

ALEŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV

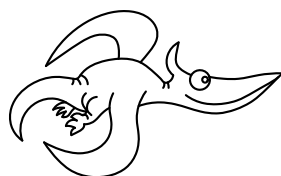
Fyzikální korespondenční seminář

XXII. ročník – 2008/09



***matfyz*press**

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	12
Zadání experimentálních úloh	68
Řešení experimentálních úloh	69
Seriál o historických milnicích fyziky	92
1. Galileo a princip ekvivalence.....	92
2. Young a vlnová povaha světla	96
3. Michelson a světlo.....	102
4. Foucault a rotace Země.....	109
5. Thomson a jeho „corpuscles“	117
6. Devatero atomových modelů.....	122
Řešení úloh ze seriálu	130
Akce FYKOSu	151
Podzimní soustředění v Dolním Dvoře.....	151
Jarní soustředění ve Švagrově.....	152
Týden s aplikovanou fyzikou	154
FYKOSí Fyziklání 2009.....	156
Pořadí nejlepších řešitelů	158



Předmluva

Milý čtenáři,

právě otvíráš ročenku XXII. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, který se uskutečnil v průběhu školního roku 2008/2009.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol u nás. Je organizován především studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK a také zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezneme šest sérií po sedmi úlohách, z nichž jedna je experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nežřídkou je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení ať už klasickou poštou, nebo přes internet. Opravovatelé pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě samotného korespondenčního semináře připravujeme pro naše řešitele i jiné akce. Těmi nejpopulárnějšími jsou bezesporu dvě týdenní soustředění, jedno na jaře a druhé na podzim. Během nich se zhruba 30 nejlepších řešitelů dozví mnoho zajímavého z fyziky a matematiky na dopoledních přednáškách. Jedno odpoledne pak teorii ověřují v praxi při nejrůznějších experimentech. Nechybí samozřejmě ani odpočinek a zábava v podobě většinou zábavných a originálních her v přírodě.

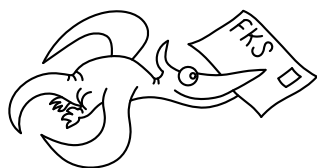
Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

I v uplynulém ročníku se nám podařilo prodloužit toto poznávání na rovný Týden s aplikovanou fyzikou, kdy jsme podnikli i výlety za Prahu, například do mělnické elektrárny nebo ondřejovské hvězdárny.

Rovněž pokračujeme v tradici FYKOSího Fyziklání, jednodenní soutěže týmů v rychlém řešení fyzikálních úloh. Tentokrát posluchárny MFF hostily 37 skupin z celé republiky i Slovenska, což je pro nás dostatečným důkazem, že zájem o naši fakultu i náš obor je na gymnáziích stále velmi silný.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXII. ročníku. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím ponouknout čtenáře, aby se před pouhým přečtením řešení pokusil úlohu sám rozmyslet. Další částí je Seriál o počítačové fyzice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na emailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu



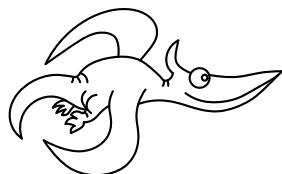
FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 526
 www: <http://fykos.mff.cuni.cz>
 e-mail: fykos@mff.cuni.cz

A jak vypadal XXII. ročník očima statistiků? Řešilo jej 68 studentů ze 44 středních škol ze čtyř států. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 726 došlých řešení.

Pořadí škol

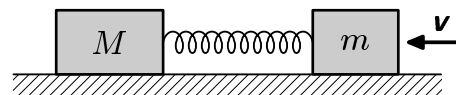
Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
Gymnázium Ľudovíta Štúra Trenčín	12	35,8	430
Gymnázium J. Heyrovského Praha 5	2	74	148
Gymnázium Orlová	1	105	105
Gymnázium Boskovice	3	32,3	97
Gymnázium J. Ortena Kutná Hora	1	88	88
Gymnázium C. Dopplera Praha 5	3	29	87
Gymnázium Jana Keplera Praha 6	4	20	80
Gymnázium Ostrava-Hrabůvka	1	75	75
Gymnázium Praha 9	1	74	74
Gymnázium Třinec	1	67	67
Střední průmyslová škola Hronov	2	27,5	55
Gymnázium J. Vrchlického Klatovy	1	52	52
Gymnázium P. de Coubertina Tábor	3	17	51
Gymnázium Uherské Hradiště	1	50	50



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... klouzání a kmitání

Dvě závaží o hmotnostech m a M jsou spojena pružinou o tuhosti k a leží na hladké podložce (tření můžeme zanedbat). Tělesu m udělíme rychlost v (viz obrázek 7). Jaká bude nejkratší vzdálenost mezi tělesy a kdy jí dosáhnou?



Obr. 1

(řešení str. 12)

Úloha I.2 ... pirát a zlatá odměna

Jeden pirát má za odměnu dostat pytel zlaťáků. Ale kapitán lodi je lakomý a chce mu to zkomplikovat. Přetavili zlato do válce. A k tomu ještě odlili druhý, velikostně stejný válec z mosazi. Protože uprostřed zlatého je vzduch, váží oba stejně a jsou stejně velké. Jak si má dotyčný pirát vybrat, aby pak nelitoval?

(řešení str. 13)

Úloha I.3 ... už mě nehoupej

Kačenka se rozhoupává na houpačce následujícím způsobem. Při největší výchylce houpačky se přihrčí, a když je houpačka v nejnižším bodě, opět se postaví. Tyto pohyby neustále opakuje. Poměr vzdálenosti těžiště Kačenky od osy otáčení při pokrčení a při stání je $\sqrt[3]{2} \doteq 1,06$. Kolikrát se Kačenka zhoupne, než se amplituda houpání zdvojnásobí?

(řešení str. 14)

Úloha I.4 ... praktická motoristická

Na nepřehledných křižovatkách či v ostrých zatáčkách někdy bývá vypuklé zrcadlo. Snadno si všimneme, že zrcadlo zkresluje jak vzdálenost, tak i rychlost přijíždějících aut. Naši vzdálenost od zrcadla označíme d , vzdálenost přijíždějícího auta od zrcadla L , jeho skutečnou rychlost v a poloměr křivosti zrcadla R . Na základě toho, co vidíme v zrcadle, určete, jak daleko se nám přijíždějící auto jeví? Jakou zdánlivou rychlostí se přibližuje? A jak se liší skutečná doba, za kterou přijíždějící auto vjede do křižovatky, od doby, kterou odhadneme z jeho zdánlivé vzdálenosti a zdánlivé rychlosti? Zvolte si rozumné hodnoty parametrů a rozhodněte, zda může být tento rozdíl dob nebezpečný.

(řešení str. 15)

Úloha I.P ... Mikuláš vs. Klaudius

Rok 2009 je vyhlášen jako Mezinárodní rok astronomie a připomíná 400 let používání dalekohledů lidstvem. Vraťme se o čtyři staletí zpět, kdy byl dalekohled již k dispozici, ale klasická fyzika ještě v plenkách. V otázce uspořádání světa spolu soupeřily Koperníkův heliocentrický názor a Ptolemaiovův geocentrický systém. Navrhněte experiment, resp. pozorování, které mezi oběma představami dokáže rozhodnout. Dostatečně okomentujte, jaký výsledek lze očekávat a co z něj

plyne v prospěch či nepospěch uvažovaných uspořádání. Vlastní pozorování není nutné, i když vhodné. Navíc vysvětlete, proč jsou v geocentrickém modelu Slunce a Země spojeny úsečkou? (řešení str. 18)

Úloha II.1 ... *duhová energie*

Zkuste se zamyslet a posléze vypočítat, kde a kdy na Zemi nelze vidět duhu? (řešení str. 21)

Úloha II.2 ... *odhalte tajemství „šuplery“*

Vysvětlete nám, jak funguje „šuplera“, že dokáže měřit desetiny milimetru. (řešení str. 22)

Úloha II.3 ... *ledvinové koule*

Malá koule stojí v klidu na velké kouli, která volně leží na podložce. Do malé koule nepatrně strčíme a ta se svalí na zem. Jak daleko od původního bodu dotyku velké koule se zemí malá koule dopadne? (řešení str. 23)

Úloha II.4 ... *do nekonečna a ještě dál*

Bohatý vesmírný turista si zaplatil výlet do hlubokého vesmíru. Raketa vyletí ze Země a rovnoměrně zrychluje se zrychlením a , což si turista může ověřit například pouštěním míčku. Nudnou cestu si krátí zíráním ze zadního okénka, pozorováním Země. Po nějaké době (Jaké? Aspoň řádový odhad.) se mu začne zdát, že něco není v pořádku – Země se pomalu přestává zmenšovat. Z toho usoudí, že raketa zpomaluje, což neodpovídá tomu, že posádka stále cítí zrychlení a . To ale turistu nenapadne a rozlobeně jde za kapitánem požadovat vysvětlení. Co mu kapitán řekne?

Předpokládáme, že turista vidí celé elektromagnetické spektrum a má železné nervy a pozorování vydrží. (řešení str. 26)

Úloha II.P ... *milenecká*

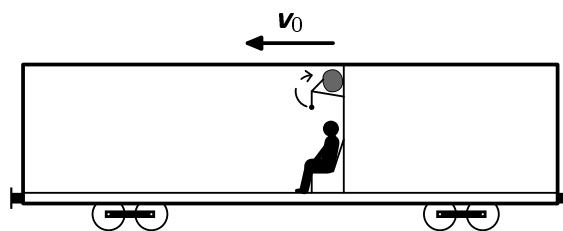
Jak se změní teplota pod peřinou, pokud jsou pod ní dva lidé místo jednoho? (řešení str. 28)

Úloha III.1 ... *tlačnice*

Organizátoři si z podzimního soustředění odvezli tlakovou nádobu s vodíkem a na vánoční besídce chtějí udělat pokus. Všechny plyn z ní vypustí do lehkého balonu – tj. bude mít atmosférický tlak. Dokáže takovýto balon uzvednout prázdnou tlakovou nádobu, když víte, že teplota zůstává konstantní? (řešení str. 30)

Úloha III.2 ... trainstopping

Honza jede domů vlakem rychlostí v_0 . Z poličky na zavazadla mu z batohu visí olovnice. Najednou vlak začne brzdit (zrychlením a po dobu t), protože na železniční přejezd před ním vjel neopatrný řidič. A Honzu napadne – mohla se olovnice s napnutým provázkem otočit o 180° ? Uvažte, že je olovnice pevně zavěšena na poličce.



Obr. 2. Honza ve vagónu

(řešení str. 31)

Úloha III.3 ... zachraňte hélium

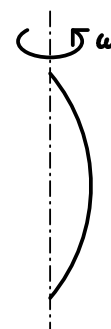
Na pouti v Dolním Dvoře mají novou atrakci, héliem plněné mýdlové bubliny, které se téměř nehybně vznášejí ve vzduchu. Co je těžší? Hélium v bublině, nebo její stěna?

(řešení str. 33)

Úloha III.4 ... vánoční řetěz

Jakub se o přednášce nudil, z batohu si vytáhl řetízek, chytil jej na dvou místech mezi prsty a začal s ním točit úhlovou rychlostí ω jako na obrázku. Marek to uviděl a zeptal se Jakuba, jaký tvar má rotující řetízek. Co mu Jakub odpověděl, když zanedbal vliv tíhového pole?

(řešení str. 35)

**Úloha III.P ... titanový život**

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, ledovým povrchem a uhlíkovými jezery. Radar na sondě Cassini obíhající Titan zjistil, že povrchové útvary rotují rychleji než měsíc sám (asi o $0,36^\circ \text{rok}^{-1}$). Vědecké zdůvodnění zní, že působením větru se mění rotace ledové vrstvy, která plave na podzemním oceánu. O rotaci měsíce se předpokládá, že je synchronizována s oběhem Titanu kolem Saturnu.

Další indicii podzemního oceánu poslala sonda Huygens, která po oddělení od Cassini přistála na povrchu Titanu. Během klesání atmosférou naměřila relativně silné radiové elektromagnetické vlny o frekvenci asi 36 Hz. K odrazu a zesílení radiových vln může dojít na vodivém prostředí, jako je právě rozhraní vody a ledu pod povrchem.

Poradte expertům NASA, jakými metodami by mohla současná nebo budoucí sonda k Titanu potvrdit nebo vyvrátit existenci podzemního oceánu.

(řešení str. 37)

Úloha IV.1 ... kyklopovo zrcadlo

Zkuste vypočítat, jaký tvar by mělo mít zrcadlo, tak, aby se v něm kyklopova hlava jevila jako čtverec. Kyklop má hlavu ve tvaru koule s okem uprostřed.

(řešení str. 40)

Úloha IV . 2 ... na tenkém ledě

Je známo, že led vystavený většímu tlaku snižuje svou teplotu tání. Funguje tento jev při bruslení (tedy je tlak brusle dostatečný, aby se led rozpustil i při nízkých teplotách)? Pokud ne, co jiného zaručuje hladký skluz?

(řešení str. 42)

Úloha IV . 3 ... vlček neboli káča

Inženýři v NASA chtějí využít setrvačnicků jako úložiště energie pro družice. Poradte jim, jakou maximální energii mohou uložit do rotujícího válce o poloměru r . Na jakou maximální úhlovou rychlost ω lze roztočit setrvačnick, než praskne?

(řešení str. 43)

Úloha IV . 4 ... šachovnice

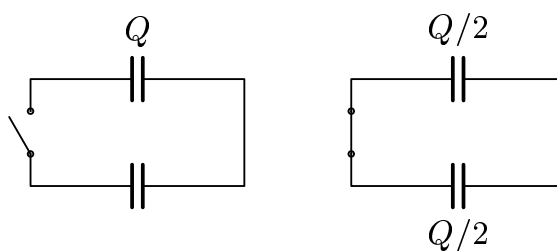
Jistě znáte pohádku o chytrákovi, který si udělal legraci z krále tím, že mu dal za úkol na políčka šachovnice vyskládat postupně 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{63} zrníček rýže po řádcích zleva doprava. Většinou se ale nedodává, že se chytrák velmi podivil, když král šachovnicový stolec nechal přinést. Vypočtete, kde byl vypořádán, aby zrníčka nespada. Zrníčka jsou hmotné body umístěné ve středu polí. (Přesněji řečeno nás zajímá poloha těžiště šachovnice s rýží.)

(řešení str. 46)

Úloha IV . P ... zachraňte fyziku

Rozpojený obvod na obrázku 25 obsahuje jeden nenabitý a jeden nabitý kondenzátor (náboj Q). Vodiče jsou ideální, nemají žádný odpor, oba kondenzátory jsou stejné. Celková energie nábojů v obvodu tedy je $Q^2/2C$. Pokud se po sepnutí vypínače náboje na kondenzátorech vyrovnají, celková energie bude $Q^2/8C + Q^2/8C = Q^2/4C$, což je polovina oproti počáteční situaci. Vysvětlete tento rozdíl. Kde se spotřebovala polovina energie? Vypínač je vyrobený tak šikovně, že v něm vysvětlení netkví.

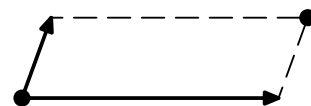
(řešení str. 47)



Obr. 3. Obvod s kondenzátory před a po sepnutí vypínače

Úloha V.1 ... otáčení koberce

Pomocí dvou různých vektorů v rovině můžeme opakovaným posouváním počátečního bodu dostat nekonečnou mříž bodů (viz obr. 4). (Stejným způsobem vznikne krystal, jen místo bodu posouváme skupinu atomů.) Posunutím celé mříže o jeden z vektorů dostaneme stejnou mříž, tj. každý bod bude nahrazen jiným bodem. Stejně tak se může stát, že otočením celé mříže kolem jednoho bodu o nějaký úhel dostaneme stejnou mříž. Najděte všechny úhly, pro které je to možné, a nakreslete, jak vypadají mřížky s touto rotační symetrií.



Obr. 4

(řešení str. 48)

Úloha V.2 ... bitva o Británii

K odhalování nalétávajících bombardérů se používají silné světlomety s úzkým paprskem světla. Jaká bude jeho odchylka od původního směru v závislosti na úhlu natočení zdroje po průchodu atmosférou? Uvažujte, že hodnota indexu lomu s výškou lineárně klesá.

(řešení str. 51)

Úloha V.3 ... zeměkoule

Jak rychle musela v době tuhnutí rotovat Země, aby se rovníkový poloměr lišil od polárního právě o tolik, o kolik se liší teď?

(řešení str. 52)

Úloha V.4 ... internetová

Mějme rovné optické vlákno. Světelný signál do něj vstupující může mít odchylku od přímého směru až α . Jak nejméně dlouhá musí být časová délka jednoho pulzu, aby šlo určit, zda byl vyslán bit 1, nebo 0, tj. aby aspoň krátký časový úsek byla síla signálu minimální nebo maximální. Délka vlákna je d .

(řešení str. 55)

Úloha V.P ... rámus

Pokuste se odhadnout, jakou energii přijme tělo návštěvníka rockového koncertu. Svůj odhad odůvodněte.

(řešení str. 56)

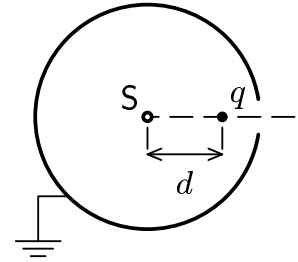
Úloha VI.1 ... odpor je marný

Vypočítejte odpor n -rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích $(0, 0, \dots, 0)$ a $(1, 1, \dots, 1)$). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

(řešení str. 57)

Úloha VI.2 ... útěk z koule

V uzemněné kouli z vodivého materiálu je vyvrtán malý otvor, tak akorát, že ním projde malá nabitá částice. Umístíme ji do vzdálenosti d od středu koule na spojnici jejího středu a otvoru (viz obrázek 5). Náboj pustíme. Jak daleko z koule vyletí ven? Zkuste využít metodu zrcadlového potenciálu. (řešení str. 60)



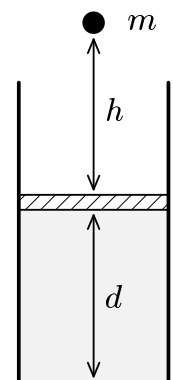
Obr. 5. Koule s částicí

Úloha VI.3 ... relativistická koule

Při pohybu rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla dochází ke kontrakci délek, ale zároveň se nám předmět zdá delší, než ve skutečnosti je (zkuste sledovat paprsky světla vyslané z bližšího a vzdálenějšího konce tělesa). Vypočítejte, jestli se u relativistické koule tyto efekty nevyruší. (řešení str. 61)

Úloha VI.4 ... kámen na pístu

Marek má píst o rozměru S s ideálním plynem v rovnovážném stavu (p , V a T). Na tento píst z výšky h pustí kámen o hmotnosti m (viz obr. 6). Píst se stlačí a opět vrátí do nějaké polohy zpět. Jak závisí tato poloha na hmotnosti kamene a výšce, ze které byl upuštěn? Je možné, že se píst ustálí ve vyšší poloze než byl prve? Jak se změní teplota plynu v pístu? (řešení str. 64)

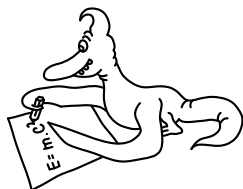


Obr. 6. Píst před dopadem kamene

Úloha VI.P ... lidští ptáci

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, s ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Průměr Titanu je 5150 km, hmotnost je 1/45 hmotnosti Země, tloušťka jeho atmosféry je 200 km a tlak na jeho povrchu je 1,5 atmosféry.

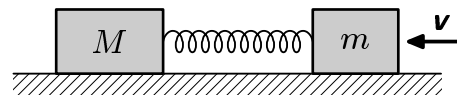
Na základě předložených údajů určete gravitační zrychlení na povrchu a odhadněte hustotu atmosféry. Srovnáním s parametry ptáků v pozemských podmínkách rozhodněte, zda by opeřený člověk mohl na Titanu létat. (řešení str. 66)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... klouzání a kmitání

Dvě závaží o hmotnostech m a M jsou spojena pružinou o tuhosti k a leží na hladké podložce (tření můžeme zanedbat). Tělesu m udělíme rychlost v (viz obrázek 7). Jaká bude nejkratší vzdálenost mezi tělesy a kdy jí dosáhnou?



Obr. 7

Protože na soustavu nepůsobí žádné vnější síly, bude se její hmotný střed pohybovat konstantní rychlostí a soustava s ním spojená je tedy inerciální. A protože v tomto vztažném systému kmitá soustava na místě, budeme problém řešit právě v ní.

Hmotný střed se pohybuje takovou rychlostí v' , že

$$(m + M)v' = mv, \quad v' = \frac{mv}{m + M}.$$

V této nové vztažné soustavě budou rychlosti obou těles

$$v'_m = v - v' = \frac{Mv}{m + M} \quad \text{a} \quad v'_M = v' = \frac{mv}{m + M}.$$

V okamžiku udělení rychlosti menšímu tělesu je potenciální energie soustavy nulová a kinetická maximální. V okamžiku, kdy budou k sobě tělesa nejbliže, bude naopak kinetická energie nulová a potenciální maximální.

Pro kinetickou energii soustavy na začátku máme

$$E_k = \frac{1}{2}mv'_m{}^2 + \frac{1}{2}Mv'_M{}^2 = \frac{1}{2}\frac{mMv^2}{m + M}.$$

Pokud je y_0 klidová délka pružiny a y_{\min} hledaná minimální, potom ze zachování energie plyne

$$E_k = \frac{1}{2}k(y_0 - y_{\min})^2,$$

$$y_{\min} = y_0 - v\sqrt{\frac{mM}{k(m + M)}} = y_0 - v\sqrt{\frac{\mu}{k}},$$

kde $\mu = mM/(m + M)$ je tzv. redukovaná hmotnost. Ta nám umožní řešit druhou část úlohy jako problém jednoho tělesa.

Označme polohy hmotných středů obou těles v těžiškové soustavě x_m a x_M . Tedy $m x_m = M x_M$. Síla působící na těleso je úměrná protažení pružiny $F = k(x_m + x_M)$. Z druhého Newtonova zákona máme

$$m \ddot{x}_m = -k(x_m + x_M) = -k x_m \left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

$$\mu \ddot{x}_m = -k x_m,$$

což je rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru. Námi hledaný čas je zřejmě čtvrtina periody jeho kmitu, tedy

$$t = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}.$$

Úloha 1.2 ... pirát a zlatá odměna

Jeden pirát má za odměnu dostat pytel zlaťáků. Ale kapitán lodi je lakomý a chce mu to zkomplikovat. Přetavili zlato do válce. A k tomu ještě odlili druhý, velikostně stejný válec z mosazi. Protože uprostřed zlatého je vzduch, váží oba stejně a jsou stejně velké. Jak si má dotyčný pirát vybrat, aby pak nelitoval?

Pirát dostal své dva válce na lodi, kde nemá žádné přístroje, jinak by mohl zkusit válce rozříznout a zjistit, který je dutý, nebo je zkusit roztavit v peci. Tedy stojí před dvěma válci s holýma rukama a na první pohled nevidí, který by mohl být ten zlatý. Proberme postupně, jaké má možnosti.

Dále pirát může srovnávat měrné tepelné kapacity obou kovů (pro zlato je dle tabulek $0,129 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a pro mosaz $0,38 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Zkusí nechat válce stát na sluníčku a může si všimnout, že ten zlatý se zahřeje rychleji (a tedy více) než ten mosazný.

Druhá možnost využívá různé tvrdosti materiálů (podle Mohsovy stupnice tvrdosti má zlato tvrdost 2,5 a mosaz mezi 3,5 a 4). Může použít nějaký materiál, který se nachází mezi těmito dvěma, jako třeba měď. Nicméně do zlatého válce půjde dokonce rýpat nehty. (Pokud ovšem nejsou oba válce např. galvanicky pokoveny.)

Třetí způsob odlišení obou kovů spočívá v rozdílném momentu setrvačnosti válců. Budeme předpokládat, že vzduchová bublina ve zlatém válci má rovněž tvar válce. Dutý válec má pak nutně větší moment setrvačnosti nežli ten plný. Tedy zlatý válec získá menší rychlost při puštění z nakloněné roviny nežli mosazný.

Zná-li pirát základy chemie, může použít nějakou chemikálii, která reaguje jinak se zlatem a jinak s mosazí. Příkladem takové budiž kyselina chlorovodíková HCl, která se zlatem vůbec nereaguje.

Po vyzkoušení všech těchto metod by jako správný pirát-fyzik již jistě věděl, který z válců (pokud by měl ještě oba) je zlatý a který mosazný.

Úloha I.3 ... už mě nehoupej

Kačenka se rozhoupává na houpačce následujícím způsobem. Při největší výchylce houpačky se přikrčí, a když je houpačka v nejnižším bodě, opět se postaví. Tyto pohyby neustále opakuje. Poměr vzdálenosti těžiště Kačenky od osy otáčení při pokrčení a při stání je $\sqrt[3]{2} \doteq 1,06$. Kolikrát se Kačenka zhoupne, než se amplituda houpání zdvojnásobí?

Jak se bude Kačenka pohybovat? Ze zadání víme, že Kačenka začíná svůj pohyb v nejvyšší poloze, kde se přikrčí. Zhoupne se, v dolní úvratí se postaví a vychýlí se do nové, snad vyšší polohy. Nyní by bylo užitečné si uvědomit, co se zachovává v různých částech trajektorie.

Kačenku budeme považovat za hmotný bod ve vzdálenosti r od osy otáčení o . Při cestě Kačenky z nejvyšší polohy (tj. z bodu A do bodu B) se jistě bude zachovávat energie, jelikož se Kačka ani nezvedá ani si nesedá. Označíme-li úhel původního vychýlení Kačky od svislé roviny ϑ_1 , můžeme napsat zákon zachování energie ve tvaru

$$mgr(1 - \cos \vartheta_1) = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

odkud můžeme vyjádřit v_1 jako

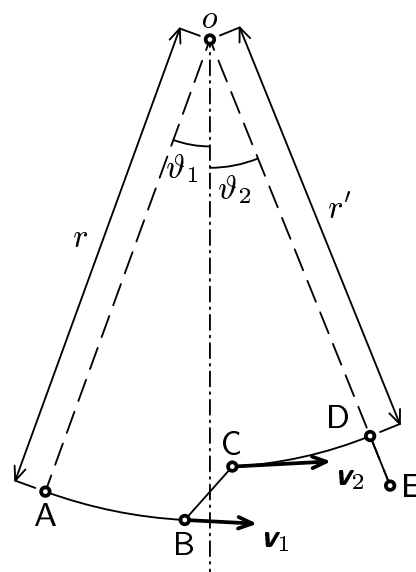
$$v_1 = \sqrt{2gr(1 - \cos \vartheta_1)}. \quad (1)$$

V dolní úvratí (mezi body B a C) ale již není možno použít zákon zachování energie, resp. bylo by to možné, ale musela by se započítat také práce vykonaná proti odstředivé síle. Naopak veškeré síly, kterými Kačka působí na houpačku, a taktéž i síly tíhové mají nyní nulový moment vzhledem k ose otáčení, proto platí zákon zachování momentu hybnosti. Můžeme tedy psát

$$v_1 r = v_2 r'. \quad (2)$$

Ve vzestupné části trajektorie (mezi C a D) Kačka nekoná žádnou práci, a proto bude platit analogicky k sestupné části

$$v_2 = \sqrt{2gr'(1 - \cos \vartheta_2)}, \quad (3)$$



Obr. 8. Kačenčino houpání

a tak se Kačka odchýlí o úhel ϑ_2 . V krajní poloze (cesta z bodu D do E) se nemůže měnit výchylka, protože Kačka silově působí v ose závěsu.

Pokud se nám podaří nalézt vztah pro změnu výchylky během jednoho kyvu, neměl by být problém zjistit, po kolika zhoupnutích se zdvojnásobí počáteční výchylka. Dosazením z (1) a (3) do (2) dostáváme

$$\sqrt{2gr(1 - \cos \vartheta_1)} \cdot r = \sqrt{2gr'(1 - \cos \vartheta_2)} \cdot r'.$$

Nyní provedeme aproximaci $\cos x \approx 1 - x^2/2$, budeme tedy uvažovat menší výchylky. Aproximace je oprávněná, protože pro výchylku 45° je chyba menší než 5 %.

Jednoduchou úpravou se dostáváme k rovnici

$$\vartheta_2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^{3/2} \vartheta_1.$$

My však víme, že $r/r' = \sqrt[12]{2}$, po dosazení vychází vztah

$$\vartheta_2 = \sqrt[8]{2} \vartheta_1,$$

a protože jde o geometrickou řadu, víme, že se po osmi zdvizích v dolní úvrati výchylka zdvojnásobí.

Kačenka tedy zdvojnásobí svou maximální výchylku po čtyřech periodách.

Úloha 1.4 ... praktická motoristická

Na nepřehledných křižovatkách či v ostrých zatáčkách někdy bývá vypuklé zrcadlo. Snadno si všimneme, že zrcadlo zkresluje jak vzdálenost, tak i rychlost přijíždějících aut. Naši vzdálenost od zrcadla označíme d , vzdálenost přijíždějícího auta od zrcadla L , jeho skutečnou rychlost v a poloměr křivosti zrcadla R . Na základě toho, co vidíme v zrcadle, určete, jak daleko se nám přijíždějící auto jeví? Jakou zdánlivou rychlostí se přibližuje? A jak se liší skutečná doba, za kterou přijíždějící auto vjede do křižovatký, od doby, kterou odhadneme z jeho zdánlivé vzdálenosti a zdánlivé rychlosti? Zvolte si rozumné hodnoty parametrů a rozhodněte, zda může být tento rozdíl dob nebezpečný.

Pro začátek je důležité objasnit si, co je vlastně ona „zdánlivá vzdálenost“. Lidské oko je schopno rozlišit úhel, pod kterým dva různé body vidí. Máme-li představu o tom, jak je určitý předmět velký, jsme schopni odhadnout vzdálenost právě v závislosti na úhlu, pod kterým předmět vidíme. Mějme třeba nějakou tyč o délce l , na niž se díváme kolmo, a vidíme její konce pod úhlem δ . Její vzdálenost a pak určíme jako $a = 2l / \text{tg}(\delta/2)$. Užívající aproximace $\text{tg} x \approx \sin x \approx x$ (předpokládáme, že se jedná o malý úhel), dostáváme

$$a = \frac{l}{\delta}.$$

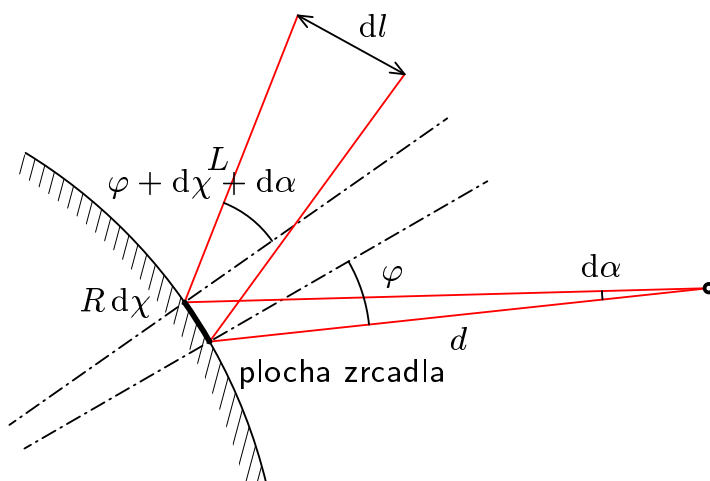
Budeme hledat řešení pro malé předměty, abychom mohli užívat uvedené aproximace $\sin x \approx x$ a zanedbat některá zkreslení obrazu v zrcadle, jež se pro větší objekty objeví a jež by mohla naše počty výrazně zkomplikovat.

Nyní bychom mohli zkoumat, pod jakým úhlem bude v určité vzdálenosti od zrcadla daný předmět vidět, hledáním takových paprsků, jež vycházejí z krajních bodů předmětu, odráží se od zrcadla a sbíhají se v místě pozorovatele. Takovýto

přístup by však byl asi vcelku složitý a pracný. Podívejme se tedy na problém z druhého konce.

Mějme pozorovatele ve vzdálenosti d od zrcadla. Z tohoto bodu vypustíme pod velmi malým úhlem $d\alpha$ dva paprsky, jež dopadnou na určité místo na ploše zrcadla. Pak vyšetříme, jak se rozbíhají paprsky ve vzdálenosti L od zrcadla (tam, kde se nachází předmět), rozteč paprsků v tomto místě bude skutečnou velikostí předmětu. Je zřejmé, že tento přístup by měl dát stejný výsledek jako přístup opačný (poněvadž paprsky se odrážejí v obou směrech stejně).

Nechť tedy dopadá paprsek na zrcadlo a svírá s kolmicí roviny tečné k zrcadlu úhel φ . Druhý paprsek dopadá pod úhlem o $d\alpha$ větším, ale díky zakřivení zrcadla je tečná rovina zrcadla též pootočená o úhel $d\chi$. Druhý paprsek bude tudíž od prvního odchýlen navíc ještě o úhel $2d\chi$. (Dopadá-li paprsek na rovinné zrcadlo a zrcadlo pootočíme, odražený paprsek se vychýlí oproti původnímu odraženému paprsku o dvojnásobek úhlu pootočení zrcadla. Kdo nevěří, sám jistě ověří. Vyplývá to ze zákona odrazu.)



Obr. 9. Schéma situace

Pootočení imaginárního tečného rovinného zrcadla $d\chi$ určíme ze sinové věty. Oblouk o délce $Rd\chi$, na zrcadle ohraničený body odrazu paprsků, lze považovat za úsečku za předpokladu, že $d\chi$ je dostatečně malý. Tato úsečka pak spolu se dvěma paprsky scházejícími se v bodě pozorovatele tvoří trojúhelník; jelikož jsou úhly $d\chi$ a $d\alpha$ vůči úhlu φ zanedbatelné, dostáváme vztah

$$\frac{Rd\chi}{\sin d\alpha} = \frac{d}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)},$$

z čehož po jednoduchých úpravách a s užitím $\sin d\alpha = d\alpha$ dostáváme hledané pootočení

$$d\chi = \frac{d}{R \cos \varphi} d\alpha.$$

Nyní již lze poměrně snadno určit rozteč paprsků v oblasti příjíždějícího předmětu. Při dopadu na zrcadlo mají paprsky rozteč $d \cdot d\alpha$, tato rozteč se těsně po dopadu zachovává. Po dopadu se však úhel rozbíhání paprsků změní z $d\alpha$ na $d\alpha + 2d\chi$, tudíž rozteč paprsků dl (neboli skutečná velikost předmětu) v místě předmětu vzdáleného L od místa odrazu na zrcadle bude

$$dl = d d\alpha + L (d\alpha + 2d\chi) = d\alpha \left(d + L + \frac{2Ld}{R \cos \varphi} \right).$$

Zdánlivou vzdálenost, jak jsme ji na počátku zavedli (zde ji označme třeba z), určíme jako

$$z_{\parallel} = \frac{dl}{d\alpha} = d + L + \frac{2Ld}{R \cos \varphi}.$$

Nyní však ještě hotovi nejsme – všimněme si, že doposud jsme uvažovali pouze zvětšení v „radiálním“ směru, tj. paprsek jsme vychylovali pouze v rovině určené pozorovatelem, předmětem a středem křivosti zrcadla. Jelikož se však obraz promítá na naši sítnici (a na zrcadlo) dvourozměrně, je třeba ještě vyšetřit, jak se mění obraz ve směru kolmém.

Postupujme tedy podobně jako doposud – z místa pozorovatele vyšleme dva paprsky pod velmi malým úhlem $d\beta$, ovšem v „tečném“ směru – rovina daná těmito paprsky je kolmá na rovinu procházející středem křivosti zrcadla. Paprsky nechtě opět svírají s kolmicí zrcadlové plochy, na niž dopadají, nějaký úhel φ . Ty vytínají na zrcadle oblouček o délce $d d\beta$ – v tomto případě totiž dopadají na zrcadlo kolmo, resp. pod velmi malým úhlem $d\beta$, pohybujeme-li se pouze v rovině, v níž oba dopadající paprsky leží. Jelikož poloměr křivosti zrcadlové plochy je R , poloměr křivosti řezu plochy touto rovinou je $R \cos \varphi$. Pro délku oblouku tedy platí rovnost

$$d d\beta = R \cos \varphi d\psi,$$

kde $d\psi$ zde značí pootočení řezu zrcadlové plochy mezi body dopadu obou paprsků.

Analogicky k výše uvedenému postupu dostáváme úhel, pod nímž vylétávají odražené paprsky $d\beta + 2 d\psi$, pro rozteč dm paprsků ve vzdálenosti $L \cos \varphi$ (což je vzdálenost předmětu v promítání na rovinu dopadajících paprsků) dostáváme

$$dm = d d\beta + \left(d\beta + 2 \frac{d d\beta}{R \cos \varphi} \right) L \cos \varphi.$$

Již nyní je vidět, že v každém směru zrcadlo „zmenšuje jinak“; kdybychom se řídili podle tohoto zdánlivého „radiálního“ rozměru, pro zdánlivou vzdálenost dostáváme

$$z_{\perp} = \frac{dm}{d\beta} = d + L \left(\cos \varphi + \frac{2d}{R} \right).$$

Řekněme tedy, že si pozorovatel vybere pro posuzování vzdálenosti jeden z rozměrů, například ten rovnoběžný s rovinou danou jím, středem zrcadla a předmětem. Pokud se automobil pohybuje přímo k zrcadlu stálou rychlostí $v = dL/dt$, zdánlivá rychlost je¹

$$v' = \frac{\partial z}{\partial L} v = \left(1 + \frac{2d}{R \cos \varphi} \right) v.$$

Je zjevné, že čas, který přijíždějící automobil bude potřebovat, aby dojel k zrcadlu (tj. L/v), bude stejný jako čas téhož odhadnutý z obrazu v zrcadle, poněvadž zvětšení obrazu je v případě $\varphi = \text{konst.}$ taktéž konstantní.

¹⁾ Výraz $\partial z/\partial L$ je tzv. *parciální derivace*, což znamená, že funkci $z(L, \varphi)$ derivujeme pouze dle proměnné L ; φ přitom považujeme za konstantu.

Ke zkreslení časového odhadu by mohlo dojít, kdyby se přijíždějící automobil nacházel již poměrně blízko – bylo by třeba počítat i se změnou úhlu φ , neboť ve skutečnosti by nejel automobil přímo k zrcadlu, ale o určitou vzdálenost by jej míjel. Pokud tedy automobil není zřejmě hodně daleko, není rozumné vstupovat mu bezhlavě do cesty.

Úloha I. P ... Mikuláš vs. Klaudius

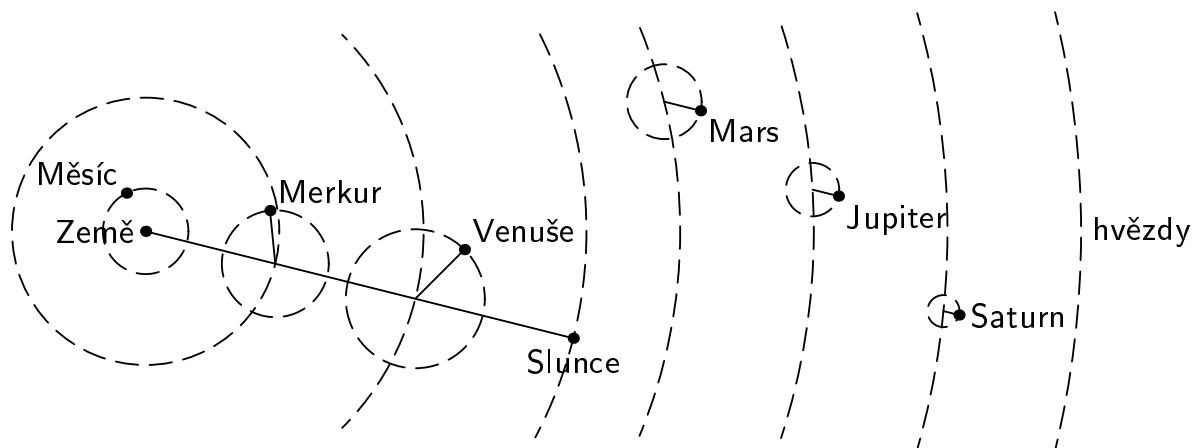
Rok 2009 je vyhlášen jako Mezinárodní rok astronomie a připomíná 400 let používání dalekohledů lidstvem. Vraťme se o čtyři staletí zpět, kdy byl dalekohled již k dispozici, ale klasická fyzika ještě v plenkách. V otázce uspořádání světa spolu soupeřily Koperníkův heliocentrický názor a Ptolemaiovův geocentrický systém. Navrhněte experiment, resp. pozorování, které mezi oběma představami dokáže rozhodnout. Dostatečně okomentujte, jaký výsledek lze očekávat a co z něj plyne v prospěch či nepospěch uvažovaných uspořádání. Vlastní pozorování není nutné, i když vhodné. Navíc vysvětlete, proč jsou v geocentrickém modelu Slunce a Země spojeny úsečkou?

Klaudios Ptolemaios ve svých pracích o astronomii navrhl jednoduchý a z jeho pohledu funkční geocentrický model uspořádání nebeských těles. Vzhledem k tomu, že neměl k dispozici dalekohled, musel se spolehnout na to, co vidí očima, a na svojí intuici. Model, který navrhl, odpovídal veškerým tehdejším pozorováním. Uvedme tedy hlavní důvody hovořící ve prospěch geocentrického modelu:

- a) necítíme žádný pohyb Země, žádné cukání, Země je v klidu,
- b) vše padá na Zemi, resp. podle Aristotelova učení do středu světa, kde se Země již dlouho nachází,
- c) hvězdy se na nočním nebi jeví býti stálými,
- d) Venuše vypadala na nočním nebi přibližně stejně jasná, je tedy přibližně stejně daleko.

Ptolemaios dal tyto úvahy dohromady a vyslovil dva předpoklady. První, že všechna nebeská tělesa se pohybují po kružnici, a druhý, že ve společném středu takových kružnic je Země.

Bohužel jakkoliv je tento model elegantní, bylo třeba jej neuvěřitelným způsobem zpřesňovat. Velké kružnice, po kterých měly planety obíhat, byly nazvány deferenty. Po deferentech se pohybovaly středy malých kružnic, epicyklů, po kterých planety měly obíhat „ve skutečnosti“. Epicykly se zavedly hlavně pro vysvětlení nepravidelností v pohybu planet po nebeské sféře, jako je retrográdní pohyb ve smyčkách „tam a zpět“ po obloze, nicméně zde geocentrický model začal pokulhávat. Chybělo fyzikální vysvětlení pohybu planet.



Obr. 10. Představa geocentrického systému

Mikuláš Koperník přišel s jednoduchou myšlenkou, která by se zbavila nepříjemné spojnice Země–Slunce, a dále s tím, že Země je jednou z planet obíhajících Slunce. Když vzal v úvahu své výpočty, vyšlo mu, že není možné, aby fungoval jiný než heliocentrický model sluneční soustavy. Vyplýval z něj i retrográdní pohyb a zdánlivý pohyb hvězd vůči stálícím, dnes nazvaný paralaxa. Mimo jiné došel k závěru, že planety, které jsou ke Slunci blíže než Země, musí nutně jevit fáze. A jak je možné, že je Venuše neustále přibližně stejně jasná? Změny ve vzdálenosti, a tedy i jasnosti jsou kompenzovány právě zmíněnými fázemi a změnami zdánlivého průměru kotoučku planety.

Zmíněné důsledky heliocentrického modelu tedy musí být experimentálně pozorovatelné.

Fáze Venuše

K pozorování fází Venuše byl třeba dalekohled. Prvním, kdo fáze pozoroval, byl Galileo Galilei v roce 1610. Co můžeme z fází Venuše vyčíst? Nov pozorujeme, když Venuše prochází mezi Zemí a Sluncem, úplněk nastane, když je schovaná za Sluncem, a poloviční fáze nastanou ve chvíli, kdy je od Slunce na obloze nejvíce vzdálená, tedy je v největší elongaci (východní nebo západní).

Nakreslete a rozmyslete si, že v Ptolemaiově systému nikdy nemůže nastat úplněk či jiná fáze, kdy je Venuše osvětlena více jak z poloviny! Tyto fáze však Galilei pozoroval a došel k závěru, že geocentrický systém nemůže být správný.

Galileo sám si uvědomil význam svého pozorování fází Venuše včetně všech důsledků (vztažených k jeho době). Také proto oznámil tento objev jiným vzdělaněcům raději zašifrovaně – ve formě tzv. anagramu, tedy přesmyčky:

Haec immatura a me iam frustra leguntur – oy,

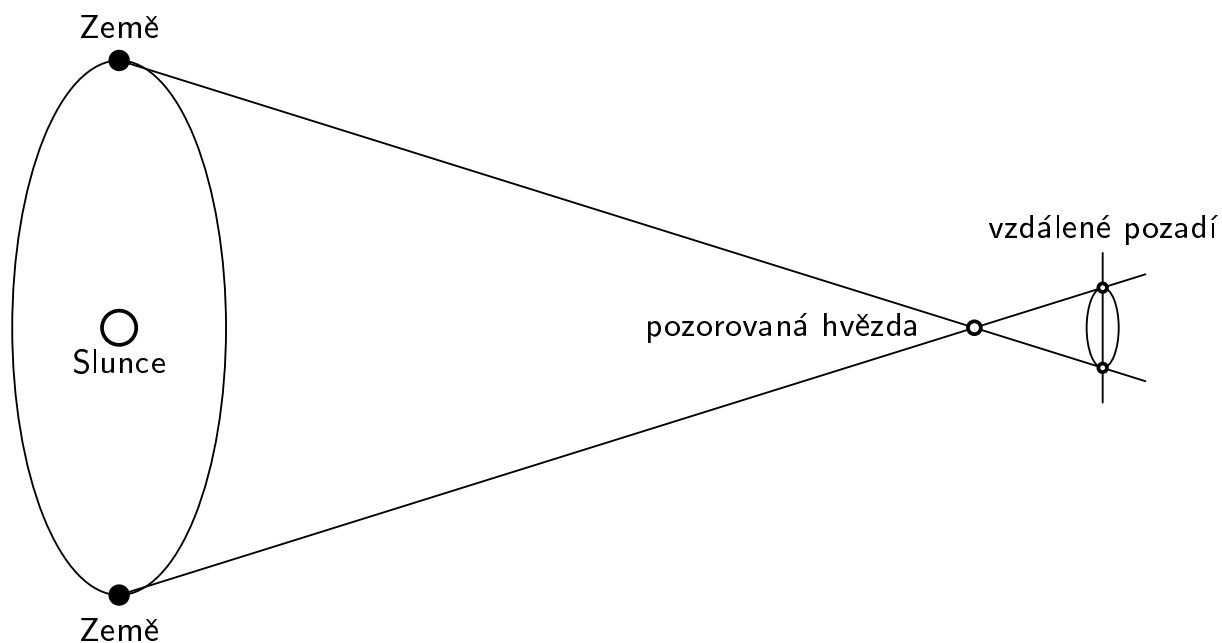
tedy doslova „Aj, toto nezralé ode mě již marně bylo čteno“, tzn. volně přeloženo např. „Toto jsem již zkusil, a to rychle bez rozmyšlení, tedy bez výsledku – ach“. Kepler brzy požádal Galilea o vysvětlení a ten odpověděl, že po správném přeskupení písmen dostaneme:

Cynthiae figuras aemulatur mater amorum,

což lze přeložit (čteno odzadu) „Matka lásek emuluje tvary Cynthie“ (tj. bohyně Měsíce ve starém Řecku), tedy „Venuše napodobuje fáze Měsíce“, odkud už jasně plynulo, že planeta Venuše musí obíhat kolem Slunce.

Paralaxa

Paralaxa je definována jakožto úhel svíraný dvěma přímkami vedenými z dvou různých míst v prostoru k jednomu pozorovanému bodu. Můžeme tedy říct, že jde o zdánlivý rozdíl polohy onoho bodu při pozorování ze dvou různých míst v prostoru. Čím je pak pozorovaný bod dál, tím je paralaxa menší a to byl také kámen úrazu pro brzká pozorování nebeské sféry. Paralaxa hvězd je totiž tak malá, že ji astronomové nebyli schopni zaznamenat až do devatenáctého století. Z geometrického pohledu na heliocentrický systém je existence paralaxy jasná, stejně jako je jasné, že se vzhledem k velkým vzdálenostem musí jako základna pro trojúhelník vzít průměr oběžné dráhy Země (roční paralaxa). První měření paralaxy uskutečnil v roce 1837 Wilhelm Struve. Ten určil paralaxu Vegy (α Lyr), $0,125''$ s chybou $0,055''$ (což se mu zdálo moc, a tak svým měřením nevěřil). Několik málo let po něm uskutečnili podobná měření i Friedrich Bessel (s objektem 61 Cyg) a Thomas Henderson, který shodou náhod změřil největší možnou pozorovatelnou paralaxu, tedy paralaxu naší druhé nejbližší hvězdy, Proxima Centauri. Sice mluvíme o největší paralaxě, nicméně její hodnota je $0,741''$. To skutečně nikdo z renesančních astronomů pozorovat nemohl.



Obr. 11. Paralaxa

Aberace

Aberace byla objevena jaksí náhodou v roce 1725 Jamesem Bradleyem při hledání paralaxy. Spíše než o geometrický důsledek se jedná o důsledek konečné rychlosti světla a pohybu Země kolem Slunce, což astronomové, resp. geometři předvídat nemohli. Stejně jako paralaxa způsobuje zdánlivý pohyb hvězd, ale vzhledem k rychlosti pohybu Země (asi 30 km/s) a konečné rychlosti světla maximální abe-

race je $20,4955''$. A to je rozhodně lépe měřitelné než paralaxa. Díky důkazu, že Země se okolo Slunce pohybuje, můžeme mluvit o dalším z důkazů heliocentrismu.

A nakonec spojnice Země–Slunce, na níž leží středy epicyklů Merkuru a Venuse, byla nutná jako jakási korekce pozorování. Už Ptolemaios si totiž všiml, že obě zmíněné planety se ukazují vždy blízko Slunce, od něhož se nemohou vzdálit více, než je jistý maximální úhel, tzv. maximální elongace pro danou planetu. (Jsou tedy pozorovatelné jenom ráno jako jitřenky nebo večer jako večernice.)

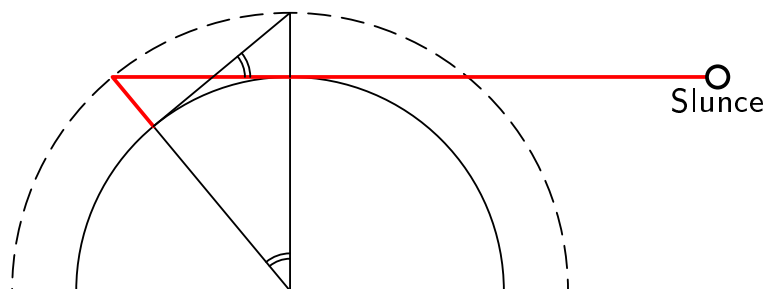
Úloha II.1 ... duhová energie

Zkuste se zamyslet a posléze vypočítat, kde a kdy na Zemi nelze vidět duhu?

Duha vzniká rozkladem a odrazem světla v kapce, paprsek vychází (při jednom odrazu) pod úhlem 42° .

Budeme-li se zabývat pouze primární duhou, potom Slunce nesmí být výše než 42° nad obzorem, protože jinak by paprsky mířily zpátky do vesmíru.

Abychom zodpověděli, jak hluboko může být Slunce pod obzorem, musíme zjistit, jak tlustá je atmosféra, resp. jak vysoko je vrstva, v které se kapky, v nichž duha vzniká, vyskytují. Mraky se vyskytují (na rovníku) do výšky 18 km, což je 0,3 % poloměru Země. Z toho vypočteme (podobnost trojúhelníku, viz. obrázek), že Slunce může být nejvýše $4,32^\circ$ pod obzorem.



Obr. 12. Krajní případ pro Slunce pod obzorem

Také musí být v příslušném místě oblohy nějaké kapičky vody, ve kterých by se mohly paprsky odrážet (kapičky ale nemusí dopadat až na zem ani nemusí přšet v místech, kde stojíme my).

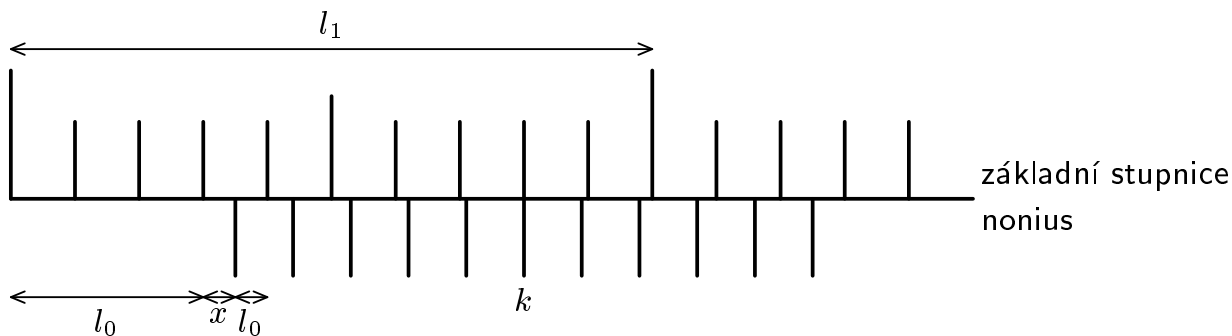
Dále by slunečnímu paprsku neměla stát v cestě žádná překážka nebo by měl být paprsek natolik koncentrovaný, aby bylo lidské oko schopno ten rozdíl zaznamenat.

Situace se samozřejmě změní, pokud se budeme zabývat vícenásobnými odrazy, kulovými duhami, které naopak vznikají, pokud je slunce dostatečně vysoko, a dalšími specialitami.

Úloha II.2 ... odhalte tajemství „šuplery“

Vysvětlete nám, jak funguje „šuplera“, že dokáže měřit desetiny milimetru.

Prvním naším úkolem (ačkoliv nezamýšleným) bude zjistit, co to je šuplera. Toto slovo vzniklo počestvením německého Schublehre (Schub – postrčení, zasunutí, šoupnutí; lehren – měřit). A neříká se tak ničemu jinému než posuvnému měřítku.



Obr. 13. Schéma šuplery

Šuplera se skládá ze dvou navzájem posuvných částí se stupnicemi. Základní stupnice je dělená tak, jak jsme zvyklí – na centimetry a milimetry. Pomocí ní odečítáme rozměry měřeného tělesa s přesností na celé milimetry. Dále je na šupleře posuvná část s druhou stupnicí – tzv. nonius. Jeho dílky ovšem nejsou široké milimetr, ale o něco užší. A v tomto je právě skrytý celý trik. Představme si, že měříme vzorek o jisté tloušťce l . Na základní stupnici odečteme tloušťku vzorku v celých milimetrech l_0 . Do celkové tloušťky nám ještě chybí desetinná část, kterou označíme x . Mějme dílky nonia v rozestupech d a ať se k -tý dílek nonia kryje s celým milimetrem základní stupnice ve vzdálenosti l_1 od počátku. Je jasné, že vzdálenost l_1 se dostane jako součet tloušťky vzorku a délky na noniu.

$$l_1 = l_0 + x + kd.$$

Víme, že l_1 a stejně tak l_0 jsou v celých milimetrech, z toho vyplývá, že i jejich rozdíl $x + kd$ je nutně v celých milimetrech. Vzdálenost d je pro posuvné měřítko obvykle 0,9 mm. Abychom splnili, že součet $x + 0,9k$ je nejbližší možný celý milimetr, musí být $x = 0,1k$ mm. Jinými slovy dílky nonia přímo odměřují vzdálenost v desetínách milimetru.

Posuvná měřítka se vyrábějí i s rozestupy dílků nonia po 0,95 mm a vzácně i po 0,98 mm. Taková posuvná měřítka pak měří s přesností na dvacetinu popřípadě padesátinu milimetru. Pro zachování pohodlnosti odčítání desetinné části měřené vzdálenosti se pak odpovídajícím způsobem musí upravit škálování nonia. Desetině milimetru odpovídají dva, respektive pět dílků stupnice nonia.

Úloha byla velmi jednoduchá a většina řešitelů odhalila skutečnou podstatu fungování šuplery. Přesto nám přišlo několik řešení, ve kterých bylo jen popsáno, jak se s posuvným měřidlem pracuje, bez vysvětlení jeho zázračné přesnosti.

Úloha II.3 ... *ledvinové koule*

Malá koule stojí v klidu na velké kouli, která volně leží na podložce. Do malé koule nepatrně strčíme a ta se svalí na zem. Jak daleko od původního bodu dotyku velké koule se zemí malá koule dopadne?

Budeme předpokládat, že koule po sobě i po podložce kloužou bez tření, a tedy se nekutálí². Protože všechny vnější síly (tíhová a reakční síla podložky) působí pouze ve svislém směru, splňuje tento systém zákon zachování hybnosti ve vodorovném směru³, který lze po dobu, kdy se koule dotýkají, formulovat jako

$$Mv + m(v + (r + R)\omega \cos \varphi) = \text{konst},$$

kde rychlost spodní koule (orientovanou doprava) jsme označili v a úhlovou rychlost oběhu horní okolo spodní ω . Dosadíme počáteční podmínky (na začátku byly všechny rychlosti nulové) a zjistíme, že konstanta je rovná nule. Tedy

$$v = -\frac{m}{m + M}(r + R)\omega \cos \varphi. \quad (4)$$

Dále se jistě zachovává celková mechanická energie. Dokud se koule dotýkají, je celková potenciální energie rovna

$$V = mg(r + R)\cos \varphi$$

a kinetická

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}m((v + (r + R)\omega \cos \varphi)^2 + ((r + R)\omega \sin \varphi)^2).$$

Velikost zachovávanající se energie určíme opět z počátečních podmínek jako $mg(r + R)$. Proto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + m(r + R)v\omega \cos \varphi + \\ + \frac{1}{2}m(r + R)^2\omega^2 + mg(r + R)\cos \varphi - mg(r + R) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Soustavou diferenciálních rovnic (4) a (5) je kompletně popsán vývoj systému až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí. My ji naštěstí nemusíme vyřešit, protože nám stačí zjistit úhel φ_0 v tomto okamžiku. Mohli bychom obě rovnice zderivovat v čase, vyřešit vzniklou soustavu čtyř rovnic pro pět neznámých φ , \dot{x} , $\dot{\varphi}$, \ddot{x} , $\ddot{\varphi}$, z nichž bychom ale \ddot{x} položili rovnou nule (viz dále)⁴. To se nám ovšem nechce, a tak se místo toho trochu zamyslíme.

²) Takový systém má i svůj název. Až do okamžiku, kdy se koule od sebe odlepí, se mu říká *eliptické kyvadlo* (tušíte správně, trajektorie horní koule bude částí elipsy).

³) To by nebyla pravda, kdyby se spodní koule po podložce namísto klouzání kutálela, protože reakční síla podložky by jakožto vnější síla působila na systém i ve vodorovném směru, což si většina z vás, kdo jste uvažovali tření, neuvědomila.

⁴) Všimněme si, že máme štěstí, protože v rovnicích nevystupuje přímo x (což vyjadřuje translační symetrii systému ve vodorovném směru).

Na horní kouli působí tíhová síla (směrem dolů) a reakce spodní koule, která tíhovou doplní vždy takovým způsobem, aby výsledné zrychlení horní koule odpovídalo pohybu po (taktéž zrychlujícím) povrchu spodní koule. Koule se odlepí v okamžiku, kdy reakční síla spodní koule přestává mít směr od spodní koule a měla by začínat mít opačný směr (ale nebude, protože tato vazba má pouze odpuzivý charakter) – to je okamžik, kdy je tato reakční síla nulová. V tuto chvíli již tedy na spodní kouli žádná síla nepůsobí⁵ a zrychlení horní koule (jež je nyní důsledkem pouze tíhové síly) proto musí (aby na spodní nepůsobila) odpovídat kruhovému pohybu okolo spodní, neboli složka tíhového zrychlení ve směru do středu spodní koule musí být rovna $(r + R)\omega_0^2$. Tudíž

$$(r + R)\omega_0^2 = g \cos \varphi_0, \quad (6)$$

kde symbolem ω_0 jsme označili hodnotu ω v okamžiku odlepení.

Teď už zbývá jenom vyřešit soustavu (4), (5), (6) pro φ_0 . Do (4) umocněné na druhou, resp. vynásobené ω dosadíme za ω^2 z (6), abychom konečně dosazením za $v\omega$ a v^2 do (5) sestavili rovnici pro φ_0 , která se po vydělení nenulovým $mg(r + R)/2$ redukuje na jednoduchý tvar

$$-\mu^2 \cos^3 \varphi_0 + 3 \cos \varphi_0 - 2 = 0, \quad (7)$$

kde

$$\mu = \sqrt{\frac{m}{m + M}} < 1.$$

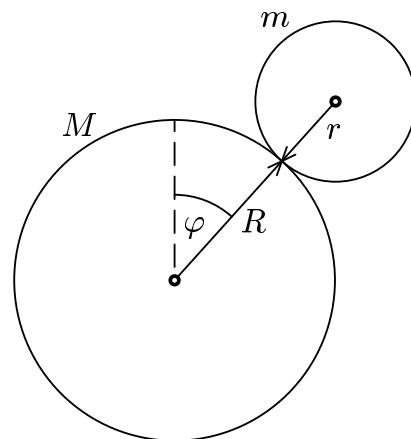
To je redukováná kubická rovnice pro $\cos \varphi_0$, která má na intervalu $[-1; 1]$ právě jedno řešení, ležící vždy v $(0; 1)$, jež má pozoruhodně jednoduchý tvar

$$\cos \varphi_0 = \frac{2}{\mu} \cos \frac{\pi + \arccos \mu}{3}. \quad (8)$$

Je hodné povšimnutí, že úhel odlepení závisí pouze na poměru hmotností koulí a nikoliv na jejich poloměrech nebo tíhovém zrychlení. Dále poznamenejme, že pro velmi velkou hmotnost spodní koule (relativně vůči hmotnosti horní koule, tj. $m/M \rightarrow 0$) se μ^2 blíží k nule, kubický člen vymizí a rovnice se redukuje na lineární rovnici, jejímž řešením je $\cos \varphi_0 = 2/3$, což je výsledek, který někteří z vás správně odvodili.

Opomeňme teď případ, kdy je úhel φ_0 tak velký, že koule vlastně dopadla dřív, než se odlepila. Po odlepení se spodní koule bude dále pohybovat stálou rychlostí. Podívejme se na systém v inerciální soustavě, ve které bude stát. Můžeme říci, že

⁵⁾ Kromě tíhové síly a reakce podložky, které se ale vždy vyruší.



Obr. 14. Poloha koulí a znázornění jednotlivých proměnných

po odlepení se koule již zpátky nedotknou. Další pohyb horní koule bude šikmým vrhem z výšky

$$h = R - r + (r + R) \cos \varphi_0 \quad (9)$$

s počáteční rychlostí

$$v_x = \omega_0 (r + R) \cos \varphi_0$$

ve vodorovném směru a

$$v_y = \omega_0 (r + R) \sin \varphi_0$$

ve svislém směru s orientací dolů. Pro dobu pádu T tedy bude platit

$$\frac{1}{2}gT^2 + v_y T - h = 0.$$

Jediným nezáporným řešením je

$$T = \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}.$$

Než koule dopadne, uletí vodorovnou vzdálenost Tv_x , dopadne tedy se středem ve vodorovné vzdálenosti

$$d = (r + R) \sin \varphi_0 + Tv_x$$

od středu spodní koule. Abychom mohli říct, jak daleko dopadne horní koule od původního bodu dotyku spodní s podložkou, stačí si uvědomit, že po celou dobu byla celková hybnost ve vodorovném směru nulová, vodorovná souřadnice polohy těžiště soustavy tedy zůstala v tomto původním bodě dotyku, a můžeme psát, že hledaná vzdálenost bude

$$x_1 = \frac{Md}{m + M}.$$

Když vše dosadíme (příčemž ω_0 určíme pomocí (6)), vyjde nám po chvílce upravení

$$x_1 = \frac{M}{m + M} (r + R) \left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2} \sqrt{-\gamma^3 + 3\gamma - 2 \frac{r - R}{r + R}} \right),$$

kde $\gamma = \cos \varphi_0$ je vyjádřeno v (8). Zde bychom mohli skončit; všimneme-li si ale, že výraz pod odmocninou se podobá kubické rovnici (7), můžeme se pokusit dosadit z ní za γ a shledáme, že dostaneme výsledek v o něco přehlednějším tvaru

$$x_1 = \frac{M}{m + M} (r + R) \left((1 - \gamma^2)^{3/2} + \gamma^{3/2} \sqrt{\frac{4R}{r + R} - \frac{M}{m + M} \gamma^3} \right).$$

Uvedený vztah platí pouze v případě, že se koule vůbec odlepily. Je-li ale horní koule dost velká, aby h ve výrazu (9) vyšlo nekladné, budou se dotýkat i při

dopadu. Pro tento případ, tedy pro $\gamma \leq (r - R)/(r + R)$, z Pythagorovy věty odvodíme, že dopadnou ve vzdálenosti

$$d = \sqrt{(r + R)^2 - (r - R)^2} = 2\sqrt{rR}$$

od sebe. Proto pak horní koule dopadne ve vzdálenosti

$$x_1 = \frac{2M}{m + M} \sqrt{rR}$$

od těžiště, a potažmo od původního bodu dotyku spodní koule s podložkou.

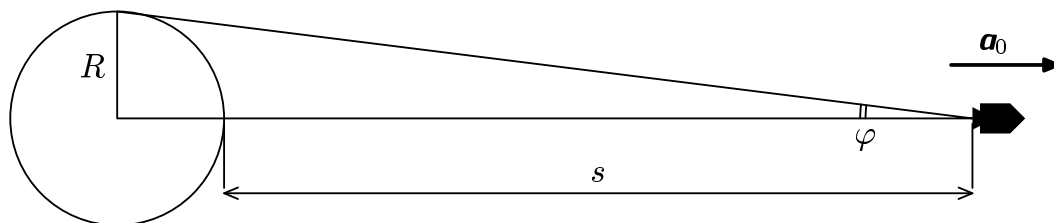
Úloha II.4 ... do nekonečna a ještě dál

Bohatý vesmírný turista si zaplatil výlet do hlubokého vesmíru. Raketa vyletí ze Země a rovnoměrně zrychluje se zrychlením a , což si turista může ověřit například pouštěním míčku. Nudnou cestu si krátí zíráním ze zadního okénka, pozorováním Země. Po nějaké době (Jaké? Aspoň řádový odhad.) se mu začne zdát, že něco není v pořádku – Země se pomalu přestává zmenšovat. Z toho usoudí, že raketa zpomaluje, což neodpovídá tomu, že posádka stále cítí zrychlení a . To ale turistu nenapadne a rozlobeně jde za kapitánem požadovat vysvětlení. Co mu kapitán řekne?

Předpokládáme, že turista vidí celé elektromagnetické spektrum a má železné nervy a pozorování vydrží.

To, že se zmenšování vzdáleného objektu zdá pomalejší a pomalejší, má dvě příčiny. Uvažujeme-li klasickou fyziku, bude změna zmenšování kotoučku Země dána prostou geometrií. Navíc ale nesmíme zapomenout na to, že raketa nemůže zrychlovat neomezeně a existuje horní hranice rychlosti, rychlost světla.

V základním případě hledáme vztah pro velikost úhlu, ve kterém vidíme vzdalující se Zemi se zrychlením a_0 . Protože loď bude od Země velmi daleko, použijeme aproximaci $\text{tg } \varphi \approx \varphi$.



Obr. 15. Vzdalující se loď

Na obrázku 15 vidíme situaci letící lodi ve vzdálenosti s od povrchu Země. Pro velikost φ pak jasně platí

$$\varphi = \frac{2R}{R + \frac{1}{2}a_0t^2}, \quad (10)$$

z čehož vyplývá, že změna zmenšení není lineární.

Nicméně toto přece každý vesmírný turista ví. To, co jej zarazilo, bylo, že v čase asi c/a_0 se jím pozorovaná závislost velikosti Země na čase začala podstatně odchylovat od předpovězené funkce (10).

Časový odhad dostaneme jednoduchou úvahou – kdybychom neznali speciální teorii relativity, byla by to doba, za kterou raketa dosáhne rychlosti světla.

Jak vyjádříme velikost rychlosti v relativitě? Ze zadání víme, že posádka rakety cítí stále stejné zrychlení a . Zaveďme nejdřív novou veličinu, tzv. rapiditu, jako

$$r = c \operatorname{arctgh} \frac{v}{c}.$$

která má tu správnou vlastnost, že je lineární vzhledem k Lorentzově transformaci⁶. To znamená, že známe-li rapiditu systému \mathcal{A} vůči systému \mathcal{B} a rapiditu systému \mathcal{B} vůči systému \mathcal{C} , je rapidita \mathcal{A} vzhledem k \mathcal{C} pouhým součtem předchozích dvou. Co to pro nás znamená? Řekněme si, že letící raketa je v určitém okamžiku inerciální soustavou s rychlostí v (tedy k Zemi má rapiditu r). V dalším okamžiku je to soustava s rychlostí v_1 a rapiditou $r + dr$ vůči předchozí soustavě. A tak bychom mohli pokračovat dál a dál a vždy přičteme stejnou hodnotu dr , tedy celková rapidita vůči Zemi roste lineárně s časem. Konstantu úměrnosti označme α . Tedy

$$\alpha t = c \operatorname{arctgh} \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = c \operatorname{tgh} \frac{\alpha t}{c}.$$

Z toho už jednoduše vypočítáme závislost vzdálenosti na čase ($v = ds/dt$), která vyjde

$$s = \frac{c^2}{\alpha} \log \cosh \frac{\alpha t}{c}.$$

A stejně vypočítáme skutečné zrychlení ($a = dv/dt$).

$$a = \frac{\alpha}{\cosh^2 \frac{\alpha t}{c}}.$$

Vidíme, že pokud $c \rightarrow \infty$, jmenovatel bude roven 1 a tedy $\alpha = a_0$. Pokud provedeme stejnou limitu se vztahy pro s a v , dostaneme klasické rovnice (můžete si sami ověřit třeba použitím Taylorova rozvoje hyperbolických funkcí).

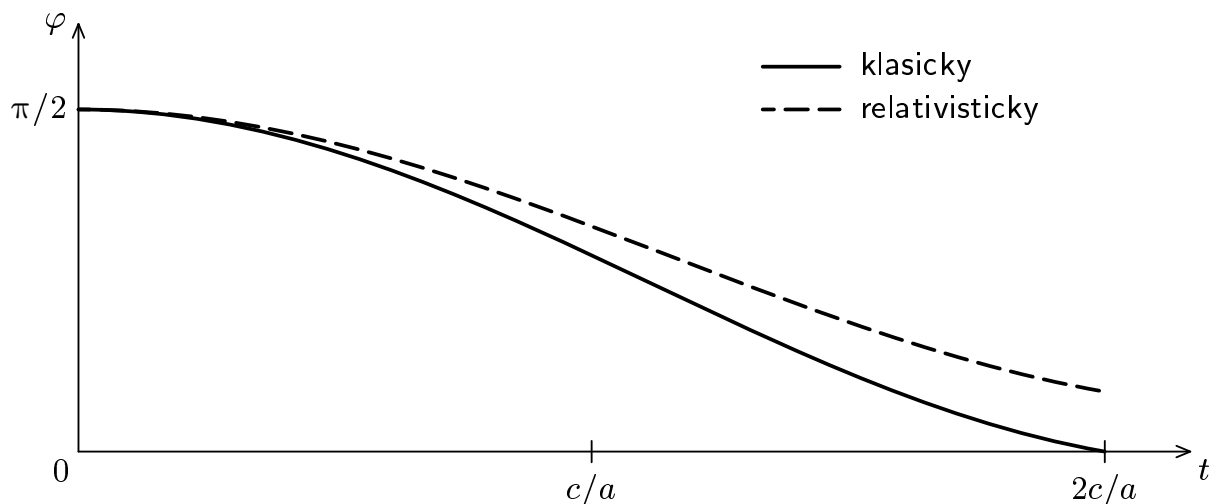
Tedy hledaná závislost velikosti zorného úhlu na čase bude v relativistickém případě

$$\varphi = \frac{Ra}{Ra + c^2 \log \cosh \frac{\alpha t}{c}}.$$

Na obrázku 16 vidíme srovnání klasické a relativistické závislosti. Je vidět, že k jejich odchýlení dojde už dříve než v čase c/a , nicméně jako odhad je tato hodnota postačující.

⁶) Více např. na Wikipedii, <http://en.wikipedia.org/wiki/Rapidity>.

Tedy co odpoví kapitán lodi? Nejdřív prezentuje klasickou závislost. Turista si ale pravděpodobně dál bude stěžovat na to, že to nefunguje přesně. V tu chvíli se vytasí s relativistickým odvozením a vytře mu zrak.



Obr. 16. Graf závislosti velikosti zorného úhlu počítané různými metodami

Nicméně, turista by musel mít opravdu dobré oči. Už docela brzo by se mu Země ztratila z dohledu, protože člověk nerozliší objekty menší než $1''$. A i kdyby si vezl dalekohled, dříve nebo později by se světlo od Země odražené ztratilo v infračervené části spektra kvůli rudému posuvu.

Úloha II. P ... milenecká

Jak se změní teplota pod peřinou, pokud jsou pod ní dva lidé místo jednoho?

K vyřešení úlohy se musíme zamyslet nad fyzikálními parametry člověka. Zdravý člověk má téměř konstantní tělesnou teplotu $36,5^\circ\text{C}$, která se nemění ani při velkých změnách teploty okolí ani při velmi diferencované svalové činnosti. V lidském těle při látkových přeměnách dochází k pomalé oxidaci uhlovodíků, tuků a bílkovin přijatých v potravě. Tyto chemické reakce jsou zdrojem energie pro činnost svalů a vnitřních orgánů. Životní procesy jsou provázeny vývinem tepla – tepelnou produkcí člověka, která závisí především na intenzitě činnosti člověka a také na jeho hmotnosti. V úplném klidu (v klidném, hlubokém spánku) dochází v těle k minimálnímu vývinu tepla odpovídajícímu základní látkové výměně. Tento bazální metabolismus (tepelná produkce člověka P) činí dle normy ISO 7243 asi 85 W .

Problém se tedy redukuje na nalezení rovnovážné teploty T vzduchu pod peřinou, při které se přes peřinu odvede teplo $\Delta Q = 85\text{ J}$ každou vteřinu. V tom případě můžeme využít vztahu pro vedení tepla vrstvou materiálu mezi dvěma konstantními teplotami

$$\Delta Q = \lambda S \frac{\Delta T}{d} \tau,$$

kde konstanta λ je součinitel tepelné vodivosti, S je plocha peřiny, d je její tloušťka, τ doba trvání tepelné výměny a $\Delta T = T - T_0$ je rozdíl teploty T pod peřinou s teplotou T_0 okolí.

V rovnováze tedy platí $\Delta Q = P\tau$ a z toho vyjde rozdíl teplot

$$\Delta T = \frac{Pd}{\lambda S}.$$

Plochu peřiny potřebnou k přikrytí jedné osoby můžeme odhadnout na $S = 1,5 \text{ m}^2$, tloušťka naší peřiny je $d = 2 \text{ cm}$. Pro materiály, jimiž se plní peřiny (peří, vlna, rouno), se udává konstanta λ mezi $0,05$ až $0,07 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, vezměme tedy $\lambda = 0,06 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Pro jednoho člověka pod peřinou nechť je rozdíl teplot ΔT_1 , pro dva pak ΔT_2 . Po dosazení vyjde $\Delta T_1 \doteq 18,9 \text{ K}$. To se na první pohled může zdát hodně, ale musíme si uvědomit, že jsme neuvažovali tepelný přenos přes matraci a tepelnou výměnu způsobenou prouděním vzduchu netěsnostmi mezi peřinou a podložkou.

V případě se dvěma lidmi budeme uvažovat tepelnou produkci člověka $P_2 = 2P$ a k přikrytí dvou lidí stačí řekněme peřina s plochou $S_2 = 1,75 S$ (na přikrytí dvou lidí ležících je potřeba určitě větší peřina než k přikrytí jednoho, ale jistě také menší než dvojnásobek peřiny pro jednoho člověka). Ostatní konstanty zůstanou nezměněny. Po dosazení těchto změn dostáváme rozdíl teploty pod peřinou s okolní teplotou

$$\Delta T_2 = \frac{2Pd}{1,75 \lambda S},$$

což je po vyčíslení přibližně $\Delta T_2 \doteq 21,6 \text{ K}$.

V zadání jsme se ptali, jak se změní teplota pod peřinou, když pod ní budou místo jednoho jednoho člověka dva lidé. Pro velikost této změny platí

$$\Delta T_2 - \Delta T_1 = \frac{P}{7d} \lambda S,$$

což číselně vychází přibližně $\Delta T \doteq 2,7 \text{ K}$.

Úloha III.1 ... *tlačnice*

Organizátoři si z podzimního soustředění odvezli tlakovou nádobu s vodíkem a na vánoční besídce chtějí udělat pokus. Všechn plyn z ní vypustí do lehkého balonu – tj. bude mít atmosférický tlak. Dokáže takovýto balon uzvednout prázdnou tlakovou nádobu, když víte, že teplota zůstává konstantní?

Na balon bude směrem dolů působit tíhová síla, která závisí na váze bomby, váze plynu a váze balonu. Síla je rovna

$$F_G = mg = (m_b + m_H + m_l)g ,$$

kde m_b je hmotnost balonu, m_H je hmotnost vodíku z lahve a m_l je hmotnost lahve.

Směrem vzhůru na něj bude naopak působit vztlaková síla definovaná vztahem

$$F_v = V\rho_v g ,$$

kde objem V je součtem objemů plynu, tlakové lahve a materiálu, z kterého je balon vyroben. Předpokládejme, že objem materiálu balonu a tlakové lahve je zanedbatelný oproti objemu plynu.

Aby balon uzvedl láhev, musí být vztlaková síla větší než síla tíhová, tedy

$$V_H \rho g \geq (m_b + m_H + m_l)g ,$$

$$V_H \rho \geq m_b + m_H + m_l .$$

Nyní zkusme dosadit parametry některého konkrétního typu lahví. Nejběžnější láhev váží 61 kg. Za normálního tlaku zabírá vodík z lahve přibližně $8,9 \text{ m}^3$ a váží 0,75 kg. Hustota vzduchu je zhruba $1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

$$(8,9 \cdot 1,3) \text{ kg} \geq m_b + (0,75 + 61) \text{ kg} ,$$

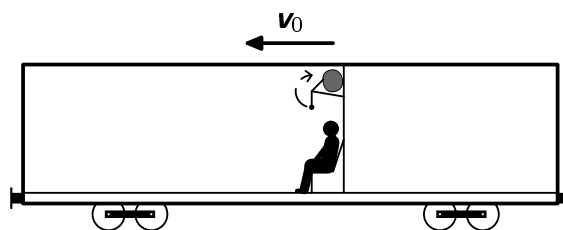
$$m_b \leq -50 \text{ kg} .$$

Aby balon láhev unesl, musela by být hmotnost balonu záporná, což nelze. Balon tedy uzvednout láhev nedokáže.

V tlakových lahvích je vodík v kapalně formě, tedy k určení množství vodíku není možné použít stavovou rovnici pro izotermický děj (na což jste téměř všichni zapomněli; myslím, že byste si chybu uvědomili, kdybyste to zkusili vypočítat i pro nějakou konkrétní láhev). Kromě tlaku tedy musíme zjistit hmotnost plynu nebo množství plynu (ve specifikaci je obojí).

Úloha III.2 ... *trainstopping*

Honza jede domů vlakem rychlostí v_0 . Z poličky na zavazadla mu z batohu visí olovnice. Najednou vlak začne brzdit (zrychlením a po dobu t), protože na železniční přejezd před ním vjel neopatrný řidič. A Honzu napadne – mohla se olovnice s napnutým provázkem otočit o 180° ? Uvažte, že je olovnice pevně zavěšena na poličce.



Obr. 17. Honza ve vagónu

Přejdeme do soustavy pevně spojené s vlakem. Když vlak začne brzdit, v soustavě vlaku pozorujeme jednak tíhovou sílu \mathbf{F}_G a jednak také zdánlivou setrvačnou sílu \mathbf{F}_s . V soustavě vlaku můžeme zavést „lokální“ tíhové zrychlení $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + \mathbf{a}$, dané jako vektorový součet gravitačního a setrvačného zrychlení. Zrychlení $\tilde{\mathbf{g}}$ klidně můžeme nazvat tíhovým, protože předmět v soustavě vlaku volně padá směrem daným $\tilde{\mathbf{g}}$.

Označme α úhel, který svírá $\tilde{\mathbf{g}}$ se svislým směrem. Olovnice pak ale představuje kyvadlo, pohybující se v poli síly $m\tilde{\mathbf{g}}$, přičemž rovnovážná poloha kyvadla je při výchylce $\varphi = \alpha$. Pozorujeme vlastně úplně obyčejné kyvadlo, akorát jsme si potočili tíhovou sílu a změnili její velikost. Úhel α splňuje

$$\cos \alpha = \frac{g}{\tilde{g}} = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}}. \quad (11)$$

Uvažujme, že vlak neustále brzdit. Olovnice bude kmitat kolem rovnovážné polohy $\varphi = \alpha$, přičemž startuje z klidu z počáteční polohy $\varphi = 0^\circ$. Snadno nahlédneme, že její maximální výchylka je $\varphi_{\max} = 2\alpha$. V tom případě se olovnice nemůže s napnutým provázkem otočit o 180° , protože rovnovážná poloha $\alpha = 90^\circ$ by nastala jen pro nekonečně velké zrychlení.

Co se ale bude dít, když vlak najednou přestane brzdit? Zmizí setrvačná síla, tedy vodorovná složka působící síly. Uvažme, že $2\alpha < 90^\circ$. Potom „vypnutím“ vodorovné složky síly v libovolné poloze můžeme maximální výchylku jen zmenšit, protože vodorovná složka síly pro úhly $\varphi < 90^\circ$ působí vždy ve prospěch zvětšení výchylky. Nemůžeme proto doufat, že při zpomalení $a < g$ dosáhneme kýžené obrátky o 180° . V polohách $\varphi > 90^\circ$ již ale setrvačná síla působí ve prospěch zmenšení výchylky. Kdyby tedy pro polohy $\varphi > 90^\circ$ byla setrvačná síla vypnutá, mohli bychom dosáhnout větší maximální výchylky než 2α . Zkoumejme, zda vypnutím setrvačné síly ve vhodnou chvíli můžeme dosáhnout přetočení olovnice s napnutým provázkem.

Z výše uvedeného plyne, že nejvýhodnější pro maximalizaci výchylky je vypnout setrvačnou sílu v poloze $\varphi = 90^\circ$. Uvažujme ale, že ji vypneme v nějaké obecné poloze $\varphi = \beta$.

Formulujme okrajovou podmínku pro úplné přetočení olovnice s napnutým provázkem. Délku závěsu označme l . V poloze $\varphi = 180^\circ$ je nutné, aby odstředivá

síla byla v rovnováze s gravitační. Odtud

$$\frac{mv^2}{l} = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{fin}} = \frac{1}{2}mgl, \quad (12)$$

kde v , E_{fin} značí rychlost a kinetickou energii v poloze $\varphi = 180^\circ$.

Po celou dobu pohybu, ať vlak brzdí, nebo ne, pohybuje se olovnice v poli gravitační síly, která míří kolmo. Potenciální energie příslušející síle \mathbf{F}_G je dána svislou vzdáleností od počáteční polohy, $V_G(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi)$. Když ale vlak brzdí, pohybuje se olovnice rovněž v poli síly \mathbf{F}_s , která míří vodorovně a je konstantní v prostoru i čase. Setrvačné síle potom bude příslušet nějaká potenciální energie V_s . V analogii s gravitačním potenciálem bude její hodnota dána vodorovnou vzdáleností od počáteční polohy, tedy $V_s(\varphi) = -mal \sin \varphi$. Rozmyslete si, proč tam je minus.

E_{fin} vypočteme jako práci na olovnici vykonanou silami \mathbf{F}_G , \mathbf{F}_s . Práce vykonané po řadě gravitační a setrvačnou silou jsou rovny

$$\begin{aligned} W_G &= V_G(0^\circ) - V_G(180^\circ) = -V_G(180^\circ) = -2mgl, \\ W_s &= V_s(0^\circ) - V_s(\beta) = -V_s(\beta) = mal \sin \beta, \end{aligned}$$

uvědomíme-li si, že setrvačná síla koná práci jen mezi polohami $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = \beta$. Dohromady dostáváme

$$E_{\text{fin}} = W_s + W_G = mal \sin \beta - 2mgl, \quad (13)$$

dosazením za E_{fin} z (12) máme

$$\frac{5}{2}g = a \sin \beta. \quad (14)$$

Nejmenší a takové, že rovnice (14) má řešení, je $a = 5g/2$, čemuž odpovídá úhel $\beta = 90^\circ$. To souhlasí s naší výše uvedenou předpovědí, že nejvýhodnější je „vypnout“ setrvačnou sílu pro $\varphi = 90$.

Takže $a = 5g/2$ je minimální zrychlení, při kterém lze v ideálním případě dosáhnout obrátky o 180° . Tomuto zrychlení odpovídá $\alpha = 68,2^\circ$. Vlak však musí přestat brzdit přesně ve chvíli, kdy je $\varphi = 90^\circ$. Přesný čas T , za který v tomto případě dosáhne olovnice výchylky $\varphi = 90^\circ$, již nelze vypočítat pomocí přiblížení malých kmitů, protože naše výchylky jsou velké.

Moment síly působící na olovnici je určen vztahem $M = m\tilde{g}l \sin(\varphi - \alpha)$, přičemž M lze zdola omezit výrazem $M_- = m\tilde{g}l\varphi \sin \alpha / \alpha$ a shora omezíme výrazem $M_+ = m\tilde{g}l\varphi$. Kyvadla, na něž působí M_- a M_+ , jsou již harmonické oscilátory, jejichž úhlové frekvence jsou po řadě

$$\omega_- = \sqrt{\frac{l \sin \alpha}{\tilde{g}\alpha}} \quad \text{a} \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{l}{\tilde{g}}}.$$

Olovnice kmitá rychleji než ω_- a pomaleji než ω_+ . Například pro $l = 20$ cm číselně získáváme $T = (0,17 \pm 0,01)$ s, přičemž T roste s odmocninou l . Pro $a = 5g/2$ za čas T vlak zpomalí zhruba o 15 km/h. Zrychlení $a = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je hodně velké (odpovídá zpomalení z devadesátky na nulu za jednu sekundu a vyžaduje koeficient klidového tření $f = 5/2$) a můžeme vytušit, že pokud se olovnice přetočila, vlak pravděpodobně na přejezdu narazil do auta a Honza se navíc asi pěkně potloukl . . .

Pro zrychlení ještě větší než $a = 5g/2$ dostaneme dva úhly β_1, β_2 řešící rovnici (14). Tyto úhly jsou rozloženy symetricky okolo úhlu 90° . Bude-li výchylka olovnice v intervalu (β_1, β_2) a olovnice bude ve stoupavém pohybu, pak se při náhlém brzdění vlaku přetočí s napnutým provázkem. Dojde-li k ukončení brzdění při sestupném pohybu olovnice, přetočení samozřejmě nelze dosáhnout.

Práce W_s je vždy menší než $mv_0^2/2$. Podle (13) je potom pro přetočení s nataženým provázkem bezpodmínečně nutné, aby $v_0 > \sqrt{5gl}$. Stejně tak je zřejmě nutné, aby $v_0 > aT$. Čím delší je provázek, tím je třeba větší počáteční rychlosti v_0 .

Úloha III.3 . . . zachraňte hélium

Na pouti v Dolním Dvoře mají novou atrakci, héliem plněné mýdlové bubliny, které se téměř nehybně vznášejí ve vzduchu. Co je těžší? Hélium v bublině, nebo její stěna?

První, co si musíme uvědomit, je fakt, že se bubliny plněné héliem ve vzduchu vznášejí. Tedy ani neklesají k zemi, ani se nesnaží někam odletět, což nám dává podmínku, že síly působící na bublinu musejí být v rovnováze. V našem případě se jedná o sílu tíhovou a vztlakovou

$$F_G = F_{vz} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{He}}g + m_b g = Vg\rho_v \quad \Rightarrow \quad \rho_{\text{He}}V_{\text{He}} + \rho_v V_v = V\rho_v. \quad (15)$$

Veličiny vztahující se k héliu jsou označeny indexem He, veličiny vztahující se ke vzduchu indexem v a veličinám vztahujícím se k bublině náleží index b. V tuto chvíli se zamyslíme nad tím, jak celý problém vypadá. Máme bublinu o poloměru r s tloušťkou stěny d , kde $r \gg d$. Pokud budeme počítat objem slupky, první, co nás často napadne, je vypočítat objem celé bubliny ze známého vzorce $4\pi r^3/3$ a pak si vyjádřit odečtením vnitřku. Nicméně bude třeba se zamyslet nad tím, že d zde bude vystupovat ve třetí mocnině a třetí mocnina hodně malé hodnoty, kterou tloušťka bubliny bezesporu je, je ještě menší než původní hodnota. Jinak řečeno, budeme aproximovat. Zanedbáme d ve vyšší než první mocnině a podíváme se, jak po aproximaci bude vypadat vzorec pro objem kulové slupky.

$$V = \frac{4}{3}\pi ((r+d)^3 - r^3) = \frac{4}{3}\pi (r^3 + 3r^2d + 3rd^2 + d^3 - r^3) \approx 4\pi r^2 d.$$

Nyní vyjádříme objemy v rovnici (15) a celou ji přepíšeme do tvaru

$$4\pi r^2 \left(\rho_b d + \rho_{\text{He}} \frac{r}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_v.$$

Tloušťku bubliny pak můžeme vyjádřit jako

$$d = \frac{r}{3} \frac{\rho_v - \rho_{\text{He}}}{\rho_b}.$$

Výraz pak dosadíme do poměru hmotností stěny a hélia

$$\frac{m_b}{m_{\text{He}}} = \frac{4\pi r^2 d \rho_b}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{\text{He}}} = \frac{\rho_v - \rho_{\text{He}}}{\rho_{\text{He}}}.$$

Pro vzduch můžeme použít hodnotu $1,29 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a pro hélium $0,18 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; není třeba hustotu hélia vyjadřovat ze stavové rovnice, tabulková hodnota je dostačující a správná. Stěna bubliny pak vychází zhruba o třetinu těžší než hélium v ní.

Co se změní, když budeme uvažovat i kapilární tlak? V takovou chvíli musíme zvážit, že tlak v bublině je součtem tlaku atmosferického a kapilárního $p = p_{\text{atm}} + p_k$. Pro kapilární tlak platí vzorec $p_k = 2\sigma/r$, nicméně musíme započítat dva povrchy bubliny, takže $p_k = 4\sigma/r$. Tlak pak dosadíme do stavové rovnice ideálního plynu, neboť se nacházíme ve vcelku ideálních podmínkách, při kterých stavová rovnice platí.

$$\begin{aligned} pV &= nRT, \\ pV &= \frac{m_{\text{He}}}{M_{\text{m(He)}}} RT, \\ \left(p_{\text{atm}} + \frac{4\sigma}{r}\right) \frac{4}{3} \pi r^3 &= \frac{m_{\text{He}}}{M_{\text{m(He)}}} RT. \end{aligned} \quad (16)$$

V rovnosti (16) jsou až na hmotnost hélia všechno známé konstanty; plynová konstanta $R = 8,31 \text{ K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$, povrchové napětí mýdla $\sigma = 4 \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ a molární hmotnost hélia $M_{\text{m(He)}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$. Hmotnost můžeme vyjádřit jako

$$m_{\text{He}} = \frac{4}{3} \pi R^2 (p_{\text{atm}} R + 4\sigma) \frac{M_{\text{m(He)}}}{RT}.$$

Pro jednoduchost počítejme s konstantní teplotou T . Hmotnost hélia uvnitř bubliny pak dosadíme do rovnice (15).

$$\frac{4}{3} \pi r^2 (p_{\text{atm}} r + 4\sigma) \frac{M_{\text{m(He)}}}{RT} + m_b = \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3.$$

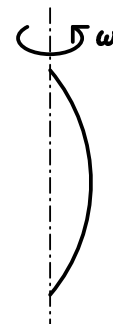
Nyní zkusme uvážit, jak by musela vypadat bublina, pro kterou by platilo, že hmotnost hélia se rovná hmotnosti stěny bubliny. Jedná se o krajní případ, který nám ukáže, jestli je třeba pro průměrně velkou bublinu kapilární tlak uvažovat. Z výše uvedené podmínky rovnosti hmotností zjistíme poloměr bubliny

$$r = \frac{4\sigma}{\frac{RT\rho_v}{2M_{\text{m(He)}}} - p_{\text{atm}}}.$$

Dosadíme-li všechny konstanty, zjistíme, že poloměr takové bubliny se pohybuje okolo 600 nm. Pro obyčejnou, okem viditelnou bublinu se tedy nemusíme zabývat tím, jaký je v ní tlak, hmotnost hélia v bublině to nijak zvlášť neovlivní, a tak můžeme s klidem prohlásit, že stačí počítat s Archimédovým zákonem a gravitací. Finální závěr tedy zní, že stěna bubliny je těžší než hélium v ní.

Úloha III.4 ... vánoční řetěz

Jakub se o přednášce nudil, z batohu si vytáhl řetízek, chytil jej na dvou místech mezi prsty a začal s ním točit úhlovou rychlostí ω jako na obrázku. Marek to uviděl a zeptal se Jakuba, jaký tvar má rotující řetízek. Co mu Jakub odpověděl, když zanedbal vliv tíhového pole?



Nejdříve musíme vymyslet postup, pomocí něhož úlohu vyřešit. Pokud bychom měli tyčku v nějakém údolí a hledali rovnovážnou polohu, princip by byl jednoduchý: Hledej polohu s nejnižším těžištěm. Těžištěm rozumíme hmotný střed tělesa, v němž leží působíště tíhové síly. Podobně bychom mohli hledat působíště odstředivé síly a vybrat takový tvar řetězu, který ho má nejdále od osy otáčení. Zobecnění platné v mechanice zní: Potenciální energie V má ve stabilní poloze minimum. Kousku délky $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$ přísluší potenciální energie odstředivé síly úměrná $y^2 ds$. Podmínku minima zapisujeme

$$\delta \int y^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = 0$$

(meze se berou $-d/2$ a $d/2$). Stále jsme neuplatnili podmínku $\int \sqrt{1 + (y')^2} dx = l$, z níž plyne $\delta \int \sqrt{1 + (y')^2} dx = 0$. Roznásobíme výraz vhodnou konstantou λ , aby souhlasil rozměr, a přičteme novou variační rovnici k původní, obdržíme

$$\delta \int (y^2 + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2} dx = 0.$$

Už Platón věděl, že z této podmínky plyne zachování veličiny

$$C = \frac{(y')^2 (y^2 + \lambda)}{\sqrt{1 + (y')^2}} - (y^2 + \lambda) \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Označíme-li $y_0 \equiv y(0)$, máme podmínku $C = -(y_0^2 + \lambda)$. Proto se derivace rovná

$$y' = -\sqrt{\left(\frac{y^2 + \lambda}{y_0^2 + \lambda}\right)^2 - 1}.$$

Shrňme ještě okrajové podmínky:

a) $y(d/2) = 0$;

b)

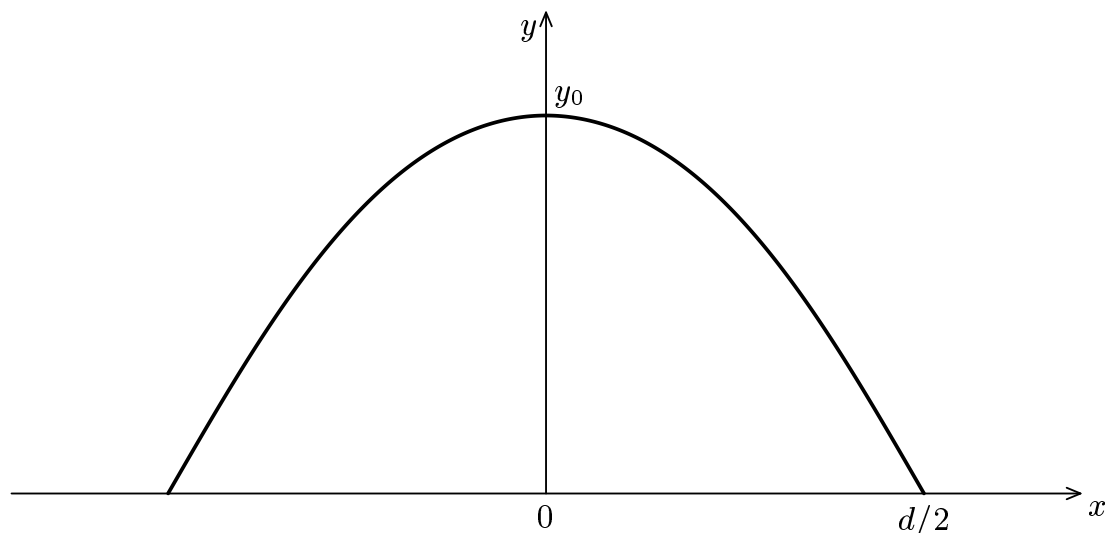
$$\int \sqrt{1 + (y')^2} dx = l \quad \Rightarrow \quad \int_0^{y_0} \frac{(y^2 + \lambda) dy}{\sqrt{\left(\frac{y^2 + \lambda}{y_0^2 + \lambda}\right)^2 - 1}} = 2l (y_0^2 + \lambda) .$$

Z okrajových podmínek vyjádříme neznámé konstanty y_0 a λ pomocí konstant l a d . Rovnici lze řešit například těmito postupy. Buď můžeme rovnici pro derivaci separovat a vyjádřit $x(y)$, do níž pak „dosadíme“ počáteční podmínky, nebo můžeme vyjádřit $y(x)$ Taylorovým rozvojem $y(x) = y_0 + y''x^2/2 + y^{(4)}x^4/4! + \dots$, kde derivace vyjádříme

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} y' = - \left. \frac{2y \left(\frac{y^2 + \lambda}{y_0^2 + \lambda} \right)}{y'} y' \right|_{y_0} = -2y_0 ,$$

$$y^{(4)} = - \frac{4y_0 (3y_0^2 + \lambda)}{(y_0^2 + \lambda)^2}$$

atd. Problém samozřejmě spočívá v tom, že pokud funkci rozvineme do n -tého řádu, musíme řešit algebraickou rovnici n -tého řádu pro podmínku (a) a musíme vypočítat integrál v podmínce (b). Zbývá tedy numerické řešení diferenciální rovnice, které hledejte na obrázku. Pokud bychom se měli omezit na elementární funkce, zvolíme přiměřeně přesné řešení s funkcí kosinus.



Obr. 18. Počítačově modelovaný tvar křivky

Úloha III. P ... titanový život

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Radar na sondě Cassini obíhající Titan zjistil, že povrchové útvary rotují rychleji než měsíc sám (asi o $0,36^\circ \text{rok}^{-1}$). Vědecké zdůvodnění zní, že působením větru se mění rotace ledové vrstvy, která plave na podzemním oceánu. O rotaci měsíce se předpokládá, že je synchronizována s oběhem Titanu kolem Saturnu.

Další indicii podzemního oceánu poslala sonda Huygens, která po oddělení od Cassini přistála na povrchu Titanu. Během klesání atmosférou naměřila relativně silné radiové elektromagnetické vlny o frekvenci asi 36 Hz. K odrazu a zesílení radiových vln může dojít na vodivém prostředí, jako je právě rozhraní vody a ledu pod povrchem.

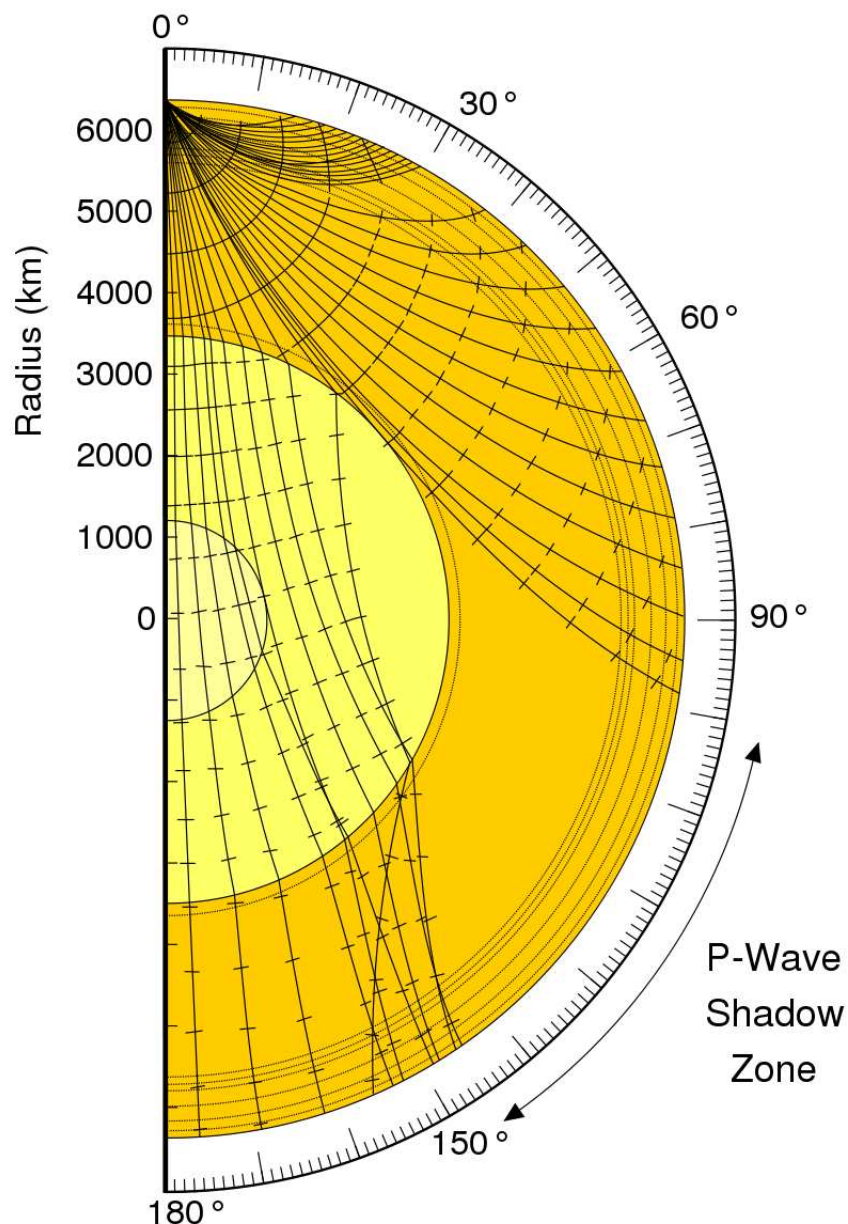
Poradte expertům NASA, jakými metodami by mohla současná nebo budoucí sonda k Titanu potvrdit nebo vyvrátit existenci podzemního oceánu.

Úvodem zmiňme nejpřímočařejší metodu – hlubinný vrt, kterou nezapomněl zmínit nikdo z řešitelé. Nejhlubší geologické vrty na současné Zemi jsou však dlouhé kolem deseti kilometrů, zatímco odhadovaná tloušťka pevné povrchové slupky Titanu je až kolem sta kilometrů, tudíž realizace takového postupu by byla minimálně technicky velmi náročná. Na druhou stranu na zmíněném měsíci byla pozorována kryovulkanická aktivita (sopky chrlící plyny a sníh), která naznačuje, že v kůře musí být velmi dlouhé komíny, kterými materiál stoupá k povrchu. Jejich výskyt po celém povrchu by existenci celoplanetárního podkorového oceánu podpořil.

Druhá klasická metoda je využití geofyzikálních poznatků, zejména těch ze seismologie. Když na Titanu, stejně jako na Zemi, dojde k zemětřesení, vzniknou v tělese planety dva druhy vln – podélné („primární“) vlny a vlny příčné („sekundární“), které je pro mohutné otřesy možné detekovat prakticky po celém povrchu. Každý z obou druhů se šíří různou rychlostí. Pro podélné vlny je $v_p \sim \sqrt{E/\rho}$, kde E je modul pružnosti materiálu v tahu a ρ jeho hustota; pro příčné vlny bude ve vztahu vystupovat modul pružnosti ve smyku. Protože v kapalině jsou tečná napětí (a tedy i smykový modul pružnosti) velmi malá ve srovnání s těmi v pevném materiálu, příčné vlny se v ní prakticky nešíří a tak tekutým materiálem projdou jen vlny podélné. Jiná rychlost vlny v jiném prostředí s sebou nese, podobně jako v optice, zákon lomu, takže existence tekuté vrstvy se projeví jako „stín“ v podélných vlnách, jak je naznačeno na následujícím obrázku (je sice kreslený pro Zemi a její tekuté vnější jádro, ale podobná myšlenka bude platit i na Titanu). Podobně dochází i k úplnému odstínění příčných vln, jak už bylo řečeno. Ani tento způsob není jednoduché provést – je potřeba mnoho měřicích stanic rozmístěných po povrchu a kvůli chybějící dynamické tektonice, kterou známe z našeho domovského světa, i uměle vytvořené zemětřesení.

Jako další možnost někteří navrhovali odporové profilování a jemu podobné metody využívající měření odporu mezi mnoha dvojicemi povrchových bodů (typicky od sebe vzdálených kolem dvaceti metrů). Ze získaných dat se sestaví vo-

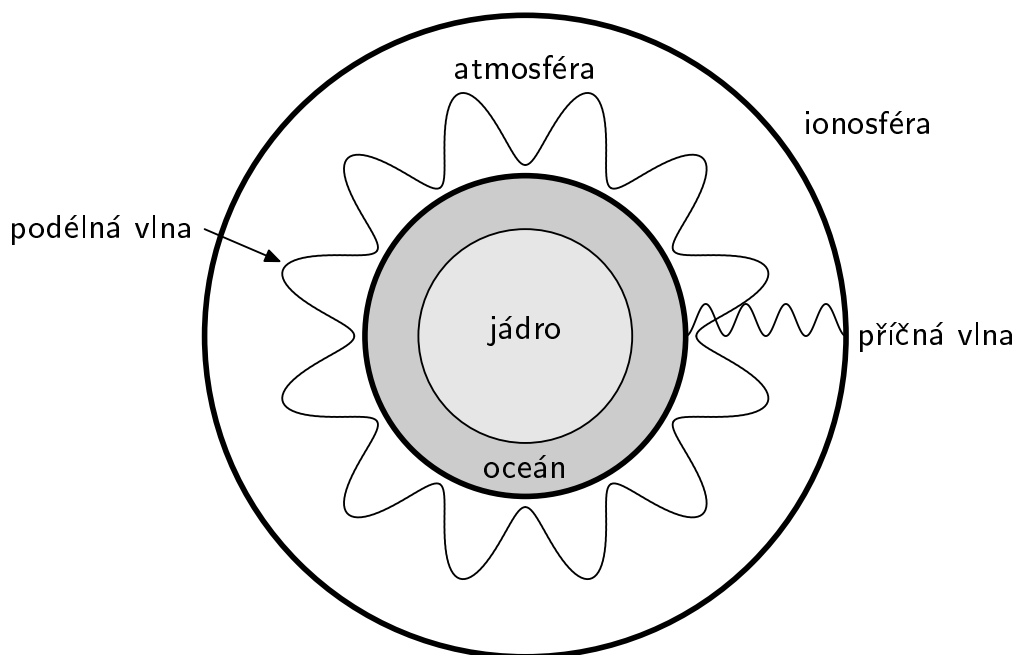
divostní mapa podloží a na té lze pak identifikovat oblasti vodivější (tedy vodu) a méně vodivé (tedy horninu). Takový postup se sice používá při hledání podzemních dutin v geologické praxi, nicméně účinný dosah metody je v řádu nejvýše desítek metrů. Lze ale předpokládat, že při použití pokročilejšího vybavení, silnějších zdrojů a detektorů a také samozřejmě měření odporu mezi místy podstatně vzdálenějšími, by bylo možné uspět i takto.



Obr. 19. Šíření seismických vln

Zajímavá metoda je použití tzv. *Schumannových rezonancí*. Představme si dutinu ve tvaru mezikoulí, ohraničenou vodivými plochami a vyplněnou špatně vodivým materiálem. Může se jednat ze vně například o ionosféru planety a zevnitř o hladinu oceánu (řez na obr. 20).

Vlivem vnitřním (např. blesk) nebo vnějším (např. interakce s magnetosférou jiné planety) můžeme v dutině vybudit elektromagnetickou vlnu, která podobně jako ve známé Kundtově trubici při správné budící frekvenci vytvoří stojaté vlnění. To se může vyskytnout ve dvou odlišných formách (*modech*) – jako vlna rovnoběžná s vodivými plochami (říkejme jí podélná) a jako vlna napnutá mezi nimi (příčná). Protože v každém bodě je elektrické pole určené jednoznačně, musí při oběhu planety dokola mít podélné vlnění stejnou fázi, tedy je potřeba, aby



Obr. 20. Schumannovy rezonance

první mod byl uzavřený (na obrázku). Dále platí, že příčná vlna se rozhraní dotýká v bodech, kde má nulovou amplitudu (v uzlech – jako ve zmíněné akustické analogii). Takové vlny však nemohou mít libovolnou vlnovou délku, ale jen několik vybraných. Z teorie se dají určit vlastní frekvence takového rezonátoru, totiž frekvence, které jsou jím zesíleny. Pro podélné vlny jsou to frekvence

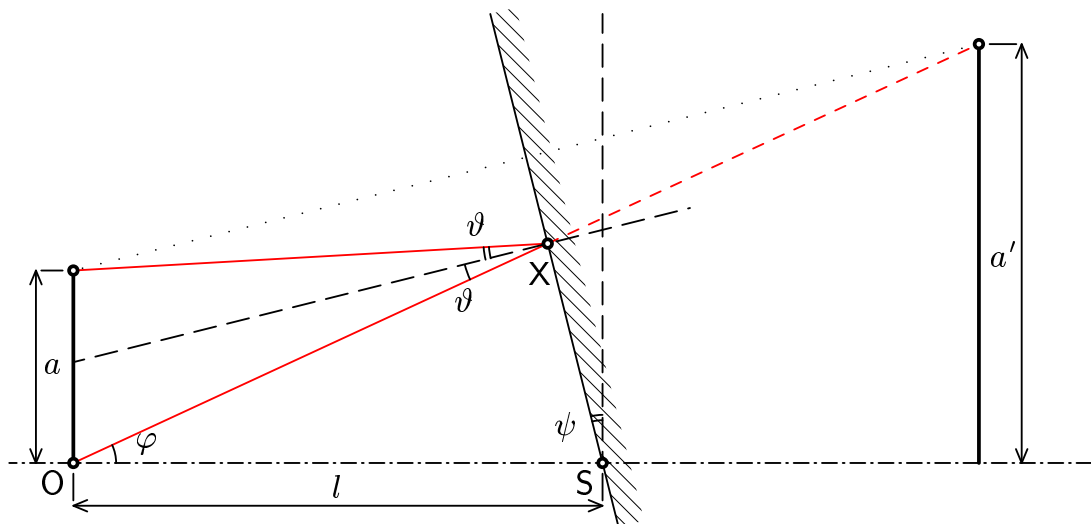
$$f_n \approx \frac{c}{2\pi R} \sqrt{n(n+1)},$$

kde c je rychlost světla, R poloměr vnitřní vodivé plochy a n řád modu. Zjištěním rezonančních frekvencí obou modů bychom byli schopni určit poloměr hladiny případného podpovrchového oceánu. Naopak absence rezonancí by mluvila proti jeho existenci. Samozřejmě by muselo předcházet důkladné proměření vodivosti atmosféry, protože Titan nemá jednoznačně rozpoznatelnou ionosféru a vodivost atmosféry se mění postupně s rostoucí výškou.

Úloha IV.1 ... kyklopozo zrcadlo

Zkuste vypočítat, jaký tvar by mělo mít zrcadlo, tak, aby se v něm kyklopova hlava jevila jako čtverec. Kyklop má hlavu ve tvaru koule s okem uprostřed.

Chceme-li zobrazit kouli na čtverec, musíme každý okrajový bod (o konstantní vzdálenosti od optické osy) promítnout do proměnné vzdálenosti – na obvod čtverce.

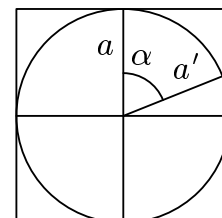


Obr. 21. Schéma situace

Označme a velikost vzoru, v tomto případě poloměr kyklopovy hlavy, a' velikost obrazu a l vzdálenost kyklopa od zrcadla (viz obrázek 21).

Naopak z obrázku 22, který zobrazuje celou situaci zepředu, získáme snadno rovnost

$$\cos \alpha = \frac{a}{a'} . \quad (17)$$



Obr. 22

Pro jednoduchost řešení si dovolueme předpokládat, že kyklop stojí daleko od zrcadla, a tedy můžeme úhly φ , ϑ a ψ považovat za velmi malé. Odvoljme se na trojúhelník OXS z obrázku 21, který nám pomůže k odhalení vztahu

$$\varphi = \psi + \vartheta . \quad (18)$$

S užitím přibližných vzorců pro sinus a kosinus malých úhlů, a protože $l \gg a$, můžeme napsat přibližné rovnosti

$$a \approx 2l\vartheta , \quad (19)$$

$$a' \approx 2l\varphi . \quad (20)$$

Dosazením (19) a (20) do (18) a použitím identity (17) pak pro jednotlivé úhly dostáváme

$$\psi = \frac{a' - a}{2l} = \frac{a}{2l} \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) , \quad (21)$$

$$\vartheta = \frac{a}{2l},$$

$$\varphi = \frac{a}{2l \cos \alpha}.$$

Je vidět, že pokud bude kyklop dostatečně daleko od zrcadla vzhledem k rozměru své hlavy, tak byly aproximace správné, protože úhly ψ , ϑ , φ vyjdou malé.

Vidíme, že $\operatorname{tg} \psi$ je roven derivaci deviace zrcadla od roviny. Tedy označíme-li $\Delta(r, \alpha)$ funkci popisující tvar zrcadla, platí pro radiální souřadnici

$$r = l\varphi.$$

Dosazením tohoto výrazu do (21) získáme

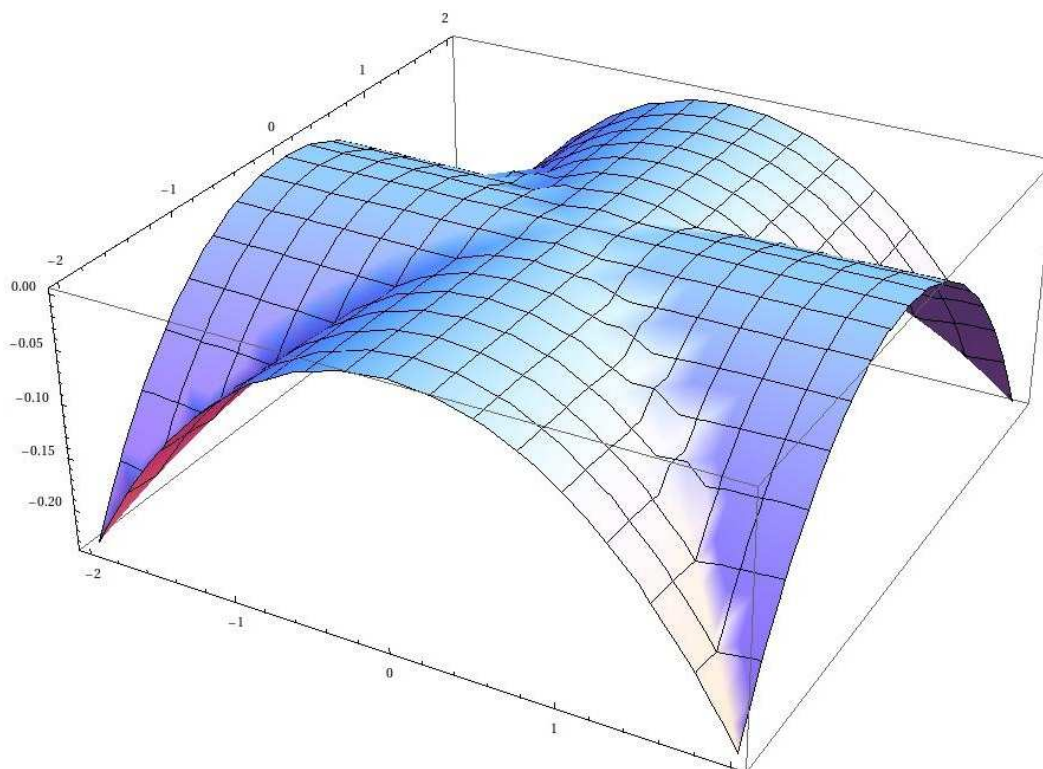
$$\frac{\partial \Delta(r, \alpha)}{\partial r} = \psi = \frac{r}{l} (1 - \cos \alpha),$$

odkud integrováním plyne

$$\Delta(r, \alpha) = \frac{r^2}{2l} (1 - \cos \alpha).$$

Podle toho, jak jsme definovali úhel α , můžeme za něj dosazovat pouze hodnoty z intervalu $[-\pi/4, \pi/4]$. Celkový tvar zrcadla získáme použitím rotačních symetrií.

Zrcadlo si lze představit jako strop křížení dvou románských chodeb, kde odrazivá plocha je nanášena shora. Výsledný tvar zrcadla je na obrázku 23.



Obr. 23. Tvar kyklopora zrcadla

Úloha IV.2 ... na tenkém ledě

Je známo, že led vystavený většímu tlaku snižuje svou teplotu tání. Funguje tento jev při bruslení (tedy je tlak brusle dostatečný, aby se led rozpustil i při nízkých teplotách)? Pokud ne, co jiného zaručuje hladký skluz?

Nejprve se pokusme odpovědět na první otázku, tedy jestli tzv. regelace ledu souvisí s hladkým skluzem při bruslení. U ledu se v praxi projevuje tak, že na každou přidanou atmosféru klesne teplota tání o $0,0072\text{ }^\circ\text{C}$. Tedy na snížení teploty tání o pouhý $1\text{ }^\circ\text{C}$ potřebujeme vyvolat tlak 139 atm , což je přibližně 14 MPa . Otázkou zůstává jaký tlak vyvolá bruslař jedoucí po ledu na jedné brusli. Ze základního definičního vztahu

$$p = \frac{F}{S},$$

kde za sílu přitlačnou považujeme tíhovou sílu, dostaneme po dosazení běžných hodnot $m = 80\text{ kg}$, $g = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, $S = 6 \cdot 10^{-4}\text{ m}^2$ tlak $1,33\text{ MPa}$ (13 atm). Vidíme, že tento tlak je řádově nižší, než je tlak potřebný k roztavení ledu o teplotě $-1\text{ }^\circ\text{C}$. Představíme-li si navíc teplotu $-10\text{ }^\circ\text{C}$, při které se jistě také dá bruslit a zjistíme, že regelace ledu hladký skluz nezpůsobuje. Někdo by mohl namítnout (a také to mnozí z řešitelů poznamenávali), že nůž brusle má buď jedno mnohem užší ostří uprostřed, nebo dvě po stranách, čímž se tlak řádově zvětší, ale musíme si uvědomit, že v takovém případě se brusle trochu zaboří, a síla se tudíž opět rozloží na větší plochu. Ostří slouží spíše k lepší ovladatelnosti brusle, umožňuje projíždět zatáčky ve větší rychlosti a také pomáhá při prudkém brzdění.

Nesmíme zapomenout, že dobře klouže také puk a na hladkém ledě i boty bez vzorku. Jaké další efekty tedy připadají v úvahu?

Nejprve probereme nízký koeficient smykového tření, ten samozřejmě za bruslením stojí, ale musíme si uvědomit, že není argumentem proti výše a níže podaným vysvětlením, nýbrž jejich důsledkem. Jak od začátku naznačujeme, za nízkým třením mezi ledem a ocelí stojí malá vrstva vody na povrchu ledu, pro níž jsou dvě možná vysvětlení. Prvním vysvětlením je prostá existence takové vrstvy na povrchu ledu, protože molekuly vody nejsou zcela vázány a mají tedy dostatečnou volnost. Tento jev poprvé objevil Faraday již v roce 1840, když k sobě přiložil dvě kostky ledu, a tím je spojil. Původně povrchovým molekulám přidal potřebné vazby. Důkladné měření na sebe nechalo čekat až do roku 1996, kdy v Lawrence Berkeley National Laboratory rentgenovou fotoelektronovou spektroskopií vyvodili jednoznačný závěr. Tenká vrstva vody na povrchu ledu skutečně existuje při teplotách nad $-20\text{ }^\circ\text{C}$. Při $-2\text{ }^\circ\text{C}$ je její tloušťka 20 \AA . Když ke stejnému výsledku došli o pár let později i v Německu, zdála se kluzkost ledu objasněná.

V roce 2002 Miquel Salmeron, taktéž z Lawrence Berkeley, přišel s novým měřením. Nezpochybil výsledky svých kolegů, ale vyslovil domněnku, že přirozená povrchová vrstva vody na ledu není dostatečně tlustá na to, aby měla nějaký vliv na kluzkost ledu při teplotách různých od bodu tání. Po experimentu s AFM⁷ dokonce tvrdil, že led klade proti pohybu velký odpor. Podle něj v běžném měřítku

⁷⁾ Atomic Force Microscope

tloušťka vrstvy vody vzroste jako důsledek zahřívání třením. Svým experimentem to ale dokázat nemohl, protože hrot mikroskopu byl natolik malý, že voda okamžitě zamrzala. Tuto teorii podporují i starší měření z počátku 90. let, při nichž byly použity speciální brusle schopné měřit třecí sílu. Podle jejich autorů je kapalině podobný povrch skutečnou příčinou nízkého tření ledu s bruslí. Teplo vzniklé třením je dostatečné pro roztání tenké vrstvy ledu. Pro třecí sílu platí vztah

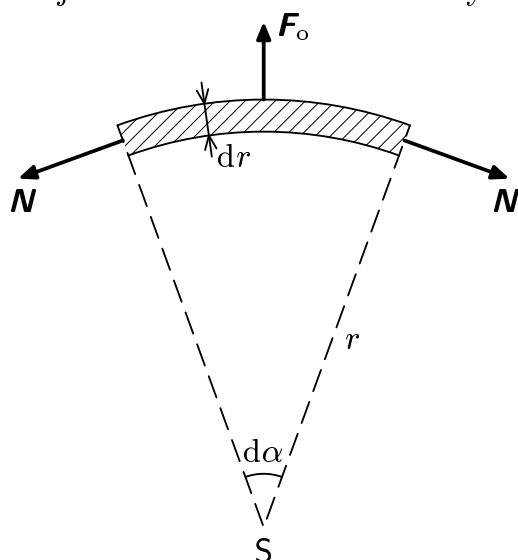
$$F_t = f F_n .$$

Při 100% účinnosti bychom roztavili vrstvu tlustou zhruba $30 \mu\text{m}$. Použitý vztah však není použitelný pro případy, kdy se jeden materiál boří do druhého, a po započítání dalších faktorů včetně vedení tepla se výsledek posune opět k vrstvám řádově tenčím.

Kupodivu jednoznačné řešení našeho problému v 21. století stále neexistuje. Nakonec už jen uveďme, že nejmenšího tření nedosáhneme při teplotách okolo nuly, kdy je sice vrstva vody nejtlustší, ale zároveň se do ledu více boříme. Jako optimální se z experimentů ukazuje teplota kolem -7°C , na kterou také mnohá kluziště svůj led chladí.

Úloha IV.3 ... vlček neboli káča

Inženýři v NASA chtějí využít setrvačnicků jako úložiště energie pro družice. Poradte jim, jakou maximální energii mohou uložit do rotujícího válce o poloměru r . Na jakou maximální úhlovou rychlost ω lze roztočit setrvačnick, než praskne?



Obr. 24. Působení sil na vrstvičku setrvačnicku

Vyřešení této úlohy spočívá v nalezení mezní odstředivé síly, aby nebyla překročena mez pevnosti materiálu v tahu. Komplexní řešení není snadné.

Nejdříve je dobré se podívat, co se stane, pokud překročíme mezní úhlovou rychlost. Po překročení mezní úhlové rychlosti dojde ke vzniku praskliny na obvodu válce. Tím se celý válec dostane do nestabilního stavu a prasklina se začne šířit směrem ke středu, až celý setrvačnick praskne.

Chceme-li vypočítat spodní odhad energie uložitelné do setrvačnicku, je možné zanedbat radiální napětí. V tomto modelu rozřežeme setrvačnick na tenké válcové slupky. Na každou slupku působí jednak odstředivá síla, dále pak také tangenciální napětí a nakonec také nenulová radiální síla.

Pro tento dolní odhad zanedbáváme výše uvedenou radiální sílu.

Je zřejmé, že výsledná uložitelná energie bude větší než tento odhad, protože radiální složka napětí by pomohla udržení válce v celistvosti.

Označme l výšku válce, R poloměr válce, r aktuální poloměr slupky respektive integrační proměnnou, ρ hustotu materiálu, σ_m mez pevnosti v tahu a ω úhlovou rychlost rotujícího setrvačnicku.

Nyní budeme uvažovat pouze výsek z pláště válce odpovídající úhlu $d\alpha$ (viz obrázek 24. Na vyšrafovanou část působí odstředivá síla o velikosti

$$dF_o = \omega^2 r dm, \quad dm = \rho l r d\alpha dr,$$

kde ω je úhlová rychlost setrvačnicku. Dále na tento element působí tahová síla N v tangenciálním směru. Ze silového trojúhelníku je vidět

$$dF_o = N d\alpha.$$

Odtud můžeme odvodit výraz pro tahovou sílu ve slupce

$$N = \omega^2 r^2 \rho l dr.$$

Nás ovšem zajímá napětí $\sigma = N/S$, kde $S = l dr$ je průřez uvažované slupky.

$$\sigma = \omega^2 r^2 \rho. \quad (22)$$

Zde již stačí pouze dosadit za σ mezní napětí σ_m . Z výrazu (22) je vidět, že napětí s rostoucí vzdáleností od středu roste. Protože nás zajímá, kdy se roztrhne vnější plášť, dosazujeme $r = R$.

Víme, že pro energii setrvačnicku platí $E = I\omega^2/2$ a pro moment setrvačnosti válce $I = mR^2/2$. Celková energie uložitelná do setrvačnicku je

$$E = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2. \quad (23)$$

Za ω^2 lze dosadit ze vztahu (22) a uvážíme-li navíc, že $V = m/\rho$, můžeme výsledek psát v elegantním tvaru

$$E_{\min} = \frac{1}{4} V \sigma_m,$$

kde V je objem setrvačnicku.

Druhé možné řešení spočívá ve vnímání válce jako dvou polovin, které se od sebe snažíme odtrhnout. Vypočteme celkovou sílu, jakou jsou od sebe při rotaci odtrhávány obě poloviny. Zde provedeme krok, který zaručí, že půjde o horní odhad. Budeme předpokládat, že síla je po celém průřezu konstantní, což nejspíše není pravda, protože u středu bude válec namáhán méně než na obvodu.

Další postup je zřejmý. Nejdříve vypočteme odstředivou sílu působící na jednotlivý trojúhelníkový element. To je integrál z odstředivých sil působících na jednotlivé slupky. Vypočteme proto nejdříve diferenciál síly

$$d^2 F_o = \omega^2 r dm, \quad dm = \rho l r d\alpha dr.$$

Chceme-li vypočítat sílu působící na výše zmíněný trojúhelníkový element středového úhlu $d\alpha$, uvědomíme si, že platí $dF_o = \int d^2F_o$ a můžeme psát

$$dF_o = \rho\omega^2 l d\alpha \int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3}\rho\omega^2 l R^3 d\alpha.$$

Tím jsme vypočetli velikost odtrhávající síly působící na smyšlenou rovinu χ . Síla dF_o však svírá s touto rovinou úhel α . Skutečná síla odtrhávající dvě poloviny válce je však pouze průmět dF_o do směru kolmého na χ . Musíme tedy integrovat průmět síly dF_o do roviny kolmé na χ přes celý objem válce. Tím nám vyjde celková síla odtrhávající obě poloviny válce od sebe.

$$F_o = \int_0^\pi \sin\alpha dF_o = \frac{1}{3}\rho\omega^2 l R^3 \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha = \frac{2}{3}\rho\omega^2 l R^3.$$

Protože předpokládáme konstantní napětí na rovině χ , můžeme položit $\sigma_m = F_o/S$, kde $S = 2Rl$ je plocha roviny χ .

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\rho\omega^2 R^2 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 R^2 = \frac{3\sigma_m}{\rho}.$$

Toto můžeme rovnou dosadit do vztahu pro energii (23). Využijeme-li dále $V = m/\rho$, dostáváme

$$E_{\max} = \frac{3}{4}V\sigma_m.$$

Do setrvačnicku lze uložit energii E , pro kterou platí

$$\frac{1}{4}V\sigma_m < E < \frac{3}{4}V\sigma_m.$$

Pro celkové řešení problému by bylo nutné zavést vektorové pole posunutí, což jsou vektory, které mají počátek v klidové poloze nějakého bodu a koncový bod je totožný s polohou bodu po deformaci. Dále ze znalosti tohoto pole posunutí lze jeho derivací získat radiální a tečnou složku deformace. Toto již tensorové pole lze přetransformovat pomocí tensoru pružnosti na tensor napětí a zkoumat, kdy složky tensoru napětí přesáhnou mez pružnosti a setrvačnick praskne. Toto řešení je však složité a ne vždy intuitivní.

Úloha IV.4 ... šachovnice

Jistě znáte pohádku o chytrákově, který si udělal legraci z krále tím, že mu dal za úkol na políčka šachovnice vyskládat postupně 1, 2, 4, 8, 16, ..., 2^{63} zrníček rýže po řádcích zleva doprava. Většinou se ale nedodává, že se chytrák velmi podivil, když král šachovnicový stůl nechal přinést. Vypočítejte, kde byl vypořádán, aby zrníčka nepadla. Zrníčka jsou hmotné body umístěné ve středu polí. (Přesněji řečeno nás zajímá poloha těžiště šachovnice s rýží.)

Vyjdeme ze vzorce pro těžiště

$$x_T = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_T = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

Vypočítejme těžiště první řady, pro niž platí $m_i = 2^i$, kde indexy bereme od nuly do sedmičky. Než se však vrhneme na sumy, nahlédneme, že všechny řádky budou mít x -ovou složku těžiště stejnou, stejně tak všechny sloupce mají stejnou souřadnici y -ovou – vždyť hmotnosti násobíme jenom nějakou mocninou konstanty 2^8 , čímž zlomek rozšiřujeme a jeho hodnota se nemění. Celá deska musí mít proto těžiště v bodě o souřadnicích (x_T, y_T) .

Stojíme před problémem, jak vypočítat součty typu $\sum_{i=0}^n k^i$ a $\sum_{i=0}^n ik^i$. První známe, říká se mu geometrická řada. Na vzorec se přijde jednoduchou úvahou: označme $S_n = 1 + k + \dots + k^n$. Potom od obou stran odečteme jedničku a vydělíme k , čímž dostaneme $(S_n - 1)/k = 1 + k + \dots + k^{n-1}$. Pokud k oběma stranám přičteme k^n , získáme na pravé straně rovnice opět S_n a odsud vyjádříme

$$S_n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}.$$

Obdobně postupujeme pro druhou sumu. Označíme $P_n = k^1 + 2k^2 + \dots + nk^n$. Potom $P_n/k = 1 + 2k + \dots + nk^{n-1}$ a z předchozího odstavce máme $-S_{n-1} = -1 - k - \dots - k^{n-1}$. Sečtením posledních dvou rovnic dostáváme

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = k + 2k^2 + \dots + (n-1)k^{n-1}.$$

To nás těší, protože na pravé straně nevyšlo nic jiného než $P_n - nk^n$. Teď už jen z rovnice

$$\frac{P_n}{k} - S_{n-1} = P_n - nk^n$$

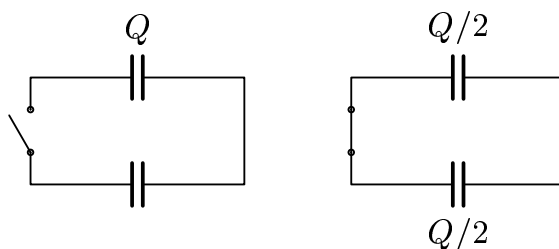
vyjádříme

$$P_n = \frac{k}{(k-1)^2} (k^n (nk - n - 1) + 1).$$

Pokud umíte derivovat, můžete si tento vztah odvodit derivováním částečného součtu geometrické řady. My už jen dosadíme pro řádek $k = 2$ a pro sloupec $k = 2^8$ a $n = 7$. Souřadnice těžiště vycházejí přibližně (6,031; 6,996), což se shoduje s domněnkou, že těžiště bude docela blízko předposledního políčka se souřadnicemi (6, 7).

Úloha IV . P ... zachraňte fyziku

Rozpojený obvod na obrázku 25 obsahuje jeden nenabitý a jeden nabitý kondenzátor (náboj Q). Vodiče jsou ideální, nemají žádný odpor, oba kondenzátory jsou stejné. Celková energie nábojů v obvodu tedy je $Q^2/2C$. Pokud se po sepnutí vypínače náboje na kondenzátorech vyrovnají, celková energie bude $Q^2/8C + Q^2/8C = Q^2/4C$, což je polovina oproti počáteční situaci. Vysvětlete tento rozdíl. Kde se spotřebovala polovina energie? Vypínač je vyrobený tak šikovně, že v něm vysvětlení netkví.



Obr. 25. Obvod s kondenzátory před a po sepnutí vypínače

Po sepnutí spínače je obvod jistě v nerovnováze, elektrony ze záporně nabitých elektrod kondenzátorů (uvědomme si, že kladný nebo záporný potenciál získá před nabitím kondenzátoru celý vodič spojený s danou elektrodou a s ním i vodič spojená elektroda druhého kondenzátoru) začnou být urychlovány k druhé elektrodě.

Při dosažení rovnovážného stavu, když se náboje na kondenzátorech vyrovnají, se však elektrony stále pohybují a k jejich zastavení je potřeba práce přesně opačná té, jež je urychlila. Vzhledem k symetrii to znamená, že se původně nabitý kondenzátor zcela vybijí a nenabitý kondenzátor získá náboj Q ; obvod se dostal zjevně do původního stavu, jen se kondenzátory vyměnily. Tímto způsobem by měl oscilovat stále dál; zkušenost by však ukázala, že i pro obvod s ideálními součástkami by se kmity časem utlumily a na obou kondenzátorech bychom naměřili stále hodnoty nábojů $Q/2$.

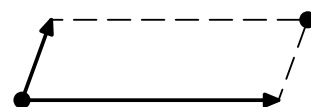
Vysvětlení je prosté. Pohybující se náboj (elektrony) vytváří kolem sebe magnetické pole. Jelikož rychlost elektronů se bude měnit, bude proměnlivé i vznikající magnetické pole a jak známo, při změně magnetického pole vznikají elektromagnetické vlny. Energie se tak z obvodu prostě vysvítí ve formě těchto elektromagnetických vln (při běžných kapacitách kondenzátorů půjde nejspíše o nějaké rádiové frekvence).

Stojí za zmínku, že se jedná vlastně o klasický LC oscilátor. Takový nebuzený LC oscilační obvod se obvykle skládá z cívky a předem nabitého kondenzátoru; zde je kondenzátor tvořen dvěma stejnými sériově zapojenými kondenzátory, takže celková kapacita bude $C/2$, původní napětí na kondenzátorech bude $U = Q/C$, takže výsledný kondenzátor se bude navenek tvářit, jako by měl na začátku náboj $Q/2$.

A co cívka? Ta přeci na schémátku není... Nebo snad ano? Běžnou značku cívky tu sice nenajdeme, ale ve skutečnosti je v obvodu „cívka“ s jedním závitem, tvořená vlastním vodičem propojujícím součástky. Tato smyčka má určitou vlastní indukčnost (její přesná hodnota závisí na tvaru a rozměrech obvodu a též na prostředí, v němž se obvod nachází), a je tedy schopna účinně indukovat napětí v obvodu a stejně tak vytváří ve svém okolí magnetické pole, jež svými změnami v důsledku konečné rychlosti šíření svých změn (rychlost světla) bude vytvářet elektromagnetické vlny.

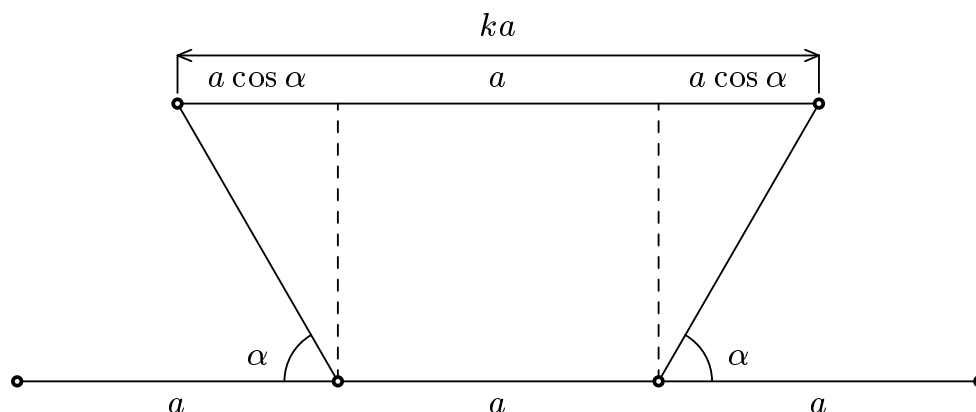
Úloha V.1 ... otáčení koberce

Pomocí dvou různých vektorů v rovině můžeme opakovaným posouváním počátečního bodu dostat nekonečnou mříž bodů (viz obr. 26). (Stejným způsobem vznikne krystal, jen místo bodu posouváme skupinu atomů.) Posunutím celé mřížky o jeden z vektorů dostaneme stejnou mříž, tj. každý bod bude nahrazen jiným bodem. Stejně tak se může stát, že otočením celé mřížky kolem jednoho bodu o nějaký úhel dostaneme stejnou mříž. Najděte všechny úhly, pro které je to možné, a nakreslete, jak vypadají mřížky s touto rotační symetrií.



Obr. 26

Dostali jsme před sebe síť bodů (rovnoběžníků) a chtěli bychom zjistit, o jaký úhel můžeme celou mříž otočit (okolo vybraného bodu) tak, abychom po rotaci nepozorovali žádnou změnu.



Obr. 27. Otočení vektoru

Uvažme čtyři body ležící na přímce tak, že vzdálenost mezi dvěma sousedními je vždy a ; to ilustruje obrázek 27. Vzdálenost a bude velikost jednoho z vektorů, který definuje mřížku. První bod otočíme o úhel $-\alpha$ okolo druhého bodu. Kolem třetího bodu pak otočíme o úhel $+\alpha$ čtvrtý bod. Oba nově vzniklé body leží na rovnoběžce s původní přímku. Aby ležely ve stejné mřížce jako původní čtyři body, musí být jeden z nových bodů posunutím druhého nového bodu o celočíselný násobek vektoru velikosti a . Tato vzdálenost se však dá vzhledem ke geometrii

situace popsat i jiným způsobem. Podle obr. 27 platí

$$ka = a + 2a \cos \alpha ,$$

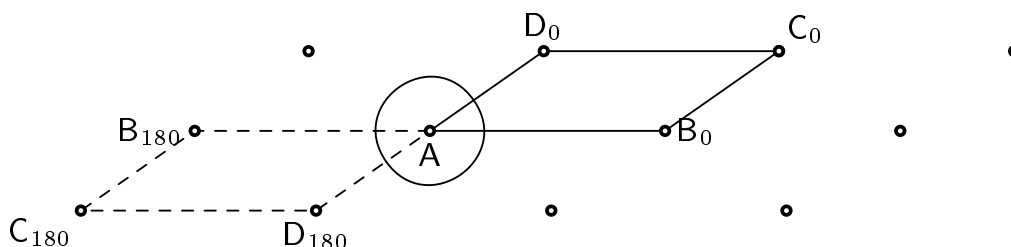
$$\frac{k - 1}{2} = \cos \alpha .$$

Jak dobře víme, $\cos \alpha$ nabývá hodnot pouze od -1 do 1 , a tak si všechny možné hodnoty shrňme do následující tabulky.

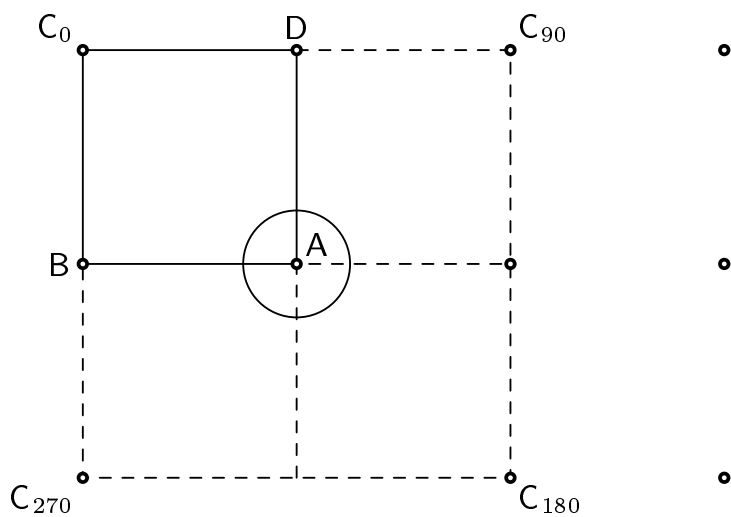
$k - 1$	$\cos \alpha$	α
-2	-1	180°
-1	$-1/2$	120°
0	0	90°
1	$1/2$	60°
2	1	0°

Jednotlivé hodnoty můžeme snadno ilustrovat stále na obr. 27. Rotace o 180° (jedná se o tzv. dvoučetnou osu) posune 1. bod na 3. a 4. vrátí na 2., jejich posunutí ka je opravdu ve smyslu zavedení $-a$. Při rotaci o 120° (okolo osy trojčetné) se body setkají uprostřed horní úsečky. Rotace o 90° (osa čtyřčetná) doplní čtverec a rotace 60° (šestičetná osa) je přímo na obr. 27.

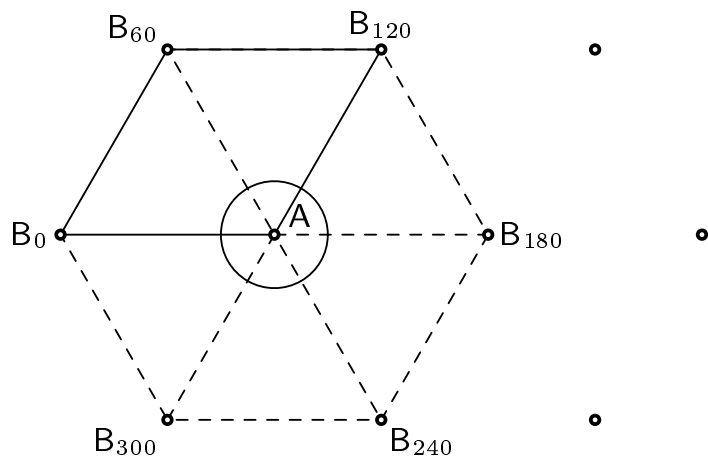
Všimněme si, že dvoučetná osa existuje vždy. Naopak na zbytek je potřeba specifikovat druhý vektor. Pro existenci čtyřčetné osy musí být oba vektory kolmé a mít stejnou velikost. Šestičetná osa vyžaduje taktéž vektory stejně dlouhé, musí ale svírat úhel 60° . Trojčetná osa je pak pouze speciálním případem osy šestičetné, stačí okolo ní otáčet dvakrát. Budeme-li mít pouze mříž bez tzv. hmotné báze, pak nenajdeme příklad, kdy by existovala osa trojčetná, ale neexistovala osa šestičetná. Pro shrnutí jsme připravili obrázky předvádějící jednotlivé příklady. Osa dvoučetná na obrázku 28, označené jsou všechny body před rotací i po ní. Na obrázku 29 rotujeme čtvercovou mříží, pro přehlednost budeme sledovat pouze bod C, rotujeme okolo bodu A. Poslední osa šestičetná je na obrázku 30.



Obr. 28. Rotace kolem dvoučetné osy



Obr. 29. Rotace kolem čtyřčetné osy



Obr. 30. Rotace kolem šestičetné osy

Úloha V.2 ... bitva o Británii

K odhalování nalétávajících bombardérů se používají silné světlomety s úzkým paprskem světla. Jaká bude jeho odchylka od původního směru v závislosti na úhlu natočení zdroje po průchodu atmosférou? Uvažujte, že hodnota indexu lomu s výškou lineárně klesá.

Snellův zákon říká, že při lomu na rovinném rozhraní mezi prostředími s indexy lomu N_k a N_{k+1} , přičemž dopadající paprsek svírá s kolmicí na rozhraní úhel o velikosti ϑ_k a lomený paprsek úhel o velikosti ϑ_{k+1} , platí

$$N_k \sin \vartheta_k = N_{k+1} \sin \vartheta_{k+1} .$$

Pokud máme rovnoběžných rovinných rozhraní několik, mezi prostředími N_0, N_1, \dots, N_n , pak platí

$$N_0 \sin \vartheta_0 = N_1 \sin \vartheta_1 = \dots = N_n \sin \vartheta_n ,$$

tedy za předpokladu, že na žádném z rozhraní nedojde k úplnému odrazu, závisí poměr mezi počáteční a výslednou odchylkou pouze na indexu lomu prvního a posledního prostředí, nezávisle na tom, kolik rozhraní se vyskytne. Atmosféru pak můžeme považovat za takovou řadu rovnoběžných rozhraní (přičemž $n \rightarrow \infty$, zakřivení atmosféry zanedbáváme). Že na žádném z těchto rozhraní k úplnému odrazu nedojde, plyne z podmínky, že pro libovolné místo s indexem lomu n_k v atmosféře platí

$$1 > \frac{N_0}{N_k} \sin \vartheta_0 ,$$

kde N_0 a ϑ_0 jsou index lomu a odchylka paprsku při povrchu. V našem případě, kdy jde index lomu lineárně od N_0 k jedné, to znamená

$$N_0 \sin \vartheta_0 < 1 .$$

Úloha V.3 ... zeměkoule

Jak rychle musela v době tuhnutí rotovat Země, aby se rovníkový poloměr lišil od polárního právě o tolik, o kolik se liší teď?

V dávných dobách, kdy se zde místo Sluneční soustavy vyskytovalo jen a pouze rotující mračno plynu a prachu, se zrodila naše Země. Tento prapředek dnešní Země na ní zanechal poskvrnu, a to rotaci. Právě zemská rotace z dob, kdy Zemi tuhl plášť, způsobila rozdíl mezi rovníkovým a polárním poloměrem.

Předpokládáme-li, že si zemský povrch zachoval svůj tvar v nepříliš pozměněné podobě dodnes, můžeme odhadnout periodu rotace v dávných dobách.

Úlohu řešíme ve vztažné soustavě rotující úhlovou rychlostí Ω . Protože tato vztažná soustava není inerciální, působí na každý hmotný kousek, který je v klidu, kromě síly gravitační ještě síla odstředivá; pro obě známe příslušné potenciální energie podle definičního vztahu

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p. \quad (24)$$

Podle obecného principu mechaniky zaujme kapalina tvar s nejmenší potenciální energií. Uvažme dále, že povrch Země zaujímá ekvipotenciální plochu; abychom to dokázali, předpokládejme (pro spor) různé energie ve dvou různých bodech povrchu. Na křivce parametrizované t , která body spojuje, je energie spojitou funkcí t a podle věty o střední hodnotě zde existuje bod s nenulovou projekcí gradientu potenciální energie na plochu, což je z definice nenulová tečná síla, které odpovídá nenulové zrychlení. Tak bychom dostali spor s ustáleným stavem.

Vypočteme nejprve velikost gravitační síly na rovníku a na pólu. Zemi lze pro tento případ velmi dobře aproximovat elipsoidem s malým rozdílem velikostí poloos ΔR .

Začneme zjištěním intenzity pole na pólu. Předpokládejme konstantní hustotu Země.

Nejprve vypočteme velikost intenzity gravitačního pole od kruhové desky (disku). Deska má tloušťku dh , je ve vzdálenosti h od pólu a má poloměr R . Písmeno r použijeme jako integrační proměnnou vyjadřující vzdálenost od středu disku. Hmotnost elementárního prstýnku je tedy

$$d^2M = 2\pi r \rho dr dh.$$

Pro kolmou složku intenzity pole od prstýnku platí (rovnoběžné složky se vyruší)

$$dK = \int_0^R 2\pi r \frac{G}{\zeta^2} \frac{h}{\zeta} \rho dr dh = 2\pi Gh \rho \int_0^R \frac{r dr}{\zeta^3} dh,$$

kde $\zeta = \sqrt{h^2 + r^2}$ je vzdálenost elementu od pozorovatele. Integrál vypočteme podle první věty o substituci

$$dK = 2\pi Gh \rho \int_0^R \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} dh = 2\pi G \rho \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R/h)^2}} \right) dh. \quad (25)$$

Abychom nyní zjistili velikost intenzity gravitačního pole na pólu, je potřeba tento výraz integrovat přes celou Zemi a dosadit za R správný poloměr. Předpokládáme-li, že Země má tvar elipsoidu s polárním poloměrem R_p a rovníkovým R_r , platí s ohledem na dřívější značení

$$\frac{(R_p - h)^2}{R_p^2} + \frac{R^2}{R_r^2} = 1. \quad (26)$$

Nyní můžeme položit $R_p = R_r - \Delta R$, kde ΔR je malé vzhledem k R_p i R_r . Lze tedy používat přibližnou rovnost $R_p^2 \approx R_r^2 - 2R_r\Delta R$, s jejímž využitím lze (26) upravit do tvaru

$$1 + \frac{R^2}{h^2} = \frac{2R_r}{h} - 2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{R_r} \right) \Delta R = \frac{2R_r}{h} (1 - \alpha \Delta R). \quad (27)$$

Zde jsme označili $1/R_r - h/R_r^2 = \alpha$.

Dosazením (27) do (25) a použitím aproximace $(1+x)^n \approx 1+nx$ pro x blízké 0 dostáváme

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (R/h)^2}} = \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha \Delta R}} \approx \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha \Delta R}{2} \right),$$

$$dK \approx 2\pi G \rho \left(1 - \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha \Delta R}{2} \right) \right) dh. \quad (28)$$

Zajímá-li nás výsledné pole na zemském pólu, stačí výraz (28) integrovat přes celou Zemi.

$$K = 2\pi G \rho \int_0^{2R_p} \left(1 - \sqrt{\frac{h}{2R_r}} \left(1 + \frac{\alpha \Delta R}{2} \right) \right) dh = 2\pi G \rho R_p \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{15} \frac{\Delta R}{R_r} \right).$$

Vzpomeneme-li na objem elipsoidu $V = 4\pi abc/3$ a položíme-li $M = 4\pi \rho R_r^2 R_p/3$, dostáváme

$$K_p = \frac{GM}{R_p^2} \left(1 - \frac{6}{5} \frac{\Delta R}{R_r} \right) \approx \frac{GM}{R_p^2} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_p} \right) \left(1 - \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_p} \right).$$

Na posledním rozkladu na součin založíme novou hypotézu gravitačního pole elipsoidu: Konkrétně, měříme-li gravitační pole na vrcholu elipsoidu s poloosami a, b, c , tvrdíme, že gravitační pole u průsečíku poloosy a a povrchu elipsoidu má velikost

$$K_a = \frac{GM}{a^2} \left(1 - \frac{3}{5} \frac{b-a}{a} \right) \left(1 - \frac{3}{5} \frac{c-a}{a} \right).$$

Pro gravitační pole na rovníku proto platí

$$K_r = \frac{GM}{R_r^2} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{\Delta R}{R_r} \right)$$

Z definice (24) pak už nečiní potíže dopočítat potenciál

$$\varphi_r = -\frac{GM}{R_r} \left(1 + \frac{3}{10} \frac{\Delta R}{R_r} \right), \quad (29)$$

$$\varphi_p = -\frac{GM}{R_p} \left(1 - \frac{6}{10} \frac{\Delta R}{R_p} \right) \approx -\frac{GM}{R_r} \left(1 + \frac{4}{10} \frac{\Delta R}{R_r} \right). \quad (30)$$

Na pólu skutečně vychází menší gravitační potenciální energie, a proto musíme k větší potenciální energii na rovníku přičíst (zápornou) potenciální energii odstředivé síly, abychom uspokojili požadavek ekvipotenciální plochy, který jsme si rozmysleli v úvodu

$$\varphi_p = \varphi_r - \frac{1}{2} \Omega^2 R_r^2.$$

Odsud již vyjádříme kýženou úhlovou rychlost

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM\Delta R}{5R_r^4}} = \frac{\sqrt{\Delta R}}{5R_r} \sqrt{\frac{g}{R_r}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \doteq 54 \text{ hod.}$$

Výsledek vykazuje řádovou shodu se současnou periodou rotace. Odchylna je způsobena především velkou měrou aproximací, mimo jiné předpokladem hustoty nezávislé na vzdálenosti od středu.

Tato úloha nebyla jednoduchá, naše řešení se snažilo ukázat, jak lze šikovným způsobem využít linearizace závislostí k jednoduššímu řešení problémů.

Úloha V.4 ... internetová

Mějme rovné optické vlákno. Světelný signál do něj vstupující může mít odchylku od přímého směru až α . Jak nejméně dlouhá musí být časová délka jednoho pulzu, aby šlo určit, zda byl vyslán bit 1, nebo 0, tj. aby aspoň krátký časový úsek byla síla signálu minimální nebo maximální. Délka vlákna je d .

Paprsek, který jde přímo, musí urazit dráhu d , kterou proletí za čas

$$t_1 = \frac{d}{c_v},$$

kde c_v je rychlost šíření světla v optickém vlákně. Paprsek, který vstoupil s odchylkou α , urazí vzdálenost $d/\cos \alpha$ (vlákno je rovné a úhel dopadu je roven úhlu odrazu) za čas

$$t_2 = \frac{d}{c_v \cos \alpha}.$$

Pro úhly menší než 90° je tato funkce rostoucí. Protože odchýlení paprsku nemůže být větší (paprsek by letěl „zpět“), tak nejdelší dobu poletí paprsek odchýlený o maximální možný úhel. Signál tedy nabude maxima za dobu

$$t_d = t_2 - t_1 = \frac{d}{c_v \cos \alpha} - \frac{d}{c_v} = \frac{d(1 - \cos \alpha)}{c_v \cos \alpha}$$

od příchodu nejrychlejší části signálu.

Jestliže tedy nový bit pošleme po uplynutí doby větší než t_d , tak nejpomalejší část předchozího pulsu dorazí dříve než nejrychlejší část nového pulsu, čímž bude splněna podmínka ze zadání, že alespoň malý okamžik má být hodnota přijímaného signálu rovna hodnotě vyslaného signálu. Časová délka jednoho pulsu t_p tedy musí být větší než t_d . Získáváme nerovnost

$$t_p > \frac{d(1 - \cos \alpha)}{c_v \cos \alpha}.$$

Úloha V.P ... rasmus

Pokuste se odhadnout, jakou energii přijme tělo návštěvníka rockového koncertu. Svůj odhad odůvodněte.

Upřesněme zadání a úvodem povězte, že budeme uvažovat příjem energie ze zvukových vln, ačkoli návštěvník koncertu ji zpravidla přijímá i jinými způsoby, například z energetických nápojů.

Předpokládejme, že prostor, ve kterém se koncert koná, je ozvučen aparaturou o celkovém výkonu P , od níž se nacházíme ve vzdálenosti r . Budeme uvažovat, že aparatura je dobře směřová, a tedy většinu energie vysílá před sebe, tj. směrem k posluchačům. Dalšího zjednodušení dosáhneme zanedbáním odražených zvukových vln. To je sice na první pohled velká nepřesnost, ale uvědomme si, že před i za námi stojí lidé, čili to, co se odrazí od těch za námi směrem na naše tělo, je zhruba srovnatelné, co nám odstíní návštěvníci, kteří přišli dříve a vytváří před námi stín. Čili se až tak velké chyby nedopouštíme. Navíc předpoklad, že se od ničeho žádný zvuk neodráží je dosti důležitý – tím, že se zvuk zcela pohltí z něj získáme energii, což se při odražení neděje. Dále označme S průmět plochy lidského těla do čelní roviny, což je trochu méně než polovina celkového povrchu.

Z teorie šíření akustických vln víme, že se zachovává celková přenášená energie, ale jak se od zdroje vzdalujeme, musí se rozdělovat do čím dál větší plochy, a tudíž zvukový výkon připadající na jednotku plochy je stále menší. Tento úbytek je zřejmě kvadratický vzhledem k r . Pro povrch sféry platí $S_s = 4\pi r^2$, ale my uvažujeme kvalitní reproduktory, takže budeme počítat jen s polovinou tohoto výrazu.

Výkon reproduktorů přepočtený na metr čtverečný se nazývá *intenzita zvuku* a platí $I = P/S_s$. Vynásobením plochou návštěvníka ihned získáme energii, kterou jeho tělo přijme během sekundy. Pokud hudba hraje celkem po dobu t , je situace již zcela jasná. Energie pohlcená člověkem na rockovém koncertě je

$$E = \frac{PSt}{\frac{1}{2}S_s} = \frac{PSt}{2\pi r^2}.$$

Nyní jej zkusme vypočítat i číselně. Dejme tomu, že výkon reproduktorů se pohybuje kolem 400 W, stojíme od nich 5 m daleko a koncert trvá 10^4 s, tedy necelé tři hodiny. Svou plochu necht' každý posoudí sám, ale my dosadíme $0,7 \text{ m}^2$. Vyjde

$$E \doteq 20 \text{ kJ}.$$

Vraťme se ještě k intenzitě zvuku, kterou mnoho řešitelů použilo ve svých výpočtech. Nejslabší zvuk, který lze slyšet, odpovídá svou intenzitou $I_0 = 10^{-12} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ hranici slyšitelnosti. Jestliže má zvuk intenzitu I , pak v logaritmické stupnici, jejíž jednotkou je decibel, vyjádříme hladinu intenzity

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

V našem případě by v okolí posluchače byla hladina intenzity zhruba 120 dB, což je poměrně hodně a odpovídá to hluku, který by slyšel člověk stojící těsně vedle startujícího letadla. Takový rámus by naše uši dlouhodobě snášely velmi těžko, ale tomu na koncertu zpravidla ani vystaveny nejsou, neboť ne vždy musejí být reproduktory zapnuty na plný výkon, ne vždy je jejich výkon kapelou využit a konečně i na koncertech se občas dělají krátké pauzy.

Úloha VI.1 ... odpor je marný

Vypočítejte odpor n -rozměrné krychle mezi dvěma nejvzdálenějšími vrcholy (ty o souřadnicích $(0, 0, \dots, 0)$ a $(1, 1, \dots, 1)$). Zkuste začít od trojrozměrné a použijte stejný postup.

V této úloze bylo asi nejtěžší si celou situaci správně představit. K tomu je dobré nakreslit si obrázek.

V zadání nebylo řečeno, že se krychle sestává pouze z hran. Pokud bychom však uvažovali plnou krychli z materiálu o konstantní rezistivitě, tak by měla mezi libovolnými dvěma vrcholy nekonečný odpor. V okolí vrcholu se dají očekávat jisté ekvipotenciální roviny. Zde je potřeba si uvědomit, že vyskytujeme-li se

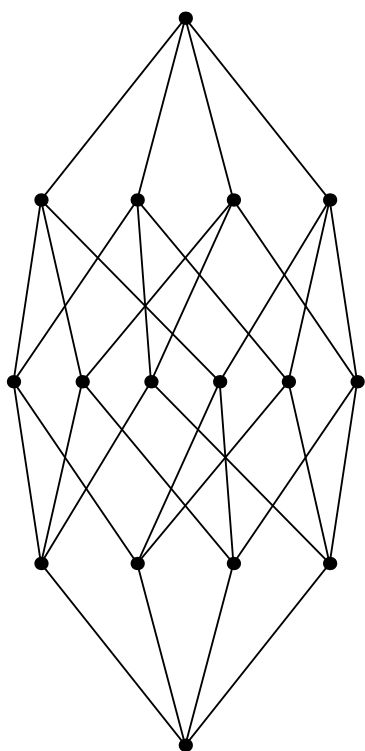
0. vrstva

1. vrstva

2. vrstva

3. vrstva

4. vrstva



Obr. 31. Čtyřrozměrná krychle

n -rozměrné krychle složené z hran, každá o odporu R .

V této úloze budeme značit souřadnice vrcholů (x^1, \dots, x^n) , $x^i \in \{0, 1\}$. Vzhledem k symetrii úlohy lze předpokládat jisté ekvipotenciální plochy. Na k -té ekvipotenciální ploše leží vrcholy ležící v $(n - 1)$ -rozměrném prostoru kolmém na

v n -rozměrném prostoru, tak oblasti se stejným potenciálem jsou variety o $n - 1$ rozměrech. Přivedeme-li do nějakého vrcholu elektrický proud, tak ve vzdálenosti d od vrcholu je „plocha“ ekvipotenciály úměrná d^{n-1} . Zajímá-li nás odpor až do vzdálenosti d_0 , platí

$$R_{d_0} = \int_0^{d_0} \frac{\rho dl}{S}, \quad (31)$$

kde však S značí plochu výše zmíněné ekvipotenciály, tedy $S \approx l^{n-1}$. Dosazením do (31) dostáváme pro $n \geq 2$

$$R_{d_0} \approx \rho \int_0^{d_0} l^{1-n} dl = +\infty.$$

Je vidět, že odpor více než jednorozměrné krychle, což je úsečka, je vůči libovolným dvěma různým vrcholům nekonečný. Proto se budeme dále zabývat odporem

tělesovou úhlopříčku. Tato plocha splňuje rovnici

$$\sum_{i=1}^n x^i = k \quad \text{pro } 0 \leq k \leq n. \quad (32)$$

Pokud se snažíme vypočítat odpor trojrozměrné krychle, tak nalezneme tyto, dvě ekvipotenciální plochy a „sečteme“ odpory, které jsou zapojené mezi nimi, dále pak již řešíme „pouze“ sériové spojování odporů mezi jednotlivými vrstvami. Máme-li však krychli n -rozměrnou, již nebudeme mít pouze tyto dvě ekvipotenciální plochy pro krychli, ale bude jich $n - 1$, kde n je dimenze.

Předpokládejme nyní tedy toto pásové uspořádání. Z každého vrcholu vychází právě n vodičů; do každého směru $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ jeden.⁸ Nejdříve vypočtíme, kolik vrcholů je ve které vrstvě. Všechny vrcholy ležící v k -té vrstvě jednak splňují rovnici (32), dále jejich souřadnice $x^i \in \{0, 1\}$. Z tohoto je již vidět, že počet uzlů ve vrstvě je

$$N_k = \binom{n}{k}. \quad (33)$$

Najdeme nyní vztah mezi koeficienty binomického rozvoje.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} \cdot \frac{m+1}{n-m} = \binom{n}{m+1} \cdot \frac{m+1}{n-m}. \quad (34)$$

Vodičů z vrstvy 0 do vrstvy 1 jde nN_0 , tedy součin počtu uzlů a dimenze.

Z první vrstvy vychází opět nN_1 vodičů, neboť dva sousedé nemohou ležet v téže vrstvě. Avšak vodičů, které se propojují první a druhou vrstvou je jen

$$G_{12} = nN_1 - nN_0. \quad (35)$$

Označíme-li G_{xy} počet vodičů spojujících vrstvu x s vrstvou y , v našem případě bude platit $|x - y| = 1$, můžeme upravit výraz (35) užitím identity (34) do tvaru

$$G_{12} = n \binom{n}{1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = (n-1)N_1.$$

Z tohoto výrazu je vidět, že z každého uzlu první vrstvy vychází jeden vodič do nulté vrstvy a $n - 1$ vodičů do druhé vrstvy.

Zformulujme nyní domněnku: nacházíme-li se v k -té vrstvě, tak z jednoho uzlu vychází $n - k$ vodičů do $(k - 1)$ -vé vrstvy a k vodičů do $(k + 1)$ -vé vrstvy. Matematicky zapsáno

$$G_{k(k+1)} = (n - k)N_k. \quad (36)$$

Důkaz provedeme indukcí. Pro $k = 0$ jsme ověřili výše. Nyní předpokládejme, že

$$G_{(k-1)k} = (n - k - 1) \binom{n}{k-1}.$$

⁸⁾ Vektory $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ mající jedničku na i -té pozici tvoří *kanonickou bázi* n -rozměrného prostoru. Každý z nich má délku 1 a je kolmý na všechny ostatní.

Toto znamená, že vrstvy $k - 1$ a k spojuje $G_{(k-1)k}$ vodičů. Dále však víme, že z vrstvy k celkově vychází $n \binom{n}{k}$ vodičů, dále však není žádná hrana rovnoběžná s tělesovou úhlopříčkou, což jasně implikuje

$$G_{k(k+1)} = n \binom{n}{k} - G_{(k-1)k}.$$

Úpravou výrazu, použitím identity (34) dostáváme

$$\begin{aligned} G_{k(k+1)} &= n \binom{n}{k} - (n - k - 1) \binom{n}{k - 1} = \\ &= n \binom{n}{k} - (n - k - 1) \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n - k - 1} = (n - k)N_k. \end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali domněnku (36).

Abychom nyní vypočetli odpor celé krychle mezi vrcholy $(0, \dots, 0)$ a $(1, \dots, 1)$, stačí vypočítat odpor mezi jednotlivými vrstvy; celkový odpor je součtem těchto parciálních odporů. Protože jsou všechny odpory stejně velké, platí

$$R_{k(k+1)} = \frac{R}{G_{k(k+1)}}.$$

Pro odpor celé krychle platí

$$R_{0n} = \sum_{i=0}^{n-1} R_{i(i+1)} = R \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i) \binom{n}{i}} = R \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \binom{n}{k}}.$$

Dostali jsme výraz pro celkový elektrický odpor krychle složené z hran o odporu R v n -dimenzionálním prostoru mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

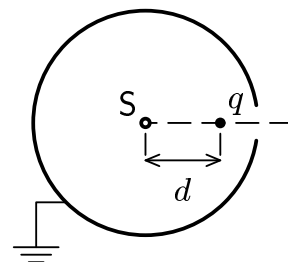
Ještě je zajímavé vypočítat, jak se vyvíjí odpor v závislosti na dimenzi, když $n \rightarrow \infty$.

$$R_{0n} = R \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n} \right) \approx \frac{2R}{n} \rightarrow 0.$$

Je vidět, že odpor klesá jako převrácená hodnota dimenze.

Úloha VI.2 ... útěk z koule

V uzemněné kouli z vodivého materiálu je vyvrtán malý otvor, tak akorát, že ním projde malá nabitá částice. Umístíme ji do vzdálenosti d od středu koule na spojnici jejího středu a otvoru (viz obrázek 32). Náboj pustíme. Jak daleko z koule vyletí ven? Zkuste využít metodu zrcadlového potenciálu.



Obr. 32. Koule s částicí

Náboj uvnitř koule na ni přitáhne ze země náboj opačný a ten se na ní určitým způsobem rozprostře. Vlastností vodičů a tedy i naší koule je, že jejich povrch má všude stejný potenciál, pro určitost si ho zvolíme jako nulový.⁹

Nyní si odmysleme velkou kouli a přimysleme naopak nějaký druhý bodový náboj. Předpokládejme, že v celkovém poli původního a nového se nachází plocha nulového potenciálu, která přesně kopíruje původní kouli. Potom je zřejmě pole těchto dvou nábojů ekvivalentní s původním polem náboje a koule.¹⁰

Kam zrcadlový náboj umístit a jak bude velký? Ze symetrie bude zřejmě ležet na ose částice a otvoru. Situaci budeme popisovat v řezu procházejícím touto osou, s počátkem ve středu koule a osou x mířící k otvoru. Označme r poloměr koule, Q zrcadlový náboj a D jeho vzdálenost od počátku. Potom zřejmě v bodech $(-r, 0)$, $(r, 0)$ vyžadujeme nulový potenciál, tedy

$$\frac{q}{r-d} + \frac{Q}{D-r} = 0, \quad \frac{q}{r+d} + \frac{Q}{D+r} = 0.$$

Vynásobením jmenovateli a sečtením, resp. odečtením, rovnic dostaneme

$$Q = -q \frac{r}{d}, \quad D = \frac{r^2}{d}.$$

Nyní ověříme, že plocha o nulovém potenciálu je skutečně vyžadovaná koule. Tedy pokusíme se rovnici

$$0 = \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} + \frac{Q}{\sqrt{(x-D)^2 + y^2}}$$

upravit na tvar $x^2 + y^2 = r^2$. A skutečně, několika elementárními algebraickými úpravami a využitím vztahů pro Q a D se nám to povede. Použití zrcadlového náboje je tedy oprávněné a potenciál v místě částice, než se začala pohybovat, je

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{D-d} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^2 - d^2}.$$

⁹⁾ Pokud by všude stejný nebyl, elektrony by se pohybovaly ve směru jeho spádu.

¹⁰⁾ Tato úvaha je, řekněme, klasická a v zadání na ni bylo odkazováno pod názvem metoda zrcadlového potenciálu. Pro obsírnější vysvětlení odkazujeme na 2. díl Feynmanových přednášek, část 6.7.

Co dál? Částice se začne působením náboje na kouli pohybovat ven z koule a s ní zrcadlový náboj naopak směrem ke kouli. Ve chvíli, kdy částice kouli opustí, na ni ale začne působit tato síla v opačném směru a částice se po čase zastaví. V tu chvíli bude mít zřejmě stejnou potenciální energii jako na začátku.

Označme l , resp. L , vzdálenost částice, resp. zrcadlového náboje Q' , od počátku v situaci, kdy je částice venku a zrcadlový náboj uvnitř. Potom zřejmě $Q' = -qr/l$ a $L = r^2/l$ jako v prvním případě. Pro potenciál v místě částice tedy máme

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{l-L} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{l^2-r^2}.$$

Z rovnice $\varphi_1 = \varphi_2$ potom už jednoduše vyjádříme $l = \sqrt{2r^2 - d^2}$ a vzdálenost částice od koule, na kterou se ptala úloha, tedy bude $\sqrt{2r^2 - d^2} - r$.

Úloha VI.3 ... relativistická koule

Při pohybu rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla dochází ke kontrakci délek, ale zároveň se nám předmět zdá delší, než ve skutečnosti je (zkuste sledovat paprsky světla vyslané z bližšího a vzdálenějšího konce tělesa). Vypočítejte, jestli se u relativistické koule tyto efekty nevyruší.

Nechť se koule v dané inerciální soustavě pohybuje rychlostí v ve směru osy x' . (Sledujte obrázek.) Její rozměry v tomto směru se v souladu se speciální teorií relativity zkrátí (rozměry ve směru osy x' v této soustavě jsou vynásobeny faktorem $\sqrt{1-u^2}$ oproti klidovým rozměrům v tomto směru, kde $u = v/c$), a proto v této inerciální soustavě nabude koule tvar elipsoidu.

Dále budeme předpokládat, že kouli sledujeme z velké vzdálenosti. To nám umožní aproximovat světelnou vlnoplochu, která nám bude podávat zrakovou informaci v jistý okamžik, rovinou (v obecném případě v isotropním prostředí by se jednalo o vlnoplochu kulovou).

Letící elipsoid bude vypadat jako koule, pokud bude mít sjednocení průniků pohybuujícího se elipsoidu a vlnoplochy ve všech časech promítnuté na rovinu vlnoplochy kruhový tvar. (Vyjádříme-li tuto podmínku jinými slovy, přilétnuvší vlnoplocha na sítnici v daný okamžik „vypálí“ kruh. Uvědomme si ale, že pokud bychom kouli pomalovali nějakým vzorkem, připouštíme deformaci vzorku u pohybuující se koule.)

Výpočty si ještě poněkud zjednodušíme, pokud příklad převedeme na rovinný problém rozřezáním na roviny rovnoběžné se směrem pohybu vlnoplochy i elipsoidu. V řezu bude tedy vlnoplocha přímkou, elipsoid elipsou; výsledný průmět bude pak úsečkou. Tyto úsečky by pak po opětovném složení měly utvořit kruh.

Umístíme-li střed koule (v dané soustavě elipsoidu) v čase $t = 0$ do počátku kartézské soustavy souřadnic, dostáváme rovnici pohybuující se elipsy

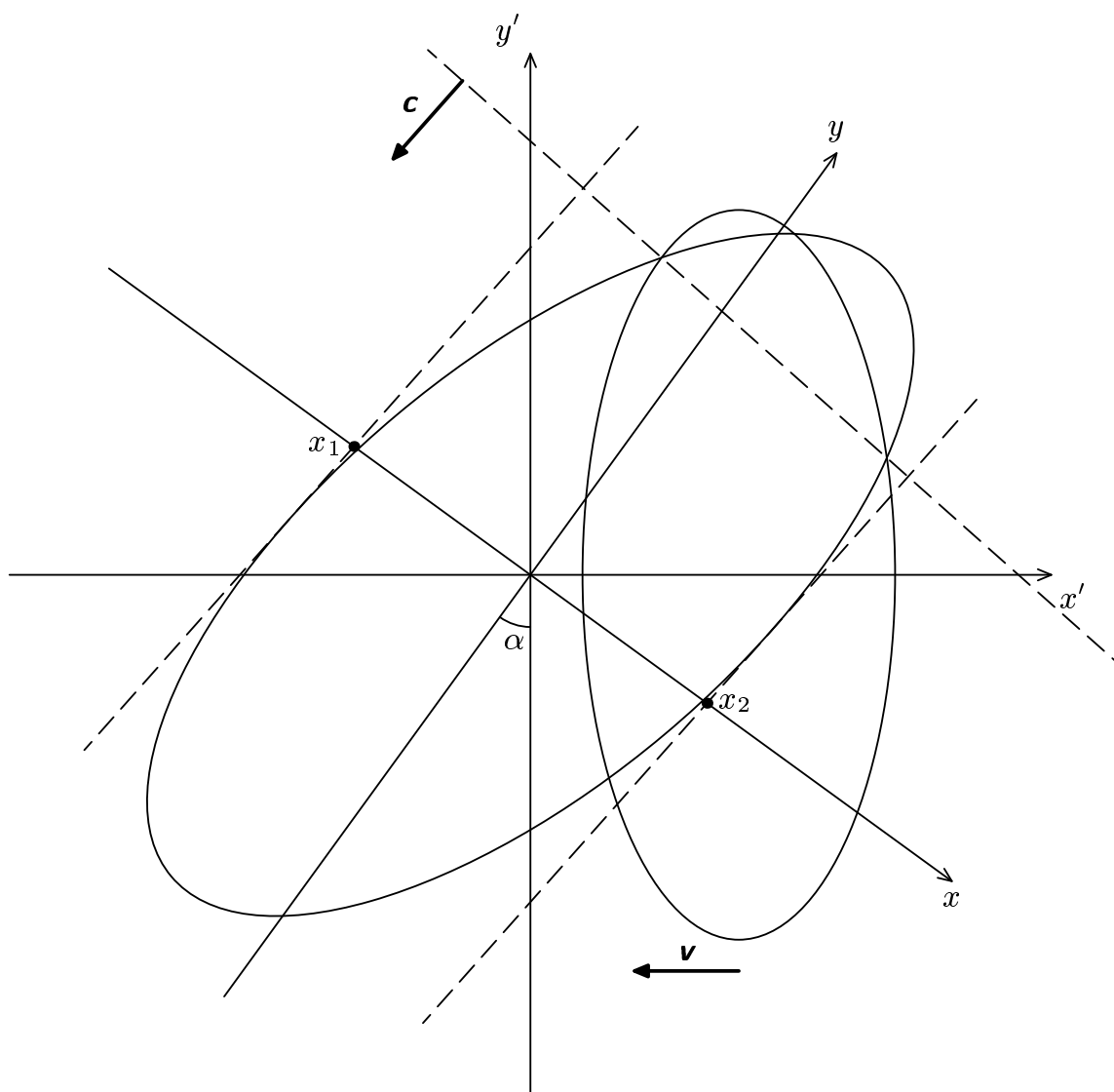
$$\frac{(x' + vt)^2}{(1-u^2)r^2} + \frac{(y')^2}{r^2} = 1,$$

kde r jest klidový poloměr odpovídající *kružnice* (jež je výsledkem řezu původní koule uvedenou rovinou). Budiž normála vlnoplochy od osy y' odchýlena o úhel α . Zvolíme nyní novou kartézskou soustavu souřadnic se stejným počátkem, avšak s osou y mířící ve směru normály vlnoplochy. Transformace je tedy dána předpisem

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned}$$

Rovnice elipsy v těchto souřadnicích jest tedy

$$\frac{(x \cos \alpha + y \sin \alpha + vt)^2}{(1 - u^2)r^2} + \frac{(-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2}{r^2} = 1.$$



Obr. 33. Letící elipsa

V těchto souřadnicích je snadné vyjádřit rovnici pohybující se vlnoplochy směrem k pozorovateli

$$y = -ct.$$

Z toho pak můžeme dosadit za výraz $vt = -uy$ do rovnice elipsy; po úpravě tak dostáváme rovnici množiny průniků vlnoplochy a elipsy (od nynějška používáme z důvodu úspory místa označení $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$, rychlost světla ve vakuu již dále použita není).

$$(xc + ys + yu)^2 + (-xs + yc)^2(1 - u)^2 - r^2(1 - u^2) = 0.$$

Výsledný útvar je zřejmě opět nějakou elipsou. Po roznásobení, využití vztahu $s^2 + c^2 = 1$ a seskupení členů obsahujících x^2 , xy , y^2 nebo r^2 nabude rovnice tvaru

$$y^2(1 + u^2 + 2su - c^2u^2) + xy(2cu + 2csu^2) + x^2(1 - s^2u^2) - r^2(1 - u^2).$$

Najdeme nyní krajní body x_1, x_2 kolmého promítnutí tohoto obrazce na osu x . Vzhledem ke konvexnosti elipsy má každá z přímk $x = x_1, x = x_2$ právě jeden bod dotyku s oním útvarem. Díky této jednoznačnosti musí být diskriminant výše uvedené kvadratické rovnice v neznámé y nulový, tj. po drobných úpravách

$$(cu + csu^2)^2 - (1 + u^2 + 2su - c^2u^2) \left((1 - s^2u^2) - \frac{r^2}{x_{1,2}^2} (1 - u^2) \right) = 0.$$

Roznásobením a po poměrně značném množství jednoduchých úprav dostáváme výsledek

$$x_{1,2}^2 = r^2,$$

tedy $x_1 = -r, x_2 = r$. Tyto krajní body jsou totožné s těmi, které bychom získali sledováním řezu stojící koule. Tudíž pohybuující se koule vypadá opět jako koule podle výše uvedené podmínky.

Na závěr poznamenejme, že nápověda v zadání byla nakonec poněkud zavádějící, neboť nejpřednější a nejzazší bod původní elipsy se netransformuje přesně na body x_1 , resp. x_2 , protože elipsa vzniklá „proskenováním“ původní elipsy vlnoplohou nemá osy rovnoběžné s osami x, y (to by v uvedené rovnici nestrašily členy obsahující xy).

Úloha VI.4 ... kámen na pístu

Marek má píst o rozměru S s ideálním plynem v rovnovážném stavu (p , V a T). Na tento píst z výšky h pustí kámen o hmotnosti m (viz obr. 34). Píst se stlačí a opět vrátí do nějaké polohy zpět. Jak závisí tato poloha na hmotnosti kamene a výšce, ze které byl upuštěn? Je možné, že se píst ustálí ve vyšší poloze než byl prve? Jak se změní teplota plynu v pístu?

Pokusme se uvažovat takový fyzikální model, který aspoň trochu odpovídá realitě a zároveň je dostatečně jednoduchý.

Předpokládejme, že válec je umístěn v atmosféře o tlaku p_a , přičemž přestup tepla mezi plynem uvnitř válce a vnější atmosférou je velmi malý, jako je tomu třeba u termosky, která má tepelně izolovanou vnitřní a vnější stěnu. Vnitřní stěna válce je v tepelné rovnováze s plynem uvnitř a vnější stěna je v rovnováze s vnější atmosférou. Pokud ohřejeme vnější stěny válce, teplo nebude proudit dovnitř a naopak. Označme hmotnost pístu M . Tepelnou kapacitu C vnitřní stěny válce uvažujme nejprve nulovou, na konci se k tomu vrátíme.

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákona zachování energie. Součet mechanické energie systému a „tepelné“ energie systému musí být na začátku i na konci děje shodné.

Během nepružné srážky kamene a pístu se část kinetické energie kamene přemění v teplo Q , které ohřeje jednak kámen a jednak vnější stěnu pístu. Rychlost kamene těsně před srážkou je $v_0 = \sqrt{2gh}$, rychlost pístu s kamenem po nepružné srážce je rovna $v_1 = mv_0/(m+M)$, jak plyne ze zachování hybnosti, a jeho kinetická energie

$$E_{k,1} = \frac{m^2 v_0^2}{2(m+M)} = \frac{m^2 gh}{m+M}. \quad (37)$$

Předpokládejme, že uvolněné teplo Q unikne do atmosféry a nebude hrát roli v naší zkoumané energetické bilanci.

Stav v okamžiku srážky kamene a pístu berme za počáteční, vertikální poloha a potenciální energie kamene a pístu budiž v tomto okamžiku zvolena jako nulová. Veličiny vztahující se k počátečnímu, resp. koncovému stavu budeme značit indexem 1, resp. 2. Vnitřní energie ideálního plynu je dána

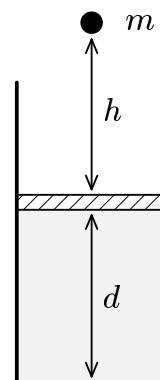
$$U = \alpha N k_B T = \alpha p V,$$

přičemž druhá rovnost plyne ze stavové rovnice. Zde N značí počet molekul, k_B Boltzmannovu konstantu a $\alpha = 5/2$ pro dvouatomový plyn (např. dusík, kyslík). Celková energie počátečního stavu je

$$E_1 = E_{k,1} + U_1 = E_{k,1} + \alpha p_1 V_1.$$

V počátečním a koncovém stavu je výsledná síla působící na píst nulová a platí tedy rovnosti

$$p_1 = p_a + Mg/S,$$



Obr. 34. Píst před dopadem kamene

$$p_2 = p_1 + mg/S, \quad (38)$$

kde S je plocha pístu. Píst je v koncovém stavu v klidu, musel tedy nutně být brzděn třením, jinak by totiž stále oscilloval kolem rovnovážné polohy. Při tření vzniká teplo na vnitřní stěně válce, které přechází do uzavřeného plynu. Energie zůstává v systému.

Celková energie koncového stavu je

$$E_2 = E_{p,2} + U_2 = (m + M)gs + \alpha p_2 V_2,$$

kde s je výška pístu oproti počáteční. Tlak p_2 je dán rovnicí (38) a zároveň $V_2 = V_1 + Ss$. Díky rovnosti $E_1 = E_2$ potom platí

$$E_{k,1} + \alpha p_1 V_1 = (m + M)gs + \alpha(p_1 + mg/S)(V_1 + Ss).$$

Zvednutí pístu s odtud poté vyjádříme

$$s = \frac{E_{k,1} - \alpha mgd}{(1 + \alpha)g(m + M) + \alpha p_a S}.$$

Závislost energie $E_{k,1}$ na h, m, M je dána vztahem (37).

Z vyjádření s je patrné, že píst vystoupí výše, než byl původně, v případě, že $E_{k,1} > \alpha mgd$.

Pokud by veškeré teplo Q přešlo zpět do systému a nikoli do okolí nebo pokud $m \gg M$, podmínka pro zvednutí pístu je $mgh > \alpha mgd$, a tedy pro dvouatomový plyn $h > 5d/2$.

Když píst stoupne a ještě ke všemu nese větší zátěž než původně, je zřejmé, že teplota plynu vzrostla mezi počátečním a koncovým stavem. Teplota samozřejmě vzroste ve všech případech, protože když naopak píst klesne, kinetická energie i rozdíl potenciální energie mezi počátečním a koncovým stavem se uloží do vnitřní energie plynu.

Učinili jsme celkem neoprávněný předpoklad o nulovosti vlastní tepelné kapacity C vnitřní stěny válce. Všimněme si ale, že kapacitu C lze do provedených výpočtů snadno započítat zvětšením konstanty α . Tudíž C zahrneme přímo do tepelné kapacity plynu.

Úloha VI. P ... lidští ptáci

Titan – družice Saturnu – je mrazivý svět (povrchová teplota asi 94 K) s mohutnou dusíkovou atmosférou, s ledovým povrchem a uhlovodíkovými jezery. Průměr Titanu je 5150 km, hmotnost je 1/45 hmotnosti Země, tloušťka jeho atmosféry je 200 km a tlak na jeho povrchu je 1,5 atmosféry.

Na základě předložených údajů určete gravitační zrychlení na povrchu a odhadněte hustotu atmosféry. Srovnáním s parametry ptáků v pozemských podmínkách rozhodněte, zda by opeřený člověk mohl na Titanu létat.

Gravitační zákon ve tvaru $a = \kappa m/r^2$, kde a označuje zrychlení, κ gravitační konstantu, m hmotnost planety a r vzdálenost od středu, platí jak pro hmotné body, tak pro libovolné kulově symetrické rozložení hmoty (analogie mezi gravitací a elektrostatikou). Dodejme, že pro tíhové zrychlení na Zemi platí $g = \kappa M/R^2$ a z poměru obou rovnic dostaneme

$$a = \frac{m}{M} \left(\frac{R}{r} \right)^2 g = 1,34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Co se v zadání míní tloušťkou atmosféry? Hustota atmosféry s výškou klesá přibližně exponenciálně, což vyjadřuje barometrická formule (totéž pro tlak)

$$\rho = \rho_0 \exp \left(- \frac{Agh}{RT} \right),$$

v níž A označuje molární hmotnost, g zrychlení, h výšku nad povrchem, R plynovou konstantu a T termodynamickou teplotu. Všimněte si, že v čitateli stojí potenciální energie jednoho molu v homogenním tíhovém poli, takže tento vztah je jednoduchým důsledkem vztahu Boltzmannova. V grafu se závislost hustoty (logaritmické měřítko) na výšce (lineární měřítko) podobá klesající přímce. V určité výšce pozorujeme malý „zhup“ podobný skelnému přechodu. V této výšce také začíná růst teplota. Tloušťku atmosféry definujeme jako konec tohoto přechodu; v zemské atmosféře mu odpovídá výška $h = 110 \text{ km}$ a hustota $\rho = 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Lze teď postupovat obráceně a z definice tloušťky atmosféry jako výšky, kde hustota nabývá 10^{-8} násobku hustoty na povrchu, odvodit tloušťku atmosféry? Pokud považujeme tíhové zrychlení za konstantu, nikoliv. Z výšky atmosféry totiž odvodíme pouze rychlost poklesu, ale tlak bude vždy přímo úměrný celkové hmotnosti atmosféry.¹¹

Pokud bychom (mechanicky) vycházeli ze vzorce pro hydrostatický tlak $p = \rho g h$, dostali bychom nesmyslně nízkou (v atmosféře konstantní) hustotu $\rho = 0,57 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Tento model totiž uvažuje kapalnou atmosféru.

¹¹⁾ Pokud bychom místo homogenního tíhového pole uvažovali tíhové pole planety, v němž je potenciální energie $E_p = -\kappa Mm/x$, objevil by se problém. Hustota by totiž se vzrůstající vzdáleností konvergovala k nenulové konstantě. To by znamenalo nekonečnou celkovou hmotnost, čímž by byl porušen předpoklad, že pole způsobuje pouze masa Titanu. Navíc bychom u takto nekonečného tělesa těžko mohli těžko mluvit o tepelné rovnováze.

Vhodněji atmosféru popíšeme modelem ideálního plynu, který předpokládá platnost stavové rovnice $pM = \rho RT$. Z ní plyne hustota dusíku ($M = 0,028 \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$) $\rho = 5,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; rovnice van der Waalsova dává hustotu $\rho = 5,6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pro danou teplotu a tlak jsou podmínky platnosti rovnic splněny.

Mohl by na Titanu opeřený člověk létat? Za létání považujeme jednak aktivní třepetání křídélky jako vrtulník, jednak pasivní nadnášení díky profilu křídel jako u rogalu. Vyšetřujme podmínky aktivního letu. V našem řádovém odhadu označíme charakteristickou délku R a frekvenci f : K zemi „letouna“ táhne tíhová síla $F \sim R^3 \rho_1 a$ (vztlak zanedbatelný), zatímco k věčným ideálům míří síla odporová turbulentního proudění $F \sim \rho R^4 f^2$ (odporovou sílu při pohybu křídel nahoru lze díky nízké rychlosti zanedbat). Podmínka rovnováhy dává pro člověka stejné velikosti jako orel úměru

$$\frac{f_o}{f_1} = \sqrt{\frac{\rho_o}{\rho_1}} \sqrt{\frac{g}{a}} \sqrt{\frac{p_T}{p_Z}} \sqrt{\frac{T_Z}{T_T}} \doteq 5,$$

kde jsme odhadli orlí hustotu asi na $0,7 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$ (možná jste si všimli, že někteří ptáčci mají nižší hustotu než voda, a tedy plavou). Na druhou stranu takový model počítá s hmotností ptáka asi 50 kg , což dost nesedí, tedy přesnost tohoto odhadu je asi jeden řád. Vypočítejme ještě potřebný výkon

$$P = FRf \sim \rho R^5 f^3.$$

Výkon výrazně závisí na charakteristickém rozměru a na frekvenci. Pro metrového orla vychází na zemi řádově desítky wattů. Pro člověka s dvoumetrovými křídly na Titanu řádově stovka wattů. Zkoušeli jste někdy šplhat na laně bez nohou? Borci výkonu řádově stovky wattů dosáhnou.

Závěrem tedy konstatujeme, že díky vyšší hustotě a nižšímu tíhovému zrychlení by opeřený člověk nejspíš mohl létat, ale musel by se pěkně ohánět.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... copak nám to tady smrdí?

Změřte rozdíl hustot čerstvého a zkaženého vejce a zjistěte i její časovou závislost! Pokuste se také vysvětlit své výsledky a zvažte užití statistického zpracování.

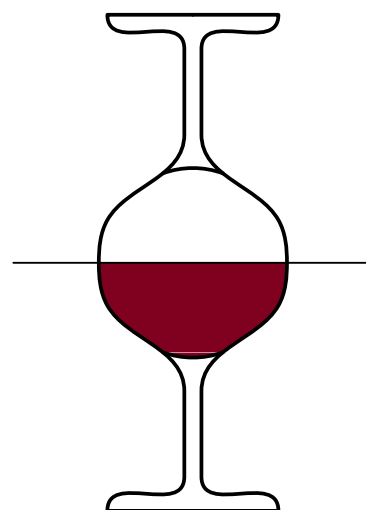
Tip: Vejce se rychle zkaží například na sluníčku. (řešení str. 69)

Úloha II. E ... šikmá věc

Kolik vody musí být v PET lahvi postavené na uzávěr, aby její stabilita byla největší (při vychýlení ze svislé polohy spadne ze nejdelší čas)? Nezapomeňte na teoretickou předpověď. (řešení str. 72)

Úloha III. E ... ve víně je pravda

Vyzkoušejte si následující pokus. Naplňte až po okraj stejné sklenice vína a vody. Na tu s vodou položte list papíru, sklenici otočte a položte na sklenici s vínem tak, aby jejich okraje lícovaly (konečný stav vidíte na obrázku). Teď, když opatrně vytáhnete papír tak, aby v kruhu vytyčeném okrajem sklenic vznikla malá mezírka, dojde k zajímavému jevu. Obsahy sklenic se vymění, aniž by se smísily (pokus trvá poměrně dlouho, buďte trpěliví). Zkuste se zamyslet proč, ale hlavně úkaz pořádně prozkoumejte. Zjistěte, jak závisí doba výměny na ploše mezírky, koncentraci alkoholu a jiných parametrech podle vašeho uvážení. Proběhne i pro jiné kapaliny? Například pouze obarvenou vodu, mléko, olej, ... (řešení str. 77)



Obr. 35. Cabernet Sauvignon

(řešení str. 79)

Úloha IV. E ... blowjob

Kupte si nafukovací balonek, nafoukněte jej, zvažte a proměřte, jak se jeho objem mění s časem. Pokuste se určit, kolik z plochy balonku zabírají póry, kterými vzduch uniká.

Úloha V. E ... záchodová

Změřte, jak vysoko vystříkne voda při upuštění různých těles na vodní hladinu. Studujte závislost na výšce, tvaru a hmotnosti. Jaká část energie se využije na rozvlnění hladiny? (řešení str. 84)

Úloha VI. E ... vratné lahve

Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi. (řešení str. 87)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... copak nám to tady smrdí?

Změřte rozdíl hustot čerstvého a zkaženého vejce a zjistěte i její časovou závislost! Pokuste se také vysvětlit své výsledky a zvažte užití statistického zpracování.

Tip: Vejce se rychle zkaží například na sluníčku.

Teorie

Při snášce se sníží teplota vejce asi o dvacet stupňů, takže objemovou kontrakcí vody se uvnitř vytvoří podtlak a vejce nasaje vzduch. Vzniklá vzduchová bublina se časem zvětšuje, protože se vypařují plyny (vodní pára, oxid uhličitý). Plyny unikají pórovými kanálky, jichž se ve skořápce nachází na 10 tisíc, ale kapaliny jimi neproniknou. Změny teploty a vlhkosti neovlivňují pevnou skořápku; objem vejce se zachovává. Nepropustnost skořápky pro kapalnou vodu dovoluje měřit objem ponořením do vody, protože si můžeme být jisti, že nevnikne do vejce, a nezmění tak měřenou hustotu. Povrch vejce a pórové kanálky pokrývá vrstvička lipidů a bílkovin – kutikula, která částečně chrání vejce před mikroorganismy. Umytí vejce, které kutikulu setře, zvyšuje kazivost a vypařování vody (viz tabulka). Proto se vejce někde po umytí olejují.

Zvyšování hmotnostního rozdílu oproti čerstvému vejci: Úprava povrchu snižuje změnu hmotnosti až dvojnásobně, stejně jako teplota a vzdušná vlhkost. Podle W. J. Stadelmana: *Egg Science and Technology*.

čas	10 °C vysoká vlhkost		24 °C nízká vlhkost	
	olej [g]	mytá [g]	olej [g]	mytá [g]
2 h	0,018	0,025	0,029	0,041
4 h	0,032	0,048	0,060	0,085
6 h	0,042	0,064	0,077	0,113
1 d	0,107	0,172	0,197	0,328
2 d	0,167	0,228	0,313	0,572
3 d	0,212	0,374	0,411	0,795
4 d	0,260	0,469	0,506	1,017
5 d	0,309	0,575	0,604	1,256

V otázce vypařování vody odkazujeme na úlohu 14. III. 4 a také 16. VI. E, k níž podotýkáme, že měříme vajíčko a nikoliv chrastící krabičku, takže předpokládáme lineární závislost.

Ujasněme si ještě, že z nízké hustoty vejce obecně nelze dovozovat jeho zkaženost, stejně jako z faktu zkaženosti nevyplývá, jakou má hustotu. Pokud pravidelně měříme hustoty zkaženého a požitelného vejce, nemusíme pozorovat rozdíl přesahující nejistotu měření.

Nejistotu měření veličiny m značíme Δ_m , relativní nejistotu $\delta_m \equiv \Delta_m/m$. Průměrná hustota se vypočítá jako podíl hmotnosti a objemu $\rho = \rho(m, V)$. Uvažujme zcela přesné měření hmotnosti $\Delta_m = 0$; pak se nejistotu výsledné funkce odhadneme pomocí prvního diferenciálu

$$\Delta_\rho = \frac{d\rho(V)}{dV} \Delta_V,$$

tedy v okolí měření nahradíme funkci její tečnou. Analogicky postupujeme pro m . Zásadní tvrzení, které dovoluje vůbec odhadnout nejistotu funkce více proměnných, tvrdí, že nejistoty se sčítají kvadraticky. Pro součet dvou veličin jsou příslušné derivace jednotkové, takže $\Delta_{f(x,y)} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$. Pro podíl $\rho = m/V$ z toho plyne

$$\delta_\rho = \sqrt{\delta_V^2 + \delta_m^2}.$$

Obvykle má nejistota dvě části: chybu měřidla (tu u hmotnosti neuvažujeme) a chybu statistickou $\Delta_y^2 (n-1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$, které se opět sčítají kvadraticky.

Měření

Měřili jsme nečištěná vejce Kaufland, z podniku živočišné výroby Ovus. Jedno vejce mělo od počátku měření puklinu, která se projevila na dvojnásobném výparu. Některá vejce obkružovaly „rýhy“ ztenčené skořápky.

Relativní úbytek hmotnosti a jeho nejistota v čase.

t/d	$\mu(t)/10^{-3}$	$\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$	t/d	$\mu(t)/10^{-3}$	$\Delta_{\mu(t)}/10^{-3}$
0,00	0,00	0,00	3,73	6,1	0,8
0,15	0,42	0,13	4,04	6,4	0,9
0,61	1,24	0,20	4,75	7,2	1,0
0,75	1,44	0,18	5,11	8,3	1,2
0,98	1,68	0,21	5,75	9,4	1,3
1,23	1,88	0,26	5,91	9,8	1,4
1,63	2,38	0,33	6,18	10,2	1,5
1,87	2,61	0,37	6,73	11,2	1,6
2,21	2,87	0,38	6,90	11,6	1,6
2,57	3,97	0,58	7,19	12,2	1,7
2,92	4,64	0,66	7,61	12,9	1,7
3,29	5,33	0,72	7,88	13,3	1,8

Hmotnost jsme měřili na digitální váze s přesností 0,01 g, kterou vzhledem k statistické nejistotě a nejistotě objemu neuvažujeme. K měření objemu menších těles se používá zařízení zvané pyknometr; skládá se z dvou nádob zabroušených

přesně tak, aby do sebe zapadly. Z vrchní nádoby při šroubování vytéká voda ocejchovanou trubičkou. Pokud měříme hmotnost pyknometru nejprve jen s kapalinou známé hustoty a poté s měřeným tělesem, jednoduše vypočítáme objem s vysokou přesností. To však patří do říše divoké fantazie, protože se musíme spokojit s odměrným válcem přesnosti 1 ml.

Měřili jsme 10 vajec po dobu osmi dní v rozmezí teplot 16–24 °C (viz tabulka). Za veličinu vyjadřující úbytek hmotnosti jsme vybrali relativní úbytek $\mu \equiv 1 - m(t)/m(0)$, kterou ve smyslu výše uvedeného nezatěžuje žádná chyba.

Lineární regrese

Za předpokladu, že v lineární závislosti $y = kx$ veličinu x_i měříme přesně a veličině y_i odpovídá rozptyl σ_i^2 , můžeme se domnívat, že součet odchylek

$$S(k) = \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2$$

nabývá minimální hodnoty¹². Tím bychom přiznali všem výsledkům stejnou váhu, nicméně bychom samozřejmě chtěli, aby přesnější výsledky měly váhu větší, a proto zavedeme „přirozený“ váhový faktor $w_i = 1/\sigma_i^2$. Funkce

$$S(k) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - kx_i)^2$$

nabývá minima pro

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}$$

a rozptyl určíme podle vztahu

$$\sigma_k^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i x_i^2}.$$

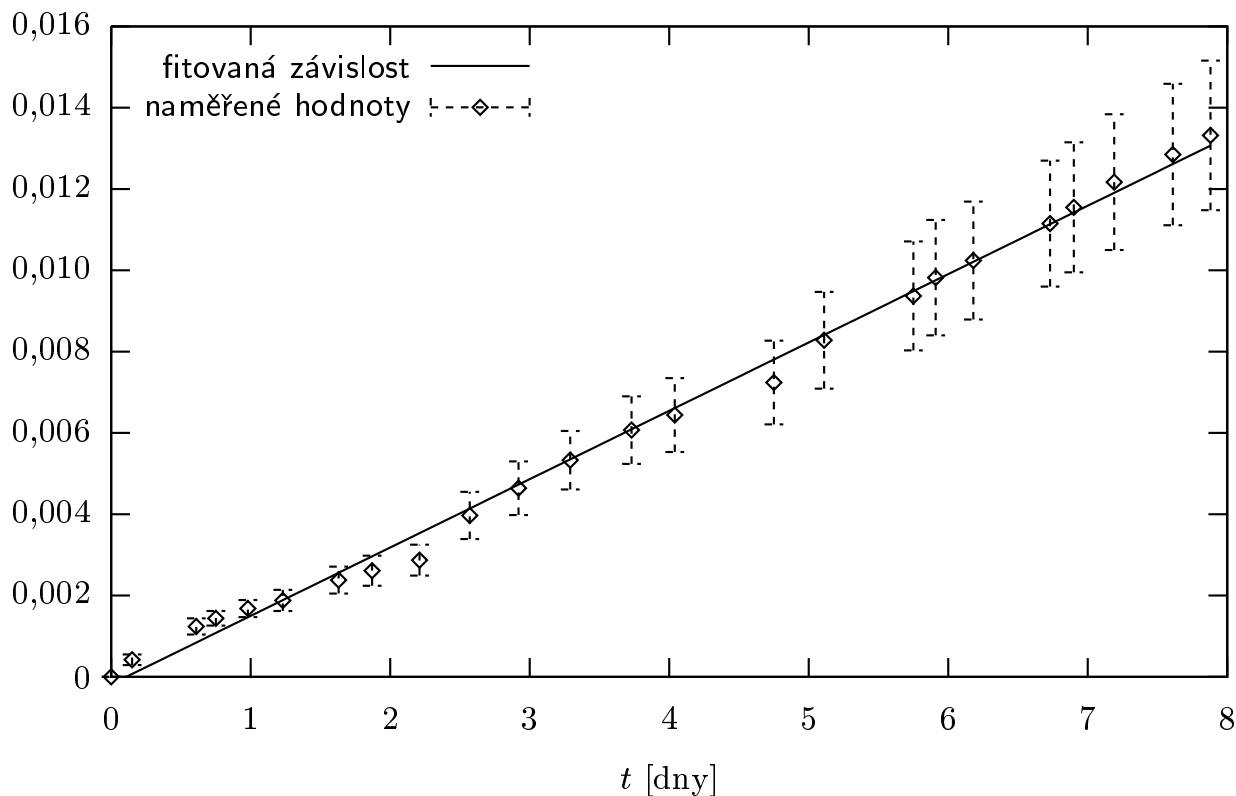
Tento postup také vysvětluje, proč tzv. linearizace grafu závislosti má pouze informativní hodnotu. Při prokládání přímky podle oka přece neuvažujeme váhové faktory!

Dosazením získáme výsledek

$$k = \left(\frac{\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i t_i}{\Delta \mu_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\Delta \mu_i^2}} \pm \left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i^2}{\Delta \mu_i^2} \right)^{-1/2} \right) = (1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ d}^{-1}.$$

Z měření objemu pak snadno dopočítáme, že se hustota snížila z $\rho(0) = (1058 \pm 22) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ na $\rho(8 \text{ d}) = (1043 \pm 23) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, přičemž největší nejistota pochází z nepřesného měření objemu.

¹²⁾ Předkládaný postup má hlavně didaktický cíl. Míjíme podrobnosti, např. pokud bychom měřili nepřesně i x_i , počítali bychom vzdálenost bodu (x_i, y_i) a přímky $y = kx$ pod úhlem daným nejistotami.



Obr. 36. Graf závislosti relativního úbytku hmotnosti na čase

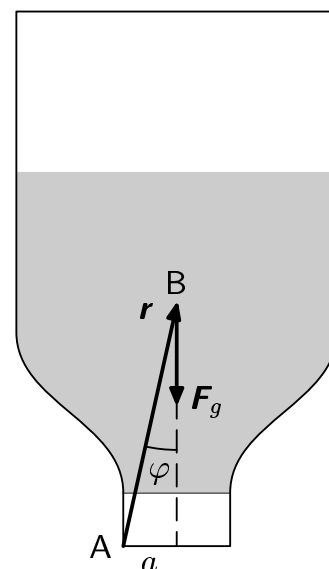
Úloha II.E ... šikmá věc

Kolik vody musí být v PET lahvi postavené na uzávěr, aby její stabilita byla největší (při vychýlení ze svislé polohy spadne ze nejdelší čas)? Nezapomeňte na teoretickou předpověď.

Teorie

Je třeba se zamyslet nad tím, jaké si zvolíme kritérium, podle kterého budeme hodnotit stabilitu lahve s vodou. Omlouváme se za kritérium nastíněné v zadání, které je trochu matoucí.

Bod hrany víčka, kolem kterého se lahev otáčí, označme A, těžiště B, vektor z bodu A do B bude \mathbf{r} , úhel sevřený vektorem \mathbf{r} a svislým směrem je φ , průmět \mathbf{r} do vodorovného směru je poloměr víčka, který označme a . První kritérium, které nás pravděpodobně napadne, je velikost momentu síly \mathbf{M} , kterým je třeba na lahev působit, abychom ji převrátili. Ovšem $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_g$. Velikost M je rovna součinu velikosti F_g a průmětu vektoru \mathbf{r} do směru kolmému na \mathbf{F}_g , tento průmět je roven a (viz obrázek). Přiléváním vody do lahve roste



Obr. 37. PET lahev „vzhůru nohama“

úměrně F_g , avšak a se vůbec nemění. Přirozeně podle tohoto kritéria je tedy lahev tím stabilnější, čím více je v ní vody.

Rozumné kritérium stability je rozhodně práce W potřebná k převržení. W odpovídá součinu $m\Delta h$, kde Δh je potřebné zvednutí těžiště k převržení. Zanedbejme na chvíli vlastní hmotnost prázdné lahve a fakt, že se voda přelévá, a uvažme, že lahev je válcová. Při užití těchto silných zjednodušení si lze rozmyslet, že výraz $m\Delta h$ bude maximální při minimálním množství vody. Když zjednodušení opustíme, dojdeme k závěru, že maximální práci potřebnou k převržení, a tedy největší stabilitu dostaneme pro částečně naplněnou lahev.

Budeme zkoumat ale ještě jiné kritérium stability, a to dobu T , za kterou se lahev vrátí do svislé polohy, když jsme ji předtím vychýlili. Nikoli tedy dobu pádu lahve na zem, jak jsme navrhovali v zadání, ale dobu pádu zpět do svislé polohy. Kratší doba T znamená větší stabilitu. Uvažujme na chvíli, že voda v lahvi je „zamrzlá“, tedy že se nepřelévá. Když lahev trochu vychýlíme ze svislého směru a pustíme, lahev se vrací do svislé polohy, přičemž úhel φ se mění podle rovnice

$$J\ddot{\varphi} = mgr \sin \varphi, \quad (39)$$

kde $\ddot{\varphi}$ značí druhou derivaci φ podle času, tedy úhlové zrychlení, J je moment setrvačnosti lahve vůči bodu A. Máme diferenciální rovnici pro neznámou funkci $\varphi(t)$, která vyjadřuje fakt, že moment setrvačnosti tělesa krát úhlové zrychlení je rovno momentu působící síly. Pokusme se aspoň kvalitativně zjistit, jak funkce $\varphi(t)$ vypadá. V případě malých úhlů je $\sin \varphi \approx \varphi$ a rovnici (39) lze psát ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgr}{J} \varphi. \quad (40)$$

Tato rovnice nám říká, že druhá derivace funkce $\varphi(t)$ je rovna té samé funkci $\varphi(t)$, která je pouze přenásobená konstantou. Vzpomeneme si, jak se derivuje exponenciála, a přijdeme na to, že funkce vyhovující (40) jsou tvaru

$$\varphi(t) = Ce^{t\sqrt{mgr/J}} + De^{-t\sqrt{mgr/J}} \quad (41)$$

pro nějaké reálné konstanty C a D . Úhel φ v okamžiku, kdy lahev pouštíme, označme φ_0 , úhel φ odpovídající svislé poloze značme φ_1 .

Na začátku platí $\varphi(0) = \varphi_0, \dot{\varphi}(0) = 0$. Pro splnění těchto dvou počátečních podmínek je třeba v (41) položit $C = D = \varphi_0/2$. Následně ještě vylovíme v paměti definiční vztah pro hyperbolický kosinus $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$. Řešení pohybové rovnice (40) při splnění počátečních podmínek je proto

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cosh \left(t \sqrt{\frac{mgr}{J}} \right). \quad (42)$$

Dobu pádu T z polohy $\varphi(0) = \varphi_0$ do svislé polohy $\varphi(T) = \varphi_1$ dostáváme vyjádřením z (42)

$$T = \sqrt{\frac{J}{mgr}} \operatorname{argcosh} \frac{\varphi_1}{\varphi_0}. \quad (43)$$

Pro různá množství vody m budeme měřit čas T odpovídající průchodu mezi polohami φ_0 a φ_1 . Ve všech měřeních na počátku láhev vychýlíme stejně. Musíme si ale uvědomit, že pro různá množství vody v lahvi odpovídají počáteční výchylce a svislé poloze různé hodnoty $\varphi_0(m)$, $\varphi_1(m)$. Stejně tak $J(m)$ a $r(m)$ jsou nekonzstantními funkcemi hmotnosti m . Funkce $T(m)$ má pak celkem komplikovaný průběh, který zjistíme měřením.

Následující úvahu si důkladně rozmyslete. Přilítím malého množství vody se sníží poloha těžiště a hodnota výrazu φ_1/φ_0 v (43) se zmenší. J se změní nepatrně, m trochu vzroste, zatímco r se o něco zmenší, ovšem výraz pod odmocninou se celkově zmenší. Ze začátku tedy přiléváním vody dostáváme menší časy T , pro malá m je funkce $T(m)$ klesající. Podobnými úvahami dojdeme k tomu, že pro hodnoty m odpovídající téměř plné lahvi je funkce $T(m)$ naopak rostoucí. Odtud plyne, že pro určité m nabývá $T(m)$ minima.

Doposud jsme uvažovali, že voda je v lahvi „zamrzlá“. Když se voda přelévá, při vychýlení lahve je těžiště níže než pro zamrzlou vodu. Pravděpodobně proto reálně dostaneme časy T větší než v odhadu podle (43); pro velká množství vody bude tato odchylka méně výrazná. Aproximace $\sin \varphi \approx \varphi$ naopak způsobí, že předpovídáme větší časy než skutečné; opět pro velká m je tato odchylka méně výrazná.

Všimněme si, že pro $\varphi_0 \rightarrow 0$ (tedy poloha „vleže“) dostáváme časy jdoucí k nekonečnu a měřený čas T by tedy velice silně závisel na počátečním φ_0 . To by do měření vneslo velkou nepřesnost.

Měření

Použili jsme litrovou lahev od mléka, protože má větší víčko a lahev je tak stabilnější. Víčko je navíc pěkně ploché. Hmotnost prázdné láhve je 37 g. Zesponu na dno lahve jsme pomocí tavné pistole přidělali špejli, vznikl tak jakýsi bodce. Budeme měřit čas T průchodu bodce mezi polohami, které odpovídají úhlům $\varphi_0(m)$ a $\varphi_1(m)$.

K měření uijeme spojení dvou optických závor. Optickou závorou rozumíme kombinaci LED a fototranzistoru (dále FT), přičemž LED osvětluje FT. Neosvětlený FT je uzavřený, osvětlením se otevírá. Připojme na zdroj napětí do série FT a odpor R . V našem případě zdroj je 9 V baterie a $R = 100 \Omega$. Při osvětlení se FT otevírá, roste proud, napětí na R stoupá a na FT klesá. Na stejný zdroj zapojme paralelně k první větvi ještě druhou shodnou větev, tedy sériové spojení FT' a R' . Pozorujeme rozdíl napětí ΔU na R a R' . Jsou-li oba FT osvětleny, je ΔU nulové. Při chvilkovém zastínění jednoho z FT pozorujeme napěťový puls. Napětí ΔU přivedeme na konektor JACK, který strčíme do zdířky počítače pro mikrofon. Například pomocí programu Audacity můžeme sledovat časový průběh přivedeného napětí a odměřit časový odstup pulsů. Musíme dát pozor, aby ΔU nebylo příliš vysoké, čímž bychom si mohli poškodit počítač. Bohatě postačuje pracovat s napětími ΔU řádově v desetinách voltu. Toho docílíme třeba tak, že do série za R a FT do každé z větví zapojíme ještě odpor řádově větší, v našem případě 10 k Ω . Ze stejné baterie je možno napájet i LED, které s předřadným odporem zapojujeme paralelně k již existujícím dvěma větvím.

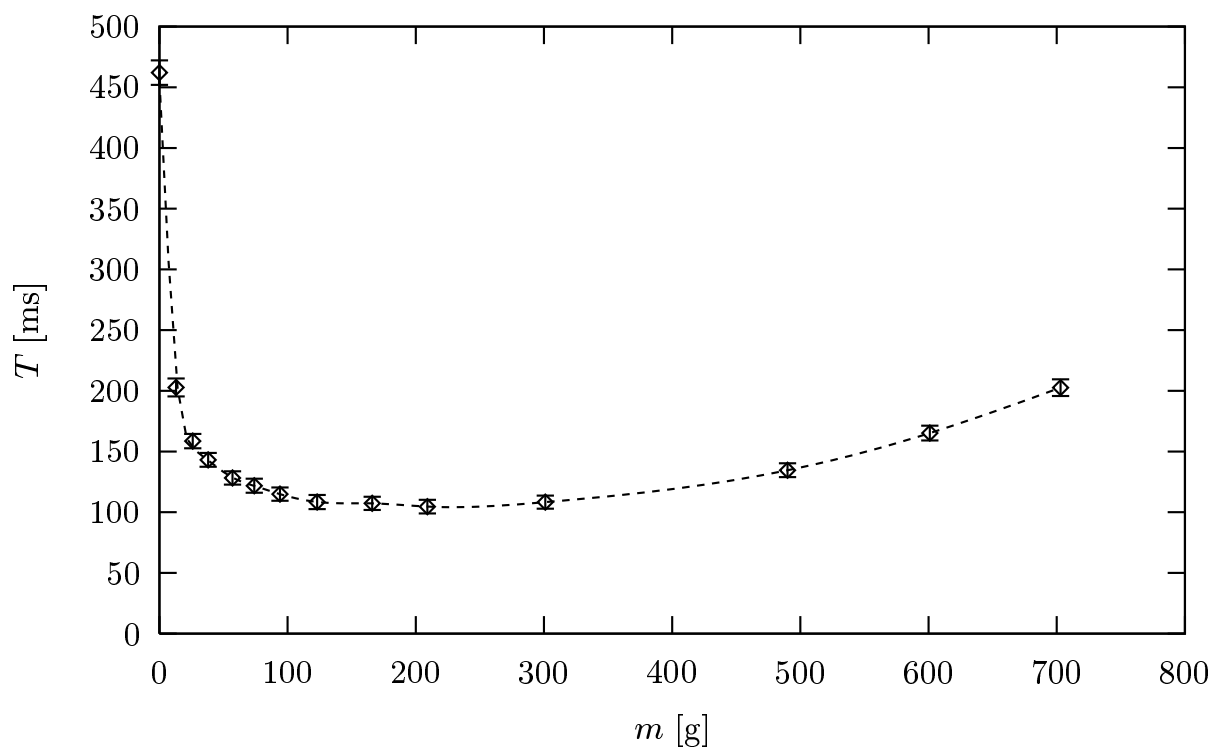
Ze stavebnice Merkur jsme si postavili konstrukci, na které jsou umístěny obě optické závory a která zaručuje konstantnost počátečního vychýlení.

Měřené časy T jsou malé, řádově v desetinách sekundy. Abychom dokázali určit, kdy je lahev nejstabilnější, vyžadujeme přesnost minimálně v řádu setin sekundy, lépe však v řádu milisekund. Proto se raději vyhneme měření ručně stopkami. Měření pomocí optické závory našemu požadavku vyhovuje. Odezva FT (tedy prodleva mezi osvětlením a otevřením) je o několik řádů nižší než požadovaná přesnost, a nemusí nás trápit.

Výsledky měření shrnuje tabulka a graf, kde je vynesena závislost času T na hmotnosti vody v lahvi m . Pro každé m jsme provedli několik měření, abychom si udělali obrázek o přesnosti. T získáme jako průměr. V tabulce je pro každé m uvedena směrodatná odchylka souboru měření. Rovněž uvádíme z toho plynoucí statistickou nepřesnost aritmetického průměru u_{stat} . Potěšující je, že je směrodatná odchylka řádově v milisekundách. Výslednou chybu určení T odhadujeme o 5 ms větší než je u_{stat} , protože je třeba uvážit i možnost systematické chyby.

Minimální T odpovídá zhruba hmotnosti vody $m = 200 \pm 50$ g, při tomto množství vody prohlásíme lahev za nejstabilnější.

Graf a tabulka na následující stránce potvrzují naše kvalitativní závěry učiněné v teoretickém rozboru.



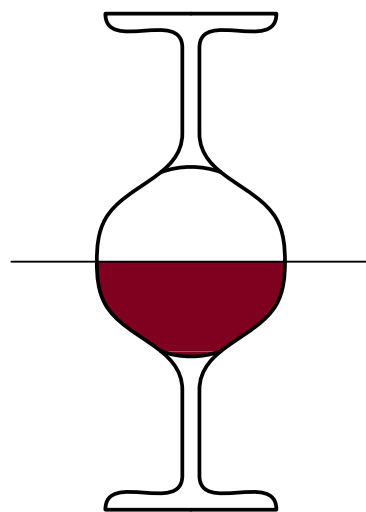
Obr. 38. Výsledné hodnoty proložené křivkou

Tabulka výsledků měření

m [g]	0	13	26	38	57	74	94
T [ms]	450	206	160	147	130	119	114
	475	197	160	141	127	122	114
	477	204	155	141	127	126	115
	482	200	158	144	131	121	114
	473	198	156	144	128	122	113
	463	196	158	143	130	120	118
	444	221	164	142	126	125	117
	435	198	160	141	127	119	114
	460	205	156	145	128	122	115
\bar{T} [ms]	462	203	159	143	128	122	115
σ [ms]	15	7	3	2	2	2	2
u_{stat} [ms]	5	2	1	1	1	1	1
m [g]	123	166	209	301	490	601	703
T [ms]	108	108	105	110	137	161	202
	108	107	102	107	135	172	212
	103	106	108	107	136	166	201
	111	106	102	110	136	167	192
	108	107	104	108	131	168	197
	111	107	107	107	131	162	207
	112	107	104	109	136	162	204
	108	110	105	107	134	164	200
	107	108	104	110	135	165	208
\bar{T} [ms]	108	107	105	108	135	165	203
σ [ms]	3	1	2	1	2	3	6
u_{stat} [ms]	1	1	1	1	1	1	2

Úloha III . E ... ve víně je pravda

Vyzkoušejte si následující pokus. Naplňte až po okraj stejné sklenice vína a vody. Na tu s vodou položte list papíru, sklenici otočte a položte na sklenici s vínem tak, aby jejich okraje lícovaly (konečný stav vidíte na obrázku). Teď, když opatrně vytáhnete papír tak, aby v kruhu vytyčeném okrajem sklenic vznikla malá mezírka, dojde k zajímavému jevu. Obsahy sklenic se vymění, aniž by se smísily (pokus trvá poměrně dlouho, buďte trpěliví). Zkuste se zamyslet proč, ale hlavně úkaz pořádně prozkoumejte. Zjistěte, jak závisí doba výměny na ploše mezírky, koncentraci alkoholu a jiných parametrech podle vašeho uvážení. Proběhne i pro jiné kapaliny? Například pouze obarvenou vodu, mléko, olej, ...



Obr. 39. Cabernet Sauvignon

Teorie

Úvodem poznamenejme, že tato úloha byla spíše hravou nežli experimentální v pravém slova smyslu. Přesto bychom se však měli zamyslet nad všemi jevy, které během našich hrátek můžeme pozorovat.

V první řadě jde o trik s otočením sklenice dnem vzhůru. Jak je možné, že voda nevyteče? Odpověď je všude kolem nás – atmosférický tlak. Je zřejmé, že na papírovou membránu „přilepenou“ na otočené sklenici působí tíhová síla papíru a vody a dále síla, kterou způsobuje tlak okolního vzduchu, a síla způsobená povrchovým napětím vody. Toto napětí je rovněž zodpovědné za to, že voda ze sklenice nevyteče, ani když mezi jejím okrajem a listem papíru vytvoříme drobnou mezírku. Analogicky, když pak dáme sklenice na sebe, může se stát, že při malém otvůrku mezi oběma kapalinami nedojde k jejich promísení. Štěrba proto musí být dostatečně velká, abychom tento problém překonali.

Na druhou stranu, bude-li otvor zase příliš velký, může dojít k vytvoření víru a promíchání se vody s vínem, kvůli čemuž je od sebe již neoddelíme. Je tudíž třeba dbát na pozvolné a opatrné vytahování listu papíru z prostoru mezi sklenicemi.

I víno totiž obsahuje značné množství vody (podle odrůdy kolem 80 %) a s vodou se poměrně snadno mísí, čehož využívají nepoctiví obchodníci. Naproti tomu alkoholu je ve víně zhruba 9 až 15 %. Zbytek tvoří cukry, barviva, aromatické látky a podobně. A dostáváme se konečně k jádru problému. Alkohol má mnohem nižší hustotu nežli voda ($0,79 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$). Když tedy obě sklenice propojíme malým otvorem, řidší víno se postupně dostane nad hustší vodu. Vytvoříme-li otvor příliš velký, dojde k jejich promíchání a kouzlo se nepovede.

Zajímavou otázkou je, jak závisí rychlost výměny na podmínkách pokusu. Je zřejmé, že pro různé kombinace různých kapalin bude tento čas odlišný. Rychlost procesu bude především záviset na rozdílu hustot použitých látek. Kromě vody budeme používat $\rho_{\text{olej}} = 910 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{víno}} = 960 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $\rho_{\text{mléko}} = 1030 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Dalším parametrem by měly být rozměry použitých sklenic a vzniklé štěrbin. Kromě těchto faktorů hraje roli také viskozita kapalin, ale víno i voda jsou na tom z tohoto hlediska dobře, a s pomalu tekoucími látkami, jako je třeba med, experimentovat nebudeme. Zajímavé bude také prozkoumat tento jen s ohledem na různá povrchová napětí použitých kapalin. Ta ovšem závisejí na teplotě. Proto budeme všechny pokusy provádět při pokojové teplotě. Připomeňme, že voda má povrchové napětí oproti ostatním látkám o dost vyšší ($\sigma_{\text{voda}} = 72,7 \text{ mN/m}$). Pro představu uveďme také povrchová napětí dalších užívaných látek: $\sigma_{\text{mléko}} = 52 \text{ mN/m}$, $\sigma_{\text{olej}} = 33 \text{ mN/m}$ a $\sigma_{\text{víno}} \approx 45 \text{ mN/m}$. Pro různé druhy vín se hodnoty velmi liší, neboť závisí na kvalitě zkoumaného vína. Známé „řetízkování“ na povrchu sklenice je způsobeno jeho nízkým povrchovým napětím.

Provedení experimentu

Ukázalo se, že vlastní provedení experimentu vyžaduje značnou zručnost. Velmi důležité je zvolit vhodný papír. Nesmí být příliš velký, aby se neodchlipoval od sklenice, ale ani příliš malý, aby nedošlo k jeho deformaci vodou a jejímu následnému vylití. Papír musí být rovněž dostatečně pevný kvůli tomu, že jej budeme vytahovat ze sevření sklenicemi. Vhodné je proto použít například čtvrtku nebo zatavený papír, který jsme používali i my.

Poznamenejme, že budeme vždy sklenici s hustší kapalinou umisťovat nahoru a sledovat čas, po který tato tekutina klesá dolů. V opačném případě k žádnému procesu mísení ani výměně pozic nedochází. Během experimentování jsme používali malé skleničky o objemu 70 cm^3 , průměru horní podstavy 45 mm a výšce 47 mm .

Naše výsledky nebudeme prezentovat kvantitativně, neboť se nám žádný experiment nepovedl zcela do kýženého konce (vyjma kombinace vody s olejem), a proto se musíme spokojit pouze s kvalitativním popsáním celého triku.

Téměř okamžitě po vytvoření mezírky se začne víno dostávat nahoru a jeho místo v dolní sklenici vyplní voda. Jestliže je štěrbina příliš velká, je tento proces natolik bouřlivý, že se obě tekutiny promíchají. Nicméně i přesto je patrné, že voda v horní sklenici je tmavší, a tedy víno je zde koncentrovanější.

Pokud jsme však štěrbinu vytvořili příliš malou, nejmenší možnou, kdy se víno začalo dostávat nahoru, ukázalo se, že proces je příliš pomalý, a také došlo ke smísení obou tekutin. Jako optimální je proto vysunout papír zhruba jeden až tři milimetry a nechat jev probíhat. Po přibližně deseti minutách se situace ustálila, i když ani tehdy nebyly kapaliny zcela vyměněny. V dolní skleničce zůstalo trochu vína a stejně tak i v horní trochu vody. Ani po několika hodinách tyto části nevyměnily své pozice.

Při použití jiných tekutin se jako zajímavá jeví dvojice olej a voda, neboť tyto se spolu při pokojové teplotě vůbec nemísí. Výměna pozice mezi olejem a vodou probíhala doslova bleskově a byla navíc doprovázena zajímavým efektem. Jakási slizká hmota se po vytvoření dostatečně velké mezery (v našem případě asi třetiny průměru) náhle „vyhoupla“ nad list papíru.

Pokud jde o mléko a vodu, tak tato dvojice se chová podobně jako víno s vodou. Po zhruba deseti minutách jsme experiment ukončili s podobným výsledkem,

avšak s tím rozdílem, že voda byla lehce mléčně zakalená. Ani při opakování pokusu jsme nedosáhli lepšího výsledku; voda vždy zůstala stejně zakalená i po značném čase.

Úloha IV . E ... *blowjob*

Kupte si nafukovací balonek, nafoukněte jej, zavažte a proměřte, jak se jeho objem mění s časem. Pokuste se určit, kolik z plochy balonku zabírají póry, kterými vzduch uniká.

Měřit samovolné vyfukování balonku je poměrně zdoluhavá a náročná experimentální činnost. Ale na naši obranu musíme podotknout, že existují daleko delší měření. Například měření viskozity dehtu¹³. Ale experiment nevyžaduje moc dozoru, takže ve volných chvílích můžeme spočítat, jak to s tím balonkem je teoreticky.

Teorie

Nejdřív odhadneme, jak se mění velikost balonku s časem. Vyjdeme z několika předpokladů.

- a) Vyfukování probíhá dostatečně pomalu a teploty uvnitř i vně balonku se stíhají vyrovnávat a jsou stále konstantní. Tedy půjde o izotermický „děj“ a bude platit stavová rovnice

$$pV = \frac{m}{M_m} kT,$$

kde m je hmotnost plynu uvnitř, M_m hmotnost jedné molekuly, k Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota.

- b) Plocha balonku je svázána s objemem rozměrovou konstantou A vztahem

$$S = AV^{2/3}.$$

Jde o to, že balonek není vždy přesně kulový a přepočítávání by zbytečně komplikovalo výpočet. V případě koule platí $A = (36\pi)^{1/3}$, což lze lehce odvodit ze vztahů pro její objem a povrch. My ji vypočteme proměřením zkoumaného balonku.

- c) Plyn v balonku je ideální a jeho molekuly mají hmotnost $M_m = 29,2m_u$, kde m_u je atomová hmotnostní jednotka a 30 je relativní hmotnost průměrné molekuly vzduchu (30 % kyslíku a 70 % dusíku). Dále Z je tok molekul na stěnu (počet nárazů za sekundu) určen vztahem¹⁴

$$Z = \frac{1}{4}nv_a, \quad (44)$$

kde $v_a = \sqrt{8kT/\pi m_m}$ označuje střední aritmetickou rychlost molekul (k je Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota) a n je hustotu částic.

¹³⁾ Viz <http://www.smp.uq.edu.au/pitch/>.

¹⁴⁾ Odvození viz např. <http://www.kfy.zcu.cz/Rusnak/skripta.fytv1.pdf>.

Pro měření toku hmotnosti na plochu hustotu částic jednoduše nahradíme hustotou plynu. Správně bychom ovšem měli počítat s parciálními tlaky jednotlivých plynů zvlášť, ale u kyslíku a dusíku, které mají téměř stejnou hmotnost, lze počítat s „průměrnou“ molekulou.

- d) Rozměry pórů jsou mnohem menší než střední volná dráha molekul vzduchu v balonku a jejich plošná hustota σ se nemění.
- e) Tlak v balonku během měření je přibližně konstantní, roven nějaké hodnotě p . Tento odhad ale není přesný, skutečná závislost tlaku v kulatém balonku je jiná, pro zajímavost vypadá takto

$$p(r) = 2s_0 \frac{d_0}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^7 \right) \left(1 - \frac{s_1}{s_{-1}} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right),$$

kde d_0 a r_0 vyjadřují klidové rozměry balonku a s_1 a s_{-1} jsou materiálové konstanty. My si tuto změnu tlaku dovolíme zanedbat, protože se v tak krátkém časovém období, ve kterém měříme, balonek o moc nezmenší. Ale pro delší měření bychom potřebovali tlak odhadnout aspoň lineárně.

Když přijmeme tyto předpoklady, můžeme začít odhadovat. Nejdříve se zamyslíme nad tím, jak částice odcházejí skrz blánu. Při tak malých rozměrech pórů už totiž lze tvrdit, že částice nejsou z balonku vytlačovány ven, ale že unikají pouhou náhodou, a to, když se některá z molekul právě treťí do póru. Proč? Protože si pórovitou stěnu v tomto extrémním přiblížení můžeme představit jako dům s okny, do kterých někdo hází tenisové míče, a nás zajímá, kolik se mu jich podaří prohodit skrz celou budovu. A to se povede jenom takovým míčům (molekulám), které letí přímo do okna (póru). Známe počet molekul dopadajících na stěnu ze vztahu (44), takže nám vlastně stačí jen dosadit

$$dm = \frac{1}{4} S_p(t) v_a \varrho(t) dt, \quad (45)$$

kde v_a je střední aritmetická rychlost a $S_p = \sigma AV^{2/3}$ je plocha pórů určená jejich hustotou σ a plochou balonku. Hustota vzduchu v balonku je určena $\varrho(t)$. Teď si ze stavové rovnice vyjádříme $\varrho(t)$ a $m(t)$. Platí

$$\varrho(t) = \frac{pM_m}{RT} \quad \text{a} \quad m(t) = \frac{pV(t)M_m}{RT}.$$

Dosadíme-li tedy do rovnice (45), dostaneme hodnotu pro změnu objemu za čas. Ještě také musíme zohlednit to, že stejný jev jako při prostupu vzduchu z balonku ven funguje i v opačném směru. Pak počet částic prošlých stěnou ven nebude úměrný jen tlaku uvnitř, ale rozdílu tlaků mezi balonkem a atmosférou (p_a).

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} \frac{p_a - p}{p} v_a \sigma AV^{2/3}.$$

Je dobré si všimnout, že podíl $(p_a - p)/p$ je záporný, tedy objem podle očekávání ubývá. Teď už nezbývá nic než vyřešit tuto separovatelnou diferenciální rovnici,

což není problém. Vyjde

$$V(t) = \left(\frac{1}{12} \frac{p_a - p}{p} v_a \sigma A t + V_0^{1/3} \right)^3,$$

kde V_0 je integrační konstanta vypočítaná z počátečních podmínek ($V(0) = V_0$). Tedy závislost objemu na čase v krátkém čase (v poměru k době vypuštění celého objemu) po nafouknutí balonku je klesající kubická funkce závislá na parametrech vzduchu a balonku.

Experiment

U šišatého balonku je docela problém efektivně měřit objem. Abychom zamezili zanášení pórů prachem, uzavřeli jsme zavěšený balonek do krabice, vedle něj pověsili referenční třiceticentimetrové pravítko a v téměř pravidelných intervalech jsme jej z dostatečné vzdálenosti fotili (aby nedošlo ke zkreslení vlivem promítání na snímáče). Ústí balonku jsme zalili lepidlem, abychom zamezili úniku částic nedokonalě zavázaným otvorem.

Zpracování fotografií proběhlo následovně. Nejprve jsme každou z nich zorientovali na svislo pomocí referenčního pravítka a upravili její velikost tak, aby byla délka pravítka všude stejná. Tím jsme zjistili poměr rozměrů na obrázku a ve skutečnosti. Takto upravený snímek s balonkem a kontrastním pozadím jsme upravili filtrem Posterizovat v programu Gimp (z barevného balonku vytvoří jednolitou plochu). Objem a povrch balonku (povrch pro určení konstanty $A = SV^{-2/3}$) jsme zjistili zpracováním obrázku ve formátu PPM skriptem v jazyku C++. Program postupně počítal počet barevných pixelů y_i v každém řádku a zároveň z nich určil objem i povrch balonku.

$$S = \sum_{i=1}^x 2\pi \frac{y_i}{2} \sqrt{1 + (y_i - y_{i-1})^2},$$

$$V = \sum_{i=1}^x \pi \frac{y_i^2}{4},$$

kde x je počet řádků v obrázku. Povrch vypočítáme tak, že vezmeme polovinu délky křivky ohraničující balonek a násobíme 2π , objem je součet objemů válečků vysokých 1 px. Tyto vzorce dávají výsledek v pixelech, pro přepočítání na správné jednotky použijeme dříve určenou kalibrační konstantu.

V průběhu experimentu se měnil atmosférický tlak a teplota, pro výpočet jsme uvažovali údaje $p_a = 101\,300$ Pa a $T = 292$ K. Střední aritmetická rychlost tedy činí $v_a \approx 460$ m·s⁻¹.

Ze snímků jsme určili hodnotu konstanty A .

$$A = 5,36 \pm 0,01.$$

Ostatní konstanty – σ , V_0 a p určíme z fitu experimentálních dat. Chybu určení objemu balonku odhadujeme na 10 ml. Naměřená data z dvou týdnů vyfukování

jsou v tabulce.

t [dny]	V [ml]	t [dny]	V [ml]
0,0	2541	8,3	2316
0,8	2657	9,1	2315
0,9	2543	9,9	2266
1,1	2480	10,3	2246
2,3	2477	11,0	2279
2,8	2421	11,4	2200
6,9	2337	11,9	2173
7,9	2298	12,9	2157

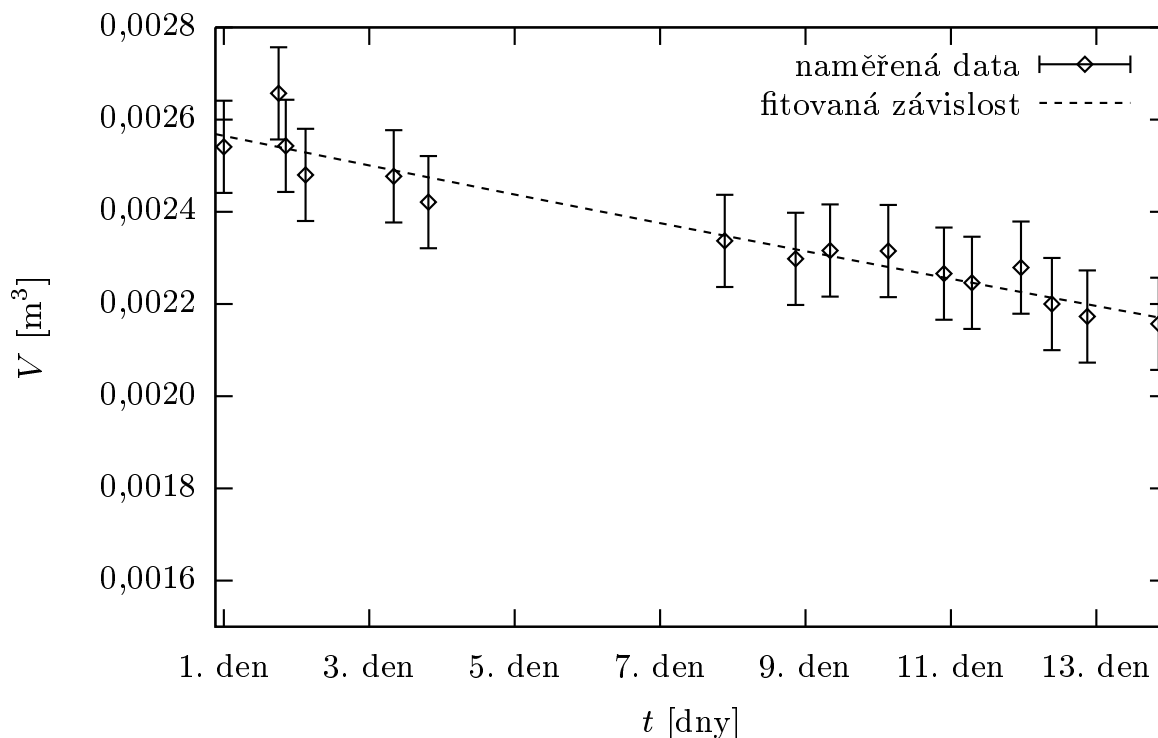
Fitování pomocí programu Gnuplot je popsáno v Sekci experimentů na FYKOSích internetových stránkách. Když postupujeme podle tamějšího návodu, dostaneme se k datům

$$V_0 = (2560 \pm 20) \text{ ml} ,$$

$$p = (104700 \pm 100) \text{ Pa} ,$$

$$\sigma = (7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-10} .$$

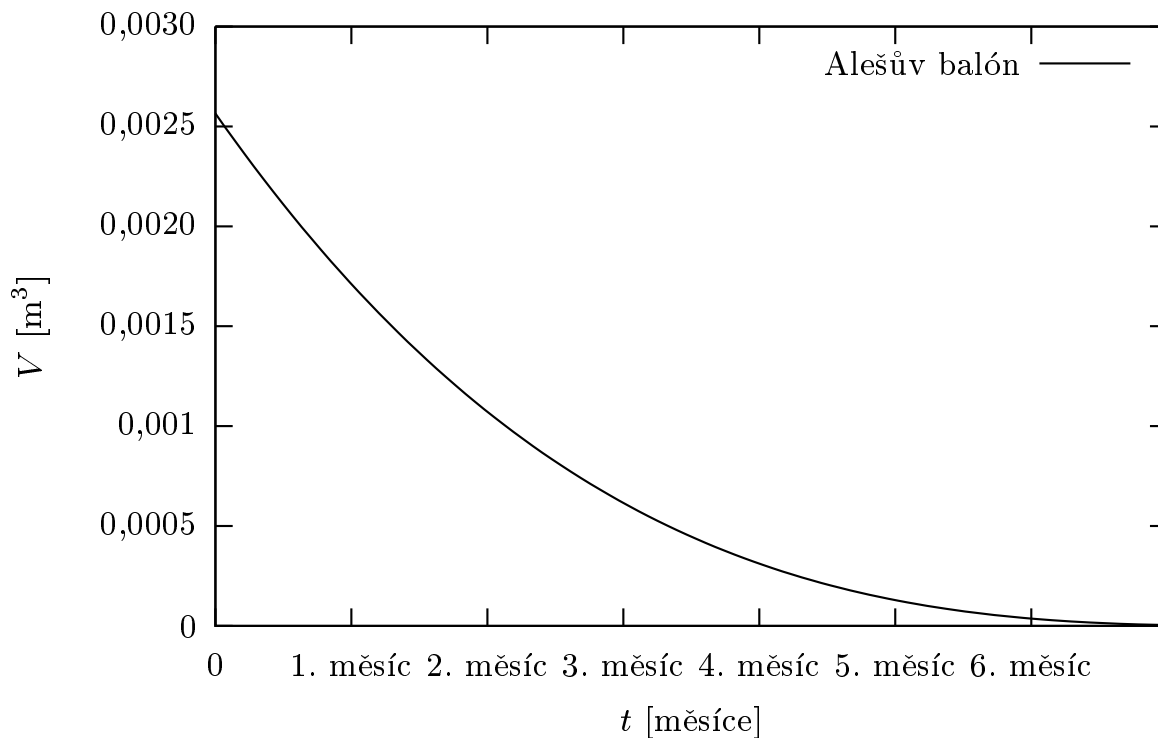
Tedy hledaná hustota pórů je asi $(7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-10}$, takže zabírají asi $7 \cdot 10^{-8} \%$ povrchu balonku. Pokud si vykreslíme závislost objemu na čase, uvidíme, že odpovídá velmi dobře (viz obrázek 40).



Obr. 40. Graf závislosti objemu balónku na čase

Ještě jednou se zamysleme nad tlakem v balonku. Od začátku uvažujeme, že je konstantní jenom v po relativně krátkou dobu našeho experimentu. Ale pokud

se podíváme na jeho hodnotu, zjistíme, že se v podstatě neliší od atmosférického tlaku. Můžeme tedy zkusit odhadnout, kdy se balonek vyfoukne úplně. V grafu 41 vidíme, kdy křivka protne osu. Je to asi za půl roku od nafouknutí. Ale doba reálného vyfouknutí bude kratší, protože tlak se přece jenom zmenšuje a časem se vyrovná s vnějším tlakem atmosféry. Navíc se balonek nevyfoukne úplně. Ale za půl roku uvidíme, nakolik byl náš odhad správný.



Obr. 41. Předpokládaný vývoj vyfukování balónku

Změřili jsme závislost objemu balonku na čase. Jeho zmenšování je způsobeno únikem vzduchu přes póry v gumě, které zabírají asi $(7,6 \pm 0,7) \cdot 10^{-8}$ % povrchu balonku.

Úloha V . E ... záchodová

Změřte, jak vysoko vystříkne voda při upuštění různých těles na vodní hladinu. Studujte závislost na výšce, tvaru a hmotnosti. Jaká část energie se využije na rozvlnění hladiny?

Zadání úlohy dává značnou volnost v tom co měřit. Následující úvahy jsou snahou o pochopení závislosti výšky „cáknutí“ na rozměru d , hmotnosti m a tvaru (popsaném koeficientem obtékání w) padajícího tělesa a výšky h bodu, ze kterého těleso uvolňujeme s nulovou počáteční rychlostí, nad hladinou vody.

Teorie

Zanedbáme-li odpor vzduchu, začne těleso volně padat s konstantním zrychlením g . Nad hladinou tak získá hybnost $p = mv = m\sqrt{2gh}$. Rozhodující pro výšku vystříknuvších kapek vody je jejich celková hybnost P , kterou získají prostřednictvím interakce s tělesem, a celkový objem V .

Hybnost P určuje úbytek hybnosti padajícího tělesa bezprostředně pod hladinou, řekněme do charakteristické hloubky dané rozměrem tělesa d . Úbytek hybnosti tělesa způsobuje odporová síla F_o vody (proti směru pohybu tělesa) – ta je (v nejsprostším modelu) pro laminární proudění přímo úměrná rychlosti a rozměru tělesa (Stokesův vztah), pro turbulentní proudění je úměrná kvadrátu rychlosti a kvadrátu rozměru (Newtonův vztah). Odporová síla přirozeně závisí i na tvaru tělesa. Charakter proudění určuje Reynoldsovo číslo (všimněte si, že je bezrozměrné) $Re = vd\rho/\eta$, kde v je rychlost tělesa, ρ je hustota vody a η její dynamická viskozita. S roustoucím Reynoldsovým číslem přechází laminární proudění v turbulentní, mezní hodnota je asi 1000. Úbytek hybnosti v časovém intervalu Δt je $\Delta p = (F_n - F_o(w, dv))\Delta t$, kde F_n je rozdíl tíhové a vztlakové síly působící na těleso. Časový interval, během kterého dochází k vystříkávání vody, si dovolíme jednoduše zvolit jako $\Delta t = d/v$.

Kromě odporové síly působí na těleso také povrchová síla F_p , která souvisí se změnou povrchové energie vody. Povrchová síla závisí přímo úměrně na povrchovém napětí a rozměru tělesa $F_p \sim d$.

Objem vystříknuté vody bude srovnatelný s objemem samotného tělesa, předpokládejme tedy, že $V \sim d^3$.

Pokud by všechna voda vystříkla do stejné výšky H , bylo by to

$$H = \frac{1}{2g} \left(\frac{P}{\rho V} \right)^2.$$

Dosazením za P a V z výsledků předchozích úvah, dospějeme k tvaru hledané závislosti (nezapomínejme, že v tom nejhrubším přiblížení)

$$H \sim \left(\frac{F_o(w, d\sqrt{h}) + F_p(d) - F_n(d)}{d^2\sqrt{h}} \right)^2.$$

Za předpokladu dominantní odporové síly pro laminární proudění dostaneme

$$H \sim \frac{w^2}{d^2} + \Lambda_1 w - \Lambda_2 w d^2$$

a pro turbulentní

$$H \sim w^2 h + \Lambda_1 w d \sqrt{h} - \Lambda_2 w d^3 \sqrt{h}, \quad (46)$$

kde Λ_1 je konstanta, která určuje vzájemný poměr velikosti povrchové a odporové síly (závisí tedy na povrchovém napětí), Λ_2 určuje poměr velikosti síly F_n a odporové síly (závisí tedy na rozdílu hustoty tělesa a hustoty vody).

Zabývejme se dále turbulentním případem, protože s ním se typicky v našich experimentech setkáme. Laminární případ by nastal pro velice malá tělesa (menší než milimetr) a malé rychlosti.

Z výsledku (46) plyne:

- 1) Výška H vystříknuté vody je přibližně lineárně úměrná výšce h , ze které těleso uvolňujeme.
- 2) Výška H roste s rostoucím koeficientem obtékání w .
- 3) Výška H klesá s rostoucí hmotností tělesa (při ostatním parametrech nezměněných), neb hmotnost udává rozdíl hustoty tělesa a vody, na kterém závisí koeficient Λ_2 .
- 4) Závislost výšky H na d (při konstantní hustotě tělesa) je komplikovanější. „Povrchový“ člen s rozměrem d roste, „tíhový“ člen klesá s d^3 . Musí tedy existovat jistý rozměr tělesa, při kterém převládne tíhová síla nad silou povrchovou a odporovou a výška vystříknutí začne klesat až na nulu. Povrchová síla dominuje (pokud vůbec) při malých rozměrech a způsobuje lineární nárůst výšky H .

Experiment a výsledky

Výsledky vás – našich řešitelů – potvrzují teoretické závěry v bodech 1) a 2). Tedy voda stříká více, házíme-li těleso z větší výšky či házíme-li krychli místo koule.

Experimentální důvtip vyžaduje ověření tvrzení 3). Například můžeme dutou nádobku postupně vyplňovat závažími.

V tomto „vzorovém řešení“ se pokusíme experimentálně doložit závěr uváděný v bodu 4). Zejména proto, že se o to žádný z řešitelů nepokusil. Zdůrazňujeme, že neočekáváme žádné exaktní závěry, proto příprava i provedení nedosahují takové preciznosti, jak by si řešení experimentální úlohy FYKOSu zasluhovalo.

Jako padající těleso použijeme gelových kuliček, které necháme nabobtnat ve vodě. Získáme tak sadu třiceti těles stejného tvaru, hustoty o málo větší než je hustota vody a rozměrů v rozmezí 1,5 mm až 10 mm. Počáteční výška h bude během experimentu konstantní.

Výstřik vody po dopadu tělesa na hladinu je velice dynamický jev, a je proto dosti obtížné výšku vystříknutí H měřit. Nejefektivnější (nikoliv nejpřesnější) je využití digitální kamery, jejíž záznam průběhu experimentu posléze vyhodnotíme.

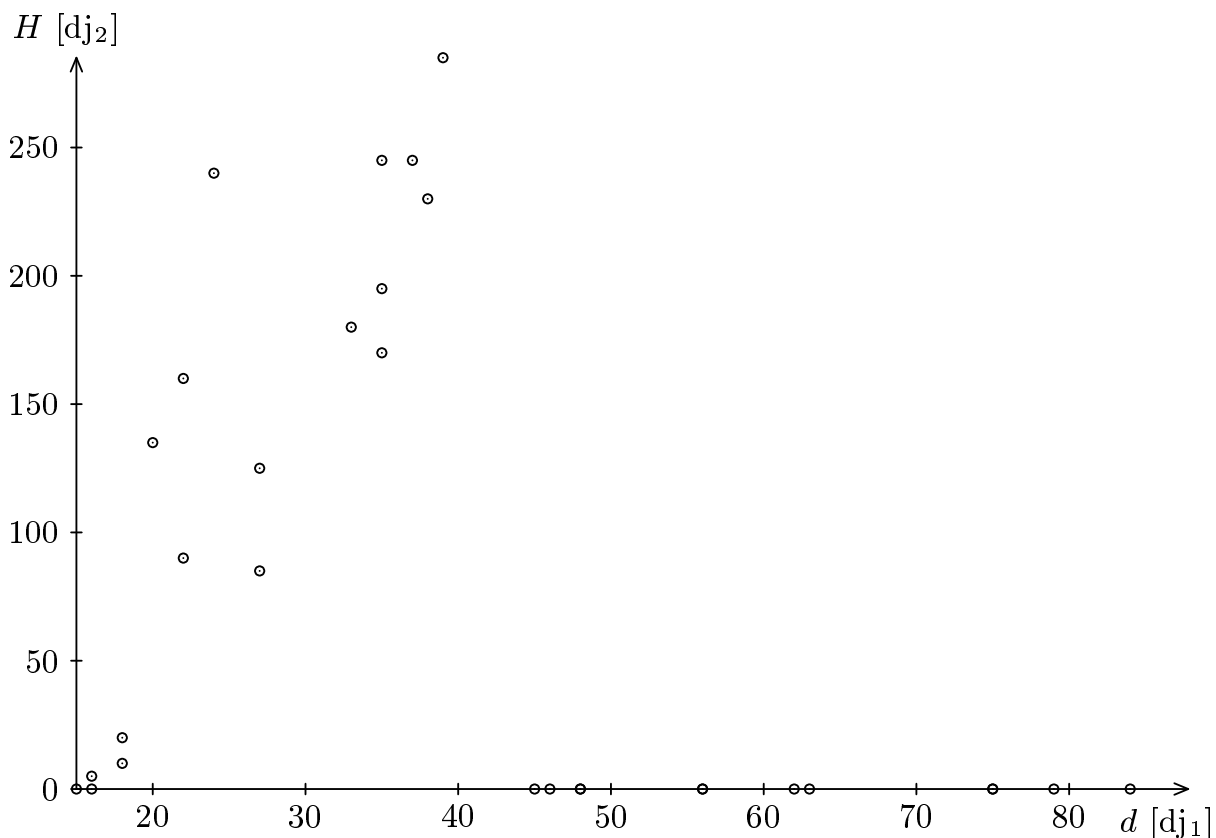
Pro každou velikost kuličky jsme provedli dvě měření, jejichž výsledky shrnuje následující tabulka.

Tabulka výsledků měření

d [dj ₁]	15	16	16	18	18	20	22	22	24	27	27	33	35	35	35
H [dj ₂]	0	0	5	10	20	135	160	90	240	85	125	180	170	195	245
d [dj ₁]	37	38	39	45	46	48	48	56	56	62	63	75	75	79	84
H [dj ₂]	245	230	285	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Jednotky d_{j_1} a d_{j_2} jsou *délkové jednotky*, které jsme ad hoc definovali při odečítání rozměrů kuliček a výšky vystříknutí z digitální fotografie, resp. digitálního záznamu. Jelikož jsme na exaktní výsledky rezignovali, nemá smysl měření kalibrovat a převádět naměřené hodnoty do jednotek SI.

Pro názornost je nezbytné zobrazit data i graficky (obr. 42). Pak je vidět,



Obr. 42. Graf výsledků měření

že naše výsledky nejsou nijak ohromující. Zpočátku se dá vypořádat růstová tendence hodnot. Od rozměru kuličky asi $d = 40$ d_{j_1} však vystřikování vody po dopadu naprosto ustalo. Kulička tedy dosáhla takových rozměrů (tj. hmotnosti), že její zbrzdění odporovou a povrchovou silou se blíží nule a nedochází tak k žádnému vystříknutí. Kulička projde hladinou naprosto hladce, bez pozorovatelného zpomalení. Tento jev je v našem experimentu zesílen tím, že koeficient obtékání je velice malý jednak díky tvaru a jednak díky hladkému a kluzkému povrchu kuličky.

Tímto je potvrzen závěr 4) teoretického úvodu.

Graf rovněž demonstruje obrovskou chybu měření a veliký vliv náhody na každé měření. K jejímu eliminování bychom potřebovali mnohem více trpělivosti a opakování pokusů.

Závěr

V případě hydrodynamických fyzikálních jevů je velice obtížné vyvodit teoretické předpovědi a stejně tak provést reprezentativní a exaktní měření. V této úloze šlo tedy především o kvalitativní experimentální analýzu jevu. Z tohoto úhlu pohledu jsou naše výsledky uspokojivé, ba co víc, došlo k jakési shodě s teoretickou predikcí.

Úloha VI. E ... vratné lahve

Kupte si standardní skleněnou lahev od piva nebo minerálky a změřte, jak závisí výška tónu vydaného po fouknutí na hrdlo na výšce vodní hladiny v lahvi.

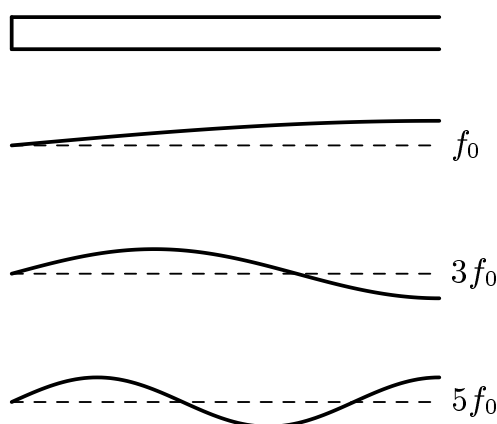
Teorie

Nejdříve se zamysleme nad tím, jaký tón z lahve po fouknutí na hrdlo uslyšíme. Musíme ovšem udělat nějaká přiblížení, abychom se k rozumnému výsledku vůbec dopracovali. Tím hlavním bude tvar lahve, budeme ji považovat za úzký dutý válec s jedním koncem otevřeným, druhým uzavřeným (viz obr. 43).

V lahvi pak vzniká stojaté vlnění, které má na uzavřené straně uzel, na otevřené kmitnu. Nejmenší (základní) frekvence, která tuto podmínku splňuje, je

$$f_0 = \frac{c}{4l}, \quad (47)$$

kde c je rychlost zvuku ve vzduchu, l je vzdálenost od vodní hladiny k hrdlu. Ta je v tomto případě právě čtvrtinou vlnové délky vzniklé vlny (obr. 43 nahoře).



Obr. 43. Vlny vznikající v klarinetu

Na obrázku 43 vidíme ještě další možné stojaté vlny, jsou to vyšší harmonické frekvence, v těchto situacích je l rovno třem, pěti, sedmi, ... čtvrtinám vlnové délky vzniklé vlny a odpovídající frekvence jsou $3f_0, 5f_0, 7f_0, \dots$

Co s takto vypočtenými frekvencemi udělá zúžení hrdla? Lahev od piva není totiž ničím jiným než Helmholtzovým rezonátorem¹⁵. Můžeme si jej představit jako kouli s válcovým hrdlem. Při fouknutí na ústí lahve dochází ke zvětšení tlaku v hrdle a jeho obsah tlačí na vzduch v dutině lahve – ten potom funguje jako pružina a vrátí vzduch zpět. Tyto periodické změny potom vydávají zvuk o frekvenci

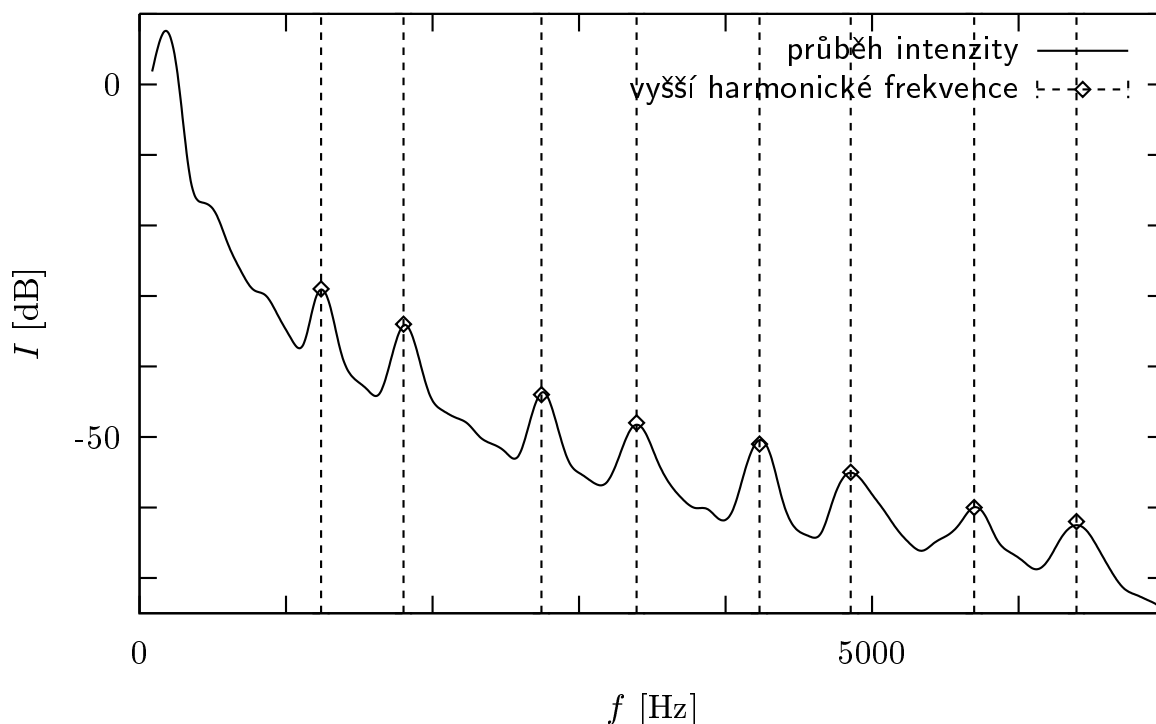
$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{VL}}, \quad (48)$$

kde c je rychlost zvuku, S plocha hrdla, L jeho délka a V objem dutiny lahve.

Protože námi použitá lahev bude mít poměr průměru hrdla a dna poměrně malý (asi 1/3), můžeme očekávat, že v naměřeném spektru budou zastoupeny jak frekvence vznikající rezonancí celého vzduchového sloupce, tak i ty vzniklé rezonancí vzduchu v hrdle.

Experiment

Ke měření jsme použili pивní lahev nejmenované starobrněnské značky, vodu, pravítko a počítač s mikrofonom. Pokusy jsme nahrávali do programu Audacity¹⁶, kde jsme potom provedli spektrální analýzu.



Obr. 44. Typický průběh intenzity

Jak jsme předpokládali, zúžení hrdla se projevilo zvláště na základní frekvenci, která byla úplně přehlušena frekvencí Helmholtzovou. Jak ji tedy můžeme najít?

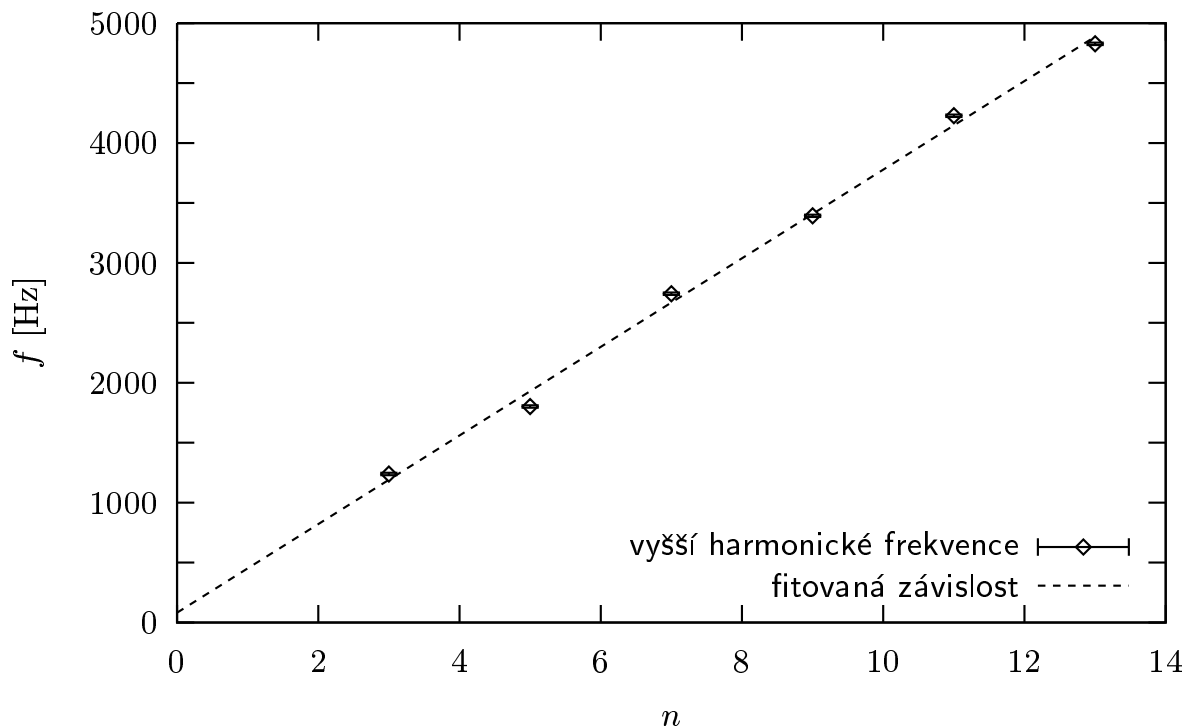
¹⁵) O Helmholtzově rezonátoru si můžete v angličtině počíst například na internetové adrese <http://phys.unsw.edu.au/jw/Helmholtz.html>, včetně odvození rezonanční frekvence.

¹⁶) <http://audacity.sourceforge.net/>

Naštěstí se nám v záznamu ukázaly výrazné píky u hodnot vyšších, které odpovídají druhé až sedmé harmonické frekvenci, jak vidíme na obrázku 44. Protože pro n -tou frekvenci platí

$$f_n = (2n - 1)f_0, \quad (49)$$

dokážeme lineárním fitem určit hodnotu f_0 .



Obr. 45. Příklad fitu pro zjištění f_0

Na obrázku 45 vidíme příklad fitu ke zjištění frekvence. Fitujeme přímou úměrou popsanou rovnicí (49). Odečtené hodnoty z grafů intenzit naleznete v tabulce.

Tabulka výsledků měření

l [cm]	f_H [Hz]	$3f_0$ [Hz]	$5f_0$ [Hz]	$7f_0$ [Hz]	$9f_0$ [Hz]	$11f_0$ [Hz]	$13f_0$ [Hz]
14	268	1687	3008	4124	5143	6377	n/a
15	237	1619	2870	3786	4868	5948	6834
16	221	1582	2666	3519	4636	5643	6439
17	214	1529	2454	3344	4406	5309	6174
18	209	1496	2258	3206	4175	4977	5943
19	199	1435	2106	3103	3936	4756	5650
20	189	1365	1967	2995	3694	4578	5307
21	187	1317	1880	2894	3517	4436	5121
22	168	1239	1802	2743	3393	4228	4828
23	160	1180	1752	2622	3262	4052	4736
24	148	1102	1696	2471	3163	3822	4527

Tedy už zbývá jenom zpracovat nalezené základní frekvence. Tyto hodnoty jsou spolu s fitem vztahu (47) zaneseny v grafu 46. Fitovaná konstanta c má

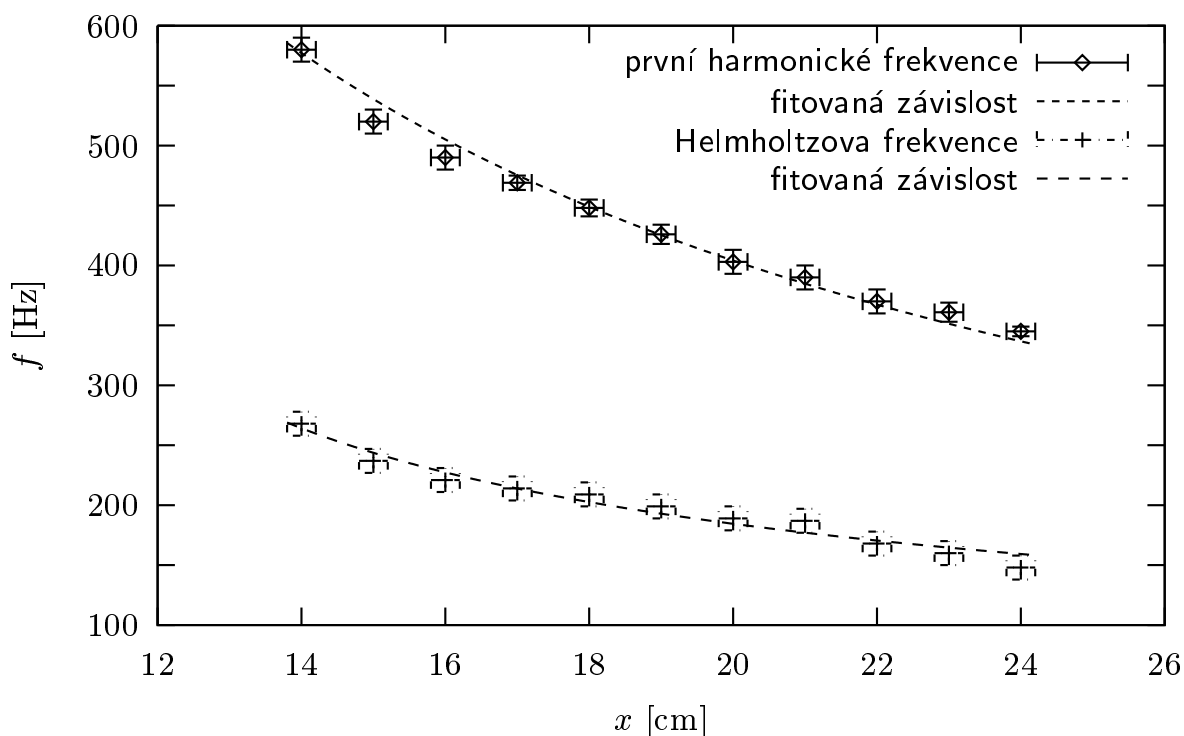
význam rychlosti zvuku a její hodnota vychází

$$c = (323 \pm 2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Odečtení Helmholtzovy frekvence není takový problém, jde vždy o nejvýraznější pik z celého spektra. Její velikosti jsou opět v tabulce. Protože lahev nemá zrovna lehce určitelné rozměry hrdla (je oblá a hrdlo přechází v tělo lahve plynule), konstanty v rovnici (48) neumíme změřit. Upravíme ji tedy do tvaru

$$f_H = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V_0 + (x - 0,14) S_L}}, \quad (50)$$

kde konstanta $A = S/L$ parametrizuje hrdlo, V_0 určuje objem vzduchu v oblé části lahve a S_L je průřez dna. Proměnná x stejně jako v minulém případě reprezentuje vzdálenost hladiny od ústí hrdla. Pokud tímto předpisem fitujeme získaná data, obdržíme hodnoty: $A \approx 3 \text{ mm}$, $V_0 \approx 149 \text{ cm}^3$ a $S_L \approx 26 \text{ cm}^2$, což jsou vcelku reálné údaje. Naměřená data spolu s fitovanou závislostí (50) najdete v grafu na obr. 46.



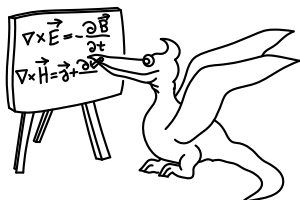
Obr. 46. Konečné výsledky měření

Diskuse

Z výsledků grafického zpracování vyplývá, že se naměřené hodnoty dobře shodují s teorií. Rychlost zvuku je sice pro teplotu asi $20 \text{ }^\circ\text{C}$ rovna přibližně $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, ale tento rozdíl je pravděpodobně způsoben tvarem lahve a to jsme čekali.

Jak je vidět, u menších vzdáleností hladiny od ústí hrdla je frekvence nižší než očekávaná – to je způsobeno pravděpodobně tím, že zúžení lahve je již nepříjemně blízko. Kdyby byla lahev dostatečně velká, nemuseli bychom se pravděpodobně vůbec jejím tvarem zaobírat.

Výsledky fitu Helmholtzových frekvencí potvrzují, že se lahev opravdu chová jako Helmholtzův rezonátor. Jejich intenzita je největší a s přehledem přehlušují frekvence vzniklé rezonancí celého sloupce.



Seriál o historických milnících fyziky

Kapitola 1: Galileo a princip ekvivalence

První kapitolu jsme se rozhodli zasvětit proslavenému experimentu Galilea Galileiho, který již v 17. století – nevědomky – ověřoval ideu, která o tři staletí později získala honosný název „princip ekvivalence“. Začneme ale od Adama, tedy od Isaaca.

V roce 1687 publikoval Isaac Newton ve svých slavných Principiích mimo jiné dvě stěžejní myšlenky, vyjádřené v jeho gravitačním a druhém pohybovém zákoně vztahy

$$\mathbf{F} = \frac{m_g M G \mathbf{r}}{r^3}, \quad (51)$$

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a},$$

s nimiž se student střední školy setkává hned v prvním roce.

Veličiny označené v rovnicích jako m_g a m_i se nazývají *gravitační* a *setrvačná* hmotnost tělesa a běžně se s nimi počítá jako s veličinou jedinou, ztotožněnou s hmotností tělesa. Nicméně již Newton si před třemi sty lety byl vědom toho, že ekvivalence těchto dvou veličin vůbec není samozřejmá a poměr těchto veličin se pro různé látky může lišit.

Spojením obou uvedených vztahů totiž vidíme, že těleso bude mít v gravitačním poli popsaném vztahem (51) (tedy například v gravitačním poli Země, která je v dobrém přiblížení kulová a vztah (51) pro ni platí také) zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \frac{M G \mathbf{r}}{r^3}.$$

V případě, že by všechny látky měly poměr gravitační a setrvačné hmotnosti konstantní,

$$\frac{m_g}{m_i} = K, \quad (52)$$

pak bychom mohli vhodnou definicí kilogramu dosáhnout toho, že $K = 1$ a všechna tělesa by v gravitačním poli získala stejné zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{M G \mathbf{r}}{r^3}, \quad (53)$$

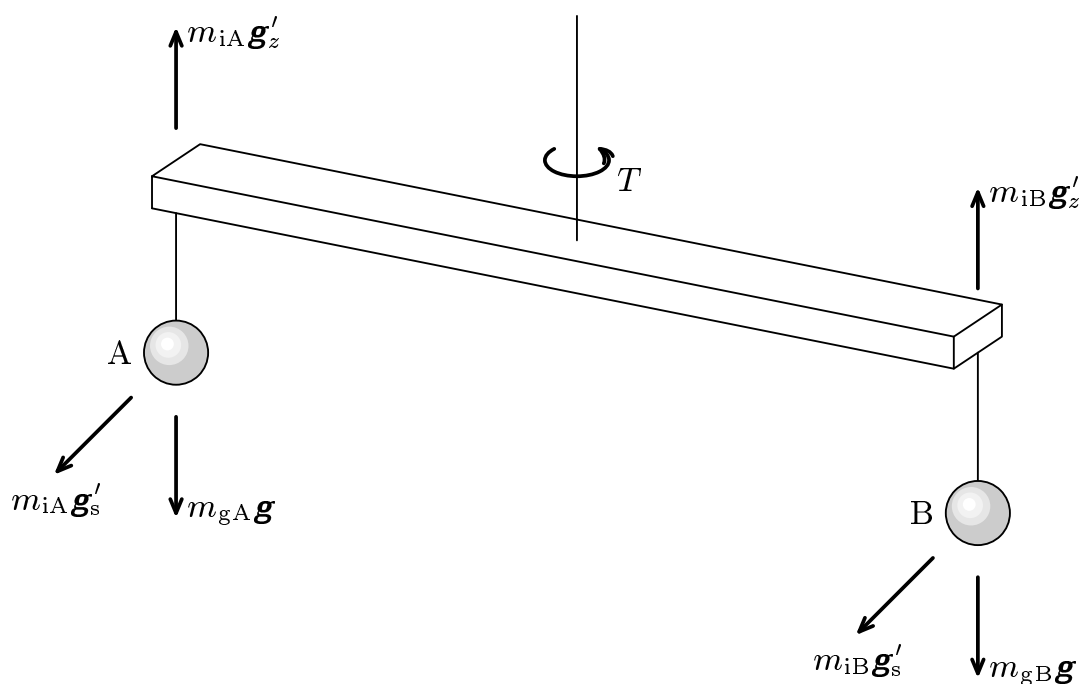
nezávislé na svém složení. Hypotéza vyjádřená konstantností poměru (52) je běžně nazývaná jako princip ekvivalence¹⁷ a její předpověď, že zrychlení (53) je nezávislé

¹⁷⁾ Moderní fyzika rozlišuje více principů ekvivalence. Ten námi diskutovaný bychom přesněji měli nazývat „slabým principem ekvivalence“. Takzvaný „silný princip ekvivalence“ je hypotéza, která tvrdí, že pohyb vztažné soustavy nemůžeme zjistit pomocí žádného experimentu, tedy že zákony přírody mají ve všech soustavách stejný tvar, a jsou tedy z hlediska popisu reality rovnocenné.

na studovaném tělese, nám otevírá možnost, jakým můžeme princip ekvivalence ověřit. Tím se nám kruh uzavírá a dostáváme se zpět k našemu milému Galileovi, který údajně uskutečnil následující experiment.

Jednoho pěkného dne vyšplhal na vrchol šikmé věže v Pise, odkud zároveň pustil dvě stejně velké koule: jednu z olova a druhou ze dřeva. Tyto dvě koule dopadly na zem současně, z čehož můžeme usuzovat na to, že byly během celého pádu urychlovány se stejným zrychlením. Můžeme tedy tvrdit, že Galileo svým měřením ověřil platnost vztahu (53), a tedy nepřímo i principu ekvivalence.

Princip ekvivalence byl čas od času prověřován i jinými velikány, mimo jiné i Newtonem¹⁸, ale první kvantitativní měření provedl až Loránd Eötvös roku 1889. Význam tohoto experimentu spočíval jednak v tom, že se na dlouhou dobu jednalo o nejpřesnější známé měření, ale hlavně v souvislosti s obecnou teorií relativity, o které bude v tomto díle seriálu ještě krátce pojednáno.



Obr. 47. Schéma Eötvösova experimentu

Eötvösův experiment využívá principu torzních vah (viz obrázek 47). Na volně zavěšené lanko je upevněna destička, na jejíž koncích jsou v přibližně stejné vzdálenosti od lanka umístěna měřená závaží. Označme si závaží jako A a B, jejich hmotnosti opatřeme indexy i (inerciální) a g (gravitační), vzdálenosti mezi lankem a úchyty závaží označme l_A , l_B . Dále označme g velikost místního gravitačního pole a g'_z vertikální složku odstředivého zrychlení, způsobeného zemskou rotací.

Protože se může destička libovolně natáčet, ustaví se v takové pozici, aby se vyrovnaly horizontální momenty sil, tedy aby platilo

$$l_A (m_{gA}g - m_{iA}g'_z) = l_B (m_{gB}g - m_{iB}g'_z) . \quad (54)$$

¹⁸⁾ Zájemce o popis jeho metody odkazujeme na experimentální úlohu druhé série 18. ročníku.

Eötvösovým štěstím bylo, že v Budapešti není zanedbatelná ani horizontální složka odstředivého zrychlení způsobeného zemskou gravitací g'_s . Ta působí na obě závaží silou a zkroutí tak lanko celkovým momentem síly

$$T = l_A m_{iA} g'_s - l_B m_{iB} g'_s.$$

který můžeme vyjádřením l_B z podmínky (54) přepsat na

$$T = l_A m_{iA} g'_s \left(1 - \left(\frac{m_{gA}}{m_{iA}} g - g'_z \right) \left(\frac{m_{gB}}{m_{iB}} g - g'_z \right)^{-1} \right).$$

Velikost g'_z , která je mnohem menší než velikost g , můžeme zanedbat a psát tak

$$T = l_A m_{gA} g'_s \left(\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}} \right).$$

Pomocí zrcátkové metody¹⁹ můžeme tento moment měřit s vysokou přesností a můžeme tak ověřovat, o jakou hodnotu se liší poměry setrvačné a gravitační hmotnosti obou těles. Eötvös použil tělesa A a B, vyrobené ze dřeva a z platiny a zjistil, že se lanko vůbec nezkroutilo, to znamená, že poměry pro obě tělesa jsou v rámci přesností měření stejné. Vzhledem k přesnosti, s jakou odečítal pootočení lanka tak zjistil, že rozdíl poměru (52) je pro dřevo a platinu menší než 10^{-9} . Měření založená na podobném principu zopakovalo od té doby několik dalších vědců a vědeckých skupin, přičemž se jim podařilo nepřesnost určení poměru zmenšit již na asi 10^{-13} .

Jako exkurzi do budoucnosti se zde zmíníme i o plánovaném experimentu, jehož hlavním úkolem by mělo být právě ověření platnosti principu ekvivalence. Jmenuje se STEP, pracuje na něm Stanfordská univerzita a předpokládá, že měření budou probíhat v satelitu, kroužícím na oběžné dráze. V plánu je porovnávat zrychlení čtyř různých těles ve vysoce kontrolovaných podmínkách, a jestliže se pokus podaří dotáhnout do konce, měli bychom přesnost ověření principu ekvivalence zvýšit až na 10^{-18} , tedy zhruba milionkrát.

Nyní je na čase slíbená historická odbočka k obecné teorii relativity. Pokud se vám bude zdát příliš složitá, můžete ji přeskočit a vrátit se k ní později.

Pokud by platil princip ekvivalence, pak bychom nebyli v principu schopni říci, zdali je síla na nás působící gravitační, nebo setrvačná (nepravá). Slavný je Einsteinův příměr k lidem ve výtahu. Představme si, že stojíme v uzavřeném výtahu (takže nevidíme, co se děje mimo výtah) v kosmickém prostoru daleko od všech planet a jiných hmotných těles. V prvním případě bychom tahali za výtahové lano takovým způsobem, že by se výtah rozjížděl konstantním zrychlením. Potom by vzhledem k výtahu působily setrvačné síly tak, že by hruška, kterou pustíme

¹⁹⁾ Pokud svítíme světelným paprskem na zrcátko pevně upevněné na lanku, můžeme sledovat otočení lanka pomocí pohybu stopy paprsku na stínítku. Vysokých přesností dosáhneme několikametrovou vzdáleností stopy od zrcátka.

z ruky, zrychlovala se zrychlením g (kreslete si!). Ve druhém případě bychom s výtahem²⁰ nehýbali, ale přesunuli do jeho blízkosti planetu tak, aby naše hruška opět padala se zrychlením g . Tentokrát by však padala z toho důvodu, že by na ni působila planeta gravitační silou²¹.

Nyní přijde ta podstatná část – osoba ve výtahu by nebyla schopna rozlišit, která z obou možností nastala. Mohli bychom buď hýbat planetou, nebo tahat za lano výtahu, ale v obou případech bychom viděli hrušku, jak padá se zrychlením g . Pokud bychom místo hrušky pustili například jablko, pak by jeho zrychlení v obou případech bylo také g . V prvním případě je tato rovnost snad zřejmá, ve druhém plyne z rovností

$$g = \frac{m_{g,\text{hruška}}}{m_{i,\text{hruška}}} \frac{MGr}{r^3} = \frac{m_{g,\text{jablko}}}{m_{i,\text{jablko}}} \frac{MGr}{r^3} = a_{\text{jablko}},$$

kde jsme užili předpokládaného principu ekvivalence.

Sledováním pohybu jakéhokoli tělesa bychom tedy nebyli schopni rozlišit, zdali nastala první či druhá možnost, tedy zdali je zrychlováno důsledkem působení síly gravitační či setrvačné. Fakt, že na základě pohybu těles nemůžeme rozlišit, zdali za jejich urychlováním stojí gravitace nebo setrvačnost, údajně velmi fascinoval Einsteina a vedl jej k myšlence, že by oba druhy sil, tedy gravitační i setrvačné, mohly mít stejný původ. To byl jeden z prvních kroků, který jej vedl k formulaci jeho obecné teorie relativity; to už jsme se ale dostali opravdu daleko od tématu našeho seriálu²².

Úloha I. S ... princip ekvivalence

- a) Jaké by musely nastat podmínky, aby Galileův pokus nevyšel? Šikmá věž v Pise je vysoká $h = 55$ m, předpokládejte, že obě koule mají poloměr $R = 8$ cm a že jedna koule je vyrobena z olova o hustotě $\rho = 11300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jakou hustotu by musela mít druhá koule, aby rozdíl v časech dopadu obou koulí byl větší než $\Delta T = 0,3$ s?
- b) S jakou přesností ověřuje původní Eötvösovo měření rovnosti poměru (52) pro neutrony a protony, pokud ve dřevě tvoří neutrony 50 procent hmotnosti, zatímco v platině 60 procent hmotnosti? Zanedbejte hmotnost elektronů a vazebné energie.
- c) Ověřte užívaný předpoklad o tom, že v Budapešti je g'_s v porovnání s g zanedbatelné.

(řešení str. 130)

²⁰⁾ Výtah musí být dostatečně malý, aby gravitační pole planety mohlo být považováno za homogenní. Jinak je možné k odlišení obou případů použít účinky slapových sil.

²¹⁾ Toto je pouze myšlenkový experiment – to znamená, že pochopitelně nikdy nebudeme hýbat se planetou, abychom urychlovali věci ve výtahu. Stačí nám, že si dokážeme představit, co by se v takovém případě stalo.

²²⁾ Pokud by někoho problematika Obecné teorie relativity zajímala, vřele doporučujeme například učebnici B. F. Schutze: *A First Course In General Relativity*.

Kapitola 2: Young a vlnová povaha světla

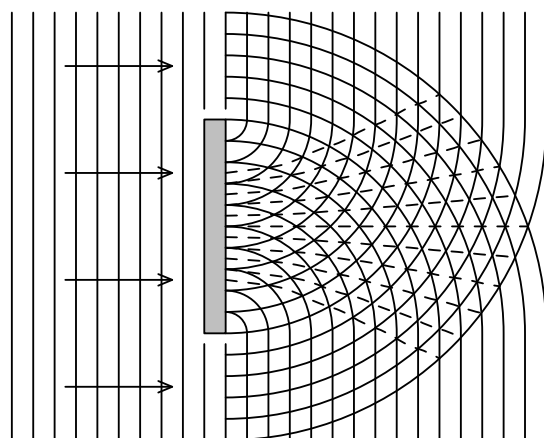
V roce 1704 publikoval Isaac Newton své po Principiích nejslavnější dílo, knihu *Optika*, či chcete-li *Opticks or A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light* (tj. Optika aneb Traktát o odrazech, lomech, ohybech a barvách světla). Shrnul v ní do té doby provedené experimenty – zejména své – a prezentoval vlastní teorii světla. V jeho době byly známé všechny jevy vyjmenované v názvu, včetně toho, jemuž dnes říkáme difrakce. Sám zjistil, že pomocí skleněného hranolu lze světlo rozložit na několik barevných složek, které se dále už tímž způsobem rozložit nedají. Naopak, pomocí čočky a dalšího hranolu lze tyto paprsky spojit do jednoho, který má opět původní vlastnosti. Newton navrhl *korpuskulární* (částicovou) teorii, která tvrdila, že světlo je složeno z „barevných“ částic, tedy (pravděpodobně nedělitelných) elementů s jednou vlastností určující, jak se jeví lidskému oku. Dokonce se věnoval i otázce vzniku světla v látce; podle něj světlo i látka byly složeny z příbuzných částic, které se na sebe mohly za určitých okolností přeměňovat.

Difrakci jako první důsledně zkoumal a pojmenoval²³ Ital *Francesco Maria Grimaldi* už v polovině 17. století a ta ukazovala na vlnové chování světla, neboť světlo tím zjevně splňovalo Huygensův vlnový princip, tedy že každý bod vlnoplochy je zdrojem dalšího vlnění. Newtonovi dělala difrakce starosti, neboť částice letící vpřed ve světelném paprsku neměly zřejmý důvod zatáčet za překážku, již míjely. Proto už tehdy poprvé promluvil o primitivní formě něčeho, co bychom dnes nazvali vlnově-částicovým dualizmem (viz níže).

Newtonova demokritovská teorie se hlavně díky jeho jménu udržela na výsluní dlouho. Teprve téměř po sto letech, na samém začátku devatenáctého století, provedl anglický vědec *Thomas Young* experiment, který na nějaký čas definitivně utvrdil fyziky v přesvědčení, že světlo má primárně vlnovou povahu.

Dvojštěrbinový experiment

Young provedl dva experimenty související s vlněním, jeden s vodou a jeden se světlem. V prvním případě se jednalo o demonstraci jevu *interference* (skládání) vlnění. Pokud na vodní hladině vyvoláme vlny, totiž pohyblivý vzorek hřebenů a prohlubní, můžeme pozorovat, že v místech setkání dvou vln se vlna zesílí, pokud se tam setkají dva hřebety nebo dvě prohlubně, a naopak téměř zahladí, jestliže se střetnou opačné fáze. Výsledná amplituda hladiny je zřejmě přibližně rovna součtu amplitud obou vln. Výsledná energie (intenzita) závisí obecně na druhé mocnině



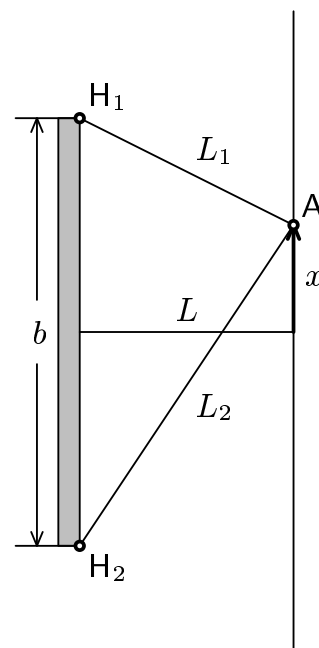
Obr. 48. Interference na rovinné překážce

²³⁾ Latinsky *diffringere* = lámat (se) na kousky.

tohoto součtu; setkají-li se tedy dvě stejné vlny, bude energie vlny složené čtyřnásobná. Young demonstroval, jak by se skládání projevilo, pokud by vyslal rovinnou vlnu proti překážce. Na obr. 48 jsou nakreslené postupující hřebeny vln.

Ukázal, že okraje takové překážky by se staly zdroji kruhových vln, které by vytvořily za překážkou charakteristický vzorek – pásy stále klidné vody táhnoucí se od překážky pryč do různých směrů. Na obrázku jsou z technických důvodů, čárkovanou čarou, vyznačena naopak místa nejrozbořenější.

Analogii tohoto experimentu provedl se světlem. Zatemnil svoji pracovnu a úzkým otvorem v závěsu vpustil dovnitř jeden světelný paprsek, rovinnou vlnu. Do cesty mu vložil úzký (necelý milimetr široký) proužek papíru a pod lupou pečlivě prozkoumával stín vržený proužkem na stěnu. Na obrázku 49 je schéma situace (světlo jde zleva na překážku o šířce b , vpravo je stínítko). Podobně jako ve vodním případě i zde získáme světelný flek o maximální intenzitě v bodě A na stínítku, když do A dorazí dvě vlny se stejnou fází, tedy když se dráhy paprsků od jedné hrany (bodů H_1) a od druhé hrany (bodů H_2) budou lišit o celočíselný násobek vlnové délky použitého světla,



Obr. 49

$$k\lambda = L_2 - L_1 = \sqrt{\left(x_k + \frac{b}{2}\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(x_k - \frac{b}{2}\right)^2 + L^2}.$$

Index k u x znamená, že se bavíme o k -tém interferenčním proužku (rozdíl drah je $k\lambda$). Umocněním, přeskupením, dalším umocněním a vyřešením vzhledem k x_k dostaneme

$$x_k = k\lambda \sqrt{\frac{L^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{k^2\lambda^2}{2}}{b^2 - k^2\lambda^2}}. \quad (55)$$

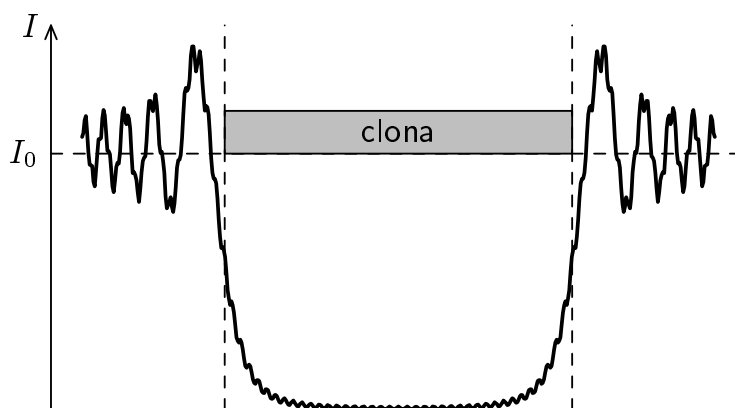
Pokud máme stínítko daleko od clonky, je $b \ll L$, a v Youngově době bylo navíc rozhodně $\lambda \ll b$. Nahoře v čitateli v (55) smíme proto ponechat samotné L^2 , dole b^2 , jelikož sousední členy jsou vždy podstatně menší. Pak je přibližně

$$x_k \approx L \frac{k\lambda}{b}, \quad \frac{x_k}{L} \approx k \frac{\lambda}{b}. \quad (56)$$

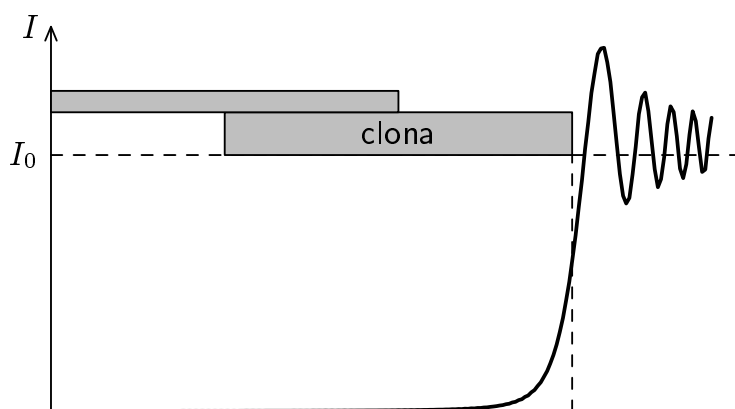
Pokud by Young použil monochromatické světlo, pozoroval by ve stínu papírového proužku rovnoměrně a vůči středu stínu symetricky rozmístěné světlé čáry. Protože x_k závisí na vlnové délce, různé barvy světla se odchyľují pod různými směry (pro $k \neq 0$), a tak ve skutečnosti viděl duhové skvrny.

Young poté vzal jinou kartu a odclonil s ní přicházející paprsek tak, aby světlo dopadalo jen na jednu hranu proužku (například na H_1). Zjistil, že jestliže předtím

byla intenzita světla na stínítku přibližně jako na obrázku 50, po zakrytí byla jako na obrázku 51 (obojí je v idealizaci pro jednobarevné světlo).



Obr. 50. Intenzita světla dopadajícího na stínítko



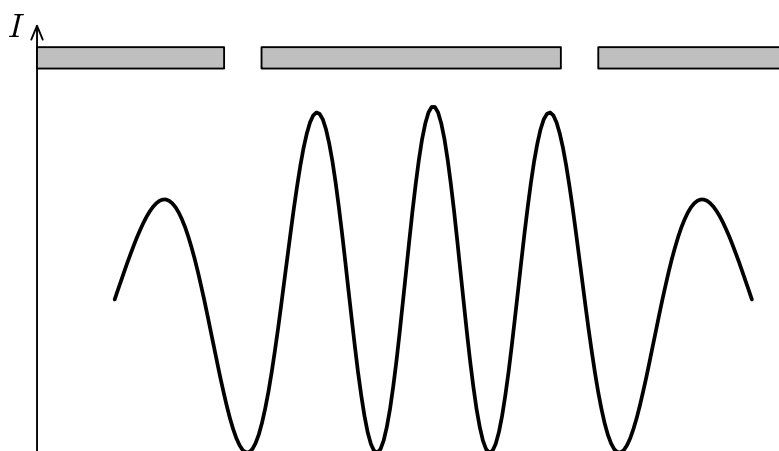
Obr. 51. Modifikace předchozího pokusu

Tedy na některých místech intenzita po zatemnění vzrostla! Zmizelo totiž několik tmavých interferenčních proužků – snad to na grafu vidíte; případně si také vezměte lupu. Něco takového je v korpuskulární teorii světla nepřipustitelné, tam je skládání paprsků vždy aditivní, nikdy subtraktivní, tzn. *zvýšením* celkového počtu částic nelze *snížit* osvit a naopak. Vlnová povaha světla byla tedy slavně a nade vše pochybnost dokázána²⁴.

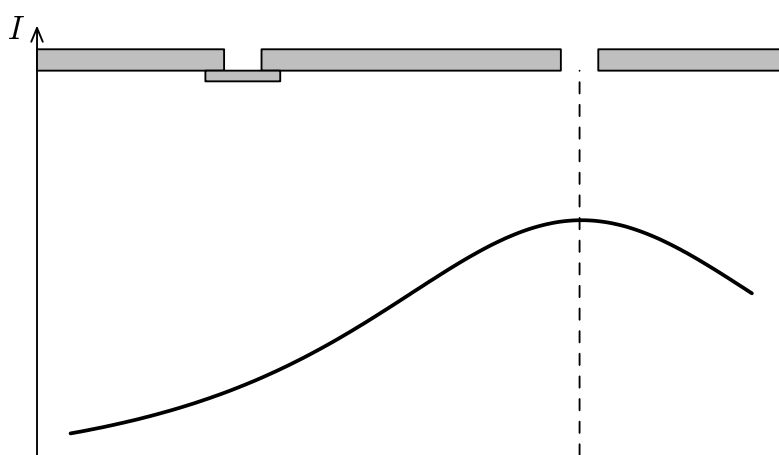
Na závěr odstavce o dvojštěrbínovém experimentu stojí za to zmínit, proč jsme o žádných štěrbinách nakonec nemluvili. Young ve své publikaci *Experiments and Calculations Relative to Physical Optics* popisuje svůj pokus tak, jak jsme ho zde rozebrali, tedy spíše jako dvojhranový experiment. Skutečnou dvojštěrbínovou verzi provedl asi až *Augustin Jean Fresnel* o několik let později – čímž jednak

²⁴⁾ Zmiňme tu pro zajímavost – pro nás dnes poměrně veselou – myšlenku, již Newton v *Optice* nadhodil při pokusu o vysvětlení zřetelného kolísání intenzity osvětlení po stranách stínu clonky: „*Are not the rays of Light in passing by the edges and sides of Bodies, bent several times backwards and forwards, with a motion like that of an Eel? And do not these three fringes of coloured Light above-mentioned (tj. tři nejjasněji viditelné duhové pruhy po stranách geometrického stínu; viz. obr. 50), arise from three such bendings?*“

odstranil postupující rovinné vlny po stranách překážky, které oslňovaly pozorovatele, a jednak umožnil pozorování proužků i mimo prostor mezi hranami clony. Výsledný obraz je zřetelnější a známý z každé učebnice optiky (průběhy intenzit na obrázcích 52 a 53).



Obr. 52. Interference na dvojštěrbině



Obr. 53. Interference na dvojštěrbině, přičemž jedna ze štěrbin je zacloněna

Kvantověmechanická obdoba Youngova pokusu

Youngův dvojštěrbinový experiment sehrál obrovskou roli v částicové (kvantové) fyzice na začátku 20. století. Tehdy se ale většinou jednalo o myšlenkovou variantu, případně jen přeinterpretování pokusů se světlem. Skutečné fyzické experimenty byly provedeny až v druhé polovině 20. století. Roku 1961 *Claus Jönsson* ukázal, že svazek elektronů vyslaný proti dvojštěrbině dopadá na fotografickou desku za ní tak, že produkuje stejné rozdělení jako světlo na obrázku 52. Jinými slovy, přestože elektrony vyslané skrze jedinou štěrbinu vytvoří rozložení podobné Gaussově křivce (obr. 53) jak se na částice sluší a patří, při otevření druhé štěrbině na některých místech ubude četnost dopadů²⁵, což – jak jsme komentovali výše – je proti výlučné aditivitě částicových experimentů.

²⁵⁾ To jest poměr částic dopadlých v okolí tohoto místa ku celkovému vyslanému počtu.

Samozřejmě lze namítnout, že v tomto případě mohlo dojít k vzájemnému ovlivňování nabitých elektronů, tedy možnost vzniku nějakých vln není úplně vyloučena (byť po důkladné analýze se ukáže, že by efekt nevysvětlila). Stejný interferenční pokus byl ale v průběhu minulého století proveden i s neutrony, vodíkovými atomy a nedávno, v roce 1999, dokonce i s fullereny, mohutnými šedesátihlíkovými sférickými molekulami. Všechny vytvářely stejný vzorek přičítaný Youngem vlnové povaze použitého svazku.

Ukázalo se tak, že světlo je *vlna* stejně tak dobře jako jsou vlnami elementární *částice*, a vlnová teorie světla byla proto alespoň v mikrosvětě nadobro opuštěna, neboť už od objevení fotoefektu – procesu, při němž se světlo pohlcuje „po kouskách“, – měla značné potíže. V určitém smyslu jsme dnes opět blíže Newtonově představě. Částicím světla říkáme *fotony*.

Fantastický na kvantověmechanické variantě Youngova pokusu není přímo vznik samotného interferenčního obrazce, nýbrž to, že jeho vytvoření není dáno kolektivním chováním použitých částic. Totiž: Vychází-li ze dvou štěrbin „oblak částic“ tak, že v prostoru mezi štěrbinami a stínítkem jich je v každém okamžiku mnoho, dokážeme si představit, že mezi sebou interagují – ačkoliv není úplně jasné jakým způsobem – a proto dochází k interferenci. Jenže stejný obrazec dostal italský výzkumný tým vedený *P. G. Merlim* v roce 1974 při použití tak slabého zdroje elektronů²⁶, že bylo garantováno, že v každý okamžik existoval v aparatuře elektron nanejvýš jeden. Jeden elektron v jednu chvíli také dopadnul na stínítko. Přesto se takto vytvořené tečky postupem času slily znovu do interferenčního vzorku. Klasicky interpretovat takový výsledek není možné, neboť celistvá částice nemůže projít oběma otvory naráz a tudíž by na ni neměla mít nejmenší vliv existence jiného otvoru než toho, kterým se vydá. Korpuskulární teorie by v takovém případě požadovala vznik dvou neostrých světlých skvrn naproti otvorům – a nic víc.

Vypůjčíme-li si sousloví od R. P. Feynmana, musíme konstatovat, že „elementární *částice* [včetně světla] jsou *jev*, který se vyznačuje diskrétním vznikem a detekcí [tj. jeden ionizovaný atom a jedna tečka na stínítku], ale proces mezi těmito dvěma událostmi lze popsat pouze *vlnově* [elektron prochází oběma otvory]“.

Tento vlnový popis je podobný postupu, který jsme použili u světla. Místo „intenzity“ mluvíme o „četnosti dopadu částic“ na jisté místo detektoru, která je úměrná pravděpodobnosti p výskytu částice na uvažovaném místě. Jak zjistíme pravděpodobnost? Analogicky s klasickými vlnami, i v mikrosvětě zavedeme *amplitudu pravděpodobnosti* \mathcal{A} , což je tentokrát komplexní číslo nebo dvojsložkový vektor – podle toho, s čím se nám pracuje lépe (my tu budeme používat druhou možnost). Pravděpodobnost p je pak rovna druhé mocnině velikosti amplitudy, $p = |\mathcal{A}|^2$. Pokud máme dvě nerozlišitelné alternativy, jak se částice (foton) do zkoumaného bodu může dostat, totiž pokud nemáme možnost (nebo se vzdáme možnosti) jak zjistit, která varianta nastala, amplitudy přiřazené každé cestě sečteme,

$$p_{1+2} = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2.$$

²⁶⁾ Podobný pokus s fotony byl provedený podstatně dříve.

Pokud jsme schopni zjistit cestu, například pomocí detektoru umístěného u každého otvoru dvojštěrbiny, sčítají se až výsledné pravděpodobnosti,

$$p'_{1+2} = p_1 + p_2 = |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2.$$

Jediná věc, která nám nyní chybí k vypočítání pravděpodobnosti dopadu částice na jakékoliv místo stínítka za dvojštěrbinou, je znalost amplitud pravděpodobnosti. Pro volný foton s barvou λ (nebo jakoukoliv jinou částici s vlnovou délkou danou de Broglieovým vztahem $\lambda = h/mc$) se jedná o vektory²⁷

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \\ \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

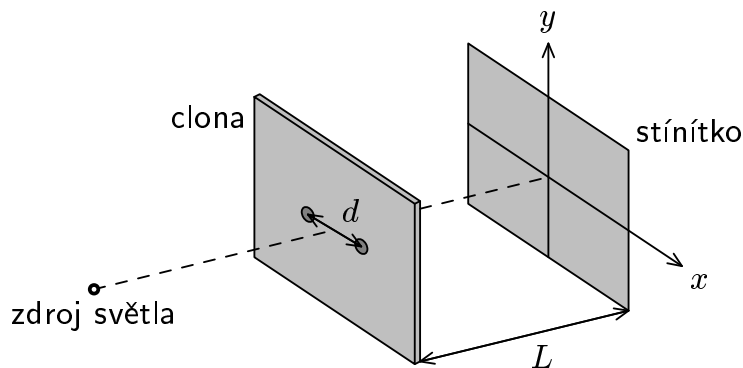
Protože ct je dráha, kterou světlo (nebo jiná částice) urazí od štěrbinu do vyšetřovaného bodu, můžeme ve shodě s obrázkem 49 dosadit $ct = L_1$ resp. $ct = L_2$ do amplitudy \mathcal{A}_1 resp. \mathcal{A}_2 . Po vyčíslení pravděpodobnosti dopadu na stínítka (využijeme při tom sčítací vzorce pro goniometrické funkce) můžeme psát, že intenzita osvitu fotografické desky je úměrná

$$I \sim p = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = 4 \cos^2 \left(\pi \frac{L_1 - L_2}{\lambda} \right). \quad (57)$$

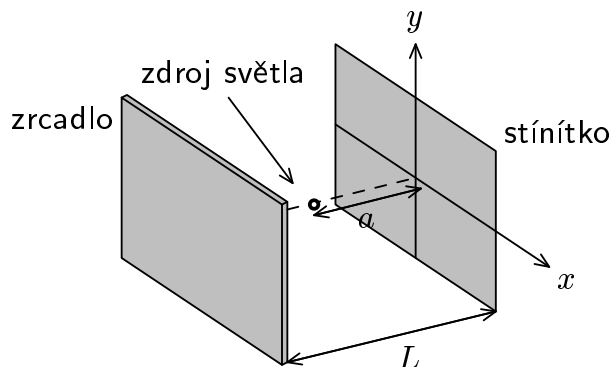
Když si rozmyslíte, jak vypadá \cos^2 , budete souhlasit, že jsme právě dostali interferenční proužky (obrázek 5). Tlumení k okrajům, dané různými dopadovými úhlem na stínítka (a tedy maximální plošnou hustotou fotonů), jsme tu nezapočetli, pro ilustraci uvažovaného jevu se jedná o zbytečnou komplikaci.

Úloha II.S ... Young a vlnová povaha světla

- a) Jaký tvar interferenčních proužků na stínítka byste očekávali v následujícícho dvou sestavách? Najděte rovnice křivek maximální intenzity a zkuste jich několik načrtnout.



²⁷⁾ Nebo komplexní čísla $\mathcal{A} = e^{2\pi i ct/\lambda}$.



- b) Ukažte, jak by dopadl Youngův experiment, jestliže by se světlo chovalo podle Newtonových představ (tzn. difrakce *ano*, interference *ne*). Nezapomeňte vzít v úvahu různý úhel dopadu světla na různá místa stínítka.
- c) Užitím vyloženého kvantověmechanického popisu určete rozložení intenzity, jaké by dostal Jöhnsson při použití čtyřšterbiny (tedy čtyř úzkých rovnoběžných otvorů rozmístěných ve vzdálenostech b od sebe). Načrtněte reprezentativní úsek grafu a okomentujte přednosti většího počtu otvorů.

(řešení str. 134)

Kapitola 3: Michelson a světlo

V této kapitole se zaměříme na pokusy, které mají co do činění se světlem – nejprve si povíme o způsobech, jakými se v minulosti měřila rychlost světla, a poté o pokusu Michelsonově, který byl předzvěstí revoluce jménem speciální teorie relativity.

$c = ???$

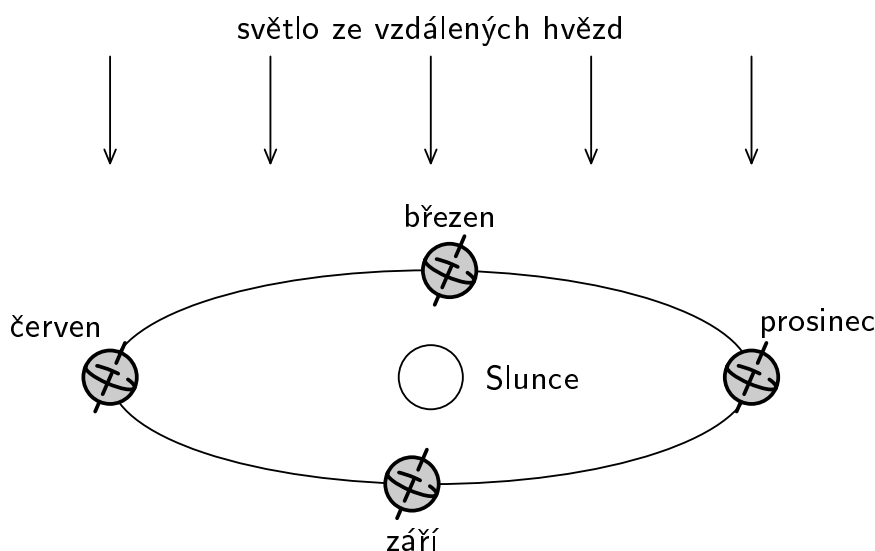
Světlo již od pradávna podněcovalo lidskou zvědavost, proto není žádný div, že se o něm ve starověkém Řecku vedly mnohé disputace. Pomineme-li povahu světla, která byla „pořádně“ objasněna až v polovině dvacátého století²⁸, zaměstnávala starověké filosofy nejvíce rychlost. Je konečná, či nekonečná? Mnoho přispělo se svým názorem, ale prvním, kdo se rozhodl opravdu něco dělat, byl... ano, náš starý známý Galileo (nebojte, tohle je poslední zmínka o něm v našem seriálu). Postavil dva své pomocníky daleko od sebe, s lucernami zakrytými šátky. Jeden z nich náhle odkryl lucernu a druhý z nich učinil totéž, jen co k němu došlo světlo z první lucerny. První z experimentátorů přitom sledoval dobu, za kterou k němu dorazil světelný signál od druhého pomocníka. Asi nikoho nepřekvapí, že Galileo nenaměřil na vzdálenost necelých dvou kilometrů žádný pozorovatelný efekt – světlo z druhé lucerny dorazilo „okamžitě“. Galileo se však nedal svést negativním výsledkem a pouze prohlásil, že světlo se pohybuje minimálně desetkrát rychleji než zvuk.

²⁸⁾ A nebyl by žádný div, kdyby se časem objevila nějaká „lepší“ teorie než ta, kterou máme k dispozici.

Prvním, komu se podařilo více méně jednou provždy debatu o konečnosti rychlosti světla rozhodnout, byl dánský astronom Ole Christensen Rømer, který potřebná data získal měřením pohybu Jupiterova měsíce Io. Dokázal, že rychlost světla ve vakuu je konečná, a dokonce velmi dobře určil její hodnotu. Ve FYKOSe jsme se jeho výpočty už zaobírali – tvořily náplň úlohy 18. V. 4. Proto laskavého čtenáře odkazujeme do archivu na našich internetových stránkách, kde se o celé problematice dozví více.

Razantní posun v přesnosti naměřených hodnot přinesl britský astronom James Bradley, který objevil jev aberace světla. Vysvětleme si nyní trochu podrobněji, o co se vlastně jedná.

Bradley si představil chodce, který chodí do kolečka v hustém dešti padajícím kolmo k zemi. Ač déšť padá kolmo k zemi, našemu chodci se bude zdát, že mu protivný déšť padá stále šikmo do obličeje. V průběhu pohybu se mu tedy bude postupně zdát, že nejprve prší z jihu, pak z východu, ze severu a tak stále dokola. Přesvědčte se prosím, že jste si situaci dobře promysleli.



Obr. 54. Aberace

Bradley si uvědomil, že na světlo hvězd se můžeme dívat jako na takový déšť. Místo chodce vezmeme naši Zemi, místo jeho kolečka vezmeme dráhu, po které Země obíhá Slunce. Když potom sledujeme hvězdu, která je přímo na severu, bude se nám v průběhu roku zdát, že se hvězda na nebi pohybuje v kolečku (viz obrázek 54) – nejprve je trochu na jihu, pak trochu na východě, ... V případě deště je úhel, pod kterým se chodci jeví, že prší, roven přibližně

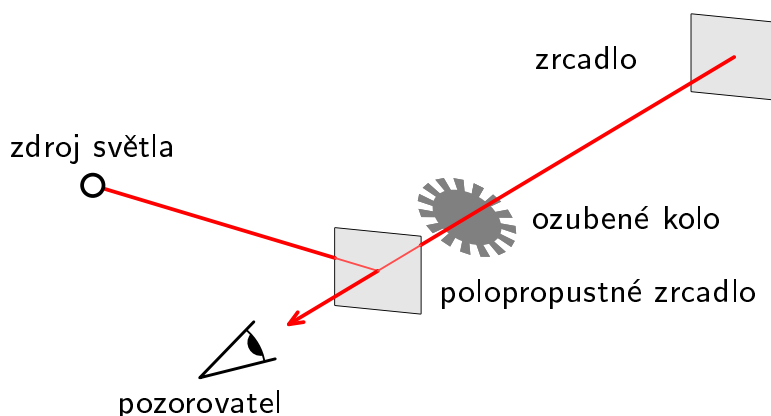
$$\vartheta \approx \frac{v_{\text{chodec}}}{v_{\text{déšť}}} . \quad (58)$$

Analogicky je v případě Země toto úhlový poloměr kolečka, které hvězda na obloze opisuje. Bradley věděl, že světlo je asi 10 000krát rychlejší než Země na orbitě. Z toho vypočetl, že poloměr kruhu, který hvězda na obloze vykonává, by měl být řádově 20". Taková přesnost již byla v možnostech tehdejší astrometrie, Bradley

tedy mohl navrhované měření uskutečnit a zjistit, že

$$c = (298\,000 \pm 300) \text{ km/s}.$$

Po více než sto let nikdo nevěděl, jakým lepším způsobem měření provést, až v roce 1849 přišel H. Fizeau, který vymyslel způsob, jak celé měření provést i bez pomoci hvězd. Jak se můžeme podívat na obrázku 55, vycházel ze základního uspořádání, které užíval již Galileo. Tím rozhodujícím rozdílem je zde rychle se otáčející ozubené kolo. Jeho zuby nepropouští světlo, a světelný paprsek tedy může projít pouze tehdy, když je kolo vhodně otočeno. Jinak narazí do zuby a zastaví se.



Obr. 55. Fizeauův experiment

Světlo do experimentu vstupuje přes polopropustné zrcadlo, na kterém se odráží, prochází ozubeným kolem, odráží se na vzdáleném zrcadle, opět prochází ozubeným kolem a po průchodu polopropustným zrcadlem přichází k pozorovateli. Zatímco však světlo letí k zrcadlu a zpět, otočí se kolo o malý úhel

$$\alpha = \omega T = \omega \frac{2L}{c}, \quad (59)$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení kola.

Při špatně zvolené frekvenci otáčení se kolo otočí zrovna o tolik, že nazpět se vracující světlo narazí do zuby a neprojde. V takovém případě pozorovatel nic neuvidí. Když ale frekvenci nastavíme vhodně, stihne se kolo otočit o právě jeden zub a pozorovatel zaregistruje blikání, respektive je-li rychlost otáčení dostatečně velká, stálé světlo. Je-li zubů právě N , odpovídá jednomu zubu úhel

$$\beta = \frac{2\pi}{N}. \quad (60)$$

Aby světlo prošlo, musí si být rovny úhly α a β . Odtud dostáváme srovnáním rovností (59) a (60) rychlost světla

$$c = \frac{L \omega N}{\pi}. \quad (61)$$

Fizeauovi se podařilo měření provádět na vzdálenost $L \approx 9$ km a jeho hodnota c byla o poznání nepřesnější než ta Bradleyho. Foucaultovi a posléze Michelsonovi se však podobnou metodou během následujících sedmdesáti let povedlo nejistotu měření snížit až na 4 m/s.

S rozvojem teorie elektromagnetismu se zjistilo, že rychlost světla souvisí s dalšími základními konstantami (permitivitou vakua ε , vystupující v Coulombově zákoně elektrostatiky, a permeabilitou vakua μ , vystupující například v Ampérově zákoně) dle vztahu

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} . \quad (62)$$

Rychlost světla můžeme tedy určit prachsprostým změřením obou konstant na pravé straně rovnice a provedením příslušného výpočtu tak, jak to poprvé učinili Weber a Kohlrausch.

S rozvojem moderní techniky se z měření rychlosti světla stala rutinní záležitost. Moderní osciloskopy jsou schopny zachytit čas v nanosekundové škále, takže nic nebrání tomu, měřit vše nejjednodušším možným způsobem. Experimentátor změří dobu, za kterou světlo urazí známou vzdálenost, a pak vypočítá všem školákům známý poměr $c = s/t$.

Poslední měření rychlosti světla se uskutečnilo v roce 1983, kdy byl pomocí rychlosti světla definován metr jako „délka dráhy, kterou světlo urazí ve vakuu za dobu 1/299 792 458 s“. Od té doby je rychlost světla ve vakuu určena naprosto přesně, pouze máme stále přesněji určeno, co je to vlastně jeden metr.

Michelson podruhé

Již zmíněný Albert Michelson se do historie fyziky zapsal nejen vylepšením původní Fizeauovy metody, ale především jiným experimentem, jemuž bude věnována druhá část této kapitoly.

V polovině devatenáctého století vedle sebe existovaly dvě významné fyzikální teorie – klasická mechanika a teorie elektromagnetismu. Obě dosahovaly pozoruhodných úspěchů při vysvětlování roztodivných přírodních jevů, problematické bylo, že nešly zkombinovat. Ukažme si proč.

Nejprve se zabývejme pohybem z hlediska klasické mechaniky. Když tryskové letadlo letící rychlostí 500 km/h vystřelí raketu rychlostí 500 km/h, bude se tato vůči pozorovateli na zemi pohybovat rychlostí 1000 km/h (od něj, v horším případě k němu). Selský rozum nám říká, že ta samá logika by měla platit i v případě světla, o němž již víme, že se šíří rychlostí zhruba 300 000 km/s. Když tedy zapneme světla auta jedoucího rychlostí 100 000 km/s, mělo by se lidem stojícím na zemi zdát, že se k nim světlo přibližuje rychlostí 400 000 km/s. To je ale spor s Maxwellovými rovnicemi, určujícími zákony elektromagnetismu. Podle nich totiž každý experimentátor, který se bude pokoušet měřit rychlost světla, naměří ve všech případech ve vakuu tu samou hodnotu cca 300 000 km/s, nezávisle na jeho vlastní rychlosti. Pro erudovanější čtenáře poznamenejme, že problém spočívá v tom, že Maxwellovy rovnice nejsou invariantní vůči Galileiho transformaci.

Když do Maxwellových rovnic dosadíme

$$t' = t, \quad x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

dostaneme *jiné rovnice!* To se fyzikům pochopitelně nelíbilo, protože chtěli, aby tvar jejich rovnic nebyl závislý na vztažné soustavě, ve které jevy pozorujeme. Proto bylo třeba buď prohlásit, že jsou tyto rovnice obecně neplatné, anebo říci, že se elektromagnetismus řídí jinými principy než klasická mechanika.

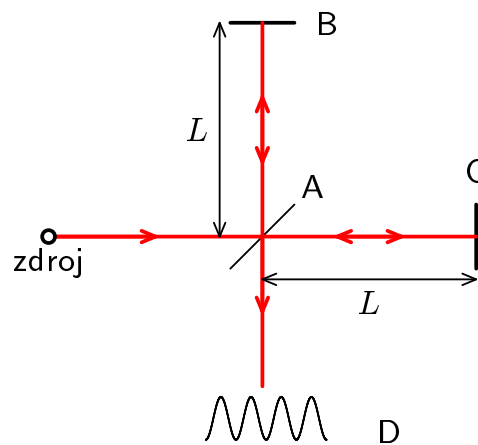
Co teď s tím?

Lidé devatenáctého století se podívali na ostatní druhy vlnění – zvukové vlny, vlny na vodě, kmitání strun – a zjistili, že všechny potřebují ke svému šíření nějaké médium. Proto analogicky usuzovali, že i světlo se v nějakém prostředí šíří, a toto prostředí rovnou pojmenovali *éter*. Tvrdili, že vzhledem k éteru se světlo šíří rychlostí cca 300 000 km/s, ale vůči ostatním pozorovatelům se jeho rychlost řídí vektorovým součtem. Tedy tak, jak jsme si to v předchozím odstavci vysvětlovali na příkladu tryskového letadla, a tak, jak nám to ponouká náš selský rozum.

Tady se otevírá pole působnosti pro Michelsonův pokus. Země se pohybuje kolem Slunce rychlostí $v = 30$ km/s. Když bychom proto měřili rychlost světla v průběhu celého roku, měli bychom naměřit její kolísání, a to minimálně o uvedených 30 km/s.

Jak ale Michelson dovedl změřit takový malý rozdíl? Pomocí interference²⁹. Jeho aparaturu vidíte na obrázku 56.

Ze zdroje světla vyletí svazek paprsků, které se na polopropustném zrcadle A rozdělí do dvou kolmých svazků. Ty se po odrazu na zrcadlech B, C vrací na polopropustné zrcadlo a po dalším odrazu směřují ke stínítku D. Zde oba svazky interferují a vytvářejí standardní interferenční obrazec.



Obr. 56. Schéma Michelsonova pokusu

Podívejme se nyní, co by se stalo, kdyby se celá aparatura pohybovala vůči éteru rychlostí v směrem doprava (obr. 57). Nečárkovanými veličinami označujeme pozici prvků aparatury v okamžiku dělení svazku na desce A, čárkovanými veličinami označujeme polohu desek v okamžiku nárazu světelného paprsku.

Na vodorovném ramenu urazí světlo po cestě tam i zpátky vzdálenost L rovnou vzdálenosti mezi zrcadly A a B. Po cestě k zrcadlu B letí světlo stejným směrem, jakým se pohybuje celá aparatura. Zdánlivá rychlost světla z pohledu aparatury bude tedy v tomto případě $c - v$. Po zpáteční cestě bude z pohledu aparatury rychlost světla $c + v$ a obě cesty tak světlo vykoná za čas

$$t_1 = \frac{L}{c - v} + \frac{L}{c + v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}. \quad (63)$$

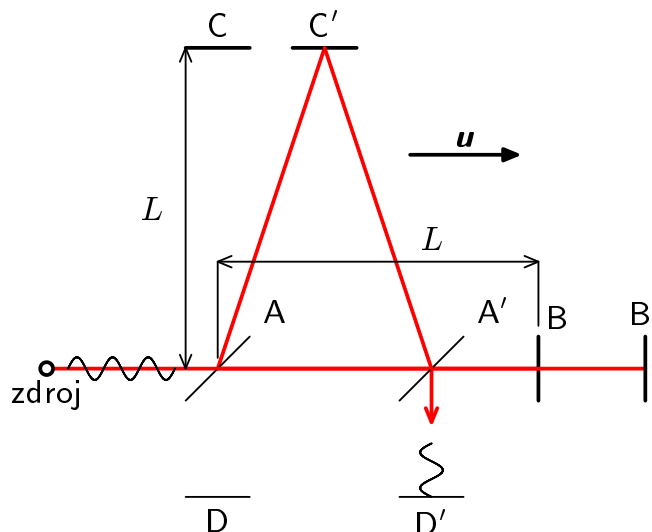
²⁹⁾ Viz minulý seriál či některá z učebnic o optice.

Podívejme se nyní na pohyb světla druhým ramenem. Označíme-li t_2 dobu pohybu světla druhým ramenem, pak z obrázku 57 a Pythagorovy věty dostáváme

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = L^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2,$$

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (64)$$

Vidíme, že doby letů obou paprsků jsou rozdílné a závisí na průmětu vektoru rychlosti Země v éteru na horizontální rameno aparatury. Když proto budeme zkoumat interferenci paprsků prošlých oběma rameny, měl by se v průběhu roku interferenční obrazec měnit v důsledku kruhového pohybu Země kolem Slunce. Na základě známých rychlostí bylo předpovězeno, jak by se tento obrazec měl měnit a bylo rovněž vypočteno, že předpovědaný efekt by měl být dobře pozorovatelný.



Obr. 57. Aparatura Michelsonova experimentu v pohybu

Když Michelson všechno důkladně sestavil a dlouhodobě prováděl svá pozorování, nebyl (v rámci chyby měření) schopen naměřit *vůbec žádnou* rychlost Země v éteru, což zcela zmátlo tehdejší vědeckou veřejnost. Znamená to snad, že se Země vůči éteru nepohybuje? První zoufalý pokus o vysvětlení navrhoval, že Země při svém pohybu strhává éter s sebou, a proto je vůči němu v klidu. Protože s sebou tato teorie přinášela mnohé protichůdné předpovědi, byla brzy zavržena. Zajímavý způsob, jak z toho ven, vymyslel Lorentz. Navrhl, že pohybující se objekty se ve směru pohybu zkracují faktorem $\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$. V tom případě by se při pohybu světla zkrátilo rameno AB na délku γL a oba dva časy (63), (64) by si byly rovny. Jak se ukázalo později, v podstatě trefil hřebík na hlavičku. V roce 1905 totiž na scénu vstoupil Albert Einstein a jeho fenomenální speciální teorie relativity. V ní je problém rozřešen velice jednoduše – Einstein prostě postuloval,

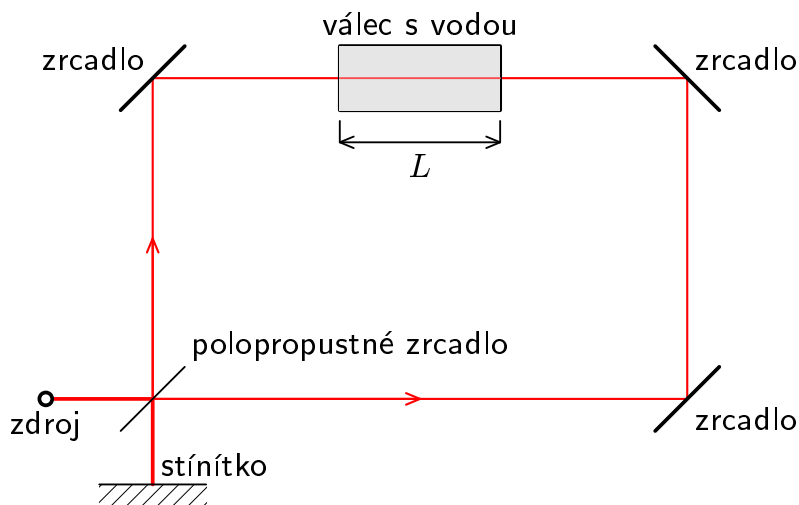
že vždycky, když budeme měřit rychlost světla ve vakuu (a to ať jsme kdokoli a budeme měřit jakýmkoli způsobem), naměříme stejnou hodnotu. A to je vše.

Mnoho lidí tomu pochopitelně nevěřilo, ovšem Einstein na základě této a několika dalších myšlenek vybudoval ucelenou teorii, která předpovídala některé další jevy (ekvivalenci hmoty a energie, dilataci času, ...). Protože všechny tyto předpovědi byly experimentálně ověřeny, je pravděpodobné, že i Einsteinova hypotéza je správná. Proto dnes věříme v to, že žádný éter neexistuje, a na přírodu dnes pohlížíme brýlemi speciální teorie relativity.

Tak obohatil rozpor dvou teorií vědu o zcela nové poznatky a svým nesporným dílem k tomu přispěl i A. Michelson.

Úloha III. S ... céčková

- Představte si, že vezmete dostatečně silný laser, vyzařující světlo vlnové délky 400 nm, a posvítíte s ním na Měsíc. Od jeho povrchu se vyzářené světlo odrazí a vrátí se zpět. Předpokládáme-li, že laser vyzařuje skrze kruhový otvor průměru 1 cm, jaký bude na zemském povrchu průměr paprsku navracejícího se po odrazu zpět? Poradíme vám, že to bude o poznání více než 1 cm.
- V této úloze předpokládejte, že éter skutečně existuje, a předpovězte, jak by to dopadlo, kdyby Michelson prováděl svá měření jiným způsobem: Jedno rameno by nechal dlouhé 5 metrů, zatímco druhé by bylo dlouhé 10 m. Takto připravená aparatura by vytvořila nějaký interferenční obrazec. Poté by Michelson celou soustavou otočil o 90° , takže by si obě ramena vyměnila místa. V průběhu tohoto otáčení by docházelo k posunům interferenčních proužků³⁰. Jak by se v uvedené aparatuře posunuly interferenční proužky při naznačené rotaci? Jak dlouhé by muselo být delší rameno, aby se interferenční proužky vyměnily, tedy aby se rotací maxima posunula na minima?
- V následující úloze předpokládejte, že éter existuje a že těleso pohybující se v éteru jej úplně strhává, takže relativní rychlost tělesa vůči éteru je nulová. Jaký fázový posun by poté vznikl mezi dvěma paprsky v soustavě naznačené na obrázku?



³⁰⁾ Představte si rotující dvojštěrbinu.

Světlo ze zdroje se na polopropustném zrcadle rozdělí na dva svazky a pokračuje po dokonale obdélníkové dráze zpět na polopropustné zrcadlo, kde vystupuje na stínítko, na kterém sledujeme interferenční proužky. Po cestě jsou oba paprsky třikrát odraženy na zrcadle a procházejí válcem délky L naplněným vodou. Celá soustava kromě válce s vodou (ten je vůči éteru v klidu, nezapomeňte) se vůči éteru pohybuje rychlostí v směrem vpravo.

(řešení str. 139)

Kapitola 4: Foucault a rotace Země

Na počátku devatenáctého století už byla představa Země jako rotující planety zcela běžná a zažitá. Mluvily pro to zejména dva podstatné experimentální poznatky (vyjma pohybu hvězd, samozřejmě). Jednak to bylo nade vše pochyby prokazatelné zploštění Země na pólech a naopak vyboulení na rovníku, kde gravitace měla být slabší o odstředivou sílu. Rozdíl rozměrů činil asi $1/300$ poloměru. Druhým pozorovaným jevem byla aberace světla přicházejícího z vesmíru, o níž jsme mluvili už v minulém seriálu. Zde byla podstatná tzv. *denní aberace*, totiž vliv rotace Země na zdánlivou polohu nebeských těles.

Přesto jak učené společnosti tak veřejnosti scházela jednoznačná dynamická pomůcka, která by rotaci planety detekovala. V polovině devatenáctého století se s nimi rozrhl pytel. Roku 1851 přišel francouzský vědec *Léon Foucault* s jedním z nejproslavenějších fyzikálních experimentů. Nejprve v Poledníkové síni pařížské observatoře a posléze i ve velké pařížské chrámové hrobce, Panthéonu, zavěsil dlouhé, precizně připravené kyvadlo s těžkým závažím na konci. V druhém případě se jednalo o ocelový drát dlouhý 67 metrů a olovenou kouli o hmotnosti 28 kg. Kyvadlo opatrně rozhoupal a – k úžasu přítomných – se rovina kyvu během následujících hodin začala „bezdůvodně“, po směru hodinových ručiček, otáčet. Takový jev jistě není překvapivý, pokud si představíme podobné kyvadlo na pólu. Na první pohled ale není jasné, jestli i v jiných zeměpisných šířkách se rovina kyvů bude otáčet stejně rychle jako na pólech. A jak publikum v Paříži rychle upozorovalo, skutečně tomu tak nebylo.

Cardan, Cartan a Coriolis

Jediné síly působící na kyvadlo (zanedbáme-li odpor vzduchu a různé pnutí v drátu) jsou gravitační, která definuje směr „dolů“ a udává tím podmínku na rovnovážnou polohu, a síla závěsu, která také nikdy nemíří mimo aktuální rovinu kyvu. Žádná skutečná síla stáčení evidentně nezpůsobuje.

Protože ale rotující planeta není inerciální soustava, musíme do našich silových úvah zapracovat ještě dvě další, fiktivní síly: odstředivou a Coriolisovu. Prvá je v rozsahu kyvu kyvadla konstantní co do směru a velikosti, takže se většinou začlení do tíhového zrychlení. Coriolisova síla je

$$\mathbf{F}_C = -2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_0, \quad (65)$$

kde \mathbf{v} značíme okamžitou rychlost kyvadla, m hmotnost závaží a $\boldsymbol{\Omega}_0$ úhlovou rychlost rotace Země. Budeme předpokládat, že vliv síly (65) je malý a kyvadlo

se mnohokrát zhoupne než se rovina kyvu výrazně pootočí. Pak můžeme jeho pohyb považovat za lineární jako u běžného dlouhého matematického kyvadla. Pro výchylku a rychlost pak platí

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad v(t) = x_0 \omega \sin \omega t, \quad a(t) = x_0 \omega^2 \cos \omega t. \quad (66)$$

Rychlost kyvadla je vždy tečná k povrchu planety v daném místě. Pokud ϕ je zeměpisná šířka daného místa, je velikost Coriolisova zrychlení

$$a_C = \frac{|\mathbf{F}_C|}{m} = 2x_0 \omega \Omega_0 \sin \phi \sin \omega t. \quad (67)$$

Zrychlení (67) míří vždy kolmo na směr rychlosti závaží, kterou ve shodě se zjednodušujícími předpoklady považujeme za směřující stále stejným směrem, takže způsobuje vznik malé kolmé rychlosti v_\perp . Komu je jasné, že $v_\perp(t) = \int_0^t a_C dt$, nechť přeskočí rovnou k následující rovnici. Ostatní vězte, že si můžeme (67) díky jeho harmonickému průběhu představit jako zrychlení vyvolávající malý kmit do strany. Rychlost v_\perp proto poroste také téměř harmonicky, ale ne „zprvu rychle a pak pomalu“ jako u běžného kyvadla s $a \sim \omega^2 \cos \varphi$, nýbrž „zprvu pomalu a pak rychle“ kvůli závislosti a na $\sin \omega t$. Tedy rychlost nezávisí na $\sin \omega t$, ale na $1 - \cos \omega t$. Výsledek je až na tuto odlišnost analogický známým vztahům (66),

$$v_\perp(t) = 2x_0 \Omega_0 \sin \phi (1 - \cos \omega t).$$

Kosinus je funkce, která má v intervalu od 0 do π (jeden kyv) střední hodnotu rovnou nule, tedy střední kolmá rychlost kyvadla je

$$\langle v_\perp \rangle = 2x_0 \Omega_0 \sin \phi.$$

Kyvadlo se při jednom zhoupnutí odchýlí přibližně o

$$\langle \Delta l \rangle = \frac{1}{2} \langle v_\perp \rangle T = x_0 \Omega_0 T \sin \phi,$$

což odpovídá změně úhlu (na délce $2x_0$)

$$\langle \Delta \vartheta \rangle = \frac{\langle \Delta l \rangle}{2x_0} = \frac{1}{2} \Omega_0 T \sin \phi.$$

Střední úhlová rychlost stáčení při jednom kyvu, Ω , pak činí

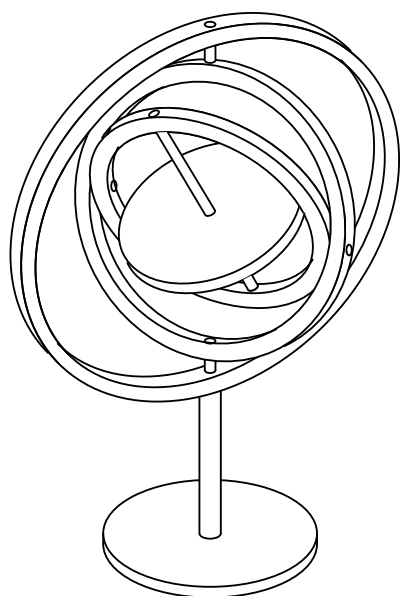
$$\langle \Omega \rangle = \frac{2 \langle \Delta \vartheta \rangle}{T} = \Omega_0 \sin \phi.$$

Když se kyvadlo po půlce periody vrací z nové amplitudy, nevrací se po stejné trajektorii zpět, neboť Coriolisova síla změnila znaménko a naopak závaží z původní dráhy odchyluje, opět s průměrnou úhlovou rychlostí $\Omega_0 \sin \phi$. Můžeme tedy udělat závěr, který se nám bude později hodit, totiž že dynamické procesy na Zemi – na

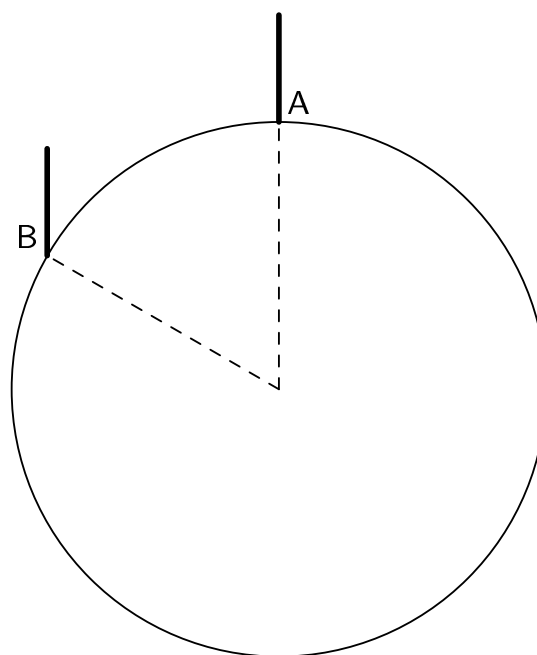
zeměpisné šířce ϕ – probíhají jako kdyby se jednalo o lokálně rotující soustavu s úhlovou rychlostí $\Omega_0 \sin \phi$, což je průmět Ω_0 na svislici v místě, kde stojíme.

Samozřejmě bychom stáli i o experiment, který by byl schopný ukázat rotaci Země nezkreslenou faktorem $\sin \phi$; o zařízení využitelné i při přepravě, které by zároveň ukazovalo skutečný směr rotace Země. Takové zařízení navrhnul Foucault v roce 1852. Jednalo se o gyroskop – setrvačnický, který, když je vhodným způsobem upevněn, zachovává svoji rotaci. Jednou z oblíbených variant upevnění je známý *Cardanův závěs* na obrázku 58. Jde o tři kruhy spojené křížem vůči sobě umístěnými klouby.

Moderní matematika³¹ rozumí otázkám obdobným Foucaultově kyvadlu prostřednictvím pojmu *paralelní přenos*. Jedná se o čistě geometrický pojem, který je ovšem v mnoha případech velice užitečný až nutný. Podívejme se tedy, jak lze problém Foucaultova kyvadla řešit téměř bez fyziky.



Obr. 58. Cardanův závěs



Obr. 59. Papír na rovníku

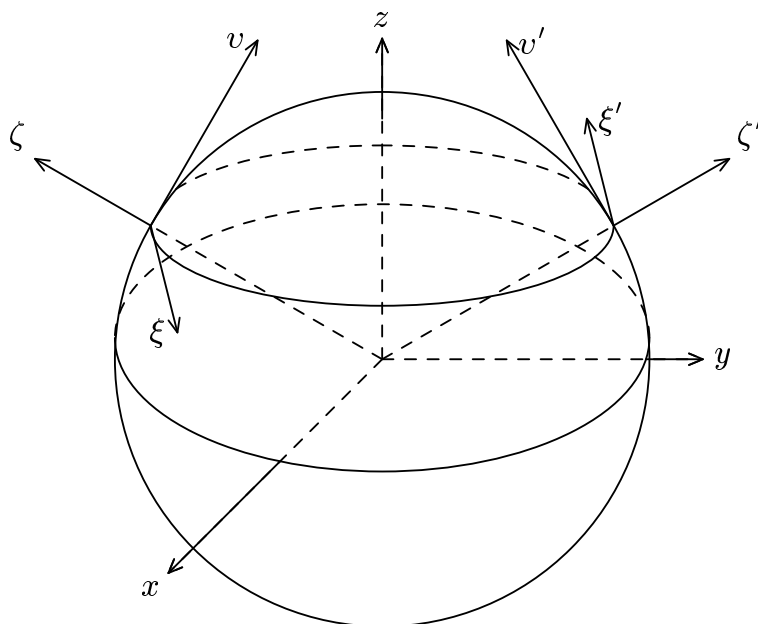
Zabývejme se studiem kyvadla v inerciální vztažné soustavě nespojené s planetou. Jak již bylo uvedeno, v této soustavě nepůsobí na kyvadlo žádná síla, která by kyvadlo vychylovala z roviny kmitů, a tato rovina se tak bude snažit zachovat vůči inerciální soustavě stálý směr. Přímocharé užití této myšlenky však vede k problémům, jak ukazuje následující zjednodušený příklad.

Sledujme shora rotaci Země, na jejímž rovníku v bodě A je držen list papíru, kolmý k povrchu planety. Po chvíli se list papíru rotací Země dostane do bodu B. Kdybychom v každém okamžiku požadovali, aby byl papír rovnoběžný se svým počátečním umístěním, dostali bychom pozici znázorněnou na obrázku 59.

³¹⁾ Zbytek kapitoly je spíše pro ty, kteří se nebojí složitějších výrazů – jak jazykových, tak algebraických. Jeho pochopení není nutné k vyřešení úloh.

Uvažujme nyní místo listu papíru právě rovinu kmitu kyvadla, o níž víme, že by se měla chovat podobně jako list papíru v předchozím příkladu. Tak ale rychle narazíme na komplikace, neboť nyní bychom byli nuceni prohlásit, že v bodě B se kyvadlo kýve v nesvislé poloze, totiž šikmo. (Představte si takové kyvadlo a podrobně si promyslete, co by to znamenalo.)

A jak se s tímto problémem vypořádá moderní matematika? Trikem. Prohlásí, že rovina kyvu zůstane při *malém* otočení *skoro* rovnoběžná. Ne přesně rovnoběžná, ale skoro. Pro konkrétní postup se ale již vrhněme do světa matematických symbolů. Vektor je veličina zadaná svým neměnným směrem a velikostí. Co změně naopak podléhá jsou složky vektoru – při jeho popisu v různých souřadnicích. První věc, kterou budeme na naší cestě potřebovat, je tedy studium změn složek vektoru při rotaci souřadnic.



Obr. 60. Rotující planeta

Na obrázku 60 je náčrt rotující planety, dále inerciální souřadné soustavy $S : (x, y, z)$ nespojené s planetou a také souřadné soustavy $\Sigma : (\xi, v, \zeta)$ spojené s bodem na povrchu planety na ϕ -té rovnoběžce (Panthéonem), a to ve dvou denních dobách.

Na obrázku 61 vidíme oba souřadné systémy S i Σ přenesené k sobě pro lepší orientaci. Chvilka dumání nás přesvědčí, že bod se souřadnicemi (x, y, z) v S má, pokud je $\varphi = 0$, následující souřadnice v Σ :

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ v &= y \sin \phi + z \cos \phi, \\ \zeta &= -y \cos \phi + z \sin \phi.\end{aligned}\tag{68}$$

V libovolném okamžiku je Σ' otočená o obecný úhel φ kolem osy z vůči S . Otáčet souřadnice zadané rovnicemi (68) by bylo obtížné, my si pomůžeme tím, že otočíme S kolem z o opačný úhel $-\varphi$. Taková transformace je v každých lepších

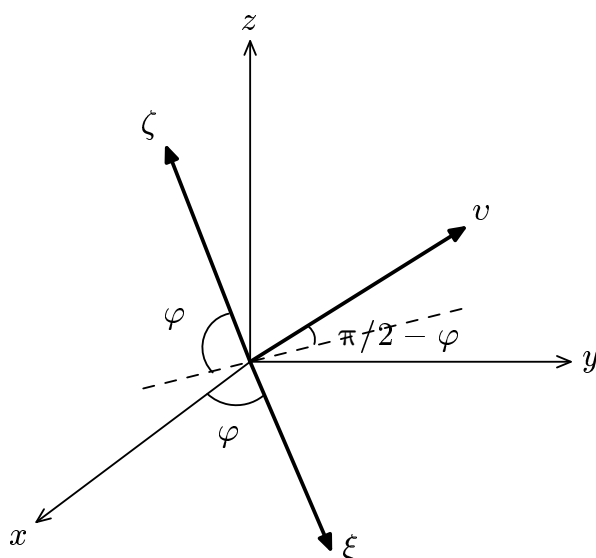
tabulkách,

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{69}$$

Nahradíme x, y, z v (68) otočenými souřadnicemi x', y', z' z (69). Dostaneme obecný přepočítání mezi souřadnicemi bodu (nebo také složkami vektoru) v S a v Σ ,

$$\begin{aligned}\xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\v &= -x \sin \varphi \sin \phi + y \cos \varphi \sin \phi + z \cos \phi, \\\zeta &= x \sin \varphi \cos \phi - y \cos \varphi \cos \phi + z \sin \phi.\end{aligned}\tag{70}$$

Poslední trojice vztahů nám tak říká, jaké souřadnice má vektor (x, y, z) v soustavě Σ .



Obr. 61. Rotace souřadnic

Jak nyní využít (70) v našem problému? Tak jako každou rovinu, i rovinu kyvu kyvadla ve vyšetřovaném bodě a okamžiku můžeme jednoznačně určit pomocí jediného (normálového) vektoru \mathbf{n} . Tento vektor má vůči soustavě S obecně souřadnice (x, y, z) , ale v místní soustavě Σ má nutně jednu význačnou vlastnost, totiž že leží v horizontální rovině (neboť rovina kmitu je lokálně vertikální). Jeho souřadnice tudíž jsou $(\xi, v, 0)$. Je zde možná dobré poznamenat, že my pozorujeme právě to, co se odehrává v soustavě Σ , s níž jsme spjati.

Chvilku nyní vyčkejme. Země se potočila o malý úhel $\Delta\varphi$. Co se stalo? Souřadnicím vektoru $\mathbf{n} = (x, y, z)$ v Σ už neodpovídá $(\xi, v, 0)$, nýbrž $(\xi + \Delta\xi, v + \Delta v, \Delta\zeta)$. Velikosti jednotlivých změn snadno určíme z rovnic (70), stačí jen dosadit $\varphi + \Delta\varphi$ za φ , použít součtové vzorce pro sinus a kosinus na rozložení výrazů a přibližné vzorce pro goniometrické funkce malých úhlů $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ a $\cos \varepsilon \approx 1$ na

jejich úpravu³². Dostaneme tak

$$\begin{aligned}\Delta\xi/\Delta\varphi &\equiv \frac{\xi(\varphi + \Delta\varphi) - \xi(\varphi)}{\Delta\varphi} = -(x \sin \varphi - y \cos \varphi), \\ \Delta v/\Delta\varphi &\equiv \frac{v(\varphi + \Delta\varphi) - v(\varphi)}{\Delta\varphi} = -(x \cos \varphi + y \sin \varphi).\end{aligned}\quad (71)$$

Zároveň víme, že v našem případě je $\zeta = 0$ (vektor \mathbf{n} , o nějž se zajímáme, nemá žádnou svislou složku), což můžeme využít a v (70) eliminovat z ve výrazu pro v . Vyjde

$$v = (x \sin \varphi - y \cos \varphi) \frac{-1}{\sin \phi}.\quad (72)$$

Měnící se vodorovnou orientaci vektoru \mathbf{n} popíšeme jedním úhlem α , azimutem, definovaným standardně $\operatorname{tg} \alpha = v/\xi$. Konečně jsme schopni si odpovědět na otázku, jak se změní azimut při malém pootočení Země.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\alpha}{\Delta\varphi} &\equiv \frac{\Delta \operatorname{arctg} \frac{v}{\xi}}{\Delta\varphi} = \frac{\operatorname{arctg} \frac{v(\varphi + \Delta\varphi)}{\xi(\varphi + \Delta\varphi)} - \operatorname{arctg} \frac{v(\varphi)}{\xi(\varphi)}}{\Delta\varphi} = \\ &= \frac{1}{\Delta\varphi} \frac{\xi\Delta v - v\Delta\xi}{\xi^2 + v^2} = -\sin \phi.\end{aligned}\quad (73)$$

Předposlední rovnost je samozřejmě švindl, po cestě je ještě potřeba udělat sadu kroků využívající součtové vzorce a uvedené přibližné vztahy, ale všechny jsou zcela přímočaré a analogické tomu, co jsme už jednou provedli. Poslední rovnost pak spočívá už jen v dosazení z (70), (71) a (72). Za jeden den ($\varphi = 2\pi$) se \mathbf{n} otočí ve vodorovné rovině o

$$\alpha_0 = -2\pi \sin \phi.$$

Úhlu α_0 se někdy říká *holonomní* nebo *geometrická* fáze.

Aby tu zaznělo i poslední jméno z nadpisu, zmiňme nyní francouzského matematika *Éliea Cartana*, kovářského synka, jenž urazil dlouhou cestu až k profesorství diferenciální topologie na Sorbonně v první polovině 20. století. Hlavně z jeho pera pochází velká část děl o paralelním přenosu a obecném geometrickém pojetí fyziky. Jak někteří možná tušíte, jím vybudovaný formalismus dnes slouží k nejelegantnějším formulacím (nejen) obecné teorie relativity.

Perrotův experiment aneb splachujeme záchod

Roku 1859 provedl Perrot jiný experiment, který si od oné doby také získal určité povědomí mezi lidmi. Velký válcový sud naplnil vodou, přiklopil poklicí a nechal několik dní odstát, aby vnitřní tření v kapalině a tření mezi ní a stěnami sudu zajistilo její úplný klid vzhledem k nádobě. Pokud měla být myšlenka o existenci lokální nenulové úhlové rychlosti pravdivá, při rychlém shromáždění

³²⁾ Kdo umí derivovat, samozřejmě derivuje.

této vody blíže centru sudu – tedy třeba při vypouštění malým kruhovým otvorem – se kvůli zachování momentu hybnosti musela zvětšit úhlová rychlost vody přitékající od krajů. Tak mělo dojít ke vzniku víru mířícího na dané polokouli vždy stejným směrem. O tom, jak malý je to však efekt, svědčí to, že Perrot nakonec musel dělat několik desítek pokusů a jejich statistické zpracování, a ani tak nebyl výsledek příliš přesvědčivý.

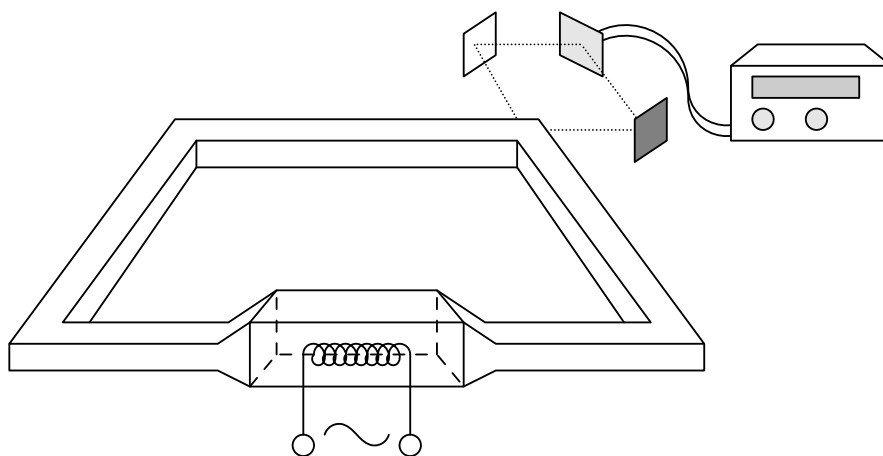
Na druhou stranu dneska víme o tvarech cyklon a anticyklon a mořských proudů na obou polokoulích a nemůžeme než konstatovat, že v takových měřítkách je efekt zřetelně pozorovatelný.

Moderní měření rotace Země

Překvapivě i dnes se stále v mnoha laboratořích přesně proměřuje rotace naší planety. V dnešní době se většinou jedná o detekci nepravidelností a dlouhodobého zpomalování rotace. Hlavní příčinou obojího je vliv slapových sil od Měsíce a Slunce.

Samozřejmě nejpřesnější metoda je pomocí satelitních naváděcích systémů. Ukazuje se ale, že družice nemají právě nejlepší časové rozlišení z důvodů technického rázu, zejména složitější komunikace.

V devadesátých letech minulého století se objevily první přístroje využívající tzv. *Sagnacův jev*, nazývané *laserové gyroskopy* nebo *prstencové lasery*. Jednoduché schéma je na obrázku 62.



Obr. 62. Prstencový laser

Prstencový laser je zpravidla čtvercová uzavřená trubice naplněná směsí helia a neonu. My tu budeme nicméně uvažovat pro jednoduchost trubici kruhovou. V určitém místě trubice je ionizační zařízení (realizované vysokofrekvenčním obvodem), které plyn excituje a ten vysílá paprsky elektromagnetického záření do obou směrů podél trubice. Jestliže plyn spolu s prstencem rotuje rychlostí ω (tedy například když je upevněný na desetimetrovém betonovém pilíři zapuštěném do skály na rotující planetě jako třeba jeden poměrně nový laser nedaleko bavorského Wetzellu), dojde vzhledem k inerciálnímu pozorovateli k Dopplerově efektu a fotony (paprsky) vyslané do opačných směrů budou mít různé frekvence

$$f_+ = f_0 \left(1 + \frac{\omega r}{c} \right) \quad \text{a} \quad f_- = f_0 \left(1 - \frac{\omega r}{c} \right), \quad (74)$$

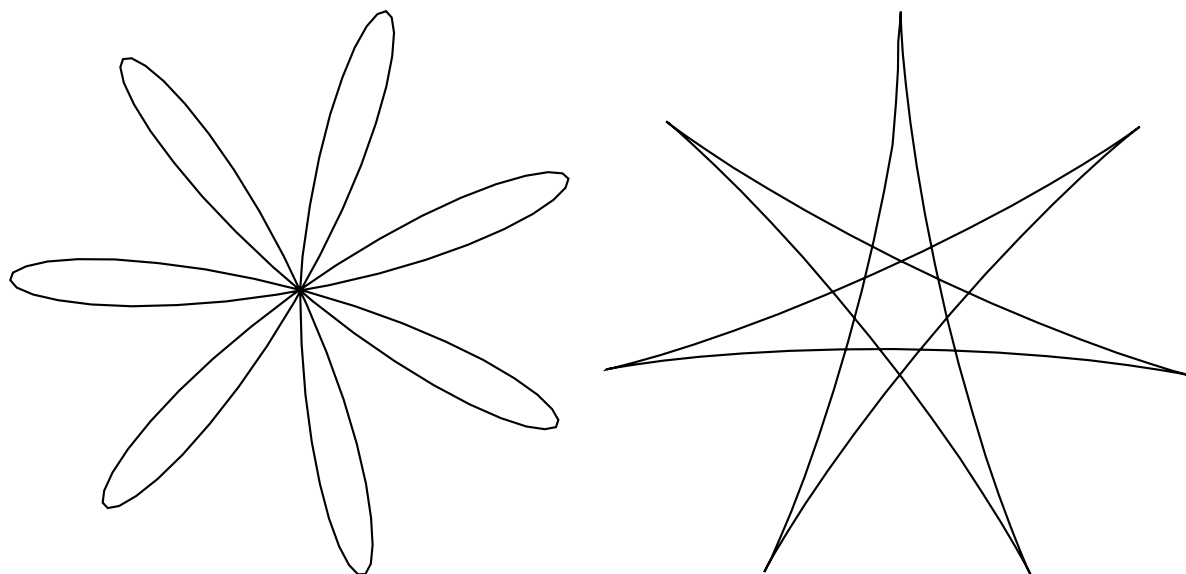
kde f_0 je vlastní frekvence plynu, tedy jeho přirozená „zářivková“ barva, již nejintenzivněji přijímá a vysílá, r je poloměr prstence laseru a c rychlost světla. Tyto dva paprsky se šíří plynem a mohou excitovat další atomy, přičemž první (s vyšší frekvencí) excituje jen ty, které „dostihne zezadu“, a druhý (s nižší frekvencí) jen ty, s nimiž se „čelně srazí“, obojí z pohledu inerciálního pozorovatele. Právě a jen tehdy je frekvence molekulou přijímaného fotonu v její soustavě oněch oblíbených f_0 . Díky tomuto procesu (a neuvažujeme-li tepelný pohyb atomů plynu) existují pro oba paprsky opačné směry, v nichž se mohou šířit bez obavy z pohlcení. Po nějaké době strávené pumpováním energie do plynu prostřednictvím ionizátoru se ustanoví rovnováha mezi pohlcováním a vyzařováním fotonů a uvnitř krouží v opačných směrech dva stabilní paprsky s frekvencemi (74). Pokud z trubice část každého paprsku vyvedeme a pomocí zrcátek je soustředíme na jedno místo, světlo se složí a dostaneme interferenční rázy (interferenci v čase). To je relativně pomalé (ve srovnání s f_0) kolísání intenzity o frekvenci δf , která je rovna jako u mechanických záznamů rozdílu obou frekvencí,

$$\delta f = f_+ - f_- = 2f_0 \frac{\omega r}{c} = \frac{4\omega S}{\lambda_0 P}, \quad (75)$$

kde $\lambda_0 = c/f_0$, $S = \pi r^2$ je plocha prstence a $P = 2\pi r$ jeho obvod. Tedy měřením rozdílu frekvence dvou paprsků sledujících odlišné dráhy jsme dnes schopni určit nejjemnější změny rotace našeho světa.

Úloha IV . S ... Foucaultovo kyvadlo a rotace Země

- a) Foucaultovo kyvadlo do písku nakreslilo při dvou různých demonstracích dva odlišné obrazce, oba jsou na obrázku. Rozhodněte, co způsobilo jiný tvar a také jak dlouhé by muselo být kyvadlo, aby tyto obrazce mohly na podlaze pařížské katedrály vzniknout. Kolikacípé jsou hvězdy/květy ve skutečnosti?



- b) Jaký tvar bude mít hladina v kbelíku s vodou, který klidně stojí na rovném stole?

c) Ukařte, ře vztah

$$\delta f = f_+ - f_- = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\omega \cdot S}{P}$$

pro frekvenční rozdíl (frekvenci rázů) dvou protiběžných paprsků v laserovém gyroskopu platí pro jeho libovolný rovinný tvar – tedy nejen kruhový.

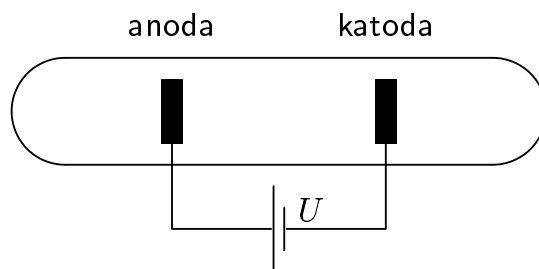
(řešení str. 143)

Kapitola 5: Thomson a jeho „corpuscules“

V této kapitole si povíme něco o experimentech, které vedly k objasnění existence a vlastností elektronů – povíme si o pracích, za které J. J. Thomson a R. A. Millikan obdrželi Nobelovu cenu za fyziku.

Katodové záření a objev elektronu

Katodová trubice je obyčejná skleněná baňka naplněná vzácným plynem nízkého tlaku, do níř jsou vsunuty dvě kovové elektrody (viz obrázek 63). Když elektrody připojíme ke zdroji elektrického napětí, vytvoří se mezi elektrodami charakteristicky zbarvený paprsek. Tomuto paprsku říkáme *katodové záření*.



Obr. 63. Schéma katodové trubice

Koncem devatenáctého století bylo známo mnoho vlastností tohoto záření, ale nikdo nevěděl, co je jeho podstatou. Zatímco někteří tvrdili, ře záření je proudem částic, jiní propagovali myšlenku neznámých vlnových procesů v éteru. Část experimentálních poznatků nahrávala první variantě, část té druhé. Pro ilustraci zmiňme alespoň

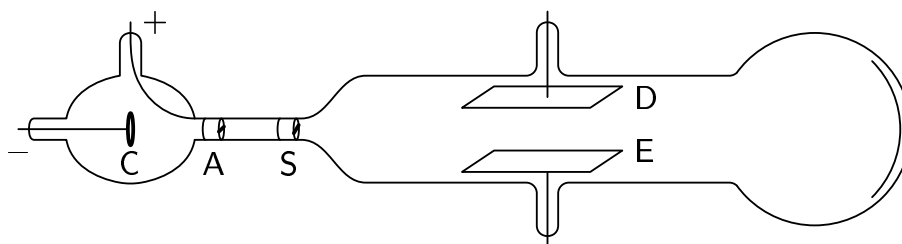
- a) když na elektrody připojíme napětí a vložíme mezi ně malý kovový mlýnek, katodové záření mlýnek roztočí,
- b) katodové záření prochází tenkou zlatou fólií.

První pozorování podporuje ideu částic, zatímco druhé ideu vlnění.

První Thomsonův experiment byl zaměřen na ověření v té době známého faktu, ře katodové záření se ve vnějším magnetickém poli ohýbá stejným způsobem, jako by neslo náboj záporného znaménka. Tento experiment však řádné nové poznatky nepřinesl, a proto se jím ani v tomto seriálu dále zabývat nebudeme.

Jeden z poznatků, který nebyl kompatibilní s hypotézou proudu částic, je fakt, ře nebylo pozorováno jejich zakřivení v elektrostatickém poli. Tedy do doby než J. J. Thomson uskutečnil svůj druhý experiment, jehoř schéma je na obrázku 64.

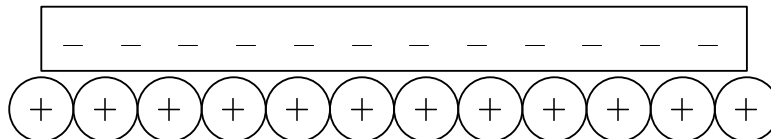
Záření emitované z katody C prochází dvěma štěrbinami A a S mezi desky kon-



Obr. 64. Thomsonova aparatura č. 1

denzátoru D a E, aby po průchodu celou soustavou dopadlo na stínítko. S touto aparaturou experimentovali již mnozí fyzikové před Thomsonem, ale všichni pozorovali totéž – elektrické pole katodové záření neovlivní.

Thomson nejprve došel ke stejným závěrům jako jeho předchůdci. Podrobnou analýzou celého jevu však zjistil, že negativní výsledek není způsoben katodovými paprsky, ale vodivostí prostředí mezi deskami kondenzátoru D, E. Po přiložení napětí na desky kondenzátoru se dají ionty plynu³³ v prostoru mezi deskami kondenzátoru do pohybu. Kationty jsou přitahovány k záporně nabitě desce kondenzátoru, na jejímž povrchu se zastaví a vytvoří kladně nabitou vrstvu, jak to znázorňuje obrázek 65. Na druhé desce kondenzátoru probíhá analogický proces. Obě povrchové vrstvy vyruší náboje na deskách kondenzátoru, takže se celá situace bude jevit tak, jako by mezi deskami žádné elektrické pole nebylo. No a potom není žádný div, že nenačteme žádnou odchylku paprsku.



Obr. 65. Neutralizace náboje na kondenzátoru

Tohoto všeho si byl Thomson vědom, a proto pro své pokusy použil katodovou trubici s do té doby nejlepším vakuem, aby zmenšil počet iontů plynu v trubici a tak výše popsanému jevu zamezil. Po tom všem se mu nakonec povedlo naměřit odchylku katodového záření přesně takovou, jaká odpovídá negativně nabitým částicím. Protože v té době bylo známo, že elektrické pole nemůže žádným způsobem ovlivnit elektromagnetické vlny, byly Thomsonovy výsledky opravdu silným argumentem, který postupně přesvědčil o částicové povaze katodového záření všechny odpůrce. Stále však zůstávala jedna nezodpovězená otázka – co to je za částice? Atomy? Molekuly? Či něco naprosto nového?

Ve svém třetím experimentu se proto Thomson zaměřil na určení základní vlastnosti těchto částic – poměru náboje a hmotnosti. Jeho idea byla naprosto přímočará. Předpokládejme, že všechny částice ve zkoumaném záření mají stejnou rychlost v , hmotnost m a náboj e . Nechť během trvání experimentu opustí katodu

³³⁾ Kde se zde vzaly? Každý plyn je částečně ionizován již sám o sobě. Další ionty vznikají díky vloženému elektrickému poli, prolétávajícímu katodovému záření a jiným jevům.

celkem N takovýchto částic. Potom se zářením přenese náboj

$$Q = Ne$$

a energie

$$W = \frac{Nmv^2}{2}.$$

Pokud necháme takovýto svazek procházet homogenním magnetickým polem indukce B , bude se pohybovat po kružnici o poloměru ϱ splňujícím

$$\frac{mv}{e} = B\varrho.$$

Z těchto rovnic můžeme vyjádřit rychlost částic i jejich měrný náboj e/m jako

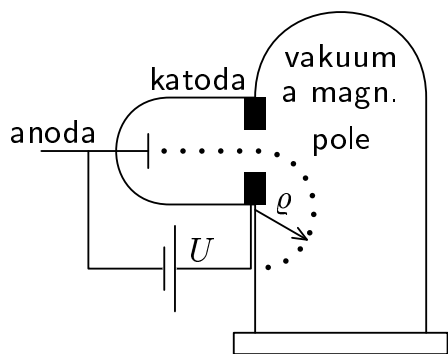
$$v = \frac{2W}{B\varrho Q},$$

$$\frac{e}{m} = \frac{2W}{B^2\varrho^2 Q}.$$

Thomson prováděl měření na několika aparaturách, přičemž nejlepších výsledků dosáhl s tou, která je naznačena na obrázku 66, jejíž sestava je zcela analogická předchozí.

Velikost přeneseného náboje určoval pomocí elektroskopu, poloměr trajektorie pravítkem a magnetickou indukci z parametrů cívek toto pole budících (viz kterákoli učebnice magnetismu). Aby mohl určit kinetickou energii částic, musel předpokládat, že se po dopadu všechna přemění na teplo. Přírůstek tepla železných a měděných destiček, na které paprsky chytal, pak vypočítal ze známé tepelné kapacity a změřeného rozdílu teplot před experimentem a po něm podle tabulového vzorce

$$Q = C\Delta T.$$



Obr. 66. Thomsonova aparatura č. 2

Měření provedl pro různé trubice, různě silná magnetická pole a v různých plynech. Pro měrnou hmotnost elektronu pak dostal výsledky v rozmezí $3 \cdot 10^{-12}$ až $10^{-11} \text{ kg}\cdot\text{C}^{-1}$, což byly hodnoty zhruba tisíckrát menší než v případě vodíkového

kationtu. Takto nízkou hodnotu měrné hmotnosti bylo možno vysvětlit buď velice nízkou hmotností, nebo relativně vysokým nábojem. Jak ještě téhož roku ukázal P. Lenard, částice katodového záření měly velice malou hmotnost, řádově tisíckrát menší než kterýkoli známý atom či molekula. Proto se muselo jednat o něco fundamentálnějšího než atomy a molekuly. Na základě tohoto faktu dospěl Thomson k hypotéze, že nalezené částice („corpuscules“) jsou základním stavebním kamenem, ze kterého se skládají všechny atomy a molekuly. Tak byla objevena existence elektronu, vyvrácena nedělitelnost atomu a Thomson se stal opravdu slavným.

Millikan a kvantování náboje

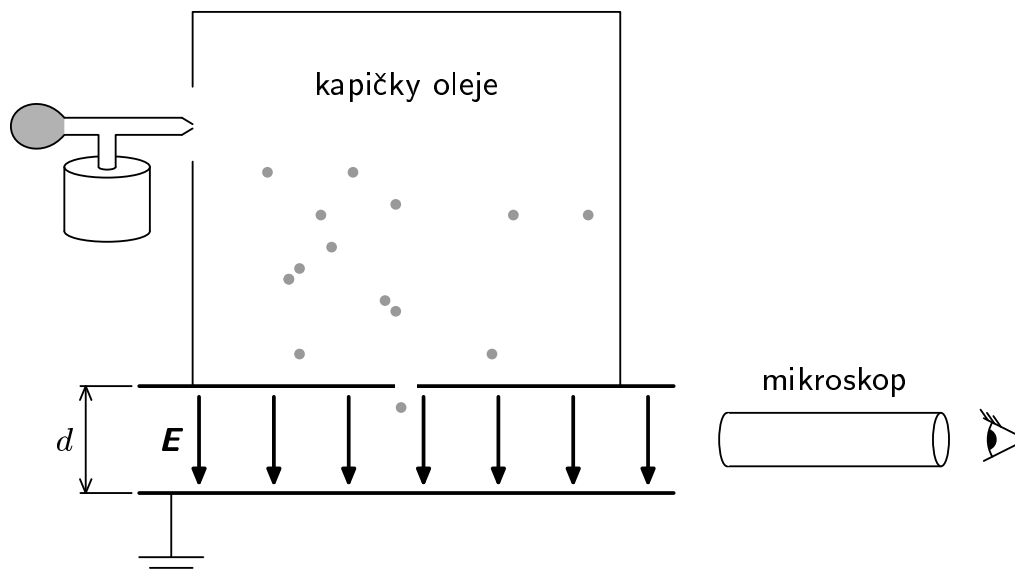
Po úspěchu Thomsonova experimentu a uznání existence elektronu se fyzikální svět snažil určit přesnou hodnotu náboje elektronu. Užívána byla především Wilsonova mlžná komora, ale výsledky byly nepřesné a vzájemně si odporující. Tím prvním, který určil hodnotu náboje elektronu byl až Robert A. Millikan roku 1911.

Jeho aparatura byla poměrně jednoduchá, nicméně precizní provedení experimentu s sebou neslo mnoho překážek. Všechno provedl pomocí aparatury, která je schematicky znázorněna na obrázku 66.

Rozprašoval malé olejové kapky, z nichž některé propadávaly vlivem gravitace mezi dvě kovové desky kondenzátoru. Zde na ně z výbojky dopadaly Röntgenovy paprsky, takže se některé z kapek ionizovaly (získávaly elektrický náboj). Millikan nejprve sledoval kapičky, zatímco bylo na kondenzátoru nulové napětí a kapičky tak mohly padat volně. V této fázi kapičky vlivem odporové síly vzduchu rychle získají svoji mezní rychlost. To je charakterizováno vyrovnáním gravitační a odporové síly, které na kapičku působí. S pomocí Stokesova vztahu pro odporovou sílu, působící na laminárně obtékanou kouli, dostáváme postupně

$$F_G = F_o = 6\pi r\eta v_0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{F_G}{6\pi r\eta} = kF_G, \quad (76)$$

kde, jak je zvykem, značí r poloměr objektu (kapky), F_G její tíhu, η viskozitu prostředí a v_0 právě onu mezní rychlost.



Obr. 67. Millikanův experiment

Vidíme, že mezní rychlost kapky v prostředí je pro danou kapku přímo úměrná působící síle. Konstantu úměrnosti jsme si pro jednoduchost označili jako k .

Z uvedené rovnosti ale můžeme získat mnohem více, pokud vyjádříme tíhu kapky. Ta je totiž rovna rozdílu gravitační a vztlakové síly na kapku působící, platí tedy

$$F_G = \frac{4}{3} \pi r^3 g(\rho - \rho_{vz}),$$

kde $\frac{4\pi r^3}{3}$ je objem kapky, g hodnota místního tíhového zrychlení a $\rho - \rho_{vz}$ rozdíl hustot kapky a okolního vzduchu. Potom

$$\frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho - \rho_{vz}) = 6\pi r \eta v_0,$$

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_{vz})}}.$$

Pomocí tohoto vzorce můžeme tedy z naměřené mezní rychlosti jednoduše zjistit poloměr sledované kapky. V případě, že na kondenzátor přivedeme napětí, které mezi deskami vytvoří elektrickou intenzitu E , ustálí se brzy rychlost kapičky, nesoucí náboj q , na nové hodnotě

$$v_1 = k(F_G + qE). \quad (77)$$

Srovnáním rovnic (76) a (77) dostáváme pro hodnotu náboje vztah

$$q = \frac{v_1 - v_0}{kE}.$$

Dosadíme-li za konstantu úměrnosti z první rovnice, dostáváme

$$q = \frac{F_G}{Ev_0} (v_1 - v_0).$$

Dalšími úpravami pomocí již uvedených vztahů dostáváme postupně

$$q = \frac{4\pi r^3 g (\rho - \rho_{vz})}{3Ev_0} (v_1 - v_0),$$

$$q = \frac{6\pi\eta}{E} \sqrt{\frac{9\eta v_0}{2g(\rho - \rho_{vz})}} (v_1 - v_0). \quad (78)$$

Díky poslednímu vztahu dokážeme z naměřených hodnot určit hodnotu náboje, který kapička nese. Millikanovy výsledky byly podobné těm, které vidíme v tabulce.

Měření	1	2	3	4	5	6
v_0 [mm/s]	4,17	4,20	2,39	1,49	0,62	0,61
$v_1 - v_0$ [mm/s]	0,03	-1,81	-0,90	-0,87	-0,01	0,90
Měření	7	8	9	10	11	
v_0 [mm/s]	1,51	1,50	3,26	1,50	1,50	
$v_1 - v_0$ [mm/s]	-0,01	1,76	-1,76	0,01	1,87	

Předpokládáme-li, že všechny kapičky jsou stejně velké, vidíme ze vzorce (78), že v měřeních 1, 5, 7, 10 nenesla kapička žádný náboj. V měřeních 3, 4 a 6 se

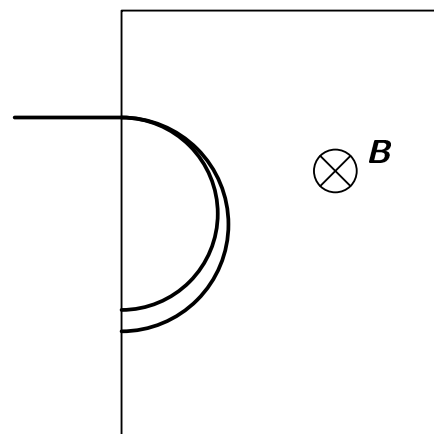
náboj kapičky změnil vždy o zhruba stejnou hodnotu: e . V měřeních 2 a 9 náboj klesl o hodnotu cca. $2e$, zatímco v měřeních 8 a 11 o stejnou hodnotu vzrostl. Millikan tato měření opakoval pro stovky kapiček a vždy se stejným výsledkem – náboj kapičky se mění pouze v mezích celočíselného násobku e . Statistickým zpracováním naměřených hodnot pak došel k hodnotě

$$e \approx 1,59 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

Dosažený výsledek interpretoval tak, že náboj kapičky se mění pouze tím, že získává či ztrácí elektrony, přičemž náboj každého elektronu je stejný a roven právě uvedené hodnotě e . Především za tento objev mu byla o devět let později udělena Nobelova cena.

Úloha V.S ... *hrátky s elektrony*

- a) Druhým způsobem, kterým měřil J. J. Thomson velikost měrného náboje elektronu, je právě studium vychylování katodového záření elektrickým polem. Uvažujte aparaturu podle obrázku 64. Jak závisí odchylka paprsku, zaznamenaná na stínítku vpravo, na přiloženém napětí, rychlosti „corpuscules“ a geometrických vlastnostech aparatury?
- b) Jedním z problémů, se kterými se J. J. Thomson potýkal při stanovování měrného náboje elektronů, byl následující: Po vstupu paprsku katodového záření do magnetického pole se paprsek rozšířil do tvaru jakéhosi vějíře (viz obrázek). Tento rozptyl paprsku činí určování poloměru kružnice, kterou katodové záření vytvoří, značně nepřesné (Thomson hovořil o 20 %). Čím můžeme tento rozptyl vysvětlit? Pokud uvedete, jakým způsobem by bylo možno tuto nepřesnost zmenšit, vysloužíte si bonusový bod.
- c) Zpracováním dat z tabulky určete velikost náboje elektronu v případě, že by olej měl hustotu $920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, vzduch hustotu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a viskozitu $17,1 \cdot 10^{-7} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Užívali jsme elektrické pole o intenzitě $250 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.



(řešení str. 146)

Kapitola 6: *Devatero atomových modelů*

Ačkoliv to dlouho vypadalo, že atomy jsou skutečně nejmenší a nejjednodušší složkou všech materiálů, ke konci devatenáctého století se začalo ukazovat, že pravděpodobně i ony mají jakousi vnitřní strukturu a jí dané vlastnosti. Vedly k tomu zejména následující tři experimentální poznatky.

- a) *Spektrální čáry* (J. von Fraunhofer, 1814): Fraunhofer sestrojil první spektroskop a zaměřil ho na Slunce. Zjistil, že v jinak spojitým spektru (tj. všechny barvy zastoupeny) se tu a tam objevila černá, tzv. *absorpční čára značící*, že

atomy ve svrchních vrstvách Slunce pohlcují světlo příslušné vlnové délky. To naznačovalo přítomnost vnitřní struktury, která by takové vlnové délky předepisovala. Jakýsi systém v těchto čarách našel až roku 1885 Johann Balmer a o tři roky později Johannes Rydberg jeho vzorec zobecnil do finální podoby (λ je přípustná vlnová délka pohlceného nebo vyzářeného světla)

$$\frac{1}{\lambda} = 1 \text{ Ry} \cdot \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (79)$$

kde m, n jsou přirozená čísla a 1 Ry (jeden Rydberg) experimentální konstanta různá pro různé atomy. Pro vodíku podobný atom je její hodnota řádu 10^7 m^{-1} .

- b) *Struktura periodické tabulky* (D. I. Mendělejev, 1869): Díky Mendělejevově tabulce, v níž setřídil známé atomy podle hmotnosti a vlastností, vyšlo najevo, že počet stavebních elementů atomu, respektive elementů, jejichž přítomnost se odráží na jeho fyzikálních a chemických vlastnostech, musí být poměrně malý.
- c) *Přítomnost elektronů v atomech* (J. J. Thompson, 1897): Jak jste se dočetli v páté kapitole seriálu, Thompson prováděl experimenty s katodovými paprsky a jasně prokázal, že se jednalo o proud nabitých částic vycházejících z atomů.

Nápadů, jak tyto vlastnosti vysvětlit, vznikla celá řada; proberme nyní většinu těch nejznámějších.

Lenardův dynamický model (1903)

S prvním propracovaným modelem přišel maďarsko-německý fyzik³⁴ Philipp Lenard. Při pokusech s katodovými paprsky (za něž dostal i Nobelovu cenu) zjistil, že schopnost materiálu pohlcovat elektrony závisí jen na hmotnosti atomů. To implikovalo, že jednotlivé prvky se liší jen počtem určitých elementárnějších subatomů, dvojic elektron-kladný náboj. Takovou dvojici nazval *dynamid*. Model měl nicméně problém vysvětlit, proč se z atomu (z dynamidu) nemohla nikdy uvolnit kladná složka, zatímco záporná ano, a také nedával možnost určit Rydbergovu konstantu, což ostatně byl problém i u všech následujících.

Pudinkový model (1904)

Nejznámější neúspěšný model je dílem J. J. Thompsona (nicméně základní myšlenka pochází od Williama Thompsona – lorda Kelvina). Byl odpovědí na objevující se planetární modely (elektrony obíhají kolem jádra), které trpěly jedním společným neduhem, totiž nestabilitou orbit. Z klasické teorie elektromagnetizmu plyne, že dostředivě zrychlující elektron na kruhové dráze kolem jádra vyzářuje elektromagnetické vlny o frekvenci přibližně rovné frekvenci jeho oběhu, čímž ztrácí energii, přibližuje se k jádru a nakonec na něj dopadne. Pudinkový model naproti tomu znázorňuje atom jako homogenní kouli kladného nábojového rozložení, v níž se (bez odporu) pohybují jednotlivé elektrony. Zatímco tedy v planetárních modelech působí na elektron síla úměrná r^{-2} , v Thompsonově atomu

³⁴⁾ a hlasitý zastánce hnutí *Deutsche Physik* v nacistickém Německu o několik desítek let později

je úměrná r , tedy i zrychlení elektronu klesá při přibližování k jádru k nule – a tedy vyzařuje stále pomaleji. Důsledným výpočtem zahrnujícím i vliv ostatních elektronů Thompson zjistil, že při dosažení určité minimální rychlosti se stabilita modelu poruší a některý elektron, případně i s částí „pudinku“, vyletí z atomu. Tento jev interpretoval jako radioaktivitu.

Saturnský model (1904)

Inspiraci v Saturnových prstencích hledal japonský fyzik Nagaoka. V roce 1859 J. C. Maxwell ukázal, že Saturnovy prstence jsou stabilní útvary v tom smyslu, že malá porucha vyvolá oscilace ale ne destrukci. Nagaoka provedl podobný výpočet pro prstenec složený z elektronů rotující kolem nabitého jádra a zjistil, že spektrum frekvencí má jak izolované čáry, tak i spojité pásy. Dokonce ukázal, že při přiložení vnějšího magnetického pole by docházelo k rozštěpení těchto čar, tedy k pozorovanému Zeemanově jevu. Pokusil se i vysvětlit radioaktivitu jako ničivou rezonanci mezi sousedícími atomy. Tento model příliš neprorazil, ale jako jeden z mála uvažoval husté kompaktní jádro uprostřed atomu a díky tomu ho Rutherford po provedení svého experimentu vyzdvihl.

Rayleighův spojitý model (1906)

Originální model lorda Rayleighe navazoval na Thompsonův pudink. Dokonce i jednotlivé elektrony zde nahradil jiným žele, nerotující a nestlačitelnou elektronovou tekutinou, která v klidovém stavu zaujímal přesně stejný prostor jako kladně nabitá hmota. Působením vnějších vlivů na ní mohly vznikat (nabitě) vlny, které kvůli svým oscilacím produkovaly elektromagnetické vlny o frekvenci příslušného modu kmitání, dokud se neutlumily. Stabilita takového atomu zjevně vůbec nezávisí na rozměrech, a tak spojitý model nevysvětluje velikosti atomů a navíc se vzdává představy elektronu jako izolované celistvé částice. Rayleigh první nedostatek s rozpaky „vyřešil“ zavedením univerzální atomové nábojové hustoty ρ_0 , druhého se však nezbavil.

Model vibrujících elektronů (1906)

J. H. Jeans byl hlasitým kritikem planetárních modelů: Zdůraznil, že „i pokud odhlédneme od problémů s vyzařováním, klasická fyzika dovoluje libovolnou orbitu elektronu, která se projeví spojitou škálou prvků s pozvolna se měnícími vlastnostmi,“ což by samozřejmě bylo v rozporu s Mendělejevovým periodickým zákonem. Obrátil tedy svůj pohled do oblasti úplně nové – postuloval *strukturovaný elektron*, nebodovou částici a navíc s proměnným poloměrem. V jeho atomu pak nevyzařovaly pohybující se elektrony jako v ostatních, nýbrž elektrony oscilující.

Model expandujících elektronů (1906)

Podobný návrh publikoval G. A. Schott, mimořádně schopný matematický fyzik, který se celý život zabýval elektromagnetizmem pohybujících se nábojů a jenž přišel s komplikovaným modelem založeným částečně na Jeansových myšlenkách. Také uvažoval elektrony s vnitřní strukturou a podobně jako Jeans je nechal rozpínat. Zahrnutím napětí v éteru obklopujícím takovou soustavu došel k závěru, že se

elektrony, byť souhlasně nabité, budou v určitých uspořádáních přitahovat. Tuto zvláštní sílu interpretoval jako gravitaci.

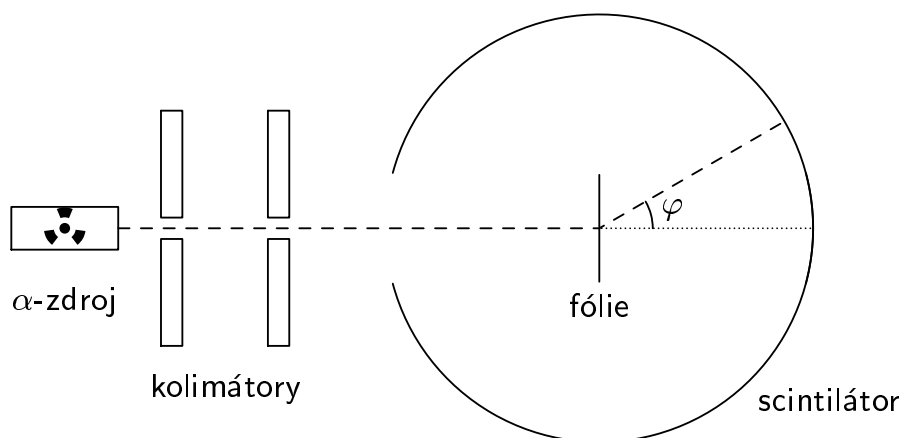
Archionový model (1910)

J. Stark se na rozdíl od předchozích autorů přednostně věnoval kladným nábojům v atomu. Na začátku dvacátého století se už vědělo o relativně silných magnetických momentech subatomárních částic (tj. že se chovají jako malé magnety). *Archiony* byly kladně nabité částice se severním a jižním magnetickým pólem, uspořádané do kruhu právě podle orientace jejich magnetického pole. Protože elektrostatická odpudivá síla mezi nimi byla mnohonásobně větší než magnetické přitahování, Stark mezi archiony vložil elektrony, které toto odpuzování kompenzovaly a dohromady vznikl uzavřený řetízek, v němž se střídaly elektrony a archiony. Jako žádný z předchozích ani tento nedokázal předpovědět hodnotu Rydbergovy konstanty a ještě než se o něm stihlo začít mluvit, archionový model byl – jako ostatní – smeten ze stolu modelem Bohrovým.

Rutherfordův experiment (1909)

V roce 1909 provedl Rutherford se svými studenty proslavený experiment, dnes známý jako Geiger-Marsdenův. Jednalo se o bombardování tenké zlaté fólie α -částicemi. Zlato bylo použito kvůli své čistotě, přehledné krystalové struktuře (jako většina kovů) a snadnému zpracování; tenkost měla zajistit, že se ve vzorku nacházelo jen několik vrstev atomů. Pokud by atomy byly skutečně podobné některému z pudinkových modelů, obsahujícímu lehké elektrony a spojitě rozložený kladný náboj nekladoucí žádný mechanický odpor, kolmo nastřelená těžká jádra helia by prolétla skrz fólii bez větších odchylek. Rutherfordův tým pomocí detektoru proměřoval četnost dopadů prolétnuvších α -částic v závislosti na úhlu odchýlení a byl velice překvapený, když se ukázalo nejen to, že mnoho částic se trochu odchýlilo, ale dokonce některé se odrazily od fólie zpět ke zdroji radioaktivního záření. Rutherford to tehdy komentoval slovy:

It was almost as incredible as if you fired a fifteen-inch shell at a piece of tissue paper and it came back and hit you.

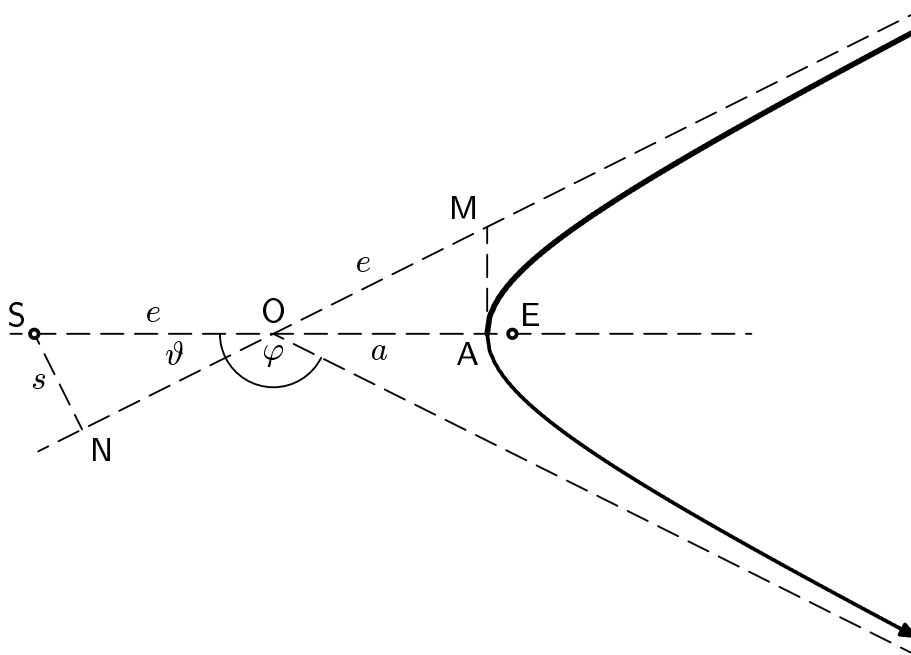


Obr. 68. Rutherfordova aparatura

Aparatura vypadala jako na obrázku 68. Svazek α -částic byl zaostřený průchodem skrze dvě štěrbinu (kolimátory) a po rozprášení přes fólii dopadal do ně-

kterého místa kulového stínítka fosforeskujícího při zásahu (scintilátoru). Dopady se registrovaly a zaznamenávaly spolu s úhlem ϕ odklonu od původního směru.

Rozmysleme si tu nyní, jakou úhlovou závislost Rutherfordovi studenti získali. Uvažujme atom jako bodové, elektricky nabitě jádro obklopené elektrony. Protože jsou elektrony úžasně lehké, pohyb α -částice téměř neovlivní a ta pocítí až koncentrované pole jádra. Jako rozumné přiblížení tak můžeme průlet atomem považovat za pohyb α -částice v radiálním elektrickém poli jádra. Takový pohyb se odehrává po kuželosečkách, stejně jako v případě gravitačních sil. Kuželosečka přicházející v úvahu v našem případě je hyperbola, protože částice do atomu přichází s nenulovou (a dokonce poměrně velkou) rychlostí. Schéma průletu je na obrázku 69.



Obr. 69. Hyperbolická trajektorie částice

Jádro je v bodě S, vnějším ohnisku větve hyperboly. Pokud by jádro bylo záporně nabitě, příliš by se toho nezměnilo, jen by se na obrázku objevilo v ohnisku protějším, totiž bodě E; geometrie by však zůstala stejná a tedy i experimentální výstup. Veličina s se nazývá záměrný parametr a udává vzdálenost, o jakou by nalétávající částice minula cíl, kdyby mezi nimi žádná síla nepůsobila. Rovnost $|SO| = |OM|$ plyne z vlastností hyperboly. Ze zákona zachování energie a zákona zachování momentu hybnosti pro α -částici o hmotnosti m a náboji Q plynou rovnice

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{a+e},$$

$$sv_0 = (e+a)v_m,$$

v nichž v_0 je počáteční rychlost a v_m minimální rychlost (v bodě A), resp. maximální, je-li v E záporné jádro a Ze celkový náboj jádra (atomové číslo krát elementární náboj). Ostatní veličiny jsou vyznačeny na obrázku 69. Možnost pře-

dání energie jádru zanedbáme, což při poměru hmotnosti atomu Au proti iontu He^{2+} je rozumný krok. Z těchto rovnic jsme schopni vyčíslit parametr s ,

$$s^2 = (e + a)(e + a - R_m), \quad (80)$$

kde konstanta R_m má hodnotu

$$R_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{\frac{1}{2}mv_0^2}$$

a význam nejmenší vzdálenosti, na niž se α -částice maximálně přiblíží k souhlasně nabitému jádru, (pro $s = 0$ jsme ji nastřelili čelně na jádro). Z ΔSON plyne, že $s = e \sin \theta$, a z ΔMOA , máme $a = e \cos \theta$. Hledaný součet $e + a$ je pak

$$e + a = e(1 + \cos \theta) = s \cotg \frac{\theta}{2}. \quad (81)$$

Vyčíslíme-li nyní s z rovnic (80) a (81), získáme

$$s = \frac{1}{2}R_m \tg \theta = \frac{1}{2}R_m \cotg \frac{\phi}{2}. \quad (82)$$

Pravděpodobnost p , že částice poletí se záměrným parametrem menším nebo rovným s_0 vůči konkrétnímu osamělému jádru, je úměrná ploše kruhu, do nějž se v tom případě musí trefit,

$$p(s \leq s_0) \sim \pi s_0^2,$$

a tudíž podle (82)

$$p(\phi \geq \phi_0) \sim R_m^2 \cotg^2 \frac{\phi_0}{2}.$$

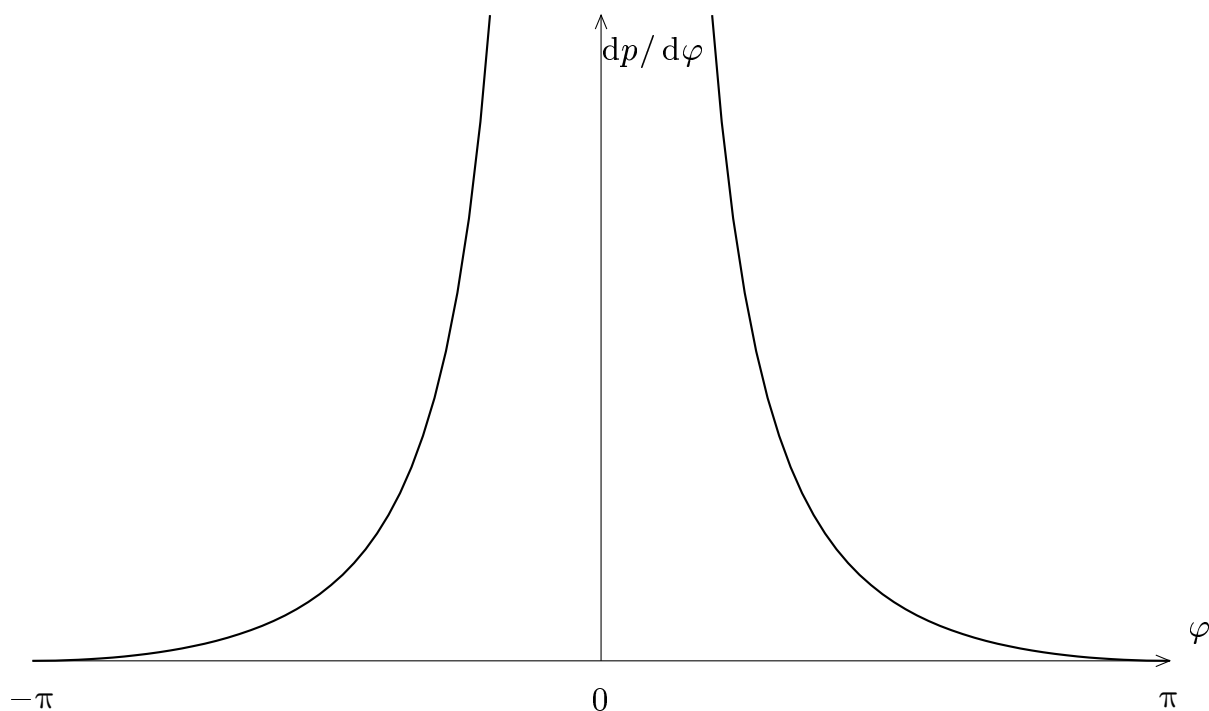
Znaménko nerovnosti se obrátilo, protože \cotg je klesající funkce. Konečně tak získáváme pravděpodobnost (relativní zastoupení) rozptylů α -částice na kompaktním těžkém jádru pod určitým úhlem $\phi \in (\phi_1, \phi_2)$.

$$dp(\phi_2 \geq \phi \geq \phi_1) = p(\phi_2 \geq \phi) - p(\phi \geq \phi_1) \sim R_m^2 \left(\cotg^2 \frac{\phi_1}{2} - \cotg^2 \frac{\phi_2}{2} \right). \quad (83)$$

Použijeme-li $\phi_1 = \phi$ a $\phi_2 = \phi + d\phi$ (a $d\phi$ je malé), dostaneme pro podíl $dp/d\phi$ graf na obrázku 70.

Vidíme tu, že u planetárního modelu drtivá většina nalétávajících α -částic prolétne skrz bez velkých obtíží. Ale přesto se skutečně některé z nich podstatně odchýlí – byť jejich počet s každým stupněm rychle klesá. Pro malé úhly nám $dp/d\phi$ odlétá do nekonečna, my tu – jako Rutherford – jen stručně poznamenujeme, že se to děje přibližně jako ϕ^{-4} a že je to vina zjednodušujících předpokladů, které jsme využili, zejména představa jediného izolovaného jádra. Pro úhly kolem π jsou však předpovědi poměrně přesné (vliv uvažovaného jádra je dominantní); platí tu, jak si můžete ověřit úpravou rovnice (83),

$$dp(\phi \approx \pi) \sim R_m^2 (\pi - \phi) d\phi. \quad (84)$$



Obr. 70. Výsledný graf

Bohrův model (1913)

Geigerův-Marsdenův-Rutherfordův objev nebyl úplně vítaný, jakkoliv uznávaný a právem považovaný za přelomový. Znamenal definitivní návrat ke z klasického pohledu podivným planetárním modelům. Prvním člověkem, kterému se podařilo shrnout požadavky na atom do funkčního atomového modelu (byť jen pro atom s jedním elektronem), byl dánský praotec kvantové mechaniky Niels Bohr. Postuloval existenci *stacionárních stavů* elektronu v atomu, totiž existenci sady přípustných orbit, po nichž se elektron mohl pohybovat. Mechanismus pohybu mezi orbitami neznal, ale navrhl, že frekvence záření vzniklého při takovém přechodu je rovna rozdílu energií dělenému Planckovou konstantou, $f = \Delta E/h$. Srovnáním s Rybergovým vzorcem (79) dospěl k vzorci pro energii n -tého stacionárního stavu (n -té povolené orbity)

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}.$$

Využitím klasických vztahů získal vztah pro poloměr této dráhy, r_n a také frekvenci oběhu f_n . Konečně jako první dokázal určit i přibližnou hodnotu Rydbergovy konstanty. Požadoval tzv. *princip korespondence*, totiž aby systém jinak podřízený neintuitivním zákonům mikrosvěta a stacionárních stavů při zvyšování rozměrů postupně přecházel do klasicky popsatelné oblasti. Pak muselo platit, že pro velká n (elektron hodně daleko od jádra) byla vyzářená frekvence rovna frekvenci oběhu, přesně jak požadovala klasická elektrodynamika. Opět srovnáním s (79) pak dostal Rydbergovu konstantu pro vzdálený elektron (R_∞). Snadno si dopočítáte, že mu vyšlo

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 k^2 m Z^2 e^4}{h^3 c},$$

což bylo ve velmi dobré shodě s experimenty. A tak se téměř na rok přesně po celém století uzavřela jedna kapitola, která začala kdesi ve Fraunhoferově soukromé observatoři. Zároveň se otevřela jiná, snad ještě napínavější, která fyzikům vydržela zas na další století – až dodnes.

Současný kvantověmechanický model

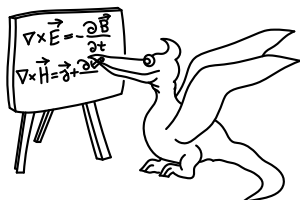
Po dalším rozvinutí kvantové mechaniky byl Bohrov model v některých ohledech oprávněn a ve zbylých opraven. Podstatnou změnou oproti Bohrovým myšlenkám bylo rozmazání ostře určených elektronových orbit do většího prostoru³⁵, v němž už není předpověditelná přesná poloha elektronu, stanovitelné jsou jen pravděpodobnosti výskytu v nějaké podoblasti. Ukazuje se nicméně, že maximální hustota pravděpodobnosti výskytu je právě na Bohrových orbitách, alespoň co se týče radiální části vlnové funkce. Ale o tom někdy jindy.

Úloha VI.S ... atomové modely a Rutherfordův experiment

- a) Rozhodněte, zda stabilita (popř. rozměr) saturnského atomového modelu závisí na atomovém čísle Z .
- b) Upravte vzorec (84) pro pravděpodobnost rozptylu α -částice pod velkým úhlem ϕ tak, abyste dostali praktičtější vztah pro pravděpodobnost dopadu na jednotku plochy scintilátoru, a uvažte, jak byste ho využili k určení materiálu ostřelovaného vzorku. Dále odhadněte, jak by se vzorec změnil, pokud bychom neuvažovali centrální náboj Ze nýbrž Z rozptýlených elementárních nábojů e jako třeba v Lenardově modelu.
- c) V roce 1896 objevil astronom E. C. Pickering ve světle hvězdy ζ *Puppis* čáry, které splňovaly vztah (79) pro $n = 2$ a $m = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; \dots$, tedy i pro polocelá čísla! Vysvětlete tuto zdánlivou nesrovnalost s Bohrovým modelem.
- d) (**Bonus.**) Najděte závislost analogickou rovnici (83) pro Thompsonův pudinkový model a okomentujte rozdíly. Nebo zkuste (83) upravit tak, aby zahrnovala působení jader všech atomů v tenké fólii. Zkrátka si trochu vyhraje.

(řešení str. 148)

³⁵⁾ technicky vzato do *celého* prostoru



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... princip ekvivalence

- a) Jaké by musely nastat podmínky, aby Galileův pokus nevyšel? Šikmá věž v Pise je vysoká $h = 55$ m, předpokládejte, že obě koule mají poloměr $R = 8$ cm a že jedna koule je vyrobena z olova o hustotě $\rho = 11300$ kg·m⁻³. Jakou hustotu by musela mít druhá koule, aby rozdíl v časech dopadu obou koulí byl větší než $\Delta T = 0,3$ s?
- b) S jakou přesností ověřuje původní Eötvösovo měření rovnosti poměru pro neutrony a protony, pokud ve dřevě tvoří neutrony 50 procent hmotnosti, zatímco v platině 60 procent hmotnosti? Zanedbejte hmotnost elektronů a vazebné energie.
- c) Ověřte užívaný předpoklad o tom, že v Budapešti je g'_s v porovnání s g zanedbatelné.

Galileova chyba

Rozdílná doba dopadu je způsobena rozdílným odporem vzduchu, který působí na obě koule. Napíšeme-li si pohybovou rovnici koule, na kterou kromě gravitační síly působí ještě odporová síla prostředí daná klasickým Newtonovým vztahem, dostáváme

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2} C S \rho_v v^2, \quad (85)$$

kde m značí hmotnost koule, v její rychlost, g gravitační zrychlení, C součinitel odporu, S plochu průřezu koule a ρ_v odpor prostředí (vzduchu).

Podělením hmotností a vyjádřením průřezu koule a jejího objemu pomocí poloměru koule R a její hustoty ρ dostáváme

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3C \rho_v v^2}{8R\rho}. \quad (86)$$

Máme v podstatě dvě možnosti, jak tuto rovnici řešit – jednou z nich je numerické řešení, které jsme měli možnost vyzkoušet si v minulém ročníku seriálu. Touto cestou se (až na jednu výjimku) ubírala všechna principiálně správná řešení. Ukažme si tedy druhou možnost.

Získanou diferenciální rovnici můžeme řešit separací proměnných. Derivaci rychlosti podle času dv/dt chápeme jako „zlomek“, rovnici vhodně „upravíme“ na

$$\frac{dv}{g - \frac{3C \rho_v v^2}{8R\rho}} = dt \quad (87)$$

a nyní obě dvě strany integrujeme – levou podle rychlosti, pravou podle času, tedy tak, jak nám to naznačují diferenciály (členy dv a dt). Dostáváme

$$\frac{\operatorname{argtgh} \left(\sqrt{\frac{3C_{\rho_v} v}{8gR\rho}} \right)}{\sqrt{\frac{3C_{\rho_v} g}{8R\rho}}} = t. \quad (88)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit rychlost jako funkci času

$$v(t) = \sqrt{\frac{8gR\rho}{3C_{\rho_v}}} \operatorname{tgh} \left(t \sqrt{\frac{3C_{\rho_v} g}{8R\rho}} \right). \quad (89)$$

Integrací podle času dostáváme závislost polohy koule na čase

$$x(t) = \frac{8R\rho}{3C_{\rho_v}} \ln \cosh \left(t \sqrt{\frac{3C_{\rho_v} g}{8R\rho}} \right). \quad (90)$$

Zpětným přechodem pak dostáváme závislost času na poloze koule

$$t = \sqrt{\frac{8R\rho}{3C_{\rho_v} g}} \operatorname{argcosh} \exp \left(\frac{3C_{\rho_v} x}{8R\rho} \right). \quad (91)$$

Díky tomuto vzorci dokážeme určit, za jaký čas daná koule urazí vzdálenost x , což je přesně to, co při našem řešení potřebujeme. Protože nyní známe pro první kouli všechny konstanty (jsou uvedeny v tabulce), můžeme vypočítat čas, za který dopadne první koule, prostým dosazením a dostáváme

$$t_1 = 3,356 \text{ s}.$$

Hodnoty konstant pro první kouli

Označení	Hodnota	Poznámka
R	0,08 m	poloměr koule
ρ	11300 kg · m ⁻³	hustota koule
C	0,48	součinitel odporu
ρ_v	1,29 kg · m ⁻³	hustota vzduchu
g	9,8 m · s ⁻²	gravitační zrychlení
x	55 m	výška věže

Aby mohl Galileo zaregistrovat požadovaný rozdíl v době pádu, musí druhá koule buď mít větší hustotu, a tedy padat rychleji, nebo menší hustotu a spadnout za delší dobu.

V případě, že bychom odpor vzduchu vůbec neuvažovali, spadlo by těleso volným pádem za čas

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 3,349 \text{ s}.$$

Proto není možné, aby Galileo zaregistroval nějaké těleso dříve než olověnou kouli, hledaná hodnota hustoty tedy bude nižší než $11300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. V našem případě můžeme buď všechno počítat ručně dosazováním různých hustot do vztahu (91), nebo můžeme využít sílu některého tabulkového kalkulátoru (např. Excelu či Open-Calculu). Napíšeme si výše uvedený výraz jako funkci parametru ρ a sledujeme chování výsledku v závislosti na zadané hustotě. Po několika málo odhadech zjistíme, že hledaná kritická hodnota hustoty, při které je rozdíl časů dopadů alespoň požadovaných $0,3 \text{ s}$, je rovna $296 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pohledem do tabulek zjišťujeme, že materiály s dostatečně malou hustotou jsou například balzové dřevo, korek či nepřilíš namrzlý sníh. Galileo by tedy alespoň v principu mohl uspořádat experiment tak, aby byl schopen v čase dopadu obou koulí zaregistrovat rozdíl.

Eötvösovo měření

Pomocí horního indexu budeme rozlišovat, zdali se jedná o protony či neutrony, pomocí dolního, zdali se jedná o gravitační či inerciální hmotnost. Označme dále N_1 počet nukleonů v tělese ze dřeva a N_2 počet nukleonů v tělese z platiny.

Zanedbáváme-li hmotnosti elektronů a vazebné energie, pak jsou obě hmotnosti aditivní (tedy hmotnost dvou těles je rovna součtu hmotností obou) a naměřenou rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti obou těles můžeme zapsat jako

$$\frac{N_1(0,5m_g^p + 0,5m_g^n)}{N_1(0,5m_i^p + 0,5m_i^n)} - \frac{N_1(0,4m_g^p + 0,6m_g^n)}{N_1(0,4m_i^p + 0,6m_i^n)} = 0 \pm 10^{-9}. \quad (92)$$

První zlomek je poměr gravitační a setrvačné hmotnosti tělesa ze dřeva, využili jsme toho, že v tomto tělese je $0,5N_1$ protonů, a zmíněné aditivity obou hmotností. Tuto rovnost můžeme upravit na

$$\begin{aligned} \frac{m_g^p + m_g^n}{m_i^p + m_i^n} - \frac{2m_g^p + 3m_g^n}{2m_i^p + 3m_i^n} &= 0 \pm 10^{-9}, \\ \frac{(m_g^p + m_g^n)(2m_i^p + 3m_i^n) - (2m_g^p + 3m_g^n)(m_i^p + m_i^n)}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} &= 0 \pm 10^{-9}, \\ \frac{m_i^n m_g^p - m_i^p m_g^n}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} &= 0 \pm 10^{-9}, \\ \frac{m_i^n m_i^p}{(2m_i^p + 3m_i^n)(m_i^p + m_i^n)} \left(\frac{m_g^p}{m_i^p} - \frac{m_g^n}{m_i^n} \right) &= 0 \pm 10^{-9}. \quad (93) \end{aligned}$$

Protože hmotnosti protonů a neutronů jsou v podstatě stejné, můžeme položit $m_i^p = m_i^n$. V tom případě je ale hodnota prvního zlomku na levé straně rovnice $1/10$ a dostáváme

$$\left(\frac{m_g^p}{m_i^p} - \frac{m_g^n}{m_i^n} \right) = 0 \pm 10^{-8}. \quad (94)$$

Původní Eötvösovo měření tedy ověřuje rovnost gravitační a setrvačné hmotnosti protonů a neutronů s přesností 10^{-8} , tedy o řád nižší. Povšimněte si prosím, že tento odhad je založen na faktu, že hmotnosti protonů a neutronů jsou přibližně stejné. V případě, že by se výrazněji lišily, dostali bychom ještě hrubší odhad.

Výlet do Budapešti

Tečná složka gravitačního zrychlení je způsobena odstředivou silou rotace Země kolem své osy, úhlovou rychlost rotace Země kolem své osy označíme ω .

V označení z obrázku 71 je velikost odstředivého zrychlení rovna

$$g_o = \omega^2 r = \omega^2 R_Z \cos \alpha . \quad (95)$$

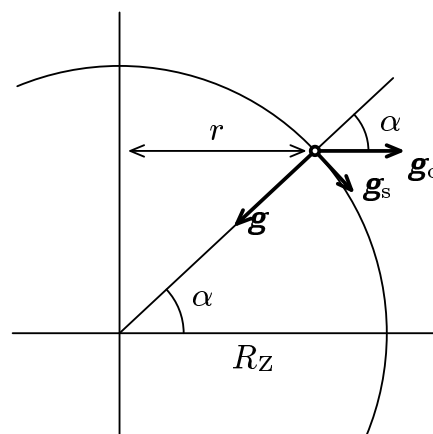
Nás zajímá složka kolmá ke směru gravitačního zrychlení, tedy

$$g'_s = g_o \sin \alpha = \omega^2 R_Z \cos \alpha \sin \alpha . \quad (96)$$

Dosadíme-li sem tabulkové hodnoty poloměru Země, její úhlové rychlosti a zeměpisnou šířku Budapešti $\alpha \approx 47^\circ$, dostáváme hodnotu

$$g'_s = 0,017 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} .$$

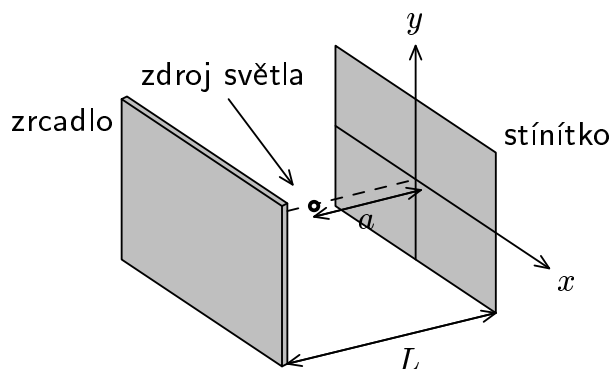
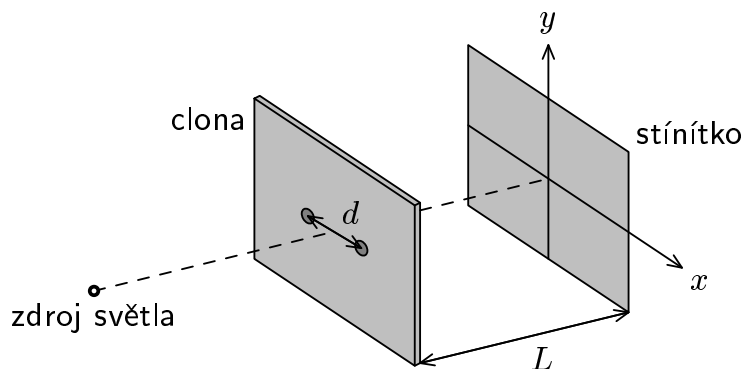
Kolmá složka tíhového zrychlení je tedy v Budapešti více než 500krát menší než složka normálová, což jsme chtěli ukázat.



Obr. 71. Gravitační a odstředivé zrychlení

Úloha II.S ... Young a vlnová povaha světla

- a) Jaký tvar interferenčních proužků na stínítku byste očekávali v následujících dvou sestavách? Najděte rovnice křivek maximální intenzity a zkuste jich několik načrtnout.



- b) Ukažte, jak by dopadl Youngův experiment, jestliže by se světlo chovalo podle Newtonových představ (tzn. difrakce ano, interference ne). Nezapomeňte vzít v úvahu různý úhel dopadu světla na různá místa stínítka.
- c) Užitím vyloženého kvantově-mechanického popisu určete rozložení intenzity, jaké by dostal Jöhnsson při použití čtyřšterbiny (tedy čtyř úzkých rovnoběžných otvorů rozmístěných ve vzdálenostech b od sebe). Načrtněte reprezentativní úsek grafu a okomentujte přednosti většího počtu otvorů.

Interferenční proužky

Správné řešení prvního úkolu se mohlo sestávat jen z pouhých dvou slov: hyperbola, kružnice. Úvaha pro první obrázek zní takto: Jelikož interferenční maximum vzniká v místech s konstantním rozdílem optických drah rovným celočíselnému násobku vlnové délky světla, vytvoří se kolem otvorů v prostoru plochy konstantního rozdílu mezi vzdálenostmi k jednomu a druhému otvoru. Podle analytické geometrie má hyperbolická plocha vlastnost, že rozdíl vzdáleností každého jejího bodu ke dvěma ohniskům je konstantní. To je přesně náš případ. Když tuto plochu nyní řízneme stínítkem, dostaneme hyperboly – hyperbolické proužky.

Pokud je to pro vás příliš abstraktní představa, sledujte následující konvenční postup: Zavedeme souřadnice (x, y, z) tak, že stínítko leží v rovině xy a osa z míří

od něj směrem k desce s průhledy (vzdálené L) a prochází přímo mezi otvory. Osa x nechť je rovnoběžná se spojnicí otvorů, které jsou ve vzájemné vzdálenosti d . Bod na stínítku má proto souřadnice $A = (x, y, 0)$, otvory v cloně $H_{1,2} = (x \pm d/2, 0, L)$. Vzdálenosti $L_{1,2} \equiv |AH_{1,2}|$ jsou podle zobecněné Pythagorovy věty

$$L_1 = |AH_1| = \sqrt{L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$L_2 = |AH_2| = \sqrt{L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Abychom dostali interferenční maximum, úplné konstruktivní složení světelných vln přicházejících z jednotlivých otvorů, musí platit

$$L_1 - L_2 = k\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (97)$$

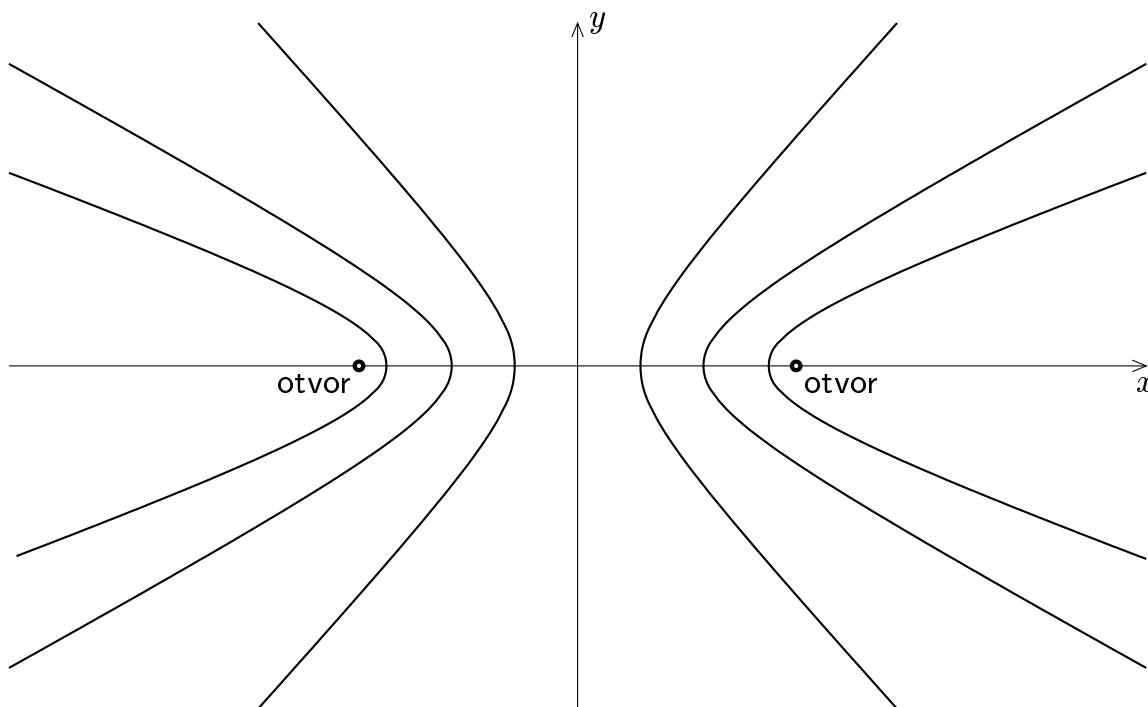
Dosadíme-li první dvě rovnice do této podmínky, vyjde po delší úpravě

$$x^2 \left(\frac{d^2}{k^2 \lambda^2} - 1 \right) - y^2 = L^2 - \frac{1}{4} (d^2 + k^2 \lambda^2).$$

Pro typickou situaci $L \gg d \gg \lambda$ lze navíc vztah zjednodušit na

$$x^2 \frac{d^2}{k^2 \lambda^2} - y^2 = L^2,$$

což je tvar rovnice hyperboly. Několik reprezentativních proužků je na obrázku 72.

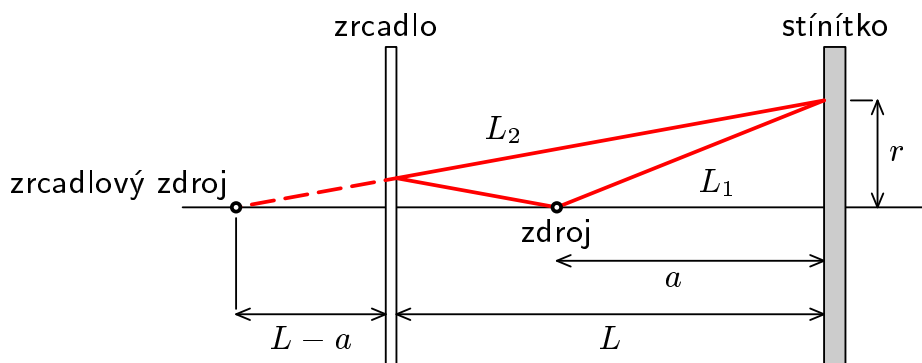


Obr. 72. Interferenční proužky

V druhém případě si rotační symetrie vynucuje kruhové proužky. Pokud by nás opět zajímaly jejich přesné rozměry, postupovali bychom podobně jako v předchozím. Délky drah jsou (viz obrázek 73)

$$L_1 = \sqrt{a^2 + r^2},$$

$$L_2 = \sqrt{(2L - a)^2 + r^2}.$$



Obr. 73. Porovnání délek drah paprsků

Aplikací podmínky $\delta \equiv L_2 - L_1 = (k + 1/2)\lambda$ (polovina vlnové délky odpovídá otočení fáze při odrazu o zrcadlo) dostaneme

$$r^2 = \frac{1}{4\delta^2} (4(L - a)^2 - \delta^2) (4L^2 - \delta^2).$$

Pokud se bavíme o interferenčních kroužcích daleko od optické osy, členy δ^2 jsou zcela nesouměřitelné s členy úměrnými L^2 . Proto je můžeme zanedbat a psát

$$r \approx \frac{2L}{\delta} (L - a).$$

Blízko ose musíme ale použít přesný vztah; zjednodušený vzorec připouští libovolný dráhový rozdíl, z geometrie sestavy však víme, že maximální možný je $\delta_{\max} = 2(L - a) + \lambda/2$.

Young vs. Newton

Světlo se za každou štěrbinou rozptyluje díky difrakci do všech směrů. Intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti (protože počet „částic světla“ na kulové vlnoploše o obsahu $4\pi r^2$ se zachovává) a kosinem dopadového úhlu (protože na nakloněnou rovinu dopadá světlo s menší plošnou hustotou než na rovinu kolmou ke směru šíření). Bod A na stínítku má délkovou souřadnici x , jeho vzdálenost od štěrbin je opět $L_{1,2} = \sqrt{L^2 + (x \pm d/2)^2}$, pro úhel dopadu $\vartheta_{1,2}$ paprsku z jedné a druhé štěrbin platí

$$\operatorname{tg} \vartheta_{1,2} = \frac{1}{L} \left(x \pm \frac{d}{2} \right).$$

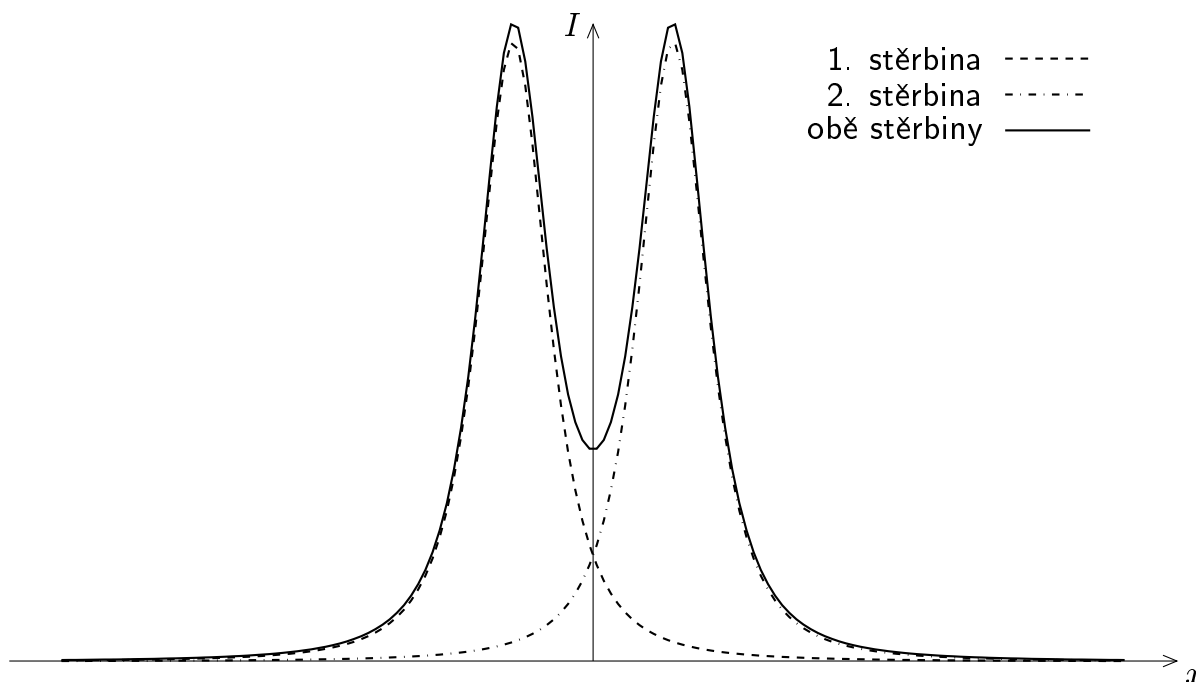
Z toho vyčíslíme potřebný kosinus,

$$\cos \vartheta_{1,2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}_{1,2}^2 \vartheta} = \frac{L^2}{L^2 + \left(x \pm \frac{d}{2} \right)^2}.$$

Výsledná intenzita je v newtonovském případě (skládá se až četnost dopadů „světelných částic“, ne amplituda) rovna jednoduchému součtu intenzit od jednotlivých štěrbin,

$$I = \frac{I_0}{L_1^2} \cos \vartheta_1 + \frac{I_0}{L_2^2} \cos \vartheta_2 \sim \frac{1}{\left(L^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2\right)^2} + \frac{1}{\left(L^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2\right)^2}.$$

Graf je na obrázku 74. Z něj i ze získaného vzorce je zřejmé, že intenzita v každém bodě stínítka vzroste při otevření druhé štěrbin.



Obr. 74. Intenzita světla po průchodu dvojštěrbinou

Světlo na čtyřštěrbině

Amplituda pravděpodobnosti detekce elektronu v jistém bodě B stínítka je podle druhého dílu seriálu

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1(x) + \cos \varphi_2(x) + \cos \varphi_3(x) + \cos \varphi_4(x) \\ \sin \varphi_1(x) + \sin \varphi_2(x) + \sin \varphi_3(x) + \sin \varphi_4(x) \end{pmatrix},$$

kde $\varphi_j(x)$ jsou fáze, s jakými takový foton dorazí do B od j -tého otvoru. Procesy „foton do B dorazí od otvoru j “ jsou nerozlišitelné (výsledkem je vždycky stejná tečka na stínítku), takže proto sčítáme jednotlivé amplitudy. Představíme-li si takovou čtyřštěrbinu s průřezy vzdálenými o b od sebe, bude podle textu seriálu platit

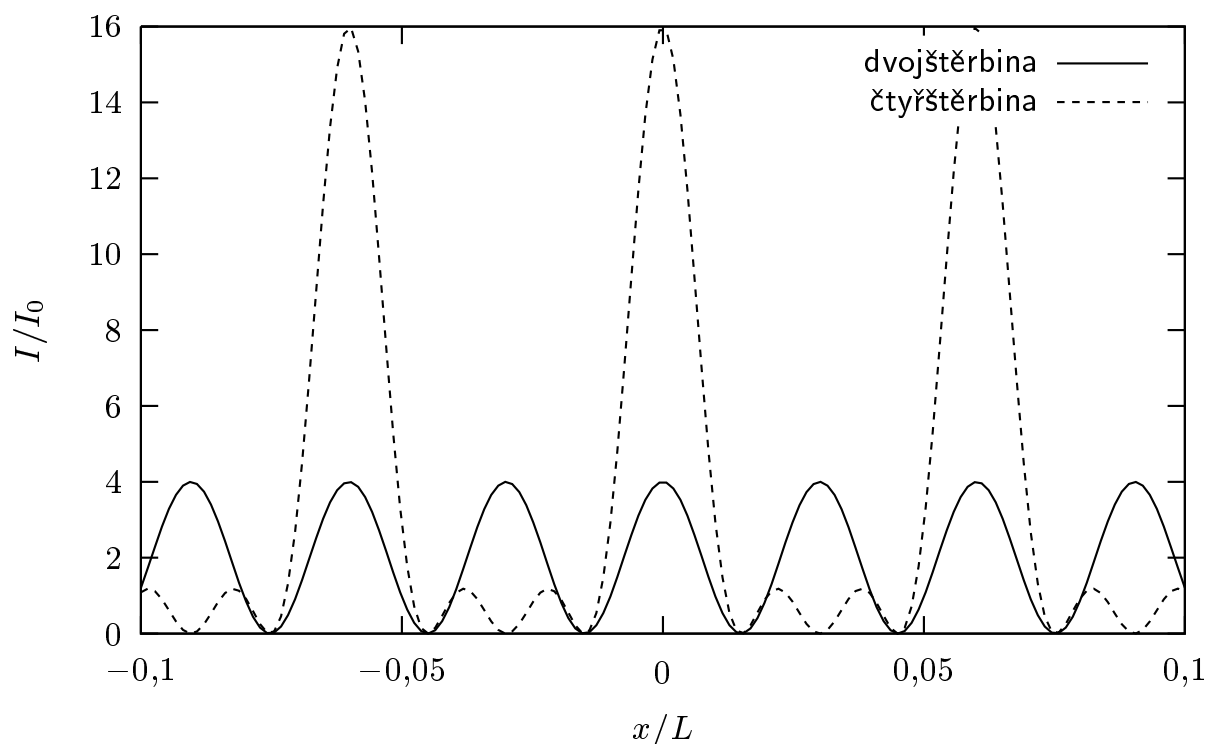
$$\varphi_1(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x - 1,5b)^2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x - 0,5b)^2},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x + 0,5b)^2},$$

$$\varphi_4(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{L^2 + (x + 1,5b)^2}.$$

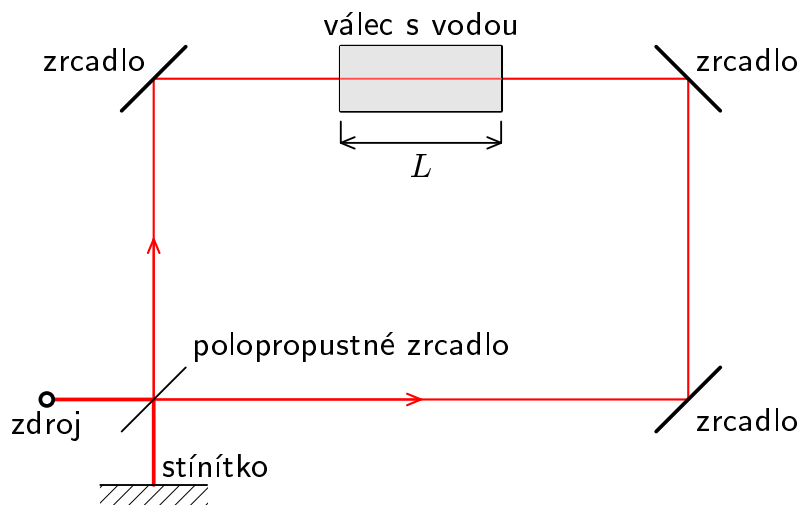
Vykreslíme-li druhou mocninu velikosti amplitudy, ideálně na počítači, dostaneme graf na obrázku 75 (čárkovaně). Spojitou čarou je vynesena analogická závislost pro dvojštěrbinu. Je zřetelně vidět, že u čtyřštěrbiny výrazných proužků ubylo (na polovinu) a jsou čtyřikrát jasnější. Obojí podstatně vylepšuje viditelnost jevu. Proto se v běžných difrakčních experimentech používají *difrakční mřížky* skládající se ze stovek až tisíců vrypů.



Obr. 75. Porovnání intenzit pro dvoj a čtyřštěrbinu

Úloha III.S ... céčková

- a) Představte si, že vezmete dostatečně silný laser, vyzařující světlo vlnové délky 400 nm, a posvítíte s ním na Měsíc. Od jeho povrchu se vyzařené světlo odrazí a vrátí se zpět. Předpokládáme-li, že laser vyzařuje skrze kruhový otvor průměru 1 cm, jaký bude na zemském povrchu průměr paprsku navracejícího se po odrazu zpět? Poradíme vám, že to bude o poznání více než 1 cm.
- b) V této úloze předpokládejte, že éter skutečně existuje, a předpovězte, jak by to dopadlo, kdyby Michelson prováděl svá měření jiným způsobem: Jedno rameno by nechal dlouhé 5 metrů, zatímco druhé by bylo dlouhé 10 m. Takto připravená aparatura by vytvořila nějaký interferenční obrazec. Poté by Michelson celou soustavou otočil o 90° , takže by si obě ramena vyměnila místa. V průběhu tohoto otáčení by docházelo k posunům interferenčních proužků³⁶. Jak by se v uvedené aparatuře posunuly interferenční proužky při naznačené rotaci? Jak dlouhé by muselo být delší rameno, aby se interferenční proužky vyměnily, tedy aby se rotací maxima posunula na minima?
- c) V následující úloze předpokládejte, že éter existuje a že těleso pohybující se v éteru jej úplně strhává, takže relativní rychlost tělesa vůči éteru je nulová. Jaký fázový posun by poté vznikl mezi dvěma paprsky v soustavě naznačené na obrázku?



Světlo ze zdroje se na polopropustném zrcadle rozdělí na dva svazky a pokračuje po dokonale obdélníkové dráze zpět na polopropustné zrcadlo, kde vystupuje na stínítko, na kterém sledujeme interferenční proužky. Po cestě jsou oba paprsky třikrát odraženy na zrcadle a procházejí válcem délky L naplněným vodou. Celá soustava kromě válce s vodou (ten je vůči éteru v klidu, nezapomeňte) se vůči éteru pohybuje rychlostí v v směrem vpravo.

³⁶⁾ Představte si rotující dvojštěrbinu.

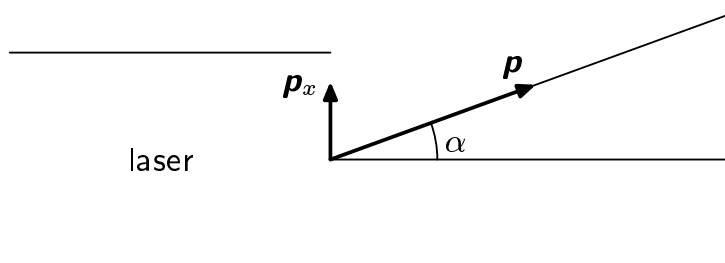
Svítíme na Měsíc

Jediná finta, která se pojí s první úlohou, je využití Heisenbergova principu neurčitosti. Když se podíváme na foton právě vyletující z laseru, vidíme, že jeho poloha je určena s nepřesností řádově rovnou poloměru kruhového otvoru, v našem případě tedy $\Delta x \approx 0,5 \text{ cm}$. Podle Heisenbergova principu neurčitosti je potom velikost p_x hybnosti fotonu ve směru kolmém ke směru šíření rovna alespoň

$$\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{2\Delta x}.$$

Podle obrázku 76 je potom úhel popisující rozšiřování paprsku roven (užíváme aproximaci malých úhlů)

$$\alpha = \arctg \frac{p_x}{p} \approx \frac{p_x}{p}.$$



Obr. 76. Rozbíhání paprsků laseru

Celkovou hybnost fotonu můžeme vyjádřit ze znalosti jeho vlnové délky³⁷

$$p = \frac{E}{c} = \frac{2\pi\hbar f}{c} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}.$$

Po dosazení dostaneme úhel rozptylu

$$\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\Delta x}.$$

Poloměr skvrny, která vznikne po odrazu od Měsíce, vzdáleného L od Země, je tedy

$$R = 2\alpha L = \frac{\lambda L}{2\pi\Delta x},$$

kde jsme použili dvojnásobek vzdálenosti Země – Měsíc z důvodu cesty tam a zpátky. Po dosazení tabulkových a zadaných hodnot dostáváme minimální odhad $R \approx 5 \text{ km}$. Upozorňujeme na to, že právě odvozený výsledek je principiálního charakteru, stejně jako princip neurčitosti – nikdy se nám tedy nepodaří sestrojít laser průměru 1 cm, který by měl menší rozptyl. Zajímavé řešení zaslal Miroslav Rapčák, který uvažoval Měsíc jako kulové zrcadlo a počítal rozptyl vzniklý odrazem na něm.

³⁷⁾ Explicitně upozorňujeme na rozdíl mezi Planckovou h a redukovanou Planckovou konstantou \hbar .

Éter žije

Pokud bychom nejprve soustavu položili tak, aby rameno L_1 bylo rovnoběžné se směrem pohybu soustavy a rameno L_2 bylo k němu kolmé, vznikl by mezi oběma paprsky časový rozdíl

$$\Delta t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{L_1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right).$$

Využili jsme zde vztahů uvedených v seriálu s tím rozdílem, že obě ramena jsme již nepovažovali za stejně dlouhá. Po prohození obou ramen (otočení o devadesát stupňů) bude výsledný časový rozdíl mezi oběma paprsky

$$\Delta t_2 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{L_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Velikost časového posunu mezi oběma natočeními je tedy

$$\Delta T = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{2(L_1 + L_2)}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Protože je rychlost v o mnoho menší než c , můžeme užít přibližných vztahů a psát

$$\Delta T \approx \frac{2(L_1 + L_2)}{c} \left(\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \right) = \frac{v^2(L_1 + L_2)}{c^3}.$$

Tomuto časovému posunu odpovídá pro světlo vlnové délky λ fázový posun

$$\Delta\varphi = \omega\Delta T = \frac{2\pi c}{\lambda}\Delta T = \frac{2\pi v^2(L_1 + L_2)}{\lambda c^2}.$$

Po dosazení (vlnovou délku bereme 500 nm) dostáváme fázový posuv $\Delta\varphi = 1,89$ rad. Vidíme, že tento posuv je větší, než potřebujeme k vyměnění maxim a minim, a měl by tedy být prakticky velmi dobře pozorovatelný. Aby se právě vyměnila maxima a minima (tedy aby bylo $\Delta\varphi = \pi/2$), potřebovali bychom druhé rameno délky přibližně 7,5 m.

Světlo v zrcadlovém bludišti

Pokus dle znázorněného uspořádání provedl roku 1868 Hoek, uvedené řešení je s drobnými úpravami převzato od L. Labora.

Představme si, že v úloze žádný válec s vodou není. V tomto případě je trasa pro oba paprsky symetrická, a nevznikne mezi nimi časový rozdíl. To znamená, že jediný rozdíl vzniká na cestě válcem s vodou, tedy éterem, který má stejnou rychlost jako soustava. Světelný paprsek, šířící se ve směru hodinových ručiček, by se bez přítomnosti válce pohyboval rychlostí $c - v$, v jeho přítomnosti se pohybuje rychlostí c/n (n je index lomu prostředí). Časový posun vzniklý přidáním válce je tedy

$$\Delta t_1 = \frac{L}{c - v} + \frac{nL}{c}.$$

Druhý paprsek by se bez přítomnosti válce pohyboval rychlostí $c + v$, v přítomnosti válce se opět pohybuje rychlostí c/n a časový posun druhého paprsku tedy bude

$$\Delta t_2 = \frac{L}{c + v} + \frac{nL}{c}.$$

Celkový časový rozdíl mezi oběma paprsky při dopadu na stínítko tedy bude

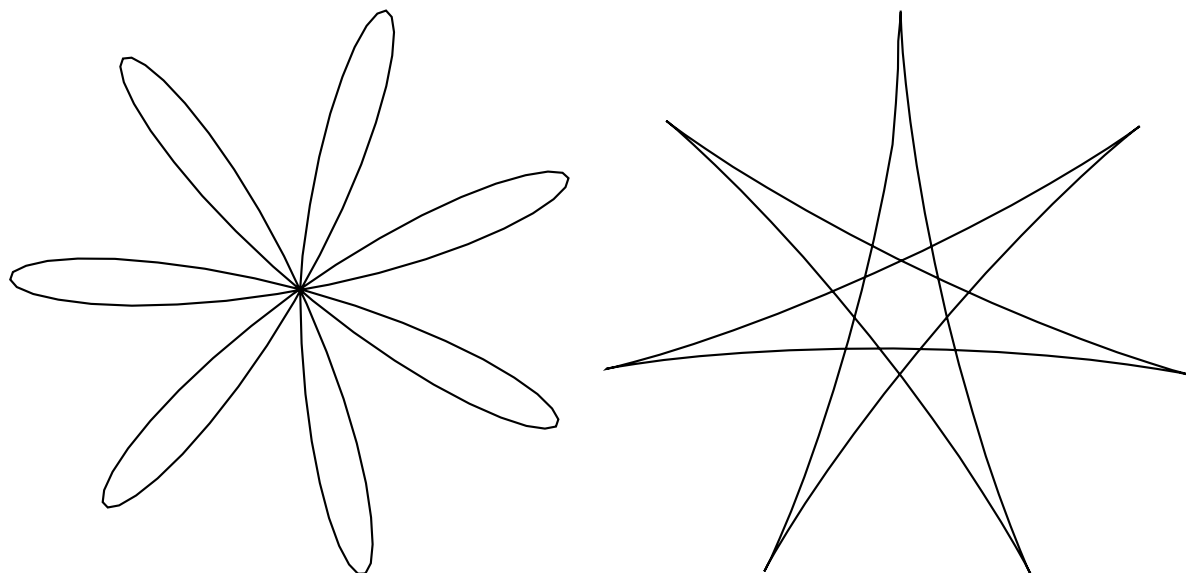
$$\Delta T = \frac{L}{c - v} - \frac{L}{c + v} = \frac{2Lv}{c^2 - v^2}.$$

Tomu odpovídá fázový posun (λ je opět vlnová délka užitého světla)

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi Lvc}{\lambda(c^2 - v^2)}.$$

Úloha IV . S ... Foucaultovo kyvadlo a rotace Země

- a) Foucaultovo kyvadlo do písku nakreslilo při dvou různých demonstracích dva odlišné obrazce, oba jsou na obrázku. Rozhodněte, co způsobilo jiný tvar a také jak dlouhé by muselo být kyvadlo, aby tyto obrazce mohly na podlaze pařížské katedrály vzniknout. Kolikacípé jsou hvězdy/květy ve skutečnosti?



- b) Jaký tvar bude mít hladina v kbelíku s vodou, který klidně stojí na rovném stole?
 c) Ukažte, že vztah

$$\delta f = f_+ - f_- = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}}{P}$$

pro frekvenční rozdíl (frekvenci rázů) dvou protiběžných paprsků v laserovém gyroskopu platí pro jeho libovolný rovinný tvar – tedy nejen kruhový.

Foucaultovo kyvadlo

Podle teorie ze čtvrtého dílu seriálu se kyvadlo na povrchu planety v bodě P nachází v rotující soustavě s úhlovou frekvencí $\Omega_P = \Omega_0 \sin \varphi_P$, kde Ω_0 je rychlost rotace Země a φ_P zeměpisná šířka uvažovaného místa P. To znamená, že označíme-li T_0 periodu rotace Země, lokální perioda rotace bude

$$T_P = \frac{T_0}{\sin \varphi_P} .$$

Když budeme prstem sledovat pohyb kyvadla znázorněný na obrázcích, všimneme si, že se sedmkrát zhouplo (tedy prodělalo $n/2 = 3,5$ kmitů) a zároveň se rovina jeho kývání otočila o 180° (případně celočíselný násobek tohoto úhlu – to ale nebudeme uvažovat). Jeden kmit tak trval

$$\tau = \frac{T_P/2}{n/2} = \frac{T_0}{n \sin \varphi_P} .$$

Perioda matematického kyvadla v homogenním tíhovém poli se zrychlením g je

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

takže délku kyvadla snadno vyjádříme jako

$$l = g \left(\frac{T_0}{2\pi n \sin \varphi_P} \right)^2 \doteq 7 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

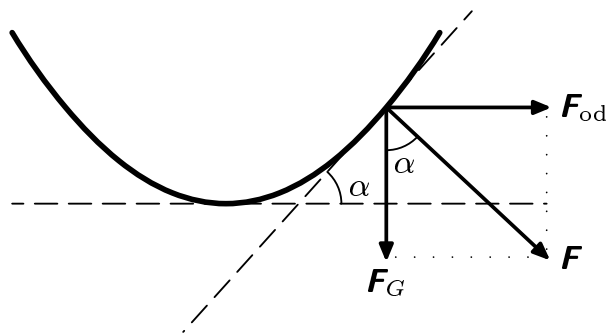
Za φ_P jsme dosadili zeměpisnou šířku Paříže, $\varphi_P = 48^\circ 52'$. Není třeba dvakrát zdůrazňovat, že ani kyvadlo ani homogenní gravitace takového rozsahu nejsou představitelné. Skutečný počet výběžků podobného obrazce při parametrech ze seriálu je o to větší

$$n = \frac{T_0}{2\pi \sin \varphi_P} \sqrt{\frac{g}{l}} \doteq 7 \cdot 10^3.$$

Příčina odlišného tvaru obrazců je prostá. Kyvadlo rozhoupáváme ve svislé rovině procházející rovnovážnou polohou. Na počátku má tedy kyvadlo jen radiální složku rychlosti; tečnou, mířící kolmo na tuto rovinu, již jsme počítali v seriálu, získává až během zhoupnutí. Nulovou kolmou rychlost má kyvadlo v případě prvního záznamu, je-li uprostřed; v případě druhého je-li v amplitudě. Proto jediná odlišnost mezi znázorněnými situacemi je, že v prvním případě jsme kyvadlo vyrazili z rovnovážné polohy, zatímco v druhém případě jsme jej uvolnili z výchylky.

Kyblíček

Jelikož se klidně stojící kyblík vlastně točí, hladina se o něco prohne. Uvažujme, že má hladina ustálený tvar, a zkoumejme rovnováhu v takovém stavu. Je jasné, že vektorový součet tíhové síly a odstředivé síly působící na malý objem vody u hladiny musí být na hladinu kolmý, neboť jinak by se tento malý objem začal po



Obr. 77. Síly tvarující hladinu

hladině přesouvat na nějaké jiné místo, dokud by nenašel polohu, pro kterou by tvrzení o rovnováze platilo. Podle obrázku bude mít výslednice správný směr, pokud bude svírat se svislicí stejný úhel $\alpha(x)$ jako horizontála s tečnou k povrchu (hladinou) v bodě vzdáleném o x od středu. To nastane, bude-li

$$\text{tg } \alpha(x) = \frac{F_{\text{od}}}{F_g} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Popíšeme-li rovinný osový řez hladiny křivkou $y(x)$, je také podle definice derivace $y'(x) = \text{tg } \alpha(x)$, takže dostáváme

$$y'(x) = \frac{\omega^2 x}{g} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 x^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2 x^2}{g} \sin^2 \varphi.$$

Má-li kbelík poloměr r , bude uprostřed hladina o h nižší než na krajích, kde

$$h = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0^2 r^2}{g} \sin^2 \varphi.$$

Sami si už můžete dosazením reálných hodnot ověřit, že fakt, že jste při mytí podlahy žádné promáčknutí nepozorovali, rozhodně není chyba vašeho zraku. Rozměr h vyjde řádově menší než průměr atomu.

Gyroskop

V seriálu jsme rozebírali kruhový laserový gyroskop, v němž vznikají a zanikají fotony o frekvenci f_0 , které se však díky rotaci celého zařízení dopplerovsky posouvají vůči vnějšímu pozorovateli na frekvence

$$f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{\omega r}{c} \right),$$

kde $\omega = \Omega_0 \sin \varphi$ je úhlová frekvence rotace soustavy, r poloměr prstence laseru a c rychlost světla. Tento vztah lze přepsat použitím tečné rychlosti $v_t = \omega r$ do obecnějšího tvaru

$$f_{\pm} = f_0 \left(1 \pm \frac{v_t}{c} \right).$$

Pokud se nejedná o kruhový laser, není rychlost $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ obecně rovnoběžná s elementem laserového gyroskopu v místě \mathbf{r} a pro dopplerovský posun se uplatní jen její průmět do směru trubice (daného jednotkovým vektorem \mathbf{t})

$$v_t = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} r \sin \vartheta,$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor kolmý na plochu tvořenou rovinnou trubicí (kolmý proto, že \mathbf{r} i \mathbf{t} v této rovině leží) a ϑ je úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{t} . Tečné rychlosti mohou být podél křivé trubice různé a také frekvenční posuny způsobené rotací budou různé, ale protože částic plynu i fotonů je spousta, lze jejich chování popsat statisticky. V průměru bude mít největší vliv střední hodnota vyzařovaných frekvencí. Budeme proto pracovat i se střední hodnotou $\langle v_t \rangle$ podél obvodu,

$$\langle v_t \rangle = \frac{1}{P} \int_P v_t dl = \frac{1}{P} \int_P \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} r \sin \vartheta dl.$$

Symbolem P značíme celou délku obvodu, dl je délka jeho malého lineárního úseku. Předchozí vztah můžeme upravit na

$$\langle v_t \rangle = \frac{2}{P} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \int_P \frac{r \sin \vartheta}{2} dl.$$

Výraz $(r/2) \sin \vartheta dl$ je ale obsah trojúhelníku napnutého mezi počátkem souřadnic a dvěma body na okrajích úseku dl , tedy uvedený integrál není nic jiného než plocha obepnutá celým gyroskopem. Máme proto, při značení $\mathbf{S} = \mathbf{n}S$,

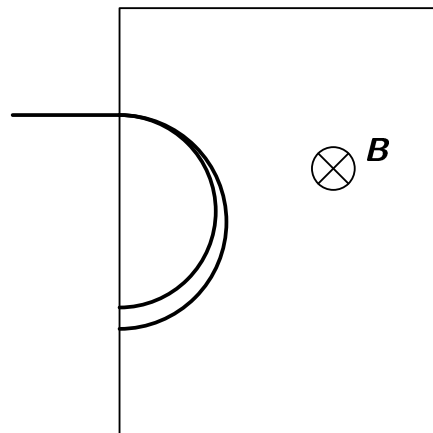
$$\langle v_t \rangle = \frac{2}{P} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}.$$

Rozdíl frekvencí pak vyjde

$$\delta f = f_+ - f_- = 2 \frac{f_0}{c} \langle v_t \rangle = \frac{2}{\lambda_0} \langle v_t \rangle = \frac{4}{\lambda_0} \frac{\omega \cdot \mathbf{S}}{P}.$$

Úloha V. S ... hrátky s elektrony

- a) Druhým způsobem, kterým měřil J. J. Thomson velikost měrného náboje elektronu, je právě studium vychylování katodového záření elektrickým polem. Uvažujte aparaturu podle obrázku z minulé kapitoly seriálu. Jak závisí odchylka paprsku, zaznamenaná na stínítku vpravo, na přiloženém napětí, rychlosti „corpuscules“ a geometrických vlastnostech aparatury?
- b) Jedním z problémů, se kterými se J. J. Thomson potýkal při stanovování měrného náboje elektronů, byl následující: Po vstupu paprsku katodového záření do magnetického pole se paprsek rozšířil do tvaru jakéhosi vějíře (viz obrázek). Tento rozptyl paprsku činí určování poloměru kružnice, kterou katodové záření vytvoří, značně nepřesné (Thomson hovořil o 20 %). Čím můžeme tento rozptyl vysvětlit? Pokud uvedete, jakým způsobem by bylo možno tuto nepřesnost zmenšit, vysloužíte si bonusový bod.
- c) Zpracováním dat z tabulky určete velikost náboje elektronu v případě, že by olej měl hustotu $920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, vzduch hustotu $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a viskozitu $17,1 \cdot 10^{-7} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. Užívali jsme elektrické pole o intenzitě $250 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.



Zase elektron

Označme U přiložené napětí, m_e hmotnost elektronu, e jeho náboj a v jeho rychlost. Co se týče aparatury, nechť vzdálenost mezi elektrodami je d , jejich délka s , vzdálenost mezi koncem elektrody a stínítkem (koncem baňky) l . Konečně odchylku svazku (vzdálenost bodu na stínítku od osy) označme y .

Přivedené napětí vytvoří v prostoru mezi elektrodami homogenní elektrické pole velikosti

$$E = \frac{U}{d}. \quad (98)$$

V tomto elektrickém poli působí na elektron konstantní elektrická síla, která mu uděluje zrychlení

$$a = \frac{eE}{m_e} = \frac{eU}{dm_e} \quad (99)$$

ve směru kolmém k ose baňky.

Průlet elektronu mezi elektrodami trvá dobu

$$T = \frac{s}{v}, \quad (100)$$

za tuto dobu se elektron vychýlí do vzdálenosti

$$y_1 = \frac{1}{2} a T^2 = \frac{1}{2} \frac{eU}{dm_e} \frac{s^2}{v^2} \quad (101)$$

a získá příčnou rychlost

$$v_y = aT = \frac{eUs}{dm_e v}. \quad (102)$$

Za elektrodami je elektron volný a jeho rychlost se zachovává. Pohybuje se proto přímočaře, pod konstantním úhlem, daným složkami rychlosti v , v_y , vzhledem k ose baňky. Z podobnosti trojúhelníků zjišťujeme, že odchylka y_2 , kterou elektron získá během této fáze splňuje

$$\frac{y_2}{l} = \frac{v_y}{v}. \quad (103)$$

Když to všechno složíme dohromady, získáme celkovou odchylku elektronu

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eUs}{dm_e v^2} \left(l + \frac{s}{2} \right). \quad (104)$$

Vějířek

Jak většina řešitelů správně odhadla, problémem je nestejná rychlost elektronů. Podle vztahu, uvedeného v seriálu se začnou elektrony, urychlené na rychlost v , v magnetickém poli indukce B pohybovat po kružnici poloměru

$$\varrho = \frac{m_e v}{eB}. \quad (105)$$

Protože náboj a hmotnost elektronu jsou konstanty a magnetické pole působí na všechny elektrony stejným způsobem (pole můžeme považovat za dostatečně homogenní), musíme vysvětlení hledat v rozdílné rychlosti.

Různou rychlost získávají elektrony již při svém výletu z anody vlivem různých povrchových podmínek (příměsí, ...) a termického pohybu částic.

Odfiltrování je možné v principu provést více způsoby. Za katodu můžeme například přidat dva otočné kotouče, ve kterých vyřízneme vzájemně pootočené štěrbin. Při rotaci obou kotoučů stejnou úhlovou rychlostí propustí aparatura pouze částice, které mají rychlost právě nutnou k překonání vzdálenosti mezi kotouči v době, kterou kotouče potřebují k pootočení druhé štěrbin na místo první. O tomto systému jste již jistě slyšeli v souvislosti s prvními měřeními rychlosti molekul.

Další možností je vložit před rozdělovací magnetické pole kombinaci magnetického a elektrického pole takovou, že obě intenzity jsou vzájemně kolmé. Toto pole odchyluje všechny částice kromě těch, které mají rychlost právě nutnou k vyrovnání elektrické a magnetické síly. Po průchodu dostatečně dlouhým takovým polem dostaneme poměrně přesně svazek elektronů, které budou mít rychlosti pouze málo rozptýlené. Po průchodu takto připraveného svazku samotným magnetickým polem tak dostaneme poměrně dobrý obraz.

Data processing

Autor textu pátého dílu seriálu se omlouvá všem řešitelům seriálu, neboť díky jeho chybě byla data uvedená v tabulce přiložené k seriálu nesmyslná. Při výpočtech pak vycházely výsledky, které nekorespondovaly s textem uvedeným za tabulkou (nábojem neseným jednotlivými kapkami). Uveďme proto alespoň pro úplnost, jak by se příklad počítal v případě správně zadaných dat, a výsledek výpočtů provedený na zadaných datech.

Pomocí vztahu uvedeného v zadání seriálu můžeme vypočítat náboj, který nesou jednotlivé kapičky. O každé kapičce „víme“, jaký nese elementární náboj, proto můžeme z dat pro každou kapičku vypočítat velikost elementárního náboje. Výslednou hodnotu pak získáme jako průměr hodnot pro všechny kapičky nesoucí nenulový náboj. Po zpracování zadaných dat získáme výsledek

$$e \sim 1,50 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

který uvádíme pouze pro orientaci.

Úloha VI.S ... atomové modely a Rutherfordův experiment

- a) Rozhodněte, zda stabilita (popř. rozměr) saturnského atomového modelu závisí na atomovém čísle Z .
- b) Upravte vzorec (vztah 12 ze šesté kapitoly) pro pravděpodobnost rozptylu α -částice pod velkým úhlem ϕ tak, abyste dostali praktičtější vztah pro pravděpodobnost dopadu na jednotku plochy scintilátoru, a uvažte, jak byste ho využili k určení materiálu ostřelovaného vzorku. Dále odhadněte, jak by se vzorec změnil, pokud bychom neuvažovali centrální náboj Ze , nýbrž Z rozptýlených elementárních nábojů e jako třeba v Lenardově modelu.
- c) V roce 1896 objevil astronom E. C. Pickering ve světle hvězdy ζ Puppis čáry, které splňovaly Rydbergerův vztah (vzorec 7 v šesté kapitole) pro $n = 2$ a $m = 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; \dots$, tedy i pro polocelá čísla! Vysvětlete tuto zdánlivou nesrovnalost s Borhovým modelem.

Saturnský model

V šestém díle seriálu byl představen Nagaokův saturnský model atomu takto: jedná se o kladně nabitě jádro (nábojem Ze , tedy prvek má atomové číslo Z) a prstenec z elektronů kroužících okolo. Má-li být taková soustava stabilní, musí existovat rychlost obíhání, při které se vyváží všechny síly působící na každý jednotlivý elektron, totiž síla přitažlivá k jádru, odpudivá od ostatních elektronů a síla odstředivá. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že elektrony jsou rozestavěné ve vrcholech pravidelného mnohoúhelníku se středem v jádře. Vzdálenost mezi jádrem a elektronem označme r ; to je vlastně hledaný poloměr atomu.

Je-li mnohoúhelník Z -úhelníkem, svírají průvodiče nultého a n -tého elektronu úhel

$$\alpha_n = \frac{2\pi n}{Z}.$$

Stejný úhel je mezi odpudivou silou působící mezi těmito elektrony a tečnou k prstenci v místě každého z obou elektronů. Z odpudivé síly se tak uplatní jen složka daná faktorem $\sin(\alpha_n/2)$. Vzdálenost mezi nultým a n -tým elektronem je z kosinové věty $r_n^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha_n)$, tedy

$$r_n = 2r \sin \frac{\alpha_n}{2}.$$

Odpudivá síla působící na nultý elektron je pak součet odpudivých sil od všech ostatních elektronů, prvního až $(Z - 1)$ -ho;

$$F_{\text{odp}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{r_n^2} \sin \frac{\alpha_n}{2} = \frac{1}{4} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{\sin(\alpha_n/2)}.$$

Přitažlivá síla je jasná,

$$F_{\text{při}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z}{r^2},$$

takže pro rovnováhu musí být

$$F_{\text{při}} = F_{\text{odp}} + \frac{mv^2}{r},$$

což po dosazení a přeskupení dá

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(Z - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{Z-1} \frac{1}{\sin \frac{n\pi}{Z}} \right) = mrv^2. \quad (106)$$

Závorka je vždycky kladná a pro myslitelná Z je řádu 10^1 , takže vždy je možné vhodnou rychlostí docílit stabilního oběhu. Odpověď na druhou otázku v zadání není úplně jednoznačná – poloměr prstence (atomu), jak vidíme v (106), závisí mnohem silněji na rychlosti, s jakou elektrony obíhají kolem jádra, než na atomovém čísle.

Rozptyl částic

Proužek plochy detektoru úhlové šířky $d\phi$, který lze zasáhnout α -částicemi rozptýlenými při odstřelování pod úhlem ϕ , má obsah

$$dS = 2\pi r^2 \sin \phi d\phi = 2\pi r^2 \sin(\pi - \phi) d\phi.$$

Vydělíme-li elementem plochy rovnici ze zadání, dostaneme

$$\frac{dp}{dS} \sim \frac{1}{2\pi r^2} R_m^2 \frac{\pi - \phi}{\sin(\pi - \phi)},$$

kde pro připomenutí

$$R_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZeQ}{\frac{1}{2}mv_0^2}.$$

Jelikož ϕ je blízké π , je i $\sin(\pi - \phi)$ blízké $\pi - \phi$, a tak můžeme jejich podíl nahradit jedničkou. Konstanty zatratíme v úměrnosti a zbude jen

$$\frac{dp}{dS} \sim R_m^2 \sim (Ze)^2. \quad (107)$$

Pokud budeme porovnávat počty dopadů na stejnou plošku při rozptylech na různých materiálech, měly by tudíž vyjít v poměru Z_1^2/Z_2^2 . Známe-li jeden materiál, jsme z experimentu schopni určit atomové číslo druhého a tedy i jeho složení. (Oba materiály musí být samozřejmě čisté prvky).

Jestliže by jádra nebyla koncentrovaná v jednom bodě a místo toho by bylo Z jader o náboji e rozmístěno po atomu, dostali bychom pro každé jádro rovnici (107), kde by bylo $Z = 1$. Jelikož jader máme tentokrát více, každé by přispívalo k četnosti dopadů podobným způsobem a výsledný efekt by mohl být přibližně popsán úměrností

$$\frac{dp}{dS} \sim Z \cdot R_m^2|_{Z=1} \sim Ze^2.$$

Pak by poměr pro různé prvky byl pouze Z_1/Z_2 , což lze snadno ověřit.

Hvězdné čáry

Jak bylo uvedeno v seriálu, Rydbergova formule zní

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 m Z^2 e^4}{h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (108)$$

kde $k = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$. Všimněme si, že když vynásobíme polocelé číslo dvěma, dostaneme celé číslo. Ve vzorci (108) se vyskytují druhé mocniny, takže ty bude potřeba vynásobit čtyřmi,

$$\frac{1}{\lambda} = 4R_{Z=1} \left(\frac{1}{(2n)^2} - \frac{1}{(2m)^2} \right).$$

Kam nyní se čtyřkou, která v (108) není? Jediná veličina, která není přírodní konstanta, je atomové číslo Z . Máme tedy

$$\frac{1}{\lambda} = R_{Z=2} \left(\frac{1}{\tilde{n}^2} - \frac{1}{\tilde{m}^2} \right).$$

Astronom Pickering tudíž nepozoroval atomární vodík, ale jednou ionizované atomy helia ${}^2\text{He}^+$, které se chovají úplně stejně jako vodík, jen mají dvojnásobný jaderný náboj.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Dolním Dvoře

Soustředění se konalo v krkonošské obci Dolní Dvůr poblíž Vrchlabí v týdnu od 30. října do 6. listopadu 2008.

Organizátoři

Bednář Jan, Benda Jakub, Brom Pavel, Hermann Jan, Jirotko Tomáš, Kučka Zdeněk, Malina Lukáš, Motloch Pavel, Nečada Marek, Podolník Aleš, Prachař Jan, Scholz Marek, Šimsa Daniel, Touška Kryštof

Účastníci

Baxová Katarína, Bogárová Zuzana, Cagaš Petr, Cimpl Lukáš, Dočekalová Zuzana, Drozdová Barbora, Figulová Jana, Hakl Michael, Honzáková Kateřina, Jeřábková Tereza, Kadlecová Alžběta, Klemsa Jakub, Kolář Karel, Malý Pavel, Maslikiewicz Ondřej, Paštyková Veronika, Pechová Alžběta, Peksová Lada, Ryšavý Petr, Steinhartová Tereza, Suchomelová Danka, Tkadlec Josef, Töpfer Jakub, Výška Martin

Fotky



Na výletě do přírody

Jarní soustředění ve Švagrově

Jarní soustředění FYKOSu proběhlo v týdnu od 25. dubna do 2. května 2009 v turistické ubytovně Švagrov poblíž Sobotína v Jeseníkách.

Organizátoři

Aleš Podolník, Marek Scholz, Tomáš Jirotko, Jan Hermann, Jakub Michálek, Marek Nečada, Lukáš Ledvina, Jana Poledníková, Adéla Skoková, Jan Bednář, Kryštof Touška, Pavel Brom

Účastníci

Lukáš Cimpl, Mária Kieferová, Ján Bogár, Zuzana Dočekalová, Anna Chejnovská, Jakub Klemsa, Josef Tkadlec, Petr Pecha, Martin Výška, Lada Peksová, Kateřina Honzáková, Tereza Jeřábková, Tereza Zábojníková, Tomáš Pikálek, Veronika Paštyková, Zuzana Bogárová, Pavel Malý, Petr Ryšavý, Jiří Nárožný, Karel Kolář, Alžběta Pechová, Ondřej Maslikiewicz, Jan Humplik, Jana Baxová

Legenda

Legenda jarního soustředění byla inspirována knihou Aloise Jiráska Staré pověsti české. Příchodem Praotce Čecha jsme zapustili kořeny v nové zemi a počali budovat města, pevnosti a posléze i hrady včetně staroslavného Vyšehradu.

S rozvojem hospodářství se rovněž začaly uplatňovat první peníze. Účastníci si mohli vydělávat aktivitou během přednášek i různých her. Za vydělaná „plátna“ si pak mohli kupovat zboží dle libosti. K dostání byli též otroci.

Připomněli jsme si také první bojovnice za práva žen, když jsme rekonstruovali legendu o dívčí válce. Její realizaci přál i vhodný poměr obou pohlaví mezi účastníky. Rovněž pověst o Libuši a jejím druhovi Bivojovi nezůstala bez naší pozornosti a zejména souboj s divokým kancem se setkal s příznivým ohlasem, a to i přesto že nedošlo k žádným vážnějším zraněním.

Zásadní zdražení potravin vyvolalo spor mezi nespokojenými rolníky a zlatokepeckými horníky, kteří opustili tradiční způsob obživy a raději kámen dobývali. Rané sociální bouře a boje mezi osadami tvořily další část programu.

Již neaktuálním, přesto klasickým jiráskovským tématem byly spory s Němci. I našim účastníkům se s pomocí praporce Svatého Václava a bujarého zpěvu Svatováclavského chorálu podařilo uhájit svou zemi před porobou.

Zbývalo ještě získat do státního znaku dvouocasého lva. Vypravila se družina Brunclíkova a během závěrečného grand prix řešila nástrahy jantarové hory, ptáka Noha a strašlivých lidí v opuštěném hradu. Naštěstí vše dobře dopadlo, a tak se Brunclík mohl vrátit do své vlasti s věrným lvem, ale i se zázračným mečem, který stíná hlavy zcela sám.

Veselým zpestřením posledního večera se stala scénka, již si připravili organizátoři ve svém volném čase, aby pobavili své věrné řešitele. Tématicky jsme zvolili výstup Libušin soud ze slavné Smetanovy opery. Ačkoli naše pěvecké výkony nedosahovaly příliš vysokých kvalit, budeme na tento jevištní pokus jistě dlouho vzpomínat.

Fotky



Pozorování dalekohledem



Libuše v podání FYKOSích ochotníků

Týden s aplikovanou fyzikou

Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF) je tradiční akce Fyzikálního korespondenčního semináře MFF UK navazující na výlet do CERNu v roce 2006. Letos proběhla již 3. rokem, v týdnu od 30. března do 2. dubna 2009. Během týdne nejlepší řešitelé semináře navštívili zajímavá pracoviště nejen v okolí Prahy. TSAF financuje MFF UK s přispěním ČEZ a. s.

V pondělí byl týden odstartován tzv. Dnem s experimentální fyzikou, který je otevřen všem řešitelům semináře. Nejdříve si všichni vyslechli přednášku RNDr. Karla Závěty o Mössbauerově spektroskopii, poté se rozdělili do skupin a následovaly exkurze na jednotlivá pracoviště nejen MFF UK v Troji. Byly to laboratoře kosmické fyziky, kde pracovníci MFF vysvětlili, co jsou to hvězdy a jak se studuje kosmický prach, ve skupině tenkých vrstev byl k vidění tunelový mikroskop, nukleární magnetické rezonance a fyziky nízkých teplot, kde ukazovali zvláště populární experimenty s tekutým dusíkem. Hlavním lákadlem celého dne byla návštěva školního jaderného reaktoru Vrabec.

V úterý dopoledne TSAF pokračoval návštěvou pracovišť Akademie věd ČR na Slovance. Na programu byla prohlídka tokamaku COMPASS a laserového systému PALS. Na obou místech doprovázel poutavým výkladem odpovědný personál.

Prohlídku tepelné elektrárny Mělník účastníci začali u chladicích věží, aktivnější z nich se dokonce podívali i do jejich nitra. Následoval průzkum kotelen, kde se spaluje uhlí, odspodu, kde nahlédli až do spalovací komory, až po střechu, odkud bylo vidět po celém okolí a podívali se na obrovské haldy uhlí u elektrárny. Následoval průzkum turbíny, kde bylo pod nohama cítit 50 hertzů a všichni si tam pořádně protáhli ušní bubínky. Po celou dobu skupina čile konverzovala se sdílným pracovníkem elektrárny, který se se všemi ochotně dělil o své vědomosti. Před odchodem na vlak ještě nesměla chybět návštěva řídicího centra se stovkami tlačítek a blikátek.

Na středu byla domluvena exkurze v plzeňské továrně na výrobu plochých televizorů Panasonic a při příležitosti návštěvy tohoto města také prohlídka známého pivovaru. Bohužel ranní vlak měl hodinové zpoždění již při výjezdu z Prahy a z prohlídky pivovaru sešlo. V Panasonicu byli účastníci exkurze provedeni po výrobních linkách LCD a plazmových televizorů. Prohlídku doprovázel výklad postupu montáže a použitých fyzikálních principů.

Odpoledne se po příjezdu do Prahy ještě konala prohlídka pražských pamětihodností s přihlédnutím k historii přírodních věd ve městě, kterou vedl doc. Langer z Ústavu teoretické fyziky MFF.

Čtvrtek se nesl ve znamení exkurze do Astronomického ústavu AV ČR v Ondřejově. Začala prohlídkou historické části hvězdárny, kde se studenti dozvěděli o historii pozorování hvězd nejen na tomto místě, jakožto i o zakladatelích komplexu. Po přestávce na oběd pak pracovníci ústavu všechny provedli po nejrušnějších pracovištích v objektu. Od výzkumu záblesků gama záření přes sluneční oddělení, kde řešitelům ukázali unikátní sluneční patrolu, až po stelární oddělení, kde využívají největší dalekohled v České republice, dvoumetrový reflektor. Na večer bylo možné se účastnit astronomického měření a pozorování hvězd s výkla-

dem. Po ukončení exkurze následoval přesun do nedalekých Mnichovic za účelem přespání v hotelu.

Účastníci i organizátoři si všechny exkurze užili a pochvalovali a nešetřili lektoři svými zvědavými dotazy. Lektoři dokázali poutavě představit svůj obor, používaná zařízení, metodiku a zodpovědět všechny otázky. Organizátoři netuší, kolik zúčastníků si domluvilo stáž na navštívených pracovištích či nějakou jinou formu spolupráce.

Fotky



V útrobách tepelné elektrárny Mělník



Řešitelé s teleskopem na ondřejovské hvězdárně

FYKOSí Fyziklání 2009

FYKOSí Fyziklání je soutěž v řešení příkladů z fyziky pro studenty středních škol, která se konala 13. února 2009 v budově Matematicko-fyzikální fakulty Ke Karlovu 3 v Praze.

Pravidla soutěže

Soutěže se zúčastňují družstva s nejvýše 5 členy. Samozřejmě družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane družstvo nový příklad. Za správně vyřešený příklad se považuje příklad se správným výsledkem. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů se smí používat kalkulačka a MFCh tabulky.

Výsledky

1.	Gymnázium Jaroslava Vrchlického Klatovy	113 bodů
	<i>Jakub Klemsa, Karel Kovářík, Jaroslav Mandík, Pavel Bárta, Petr Nedvěd</i>	
2.	Gymnázium Špitálská a Trutnov	109 bodů
	<i>Kryštof Hlínomaz, Vlastimil Dort, Jakub Červenka, Karel Kolář, Hana Šustková</i>	
3.	Gymnázium Poštová	102 bodů
	<i>Ladislav Bačo, Eduard Eiben</i>	
4.	Gymnázium Jana Keplera	86 bodů
	<i>Karel Pajskr, Tomáš Nosek, Kateřina Honzáková, Tomáš Rusý, Michael Turek</i>	
5.	Gymnázium Christiana Dopplera	83 bodů
	<i>Pavel Malý, Jáchym Sýkora, Lada Peksová, Zuzana Dočekalová, Michael Hakl</i>	
6.	Gymnázium Boskovice	81 bodů
	<i>Michal Bednář, Jakub Rozbořil, Roman Skoupý, Václav Prchal, Martin Keršner</i>	
7.	Gymnázium Ľ. Štúra	78 bodů
	<i>Katarína Baxová, Ján Bogár, Alžbeta Černeková, Jana Figulová, Michal Ulianko</i>	
8.	Stůj, noho posvátná! (gymnázium Jírovcova)	66 bodů
	<i>Jan Matějka, Jiří Kratochvíl, Adam Juraszek, František Petrouš, Martin Mach</i>	
9.	JG Náchod - A	64 bodů
	<i>Stárek Jaroslav, Lambert Vladimír, Dundálek Jan, Vlček Karel, Šimbera Jan</i>	
10.	Pišinky (Gymnázium Luďka Pika)	61 bodů
	<i>Michal Žák, Martin Bucháček, Marek Maštálka, Tereza Puchrová, Jiří Rymes</i>	
11.	Gymnázium, Brno-Řečkovice	60 bodů
	<i>Helena Paschkeová, Zdeněk Farka, Karel Zlatuška, Petr Švéda, Jan Sopoúšek</i>	
12.	Gymnázium Budějovická	58 bodů
	<i>Matěj Dostál, Ondřej Straka, Lukáš Hochmann, Karel Klíma, Michael Svatoň</i>	
12.	Gymnázium Zábřeh	58 bodů
	<i>Petr Vágner, Petr Havlíček, Petr Morávek, Kuba Trobl, Pavel Veselý</i>	

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

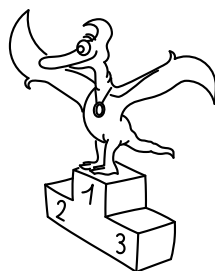
Fotky



Řešení úloh



Vítězný tým z klatovského gymnázia



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Karel Kolář	G, Špitálská, Praha	74
2. Lukáš Labor	G, Třinec	67
3. Tereza Zábojníková	G, Uherské Hradiště	50
4. Pavel Malý	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	43
5. Lukáš Cimpl	G, Frenštát pod Radhoštěm	42
6. Prabhat Rao Pinnaka	Kv Picket, Indie	40
7. Mária Kieferová	G Sv. Františka, Žilina	35
8. Alžběta Pechová	SPŠ strojnická, Vsetín	27
9. Martin Výška	G, Nad Alejí, Praha	26

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Petr Ryšavý	G J. Heyrovského, Praha	130
2. Miroslav Rapčák	G, Orlová	105
3. Veronika Paštyková	G J. Ortena, Kutná Hora	88
4. Zuzana Dočekalová	G, F. Hajdy, Ostrava	75
5. Ján Bogár	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	66
6. Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	52
7. Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	50
8. Jana Bazová	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	46
9. Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	41
10. Petra Kňážeková	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	30
11. Tereza Steinhartová	G J. K. Tyla, Hradec Králové	29
12. Petr Cagaš	G, Lesní čtvrť, Zlín	26
13. Lada Peksová	G Ch. Doppl., Zborovská, Praha	24
14. Pavel Novotný	G P. de Coubertina, Tábor	23

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	60
2. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ, Hronov	47
3. <i>Anna Chejnovská</i>	G B. Němcové, Hradec Králov	44
4. <i>Jiří Nárožný</i>	G, Boskovice	39
5. <i>Tomáš Pikálek</i>	G, Boskovice	36
6. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	28
7. <i>Dominika Kalasová</i>	G, Boskovice	22

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Peter Kosec</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	76
2. <i>Patrik Švančara</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	74
3. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	25
4. <i>Tomáš Trégner</i>	G J. Heyrovského, Praha	18
5. <i>Martina Štarhová</i>	G, Šumperk	11

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

ALEŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXII. ročník – 2008/09

Předmluva: Tomáš Jirotko

Náměty úloh:

Jan Prachař (I.1, I.3, II.5, III.5, V.1, VI.5),
Jakub Benda (II.7, IV.7, V.6, VI.7), Jan Jelínek (V.2, V.3, V.4, V.5),
Marek Scholz (I.4, II.2, IV.1, VI.4), Pavel Motloch (I.7, II.7, V.7, VI.2),
Jakub Michálek (III.4, IV.4, III.6), Aleš Podolník (II.1, IV.6),
Lukáš Ledvina (VI.1, II.3), Dalimil Mazáč (VI.3), Dan Šimsa (IV.2),
Jan Bednář (II.6), Jaroslav Trnka (IV.5), Karel Tůma (I.6),
Marek Pechal (II.4), Michael Komm (IV.3), Pavel Brom (I.5)

Autoři řešení úloh:

Lukáš Ledvina (I.3, IV.1, IV.3, V.3, VI.1),
Jakub Michálek (I.6, III.4, IV.4, V.3, VI.5),
Marek Nečada (I.4, IV.5, V.2, VI.3),
Jakub Benda (II.7, III.5, IV.7, VI.7),
Pavel Motloch (I.7, III.7, V.7), Marek Scholz (II.6, III.2, VI.4),
Jan Jelínek (II.1, III.1, V.4), Aleš Podolník (II.4, IV.6, VI.6),
Tomáš Jirotko (III.6, V.5), Kryštof Touška (IV.2, V.1),
Jana Poledníková (I.5, III.3), Jan Hermann (I.1, VI.2),
Zdeněk Kučka (II.5), Tomáš Tintěra (II.3), Martin Formánek (II.2),
Jan Prachař (V.6), Adéla Skoková (I.2),

Seriál o historických milnících fyziky: Jakub Benda, Pavel Motloch

Legenda jarního soustředění: Tomáš Jirotko

Týden s aplikovanou fyzikou: Aleš Podolník

Sazba: Tomáš Jirotko

Ilustrace na první straně obálky: Petra Suková, Karel Tůma

Obrázky a grafy: Tomáš Jirotko, Jakub Benda

Jazykové korektury: Jakub Michálek, Marek Nečada

Udělejte si magnetický urychlovač

Připravte si:

- 60 cm dlouhý odřezek plastové instalační lišty, jakou používají elektrikáři,
- 4 kulaté feritové magnety (průměr 20 mm, tloušťka 5 mm),
- 4 neodymiové magnety (třeba vymontované ze starého pevného disku PC),
- 4 větší ocelové kuličky (průměr asi 15 mm),
- 5 menších ocelových kuliček (průměr asi 12 mm).

Do instalační lišty vyřežte listem pilky na železo čtyři zářezy pro těsné zasunutí feritových magnetů. Vzdálenost zářezů závisí na rozměrech použitých magnetů a velikosti kuliček, tady bude třeba trochu experimentovat. Při použití uvedených kuliček a magnetů vyhovuje mezi zářezy vzdálenost asi 7 cm. Feritové magnety zasuněte tak, aby jejich odpovídající póly směřovaly stejným směrem. Pro zesílení účinku ke všem feritům přiložte z jedné strany neodymiový magnet. Ke každému feritovému magnetu přiložte velkou a pak malou kuličku – tím je model urychlovače připraven k činnosti. Zbývající malou kuličku



položte do drážky a lehce do ní cvrkněte směrem k neodymiovému magnetu. Po jejím nárazu se v mžiku dají do pohybu i ostatní malé kuličky a poslední odletí z opačného konce lišty neočekávaně velkou rychlostí. (Dobře se podívejte, kam váš urychlovač míří!) Výkon magnetického urychlovače můžete zvětšit přidáním dalších magnetů,

změnou velikosti kuliček i vzdálenosti magnetů. Místo větších kuliček můžete přiložit k magnetům i jiné ocelové součástky (větší matky, válečky z ložisek apod.) Mají totiž za úkol jen zvětšit vzdálenost mezi magnetem a odskakující kuličkou. Podaří-li se vám dobře „vyladit“ konstrukci modelu, budete jeho výkonem příjemně překvapeni.

Podrobnosti k pokusu, další zajímavé a hravé experimenty a hlavně spoustu článků na fyzikální (a nejen fyzikální) témata najdete na www.tretipol.cz. Je to e-zin, v němž řadu článků píše sami studenti. Připojte se!

Časopis www.tretipol.cz je součástí vzdělávacího programu ČEZ Svět energie.

Svět energie je dobrodružný a zajímavý! Zauvažujte o budoucím zaměstnání v energetice!

www.cez.cz/vzdelavaciprogram



