsledku lze velmi snadno dospět pomocí speciální teorie relativity, a sice tak, že se transformujeme do soustavy, ve které zrcadlo stojí (pozor, v této soustavě má jiný sklon) v této soustavě dojde k normálnímu odrazu, a pak se transformujeme zpátky a dostaneme výsledný sklon pohybu fotonů. Kdo chce, může si to vyzkoušet a zjistí, že dostane stejný výsledek. Na závěr připojíme otázku k zamyšlení: Proč se dá očekávat, že z Huyghensova principu dostaneme stejný výsledek jako z STR?

Úloha II. S ... záhada meotaru a rybí oko

- a) Možná jste si všimli, že mezi zdrojem a průhlednou podložkou na fólie je v tradičním meotaru za účelem soustředění světla vložena dost zvláštní čočka, která vypadá spíš jako rýhovaná deska (viz také úloha VI.2 ze XVII. ročníku). Vznikne tak, že standardní ploskovypuklou čočku rozřezáme na soustředné prstence, z každého si necháme jen úplný konec a výsledek opět složíme, takže získáme něco jako „osově symetrické pahorkaté sklo“ (viz obrázek).



Obr. 45. Čočka z meotaru

Takto vzniklá čočka má všude stejný sklon jako původní spojka, a podle Snellova zákona tak očekáváme, že bude stejně dobře soustřeďovat světlo. Naproti tomu, z pohledu Fermatova principu, už každé dráze nepřísluší stejný čas, neboť jsme v různých místech odebrali různě tlusté vrstvy skla – například úplně nejkratší čas teď odpovídá cestě po optické ose. Zdá se tedy, že Fermatův princip selhává – podle něj by čočka soustřeďovala jen světlo jdoucí

po optické ose a nefungovala tak, jak má. Rozhodněte kdo má pravdu: Snell, Fermat? A proč?

- b) Najděte dráhy paprsků ve dvojrozměrné situaci, kdy závislost indexu lomu na vzdálenosti r od počátku je dána funkcí

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}.$$

- c) (Bonus.) Vložíme-li do prostoru s proměnlivým indexem lomu bodový zdroj světla, může se stát, že se velká část paprsků, které z něj vycházejí, sejde v jednom bodě, jako je tomu v případě spojné čočky. Takto vzniklý bod pak nazýváme obrazem bodu původního. Popište geometrické zobrazení zdroj \rightarrow obraz, které tímto způsobem indukuje prostředí s indexem lomu z předchozí úlohy.

Starý známý meotar

Jak Snellův, tak i Fermatův princip dávají v naší situaci správnou předpověď, je jen třeba je správně interpretovat. Vysvětlení pomocí Snellova zákona je jednodušší: Nově vzniklá čočka má v každém místě stejný sklon jako ta původní, a všechny procházející paprsky se tedy na šikmých rozhraních budou lámat stejně, jako by se jednalo o nezměněnou ploskovypuklou čočku.

Abychom dostali správnou odpověď i z Fermatova principu, musíme použít jeho správnější verzi, která říká, že světlo šířící se mezi dvěma body si vždy vybere dráhu se *stacionárním* časem, tedy dráhu, která odpovídá lokálnímu (ne nutně globálnímu) extrému celkového času na skupině všech možných drah. Nyní vše funguje tak, jak má, protože pohybuje-li se jen v rámci jednoho prstence, čas potřebný pro průchod zůstává stejný, stacionární. Tím, že jsme z každého prstence odebrali danou vrstvu skla, jsme vytvořili jakési „schody“ – každému prstenci odpovídá různý čas, který se zvyšuje se vzrůstající vzdáleností od optické osy, v rámci jednoho prstence se ale nemění. I Fermatův princip tedy předpovídá, že světlo bude k cestě do ohniska procházet skrz všechny části čočky, stejně jako tomu bylo před rozřezáním, a zdánlivý paradox je vysvětlen. Bylo by podezřelé, kdybychom ze Snellova a Fermatova principu obdrželi protichůdné závěry, vždyť jsme, byť na jednoduchých situacích, ukázali, že jsou ekvivalentní!

Otázkou zůstává, co se děje na rozhraních mezi prstenci. Geometrická optika stačit nebude, protože zde pozorujeme skokový nárůst času, tedy konečně velkou změnu času v měřítku kratším, než je vlnová délka použitého světla. Proto můžeme očekávat, že zde do hry vstoupí vlnové vlastnosti světla, tedy především interference. Na závěr bychom měli podotknout, že nově vzniklá čočka nebude mít zcela identické vlastnosti jako její ploskovypuklá předchůdkyně ani z hlediska geometrické optiky (jak si správně všiml *Jakub Vošmera*). Odebrání vrstev skla totiž posouvá místa, odkud se dále paprsky šíří k optické ose, a soustředování⁴³ nebude dokonalé. V praktických situacích je ale tento posun zanedbatelný, a v případě potřeby se dá kompenzovat správnou úpravou sklonu jednotlivých prstenců.

⁴³⁾ V případě meotaru bychom měli říct spíš „zrovnoběžňování“.

Podivný index lomu

Jelikož index lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2} \quad (68)$$

závisí jen na vzdálenosti od středu, můžeme využít tvrzení ze závěru seriálu, podle kterého se bude zachovávat optický moment hybnosti

$$L = n(r) r \sin \alpha = \text{konst}, \quad (69)$$

kde α je úhel mezi paprskem a průvodičem. Po dosazení (68) do (69) dostaneme

$$\frac{r \sin \alpha}{a^2 + r^2} = C, \quad (70)$$

kde $C = L/n_0 a^2$ je konstantní. Nyní bychom mohli, stejně jako většina řešitelů, dosadit do (70) za $\sin \alpha$ pomocí derivace r' podle úhlu φ polárních souřadnic a řešit vzniklou diferenciální rovnicí pro $r(\varphi)$. Tento postup je možné dovést až do konce, ale díky svojí zdolouhavosti a nutné znalosti pokročilejších technik integrování do FYKOSu spíše nepatří, jak také naznačuje nízká úspěšnost řešitelů, kteří se touto cestou vydali. Místo toho použijeme trik.

Dívejme se na trajektorii jako na funkci parametru dráhy s

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

a označme $\phi(s)$ úhel, který svírá tečna trajektorie v bodě s s osou x . Zkoumejme veličinu

$$\frac{d\phi}{ds},$$

která říká, jak rychle se trajektorie stáčí, posunujeme-li se podél ní. Pro diferenciální přírůstek $d\phi$ platí

$$d\phi = d\alpha + d\varphi,$$

kde druhý člen na pravé straně je oprava k $d\alpha$ v důsledku stáčení radiálního směru (promyslete). Máme tedy

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}. \quad (71)$$

První člen pravé strany upravíme za pomoci vztahu $\cos \alpha ds = dr$ na

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d \sin \alpha}{dr},$$

a můžeme aplikovat rovnici (70)

$$\frac{d\alpha}{ds} = C \frac{d}{dr} \left(\frac{a^2}{r} + r \right) = C \frac{r^2 - a^2}{r^2}.$$

S druhým členem pravé strany (71) máme méně práce

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{r}{r} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sin \alpha}{r} = C \frac{r^2 + a^2}{r^2},$$

a konečně po sečtení obou výrazů dostáváme

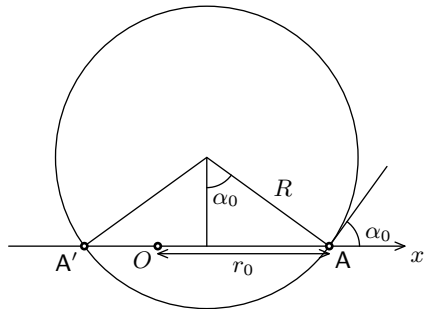
$$\frac{d\phi}{ds} = C \frac{r^2 - a^2}{r^2} + C \frac{r^2 + a^2}{r^2} = 2C = \text{konst.}$$

Pohybujeme-li se tedy rovnoměrně podél trajektorie, tečna k ní se stáčí konstantní rychlostí $2C$ radiánů na metr. Jinými slovy, trajektorií musí být *kružnice* o poloměru $R = 1/2C$, kde konstanta C závisí na počátečních podmínkách (viz níže).

Bonus

Mějme dán bod A ve vzdálenosti r_0 od počátku souřadnic (viz obrázek). Vzhledem k isotropii prostoru si ho můžeme bez újmy na obecnosti zvolit na ose x . Zajímalo by nás, jak vypadá množina všech paprsků, které z něj vycházejí, zejména pak jejich průsečíky. Každý paprsek je určen úhlem α_0 , který svírá s osou x v bodě A , a podle předchozí části tedy bude opisovat kružnici o poloměru

$$R = \frac{1}{2C} = \frac{r_0^2 + a^2}{2r_0 \sin \alpha_0}.$$



Obr. 46. Paprsek

Kde takový paprsek protne osu x podruhé? Označíme-li tento průsečík $A'(\alpha_0)$, tak z obrázku jednoduchou geometrickou úvahou dostaneme

$$|A'A| = 2R \sin \alpha_0 = r_0 + \frac{a^2}{r_0}.$$

Poloha bodu A' tedy nezávisí na α_0 a všechny paprsky vycházející z A se protnou ve stejném bodě A' , který leží také na ose x , a to na opačné straně ve vzdálenosti a^2/r_0 od počátku. Takto získané zobrazení zdroj \rightarrow obraz můžeme zapsat vektorově jako

$$\mathbf{r} \mapsto -\frac{a^2}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{r}.$$

Řešitelé s lepším geometrickým vzděláním v tomto zobrazení rozpoznají kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici se středem v počátku a poloměrem a složenou s inverzí souřadnic.

Motivace pro další studium

Ty z vás, kteří už slyšeli o hyperbolické geometrii, a konečkonců i ostatní, určitě zaujme, jak se odpoví na otázky (b) a (c) změní, když prohodíme znaménko ve jmenovateli (68), tedy budeme počítat s indexem lomu

$$n(r) = \frac{n_0}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}.$$

Úloha IV. S ... maxwellobraní

- Co se stane, když do krystalu kalcitu kolmo posvítíme kruhově polarizovaným světlem?
- Představte si, že je právě čas $t = 0$, široko daleko není žádný náboj ($\rho = \mathbf{j} = 0$), a my známe počáteční elektromagnetické pole v celém prostoru $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$. Z třetí a čtvrté Maxwellovy rovnice tedy můžeme vyjádřit časové derivace $\partial\mathbf{B}/\partial t$ a $\partial\mathbf{E}/\partial t$ pomocí prostorových a vypočítat tak \mathbf{E} a \mathbf{B} v následujícím okamžiku. Tento postup můžeme iterativně opakovat a dostat tak celý časový vývoj pole pro $t > 0$. Jak je možné, že vůbec nemusíme použít první a druhou Maxwellovu rovnici?
- Uvažujte náboj velikosti q , který je v klidu pro $t < 0$, a v čase $t = 0$ na něj začne dopadat rovinná světelná vlna. Jak se bude náboj následně pohybovat, když světlo je polarizované (i) lineárně (ii) kruhově? Promyslete nejprve kvalitativně, přesný výpočet, případně počítačová simulace obdrží bonus.

Kalcit

Jak jsme ukázali v seriálu, kruhově polarizované světlo si můžeme představit jako superpozici (součet) paprsků polarizovaných v řádném a mimořádném směru, s fázovým rozdílem $\pi/2$

$$\begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kz - ct) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(kz - ct) \end{pmatrix}.$$

Protože Maxwellovy rovnice jsou lineární, a součet řešení je tedy opět řešením, můžeme se na každou složku dívat zvlášť. První z nich pokračuje krystalem beze změny, a druhá se zlomí. Výsledkem tedy bude původní paprsek rozdělený na dvě lineárně polarizované složky s výše uvedeným fázovým rozdílem.

Zbytečné rovnice?

Na numerický výpočet časového vývoje elektromagnetického (EM) pole v tomto případě skutečně stačí pouze Faradayův a Ampérův zákon ($\mathbf{s} \mathbf{j} = 0$). Zbylé dvě Maxwellovy rovnice (Gaussův zákon a neexistence magnetických

monopólů) jsou důležité, protože stanovují podmínku pro počáteční EM pole. Ne každá volba $\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, 0)$ totiž splňuje

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (72)$$

Trik je v tom, že pokud tyto rovnice platí v čase $t = 0$, budou automaticky platit i v libovolném budoucím okamžiku. Předpokládejme, že jsme $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ vypočítali podle algoritmu uvedeného v zadání a podívejme se na časové derivace levých stran v (72)

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = \nabla \cdot \dot{\mathbf{B}},$$

kde jsme prohodili pořadí časového a prostorového derivování. Nyní můžeme vyjádřit $\dot{\mathbf{B}}$, $\dot{\mathbf{E}}$ z Faradayova a Ampérova zákona s nulovým proudem

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E},$$

čili

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = c^2 \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E}).$$

Pro čtenáře seriálu není novinkou fakt, že divergence rotace libovolného vektorového pole je nula, z čehož vyplývá

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0,$$

neboli platí-li podmínka (72) v čase $t = 0$, náš algoritmus zaručuje její platnost i v každém pozdějším čase.

Můžete se zkusit zamyslet nad obecnějším případem, kdy máme zadané nenulové počáteční náboje a proudy a EM pole, které splňuje Gaussův zákon a neexistenci magnetických monopólů. Nestačí pro nalezení časového vývoje použít opět jen Faradayův a Ampérův zákon, ten druhý tentokrát s nenulovým \mathbf{j} ? K čemu jsou potom zbylé Maxwellovy rovnice a v čem se tento případ liší od naší původní úlohy? Poradíme vám, že řešení souvisí se zákonem zachování náboje.

Vykutálený náboj

Původním cílem této úlohy bylo demonstrovat pojmy hybnost a moment hybnosti světla. Fyzika si ale s námi zahrála a místo očekávaného dobře srozumitelného pohybu vyváděla s nábojem psí kusy. Nejprve nastíníme kvalitativní odhad pohybu a jeho souvislost s hybností a momentem hybnosti světla.

Je známo, že světlo se skládá z oscilujícího elektrického a magnetického pole, které jsou vzájemně kolmé a zároveň kolmé na směr pohybu, přičemž $B = E/c$. Zkoumejme nejprve případ lineárně polarizovaného světla šířícího se ve směru z s elektrickým polem ve směru x a magnetickým ve směru y . EM pole působí na náboj q silou

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Dopadne-li tedy naše vlna na náboj v klidu, očekáváme, že ho elektrické pole rozkmitá ve směru x . Tím ale náboj získá nenulovou rychlost v tomto směru a magnetické pole bude skrze druhý člen působit silou ve směru z , což je právě směr pohybu světla. Výsledný pohyb náboje by tedy mohl vypadat jako oscilace ve směru x složené s posouváním ve směru z . Zjistili jsme, že aby platil zákon zachování celkové hybnosti, musíme světlu připsat něco jako hybnost, kterou může předávat nábojům, na něž působí. V kvantové mechanice se světlo skládá z fotonů, což jsou částice s hybností $p_z = \hbar\omega/c$, kde \hbar je Plankova konstanta a ω úhlová frekvence světla. Kvalitativně jsme nastínili, že klasická teorie elektromagnetism může kvantový model částečně reprodukovat.

Co se děje v případě kruhově polarizovaného světla? Tentokrát vektory elektrického a magnetického pole nemění velikost, ale otáčejí se konstantní rychlostí. Elektrické pole nejprve roztočí náboj v rovině xy , a síla z magnetického pole ho bude opět tlačit ve směru pohybu světla. Kruhově polarizovanému světlu tedy musíme přiřadit nejen hybnost, ale také moment hybnosti, neboť kroužící náboj bude mít větší moment hybnosti, než když byl v klidu. Analogicky předchozímu případu mohou kvanta světla nést také moment hybnosti, který nabývá hodnot $L_z = \pm\hbar$. Pro foton levotočivě polarizovaného světla frekvence ω tedy platí $p_z = \omega L_z/c$.

Jestliže věříme kvantovému modelu, očekáváme, že změny z -ových složek hybnosti a momentu hybnosti, zprůměrované přes jednu periodu spolu souvisí vztahem

$$\left\langle \frac{dp_z}{dt} \right\rangle = \frac{\omega}{c} \left\langle \frac{dL_z}{dt} \right\rangle, \quad (73)$$

neboť hybnost náboje může stoupnout jen absorpcí fotonu. Absorbováním fotonu ale náboj nevyhnutelně získá i jeho moment hybnosti a tyto veličiny jdou ruku v ruce.

Doufali jsme, že numerické, nebo poruchové⁴⁴ analytické řešení našeho problému potvrdí výše uvedené výsledky, což se ale podařilo jen částečně.

Výpočty jsou relativně zdlouhavé a nemá cenu je zde reprodukovat, jde o to použít druhý Newtonův zákon pro zadané EM pole. Tvar řešení je určen bezrozměrným parametrem

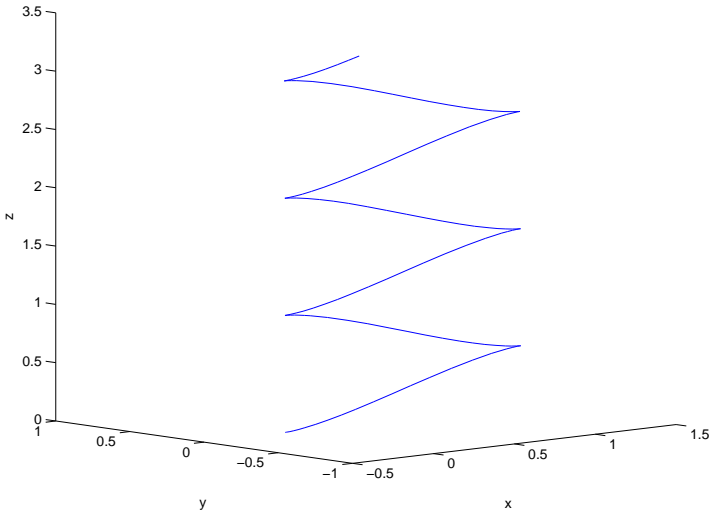
$$\lambda = \frac{qE}{m\omega c},$$

který nám říká, jak velkou roli hraje magnetické pole. Pro $\lambda \approx 1$ a větší je třeba použít relativistickou podobu Newtonova zákona.

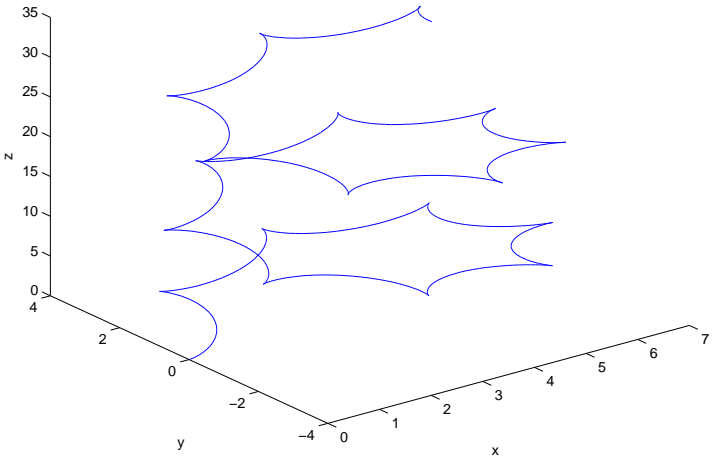
Obrázky 47 a 48 ukazují numericky získanou trajektorii náboje v relativistickém režimu $\lambda = 1$ pro lineárně a kruhově polarizované světlo. Jak očekáváme, trajektorie při lineárně polarizovaném světle leží v rovině xz , a stejně jako ta při kruhově polarizovaném světle vykazuje drift ve směru pohybu světla. Část hybnosti se tedy skutečně náboji předá. Překvapením ale je rotační chování náboje na druhém obrázku. V elementárních kouscích trajektorie se sice pohybuje po pravotočivých částech kružnice, celkově ale opisuje levotočivou spirálu. Jeho průměrný moment

⁴⁴⁾ V nultém přiblížení zanedbáme magnetické pole a provedeme poruchový rozvoj trajektorie v koeficientu $\lambda = qE/m\omega c$ pro $\lambda \ll 1$.

hybnosti je tudíž opačný, než jaký bychom očekávali z rovnice (73). Vysvětlení nám není známo a stojí za zamýšlení.



Obr. 47. Trajektorie při lineárně polarizovaném světle a $\lambda = 1$



Obr. 48. Trajektorie při kruhově polarizovaném světle a $\lambda = 1$

Neočekávané chování možná souvisí s faktem, že díváme-li se na náboj a foton jako na klasické pevné částice, ze zákonů relativistické kinematiky vyplývá, že volný náboj nemůže nikdy absorbovat foton (můžete si zkusit odvodit ze zákonů zachování hybnosti a energie). Jednoduchý předpoklad o absorbování hybnosti a momentu hybnosti zde tedy nemusí platit. Problémům bychom se mohli vyhnout tím, že bychom místo volného náboje uvažovali například náboj vázaný k počátku souřadnic lineární silou, tedy harmonický oscilátor v EM poli. Zkoumání takového systému však přenecháme jen odvážnějším řeitelům.

Úloha V. S ... světlo v látce

- a) Index lomu v nelineárním materiálu závisí na intenzitě světla I jako $n = n_1 + n_2 I$, kde n_1 a n_2 jsou konstanty větší než nula. Zamyslete se, co se bude dít s paprskem světla dané šířky, který tímto materiálem prochází. Předpokládejte, že intenzita paprsku klesá se vzdáleností od jeho středu. (Stačí kvalitativní úvaha, odvážnější se mohou pokusit vybudovat analytický model.)
- b) Deska tloušťky a sestává z $2N$ stejně širokých rovnoběžných destiček ze dvou materiálů o indexech lomu n_1 a n_2 poskládaných „na střídačku“. Světelná vlna dopadá kolmo na čelní destičku. Jaký bude efektivní index lomu této smíchané desky pro $N \rightarrow \infty$? Napadá vás proč? (Nápověda: pro libovolnou matici A platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A),$$

kde I je jednotková matice a $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$)

Sebesoutředující paprsek

Na kvalitativní předpověď nám stačí použít Snellův zákon lomu. Intenzita paprsku se zvětšuje směrem do jeho středu, a tím pádem bude i index lomu vzrůstat při pohybu do středu paprsku. Snellův zákon nám říká, že při přechodu do oblasti s vyšším indexem lomu se světlo láme ke kolmici. Zhruba tedy můžeme předpokládat, že okrajové části paprsku se budou lámat víc a víc do středu a paprsek se bude postupně zužovat. Tím ale bude jeho energie koncentrovaná blíž ke středu, kde tak poroste intenzita, a následně i index lomu, takže soustředující efekt se bude sám od sebe zesilovat, dokud nebude paprsek příliš úzký, aby platila použitá aproximace. To může nastat například tehdy, kdy ohromná intenzita světla změní kvalitativní chování materiálu, kterým prochází (roztaví ho, ionizuje, atp.) nebo tehdy, kdy šířka paprsku dosáhne řádově vlnové délky světla a geometrické přiblížení přestane platit.

S tím souvisí další problém našeho modelu – vezmeme-li v úvahu vlnové vlastnosti světla, žádný paprsek světla ve vakuu nebo lineárním materiálu nemůže mít všude stejnou šířku, ale musí se vlivem difrakce rozšiřovat. Tento fakt lze nahlédnout nejlépe z principu neurčitosti aplikovného na jednotlivé fotony. Předpokládejme, že připravíme paprsek světla vlnové délky λ o šířce D , což můžeme

udělat například tak, že necháme projít rovinou vlnu šěrbinou šířky D . To ale znamená, že při průchodu šěrbinou známe polohu fotonů ve směru kolmém na pohyb světla s přesností $\Delta x_{\perp} = D$. Kvantově mechanický princip neurčitosti tak ale zaručuje, že hybnost fotonů v kolmém směru můžeme znát nanejvýš s přesností (řádově) $\Delta p_{\perp} = \hbar/D$. Paprsek se tedy bude vlivem neurčitosti kolmé složky rychlosti rozšěrovat pod úhlem

$$\vartheta = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{\hbar/D}{2\pi\hbar/\lambda} \approx \frac{\lambda}{D}. \quad (74)$$

V materiálu tedy proti sobě působí dva jevy – rozšěrování paprsku vlivem difrakce, a zužování vlivem závislosti indexu lomu na intenzitě. Pokusme se odhadnout, kdy budou tyto dva jevy v rovnováze. Máme-li paprsek konstantní intenzity I a tloušťky D , index lomu se na hranici paprsku skokově mění z $n_1 + In_2$ na n_1 . Bude-li intenzita dostatečně velká, hodnota kritického úhlu⁴⁵ na rozhraní překročí rozptylový úhel a k žádnému rozptylu paprsku pak nedojde. Pro kritický úhel ϑ platí podle Snellova zákona

$$(n_1 + Icn_2) \cos \vartheta = n_1.$$

Pro rozumně tlusté paprsky viditelného světla máme $\lambda \ll D$, tedy $\vartheta \ll 1$, a můžeme použít přibližný vzorec pro kosinus malých úhlů $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$. Dosadíme-li za ϑ z rovnice (74), dostaneme po zanedbání členů vyšších řádů a numerických konstant kritickou intenzitu

$$I_c \approx \frac{n_1 \lambda^2}{n_2 D^2}. \quad (75)$$

Tento vztah nám říká, jak intenzivní paprsek dané vlnové délky musíme připravit, aby sám sebe udržel v oblasti šířky D . Většina běžně dostupných materiálů (voda, sklo, polymery) skutečně vykazuje pro dostatečně silné světlo lineární závislost indexu lomu na intenzitě, a popsání jevu se v praxi často využívá při práci s laserovými paprsky.

Podívejme se nyní, jestli se nám podaří úlohu vyřešit přesně – za použití vlnového modelu světla. Nebudeme vás napínat, a prozradíme, že problém má elegantní analytické řešení. Najdeme upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole \mathbf{E} a ukážeme, že má řešení ve tvaru postupujícího paprsku s charakteristickým profilem intenzity.

Předpokládejme, že vektor polarizace \mathbf{P} materiálu závisí na elektrickém poli podle vztahu

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0(\chi_0 + \chi_2|\mathbf{E}|^2)\mathbf{E},$$

kde χ_0 a χ_2 jsou konstanty charakteristické pro daný materiál. Ke vztahu z páteho dílu seriálu jsme tedy přidali člen úměrný $|\mathbf{E}|^2$, a tedy intenzitě světla. Označíme-li $I = |\mathbf{E}|^2$, pro index lomu bude platit (podle téhož dílu)

$$n = \sqrt{1 + \chi_0 + \chi_2|\mathbf{E}|^2} \approx n_1 + n_2 I,$$

⁴⁵⁾ Kritický úhel je minimální úhel, měřený od rozhraní, pod jakým může světlo dopadat, aby ještě nedošlo k úplnému odrazu.

přičemž použitá aproximace platí pro $\chi_2 |\mathbf{E}|^2 \ll 1$, což je bezpečně pravda pro běžné materiály a intenzity světla, které jsou schopné vytvořit pozemské laboratoře. Hodnoty n_1 a n_2 pak s χ_0 a χ_2 souvisí vztahy

$$n_1 = \sqrt{1 + \chi_0}, \quad n_2 = \frac{\chi_2}{2\sqrt{1 + \chi_0}}.$$

Hledejme nyní upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Ampérův zákon v našem materiálu má tvar

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}).$$

Vezměme nyní jeho časovou derivaci a použijme Faradayův zákon (ten je stejný jako ve vakuu)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 0,$$

což můžeme přepsat pomocí vektorového zaklínadla „*rot rot = grad div – laplace*“ jako

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (n_1^2 \mathbf{E} + \chi_2 |\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}) = 0. \quad (76)$$

Nebýt prvního členu s divergencí elektrického pole, a kvadratického členu v druhé časové derivaci, měli bychom vlnovou rovnici pro elektrické pole. Hledáme řešení, které má tvar paprsku světla s vlnovým číslem k_z a frekvencí ω , šířícího se ve směru z , jehož intenzita (amplituda) ale závisí na x a y .

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = \mathbf{E}_0(x, y) e^{i(k_z z - \omega t)},$$

kde $\mathbf{E}_0(x, y)$ je velké jen v určitém okolí počátku $x, y = 0$, a jde k nule pro $x, y \rightarrow \pm\infty$. Takové řešení odpovídá rovinnému paprsku, který se při postupu materiálem nerozbíhá, ani nezužuje. Pro jednoduchost se omezíme na situaci, kdy⁴⁶ $\mathbf{E}_0(x, y) = E(y) \hat{\mathbf{x}}$, přičemž $E(y) \rightarrow 0$ pro $y \rightarrow \pm\infty$ a $E'(0) = 0$, protože intenzita je maximální na ose pohybu. Máme tedy paprsek polarizovaný ve směru x , jehož intenzita závisí jen na směru y . Člen s divergencí v rovnici (76) je pak rovný nule, a po dosazení se z x -ové složky této rovnice stane následující diferenciální rovnice pro $E(y)$.

$$-E''(y) + \left(k_z^2 - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2}\right) E(y) + \frac{\chi_2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|\mathbf{E}|^2 \mathbf{E}_x) = 0.$$

Nelineární materiály obvykle nereagují na okamžitou, rychle oscilující intenzitu elektrického pole, ale spíš na jeho střední hodnotu. Budeme tedy předstírat, že jediný na čase závislý člen v posledním členu předchozí rovnice je \mathbf{E}_x , a okamžitou intenzitu $|\mathbf{E}|^2$ nahradíme její střední hodnotou⁴⁷ $E^2(y)/2$. Druhá časová derivace

⁴⁶⁾ Symbol $\hat{\mathbf{x}}$ značí jednotkový vektor ve směru x .

⁴⁷⁾ Střední hodnota \cos^2 je $1/2$.

je tedy ekvivalentní násobením faktorem $-\omega^2$, a dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$E''(y) - \Gamma^2 E(y) + \frac{\chi^2}{2} k^2 E^3(y) = 0,$$

kde $k = \omega/c$ a $\Gamma^2 = k_z^2 - (n_1 k)^2$, spolu s okrajovými podmínkami $E(y) \rightarrow 0$ pro $y \rightarrow \pm\infty$ a $E'(0) = 0$. Tato rovnice je ekvivalentní druhému Newtonovu zákonu pro pohyb částice v dvoujádovém kvartickém potenciálu tvaru

$$-\frac{1}{2}\Gamma^2 E^2 + \frac{\chi^2}{8} k^2 E^4.$$

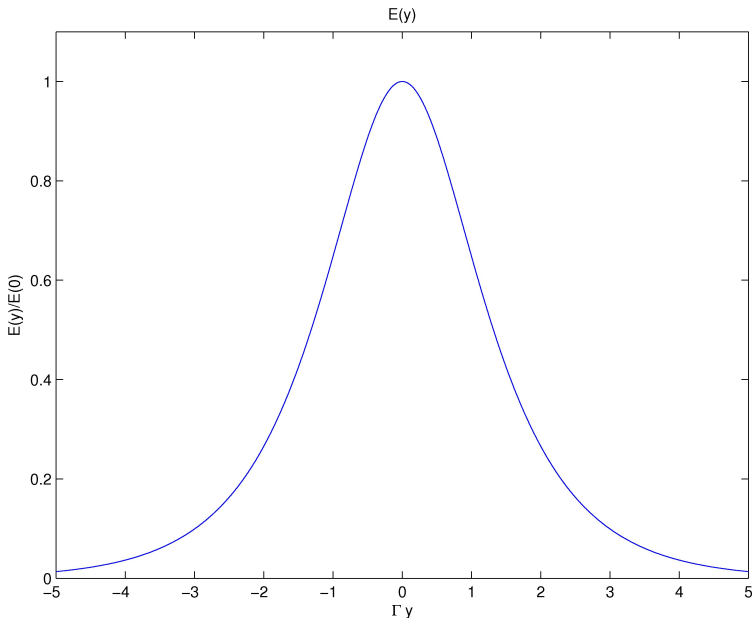
Můžete si promyslet, jak nám tato analogie napoví, že pro $\Gamma^2 > 0$ existuje právě jedno řešení s danými okrajovými podmínkami (a že pro $\Gamma^2 < 0$ žádné takové neexistuje). Samotné řešení pak můžeme najít přes analogii zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} E'^2 - \frac{1}{2} \Gamma^2 E^2 + \frac{\chi^2}{8} k^2 E^4 = 0,$$

a separací proměnných dostaneme

$$E(y) = \frac{2\Gamma}{\sqrt{\chi^2 k}} \frac{1}{\cosh(\Gamma y)}.$$

Tvar této funkce je znázorněn na obrázku 49.



Obr. 49. Velikost elektrického pole v rovnovážném paprsku v závislosti na vzdálenosti od středu.

Jak bychom očekávali, výsledné elektrické pole má maximum pro $y = 0$ šířky řádové $D = 2/\Gamma$ a je zanedbatelné pro větší y , neboť funkce \cosh stoupá exponenciálně, neboli zatraceně rychle. S naším výsledkem nyní můžeme přesně vypočítat kritickou intenzitu světla

$$I_c = E^2(0) = \frac{4\Gamma^2}{\chi_2 k^2} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2 \chi_2 D^2},$$

a dosazením $\chi_2 = 2n_1 n_2$ získáme konečně

$$I_c = \frac{2}{\pi^2} \frac{\lambda^2}{n_1 n_2 D^2}. \quad (77)$$

Ale téměř stejný výsledek (75) jsme dostali z jednoduchého odhadu pomocí Snellova zákona! Kvadratická závislost na λ/D a úměrnost $1/n_2$ jsou stejné, a jediný rozdíl činí n_1 ve jmenovateli, namísto v čitateli. Tuto nesrovnalost můžeme vysvětlit tím, že jsme použili nesprávný předpis pro dopřednou hybnost světla v materiálu. Šíří-li se totiž světlo materiálem, rozkmitává nabitě částice, a celková hybnost pak sestává z elektromagnetické hybnosti světla, a mechanické hybnosti částic. Můžete si ověřit, že když budeme psát⁴⁸ $p_{||} = n_1 \hbar k$, vzorce (75) a (77) získají stejný tvar, až na číselnou konstantu.

Vidíme, že jednoduchý řádový odhad nám může hodně napovědět a ušetřit spoustu práce s přesným řešením rovnic.

Limita sendviče

Tento příklad ukazuje, jak užitečná může být metoda transferových matic popsaná v seriálu. Označíme-li stejně jako v seriálu amplitudy dopadající, odražené a prošlé vlny po řadě E_d , E_o a E_p , můžeme vztah mezi nimi vyjádřit maticově

$$\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1} (A_2 A_1)^N T \begin{pmatrix} E_d \\ E_o \end{pmatrix}, \quad (78)$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ik & -ik \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \frac{1}{n_{1,2}k} \sin\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \\ -n_{1,2}k \sin\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \cos\left(\frac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \end{pmatrix}.$$

$A_{1,2}$ jsou transferové matice odpovídající elementárním vrstvám šířky $a/2N$ a indexu lomu $n_{1,2}$. Nás zajímá limita rovnice (78) pro $N \rightarrow \infty$. V tom případě jsou argumenty goniometrických funkcí v $A_{1,2}$ mnohem menší než 1, a můžeme tak vzít prvních pár členů Taylorova rozvoje

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & a/2N \\ -(n_{1,2}k)^2 a/2N & 1 \end{pmatrix}, \quad (79)$$

⁴⁸⁾ Vysvětlení, proč je tento vztah ten pravý, není vůbec jednoduché. Fyzikům trvalo celou první polovinu dvacátého století, než se na něm shodli. Rozbor tohoto problému můžete najít v knížce *Rudolf Peierls: More Surprises in Theoretical Physics*.

kde byly zanedbány členy úměrné $1/N^2$ a vyšších řádů. Součin A_2A_1 pak nabývá tvaru⁴⁹

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a/N \\ -(n_1^2 + n_2^2)ak^2/2N & 1 \end{pmatrix}.$$

Označme pro přehlednost $n^2 = (n_1^2 + n_2^2)/2$. Výraz $(A_2A_1)^N$ z rovnice (78) se pak rovná

$$(A_2A_1)^N = \left(I + \frac{A}{N} \right)^N,$$

kde I je matice identity a

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(nk)^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nápověda nám radí, že pro matice platí stejný limitní vztah, jako pro normální čísla (jedná se vlastně o jednu z definic exponenciály), tedy že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{A}{N} \right)^N = \exp(A).$$

Na úplné vyřešení naší úlohy tedy stačí spočítat exponenciálu matice A . To můžeme udělat buď za pomoci vlastních čísel a vektorů, a využít toho, že vlastní čísla exponenciály matice jsou exponenciálami vlastních čísel, anebo přímo spočítat obecnou mocninu A^j , použít alternativní definici exponenciály $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$ a pak si vzpomenout na Taylorův rozvoj sinu a kosinu. Oba postupy vedou k výsledku

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A_2A_1)^N = \exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(nka) & \frac{1}{nk} \sin(nka) \\ -nk \sin(nka) & \cos(nka) \end{pmatrix}.$$

Nalistujete-li nyní poslední stránku pátého dílu seriálu, nebo se podíváte na rovnost (79), zjistíte, že náš výsledek přesně odpovídá transferové matici desky tloušťky a vyrobené z materiálu o indexu lomu n . V limitě $N \rightarrow \infty$ bude tedy chování naší složené desky vůči kolmo dopadající rovinné vlně úplně stejné jako chování homogenní desky stejné tloušťky a efektivního indexu lomu

$$n = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}}. \quad (80)$$

Efektivní index lomu tedy, trochu neočekávaně, není aritmetický průměr n_1 a n_2 , ale jakýsi kvadratický průměr. Za intuitivní fyzikální vysvětlení tohoto překvapivého výsledku můžeme vzít fakt, že pracujeme-li se světlem jako s vlnou, je

⁴⁹⁾ Stále zanedbáváme kvadratické a vyšší členy $1/N$. Ačkoli ještě není úplně jasné proč, přesně takovou přesnost potřebujeme.

přirozenější popisovat materiál nikoli jeho indexem lomu, ale jeho relativní permitivitou ε . Index lomu je s ní ve vztahu $n^2 = \varepsilon$. Efektivní permitivita sendviče je tedy aritmetickým průměrem permitivit obou materiálů

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2},$$

což je už méně překvapivé. Zajímavá otázka je, jestli výsledný efektivní index lomu složeného materiálu závisí na způsobu, jakým jsou oba materiály poskládané, anebo jen na průměrném zastoupení obou složek. Dostaneme jiný výsledek, když destičky poskládáme rovnoběžně s paprskem světla, namísto kolmo? Anebo když vezmeme trojrozměrné šachovnicové rozložení, ve kterém se pravidelně střídají krychličky dvou materiálů?



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Nesměři

Podzimní soustředění se uskutečnilo od 2. do 9. října 2009 v Nesměři u Velkého Meziříčí.

Organizátoři

Jan Bednář, Pavel Brom, Jan Hermann, Karel Kolář, Michael Komm, Lukáš Ledvina, Lukáš Malina, Jakub Michálek, Marek Nečada, Aleš Podolník, Jana Poledníková, Marek Scholz, Kryštof Touška, Tereza Zábajníková

Účastníci

Jana Baxová, Ján Bogár, Zuzana Bogárová, Zuzana Dočekalová, Michal Donát, Barbora Drozdová, Stanislav Fořt, Lubomír Grund, Kateřina Honzáková, Anna Chejnovská, Jiří Jelínek, Tereza Jeřábková, Dominika Kalasová, Jakub Klemsa, Karel Král, Ondřej Maslikiewicz, Jiří Nárožný, Kristýna Onderková, Lada Peksová, Tomáš Pikálek, Petr Ryšavý, Tomáš Skřivan, Tereza Steinhartová, Martina Štarhová, Patrik Švančara, Jakub Vošmera

Legenda

Účastníci soustředění se octli na konci osmdesátých let v tehdejší ČSSR. V roli aparátčiků KSC si vyslechli legendární projev generálního tajemníka na Červeném hrádku. Avšak dějinné zvraty v Evropě na sebe nenechaly dlouho čekat, východní blok se začal drodit, a tak si také odcinkali konec vlády jedné strany a zvolili V. Havla prezidentem ČSSR.

Účastníkům se s přechodem na tržní hospodářství zjevily zcela nové obzory a s kupónovou privatizací možnost získat podíl na bývalém státním majetku a přijít k pohádkovému bohatství. Otevíraly se stále nové investiční příležitosti. Kdo nevěděl, jak investovat do bývalých státních podniků samostatně, mohl využít například skvělých služeb Cambridgeských investičních fondů zaručujících desetinásobné zhodnocení počátečního vkladu!

Rozvinulo se svobodné podnikání, účastníci mohli nabízet různé služby či jiné hodnoty a naopak těchto služeb využívat.

Jak už to však bývá, během neutěšených nových pořádků se leckdo chce chopit příležitosti prosazuje svou agendu, a tak ke slovu přišly různé separatistické skupiny, politická hnutí a další uskupení v rámci boje o moc v nově vznikajícím zřízení, neomezující se v metodách dosahování svých cílů. Nakonec rozhodující hospodářský a politický vliv ve státě získali obyvatelé Sudet.

Účastníci si museli poradit se svými špatnými investicemi (některé zprivatizované podniky prostě zkrachovaly) a také neustálou inflací; některým pak stěžilo zbylo na holé živobytí a museli si přivydělávat různě: někteří občané byli souzeni a po právu potrestáni zejména pro majetkovou trestnou činnost, jíž se dopouštěli.

Většina těch, kteří svěřili své kuponové knížky Cambridgeským fondům, se s investovanými prostředky, natož se slibovaným výnosem, neshledala – ředitel Cambridgeských fondů zmizel neznámo kam a s ním i svěřené jmění.

Přes všechny útrapy se některým účastníkům k přelomu tisíciletí podařilo nashromáždit velké majetky – jedna účastnice si pořídila v aukci i vlastního otoka. Takových však byla (v souladu s očekáváním) pouze menšina.

Fotky



Odborný program soustředění

Jarní soustředění v Uhelné Příbrami

Jarní soustředění 2010 se odehrálo ve dnech 2. až 9. května v RS Slunečnice v Uhelné Příbrami. Objekt kdysi býval školkou, a tak k němu patřila i velká kuchyně, kterou ovládli Marek a Janap. Ačkoli bylo jídlo povětšinou výborné a nadmíru luxusní (vzpomeňme na Markova lososa, kterého zaplatil svou vlastní krví, nebo na Janapin koláč s podbízivým názvem), zjistili jsme, že nechat celou kuchyň na dvou stálých lidech je sice spolehlivé, ale kruté.

Organizátoři

Aleš Podolník, Tereza Zábojníková, Marek Scholz, Karel Kolář, Tomáš Jirotko, Jana Poledníková, Marek Nečada, Jan Hermann, Jakub Michálek, Kryštof Touška, Lukáš Ledvina, Michael Komm, Pavel Brom

Účastníci

Zuzana Dočekalová, Lubomír Grund, Anna Chejnovská, Jiří Jelínek, Dominika Kalasová, Kristína Kohoutová, Pavel Kratochvíl, David Krška, Vladimír Macko, Ondřej Maslikiewicz, Filip Murár, Jiří Nárožný, Kristína Nešporová, Zdeněk Novák, Lada Peksová, Tomáš Pikálek, Eliška Pilátová, Samuel Puček, Jáchym Sýkora, Lukáš Timko, Jakub Vošmera

Legenda

Legenda byla volně inspirována knížkou 1984 od George Orwella.

Účastníci soustředění dostali pozvánku k nízkoteplotnímu pokusu firmy FYKOS Cryogenics. Experiment měl být zaručeně bezpečný, odzkoušený na zvířatech. „Spocívá v hybernování lidské schránky, kterou ponecháme jeden týden zmraženou a posléze bezbolestně rozmrazíme,“ hlásala pozvánka.

Všichni zúčastnění nejprve prošli zdravotní prohlídkou a proměřením všech tělesných parametrů, jakožto i sezením u psychologa či fyzickými testy, aby bylo vyloučeno jakékoli riziko. Večer po příjezdu přihlášených dobrovolníků byly vybrány všechny přihlášky se zaznamenanými údaji z lékařských prohlídek, zkontrolovány odborníky a poté 22 pokusných subjektů nastoupilo hybernaci.

Jak se ale ukázalo, nastavení času zmražení neproběhlo podle plánu. Místo pracovníků FYKOS Cryogenics v bílých overalech byly pokusné subjekty probuzeny členy odbojové skupiny v černých dlouhých pláštích. Ukázalo se, že spánek trval místo jediného týdne až do roku 2084. Odbojová skupina chce využít účastníky experimentu ke svržnutí totalitního režimu Fykosie, země pokrývající celou Eurasii. Její zlotřilý diktátor Pavel Augustinský, který přísně dohlíží na všechno dění po celé zemi z plakátů nadepsaných „Pavel Augustinský tě sleduje“, se rozhodl podmanit si i ostatní superstáty na planetě: Svinii (Afrika a blízký východ), Hrochii (Čína, Austrálie, Oceánie) a Mameriku (Amerika). Odbojáři si dali za úkol sestrojít stroj času, kterým by přenesli účastníky experimentu zpět do roku 2010, aby mohli zabránit všem událostem, které vedly ke stavu věcí, v jakém planeta Země byla v roce 2084. Zmrazení návštěvníci si tyto události mohli přiblížit z novinových článků nashromážděných odbojem za dlouhá léta.

Prvním úkolem bylo vymyslet princip stroje času. Účastníci byli odbojáři rozděleni na vědecké pracovní týmy, které měly své projekty prezentovat před komisí. Ta potom vybrala nejlepší projekt hoden financování. Vyhrál nápad skupiny využívající vysoce výkonného laseru pro kontakt s Bohem, který by skok v čase mohl zařídit tak, že přenese naše duše po spáchání hromadné sebevraždy. Bylo potřeba sehnat několik součástek: Rubín jako materiál na laser, titanovou trubici jako obal na laser, příborové nože pro spáchání harakiri, plazmovou obrazovku s nápisem TEĎ a část Bible pro naklonění si Boha na naši stranu.

Rubín se účastníkům podařilo získat v rubínovém dole, jenž byl zařízen jako tradiční hra labyrint, tentokrát v novém, provázkovém provedení, které se již nikdy nebude opakovat. Titanovou trubici jsme vyrvali ze spárů antisexuální ligy mládeže (vládní organizace označující se růžovou stužkou a snažící se rozbít tradiční model rodiny, aby mohla strana vzít výchovu dětí do svých rukou), liga ji zadržovala proto, že by v ní někdo mohl vidět falický symbol. Příborové nože byly

vyzvednuty z radiací zamořené oblasti roboty, které programovaly různé vědecké skupiny.

V půlce práce se ovšem stalo něco nečekaného. Odboj byl odhalen a všichni rozmrazení účastníci včetně hlavních odbojářů byli zatčeni. V hluboké noci byli po dvojicích voláni k výslechu, surově mláceni, zdrogováni a posléze z nich byly vyždímány všechny informace, které mohli poskytnout. Pomocí kolaboranta mezi dozorcí se jim nakonec podařilo z cely smrti uprchnout a po namáhavém nočním pochodu dosáhnout nové odbojářské základny, kam byl naštěstí rostoucí stroj času přestěhován. Projekt mohl pokračovat.

Jednoho dne byl stroj času konečně sestrojen. Vůdčí odbojáři rozhodli, že nožů nakonec nebude třeba, jelikož zůstaly ve spárech vládních vojáků a navíc byl pro tento účel sehnán kulomet. Všichni zúčastnění svorně přečetli úryvek z Bible, zapnuli ultravýkonný laser a navázali kontakt s Bohem.

Po krátké palbě se probudili. Kolem stáli zaměstnanci FYKOS Cryogenics v bílých overalech. Plakáty s politickými hesly zmizely, ze stěn už se nedíval žádný Pavel Augustinský. Nikdo nekřičel, nikdo nečetl zprávy o zvýšení přídelu čokolády. Nikde se neválely novinové články o atomové válce a společné vládě Jiřího Paroubka s Fidelem Castrem. Experiment se vydařil a přesně po týdnu byl ukončen úspěšným rozmrazením 18 subjektů z 22.

Stalo se to vůbec? Byla Fykosie skutečná?

Fotky



Oživlý nápis FYKOS

FYKOSí Fyziklání 2010

Čtvrtý ročník FYKOSího Fyziklání, soutěže v řešení úloh z fyziky na čas, proběhl v pátek 19. února 2010 v prostorách Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity v Praze na Karlově. Soutěže se účastnilo 46 týmů, z toho 2 ze Slovenska. Nejlepším gymnáziem se stalo Gymnázium Christiana Dopplera se 32 vyřešenými úlohami za celkem 120 bodů, druhé místo obsadilo Gymnázium Poštová z Košic (28 úloh, 119 bodů) a na třetím místě skončil tým 2:1 nad Ruskem z Gymnázia Ľudovíta Štúra v Trenčíně (27 úloh, 112 bodů). Nejúspěšnějším smíšeným týmem byl Bořek stavitel (studenti z Gymnázia Christiana Dopplera, Gymnázia Nymburk, Gymnázia J. Heyrovského, Střední průmyslové školy Letohrad a Gymnázia Matyáše Lercha) s 30 příklady a 136 body.

Pravidla soutěže

Soutěže se účastní družstva s nejvýše 5 členy. Samozřejmě družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane družstvo nový příklad. Za správně vyřešený příklad se považuje příklad se správným výsledkem. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů se smí používat kalkulačka a MFCh tabulky.

Výsledky

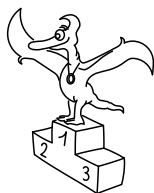
- | | | |
|-----|---|-----------------|
| 1. | Gymnázium Christiana Dopplera Praha | 120 bodů |
| | <i>Tadeáš Dohnal, Martin Labuť, Lada Peksová, Jáchym Sýkora, Tomáš Skřivan</i> | |
| 2. | Gymnázium Poštová Košice | 119 bodů |
| | <i>Ladislav Bačo, Zuzana Coculová, Tomáš Babej, Dávid Hvizdoš, Peter Milošovič</i> | |
| 3. | Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín | 112 bodů |
| | <i>Ján Bogár, Michal Šustr, Ján Dugáček, Tomáš Jančo, Peter Kosec</i> | |
| 4. | Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy | 109 bodů |
| | <i>Jakub Klemsa, Jaroslav Mandík, Karel Kovářák, Michael Bůj, Richard Bláha</i> | |
| 5. | Gymnázium Pierra de Coubertina Tábor | 106 bodů |
| | <i>Stanislav Fořt, Tomáš Volf, Petr Hudeček, Lukáš Tímko, Pavel Novotný</i> | |
| 6. | Gymnázium Zábřeh | 100 bodů |
| | <i>Lubomír Grund, Petr Morávek, Pavel Veselý, Viktor Valný, Alžběta Kratochvílová</i> | |
| 7. | Gymnázium Jana Keplera Praha | 99 bodů |
| | <i>Tomáš Nosek, Kateřina Honzáková, Jiří Hoskovec, Tomáš Rusý, Stanislav Mach</i> | |
| 8. | Gymnázium Špitálská Praha | 98 bodů |
| | <i>Adam Boško, Vlastimil Dort, Tomáš Novák, Jakub Červenka, Michal Ducháček</i> | |
| 9. | Gymnázium Pardubice | 90 bodů |
| | <i>Lukáš Fajt, Jan Novotný, Jan Rule, Michal Bubeník, Michal Požděna</i> | |
| 10. | Jiráskovo Gymnázium Náchod | 89 bodů |
| | <i>Radek Papež, Jakub Valtar, Jan Šimbera, Ondřej Vydra, Ondřej Chrenko</i> | |
| 11. | Gymnázium Františka Palackého Valašské Meziříčí | 88 bodů |
| | <i>Robin Stržínek, Antonín Štěpán, Štěpán Poláček, Jaroslav Pavela, Tomáš Tesar</i> | |

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Fotky



Vítězové čtvrtého ročníku Fyziklání



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Petr Ryšavý	G J. Heyrovského, Praha	141
2. Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	87
3. Štěpán Poláček	G F. Palackého, Val. Meziříčí	54
4. - 5. Zdeněk Novák	G, Česká Kamenice	30
<i>Lada Peksová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	30

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Tomáš Pikálek	G, Boskovice	136
2. Dominika Kalasová	G, Boskovice	82
3. Anna Chejnovská	G Christiana Dopplera, Praha	54
4. Martin Bucháček	G Luďka Píka, Plzeň	49
5. Stefan Badza	Mat. gymnázium, Bělehrad	38
6. Ondřej Maslikiewicz	SPŠ, Hronov	37
7. David Krška	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	28
8. Kateřina Jiráková	G J. Pivečky, Slavičín	25

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Jakub Vošmera	G Matyáše Lercha, Brno	112
2. Peter Kosec	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	68
3. Patrik Švančara	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	52
4. Gabija Maršalkaite		29
5. Kristýna Nešporová	G, Boskovice	23

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Kristýna Kohoutová	G, Žamberk	89
2. Filip Murár	G, Masarykovo nám., Třebíč	44
3. Lubomír Grund	G Zábřeh	37
4. Lukáš Timko	G P. de Coubertina, Tábor	27
5. Vladan Glončák	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	25

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

ALĚŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXIII. ročník – 2009/10

Předmluva: Tomáš Jirotko

Náměty úloh:

Jakub Michálek (II.3, III.1, III.2, III.3, III.P, V.E, VI.1),
Lukáš Ledvina (III.4, IV.3, V.2, V.3, VI.3),
Dalimil Mazáč (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S),
Martin Výška (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S),
Jan Humplík (II.P, V.1, V.4), Tomáš Jirotko (I.1, II.2),
Aleš Podolník (I.2, IV.1), Jana Poledníková (I.3, IV.2),
Marek Scholz (II.4, VI.E), Jan Prachař (I.P, VI.2),
Jaroslav Trnka (I.E), Tereza Zábojníková (IV.4),
Jan Hermann (II.E), Pavel Motloch (VI.4),
Kryštof Touška (V.P), Peter Greškovič (IV.P),
Adéla Skoková (VI.P)

Autoři řešení úloh:

Lukáš Ledvina (II.4, III.4, V.2, V.E, VI.3),
Jana Poledníková (II.1, III.2, IV.2, VI.P),
Aleš Podolník (II.E, IV.E, V.3, VI.4),
Jan Humplík (I.2, II.2, V.1), Marek Scholz (I.3, IV.4, VI.E),
Michal Koutný (I.4, II.3, VI.1), Dalimil Mazáč (II.S, IV.S, V.S),
Jakub Michálek (IV.3, V.4, VI.2), Tereza Zábojníková (I.1, III.P),
Marek Nečada (II.P, III.3), Kryštof Touška (IV.1, V.P),
Tomáš Jirotko (III.E), Karel Kolář (I.P), Hana Šustková (I.E),
Martin Výška (I.S), Jan Hermann (IV.P), Jan Jelínek (III.1),

Seriál o optice: Dalimil Mazáč, Martin Výška

Legenda podzimního soustředění: Marek Nečada

Legenda jarního soustředění: Tereza Zábojníková

Sazba: Tomáš Jirotko

Obrázky a grafy: Tomáš Jirotko

Jazykové korektury: Jakub Michálek, Marek Nečada

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Hrátky s obnovitelnými zdroji

Bez sluneční energie a bez vody by nevznikl a nebyl možný život na Zemi, bez elektrické energie se neobejde průmysl ani domácnosti, doprava na celém světě je závislá na energii získané hořením fosilních paliv. Je zřejmé, že bez dostatečného množství energie by se moderní civilizace nemohla dál rozvíjet. Proč nezkusit trochu si pohrát s obnovitelnými zdroji energie?

Energie vody

Postavit si mlýnek na potoce, to napadne každého. Což ale postavit si mlýnek v umyvadle nebo dřezu?



Energie větru

Větrníček si umí složit každé mrně. My vědci si složíme anemometr (velký vědec ví, co to je, menšímu napovíme, že to je zařízení na zjišťování rychlosti větru).



Energie Slunce

Zapřáhněme Slunce, aby nám ohřálo třeba párek! Stačí plastový kbelík, hliníková odrazová fólie, silnější dráty na zhotovení držadla na párek. Slunce přeje dobrou chuť!



Mnoho dalších návodů na pokusy můžete najít v knížce **Hrátky s obnovitelnými zdroji**, která je součástí vzdělávacího programu ČEZ Svět energie. Brožuru si můžete objednat mezi jinými materiály vzdělávacího programu na

www.cez.cz/vzdelavaciprogram



ALEŠ P ODOLNÍK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXIII. ročník – 2009/10

Vydal **MATFYZPRESS**
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy v Praze
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 337. publikaci

Vydáno pro vnitřní potřebu MFF UK
Publikace není určena k prodeji

148 stran, 54 obrázků
Sazba písmem Computer Modern v programu T_EX
Vydání první
Náklad 300 výtisků

Praha 2010

ISBN 978-80-7378-143-9

