

22. ročník, úloha VI. P ... lidští ptáci !!! chybí statistiky !!!

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, s ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Průměr Titanu je 5150 km, hmotnost je 1/45 hmotnosti Země, tloušťka jeho atmosféry je 200 km a tlak na jeho povrchu je 1,5 atmosféry.

Na základě předložených údajů určete gravitační zrychlení na povrchu a odhadněte hustotu atmosféry. Srovnáním s parametry ptáků v pozemských podmínkách rozhodněte, zda by opeřený člověk mohl na Titanu létat.

Létat se zachtělo Honzovi P.

Gravitační zákon ve tvaru $a = \kappa m/r^2$, kde a označuje zrychlení, κ gravitační konstantu, m hmotnost planety a r vzdálenost od středu, platí jak pro hmotné body, tak pro libovolné kulově symetrické rozložení hmoty (analogie mezi gravitací a elektrostatikou). Dodejme, že pro tíhové zrychlení na Zemi platí $g = \kappa M/R^2$ a z poměru obou rovnic dostaneme

$$a = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 g = 1,34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Co se v zadání míní tloušťkou atmosféry? Hustota atmosféry s výškou klesá přibližně exponenciálně, což vyjadřuje barometrická formule (totéž pro tlak)

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{Agh}{RT}\right),$$

v níž A označuje molární hmotnost, g zrychlení, h výšku nad povrchem, R plynovou konstantu a T termodynamickou teplotu. Všimněte si, že ve jmenovateli stojí potenciální energie jednoho molu v homogenním tíhovém poli, takže tento vztah je jednoduchým důsledkem vztahu Boltzmannova. V grafu se závislost hustoty (logaritmické měřítko) na výšce (lineární měřítko) podobá klesající přímkou. V určité výšce pozorujeme malý „zhup“ podobný skelnému přechodu. V této výšce také začíná růst teplota. Tloušťku atmosféry definujeme jako konec tohoto přechodu; v zemské atmosféře mu odpovídá výška $h = 110$ km a hustota $\rho = 10^{-8} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Lze teď postupovat obráceně a z definice tloušťky atmosféry jako výšky, kde hustota nabývá 10^{-8} násobku hustoty na povrchu, odvodit tloušťku atmosféry? Pokud považujeme tíhové zrychlení za konstantu, nikoliv. Z výšky atmosféry totiž odvodíme pouze rychlost poklesu, ale tlak bude vždy přímo úměrný celkové hmotnosti atmosféry¹.

Pokud bychom (mechanicky) vycházeli ze vzorce pro hydrostatický tlak $p = h\rho a$, dostali bychom nesmyslně nízkou (v atmosféře konstantní) hustotu $\rho = 0,57 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tento model totiž uvažuje kapalnou atmosféru.

Vhodněji atmosféru popíšeme modelem ideálního plynu, který předpokládá platnost stavové rovnice $pM = \rho RT$. Z ní plyne hustota dusíku ($M = 0,028 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$) $\rho = 5,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; rovnice van der Waalsova dává hustotu $\rho = 5,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pro danou teplotu a tlak jsou podmínky platnosti rovnic splněny.

Mohl by na Titanu opeřený člověk létat? Za létání považujeme jednak aktivní třepetání křídélky jako vrtulník, jednak pasivní nadnášení díky profilu křídél jako u rožala. Vyšetřujeme

¹⁾ Pokud bychom místo homogenního tíhového pole uvažovali tíhové pole planety, v němž je potenciální energie $E_p = -\kappa Mm/x$, objevil by se problém. Hustota by totiž se vzrůstající vzdáleností konverguje k nenulové konstantě. To by znamenalo nekonečnou celkovou hmotnost, čímž by byl porušen předpoklad, že pole způsobuje pouze masa Titanu. Navíc bychom u takto nekonečného tělesa těžko mohli těžko mluvit o tepelné rovnováze.

podmínky aktivního letu. V našem řádovém odhadu označíme charakteristickou délku R a frekvenci f : K zemi „letouna“ táhne tíhová síla $F \sim R^3 \rho_1 a$ (vztlak zanedbatelný), zatímco k věčným ideálům míří síla odporová turbulentního proudění $F \sim \rho R^4 f^2$ (odporovou sílu při pohybu křídel nahoru lze díky nízké rychlosti zanedbat). Podmínka rovnováhy dává pro člověka stejné velikosti jako orel úměru

$$\frac{f_o}{f_1} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_1}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{p_T}{p_Z}} \sqrt{\frac{T_Z}{T_T}} \doteq 5,$$

kde jsme odhadli orlí hustotu asi na $0,7 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$ (možná jste si všimli, že někteří ptáčci mají nižší hustotu než voda, a tedy plavou). Na druhou stranu takový model počítá s hmotností ptáka asi 50 kg, což dost nesedí, tedy přesnost tohoto odhadu je asi jeden řád. Vypočítejme ještě potřebný výkon

$$P = FRf \sim \rho R^5 f^3.$$

Výkon výrazně závisí na charakteristickém rozměru a na frekvenci. Pro metrového orla vychází na zemi řádově desítky wattů. Pro člověka s dvoumetrovými křídly na Titanu řádově stovka wattů. Zkoušeli jste někdy šplhat na laně bez nohou? Borci výkonu řádově stovky wattů dosáhnou.

Závěrem tedy konstatujeme, že díky vyšší hustotě a nižšímu tíhovému zrychlení by opeřený člověk nejspíš mohl létat, ale musel by se pěkně ohánět.

Jakub Michálek

jmi@fykos.mff.cuni.cz