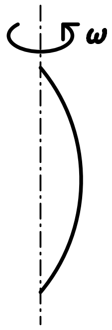


Obr. 1

22. ročník, úloha III . 4 ... *vánoční řetěz* *(4 body; průměr 1,69; řešilo 16 studentů)*

Jakub se o přednášce nudil, z batohu si vytáhl řetízek, chytil jej na dvou místech mezi prsty a začal s ním točit úhlovou rychlostí ω jako na obrázku 1. Marek to uviděl a zeptal se Jakuba, jaký tvar má rotující řetízek. Co mu Jakub odpověděl, když zanedbal vliv tíhového pole? *Na přednášce vymyslel Jakub M.*

Nejdříve musíme vymyslet postup, pomocí něhož úlohu vyřešit. Pokud bychom měli tyčku v nějakém údolí a hledali rovnovážnou polohu, princip by byl jednoduchý: Hledej polohu s nejnižším těžištěm. Těžištěm rozumíme hmotný střed tělesa, v němž leží působiště tíhové síly. Podobně bychom mohli hledat působiště odstředivé síly a vybrat takový tvar řetězu, který ho má nejdále od osy otáčení. Zobecnění platné v mechanice zní: Potenciální energie V má ve stabilní poloze minimum. Kousku délky $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$ přísluší potenciální energie odstředivé síly úměrná $y^2\,\mathrm{d}s$. Podmínku minima zapisujeme

$$\delta \int y^2 \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

(meze se berou $-d/2$ a $d/2$). Stále jsme neuplatnili podmínku $\int \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = l$, z níž plyne $\delta \int \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 0$. Roznásobíme výraz vhodnou konstantou λ, aby souhlasil rozměr, a přičteme novou variační rovnici k původní, obdržíme

$$\delta \int \left(y^2+\lambda\right) \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Už Platón[1] věděl, že z této podmínky plyne zachování veličiny

$$C = \frac{(y')^2\left(y^2+\lambda\right)}{\sqrt{1+(y')^2}} - \left(y^2+\lambda\right)\sqrt{1+(y')^2}\,.$$

Označíme-li $y_0 \equiv y(0)$, máme podmínku $C = -\left(y_0^2+\lambda\right)$. Proto se derivace rovná

$$y' = -\sqrt{\left(\frac{y^2+\lambda}{y_0^2+\lambda}\right)^2 - 1}\,.$$

Shrňme ještě okrajové podmínky:

a) $y(d/2) = 0$;

b)

$$\int \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = l \quad\Rightarrow\quad \int_0^{y_0} \frac{\left(y^2+\lambda\right)\mathrm{d}y}{\sqrt{\left(\frac{y^2+\lambda}{y_0^2+\lambda}\right)^2-1}} = 2l\left(y_0^2+\lambda\right)\,.$$

Z okrajových podmínek vyjádříme neznáme konstanty y_0 a λ pomocí konstant l a d. Rovnici lze řešit například těmito postupy. Buď můžeme rovnici pro derivaci separovat a vyjádřit $x(y)$,

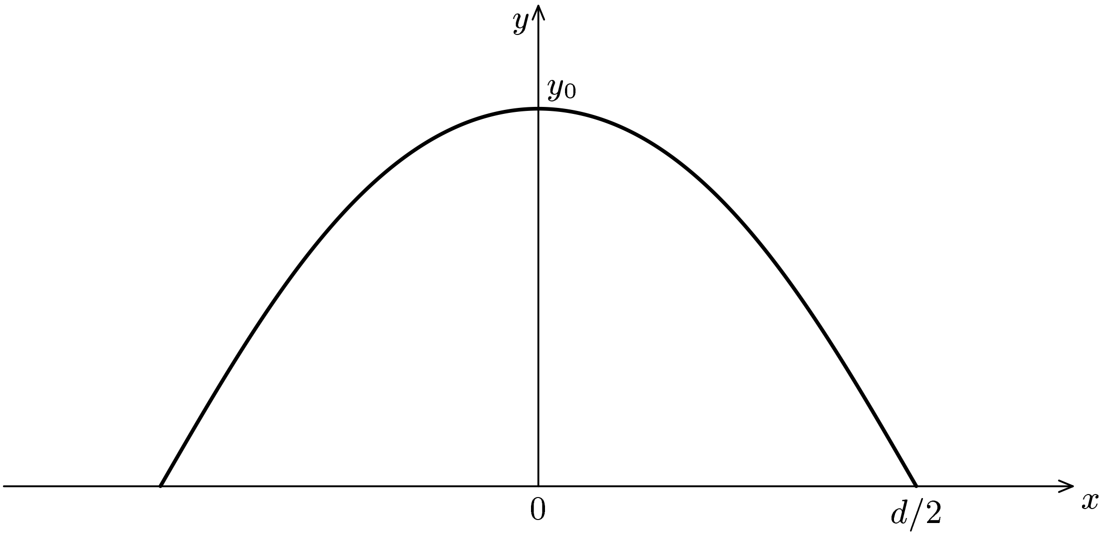
[1] Viz vánoční text „Myšlenka variačního počtu“, na který je odkaz v diskusi na našich webových stránkách.

do níž pak „dosadíme“ počáteční podmínky, nebo můžeme vyjádřit $y(x)$ Taylorovým rozvojem $y(x) = y_0 + y'' x^2/2 + y^{(4)} x^4/4! + \ldots$, kde derivace vyjádříme

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y}\, y' = - \left| \frac{2y \left(\dfrac{y^2+\lambda}{y_0^2+\lambda} \right)}{y'}\, y' \right|_{y_0} = -2y_0 \,,$$

$$y^{(4)} = -\frac{4y_0 \left(3y_0^2 + \lambda\right)}{\left(y_0^2+\lambda\right)^2}$$

atd. Problém samozřejmě spočívá v tom, že pokud funkci rozvineme do n-tého řádu, musíme řešit algebraickou rovnici n-tého řádu pro podmínku (a) a musíme vypočítat integrál v podmínce (b). Zbývá tedy numerické řešení diferenciální rovnice, které hledejte na obrázku. Pokud bychom se měli omezit na elementární funkce, zvolíme přiměřeně přesné řešení s funkcí kosinus.



Obr. 2. Počítačově modelovaný tvar křivky

K došlým řešením: Většina řešitelů, kteří se ke tvaru vyjádřili, hádala elipsu. Taková řešení měla vesměs tuto domněnku na prvním řádku a pak ji detailně rozebírala. Další řešitelé tipovali řetězovku (tvar řetězu v gravitačním poli) nebo parabolu. Jediné správné řešení Jana Humplíka používalo klasický postup podmínek rovnováhy.

Jakub Michálek
`jmi@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.