

21. ročník, úloha VI. E ... magnetický zámek (8 bodů; průměr 4,74; řešilo 27 studentů)

Cela, ve které je pterodaktyl vězněn, je uzamčena pomocí magnetického zámku. Americké tajné služby vlastní prototyp tohoto zámku a kousek z jeho magnetu vám posíláme v obálce se sérií. K otevření zámku bez klíče je nutné znát, jak závisí síla mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Změřte co nejpřesněji tuto závislost!

Návod: Mezi oba magnety postupně vkládejte tenké listy papíru a měřte sílu nutnou na odtržení magnetků od sebe. *K vymyšlení úlohy donutila situace Honzu Prachaře.*

Teorie

Látka se skládá z atomů. Některé atomy mají nenulový celkový spin – moment hybnosti a tedy i magnetický moment. Můžeme si to představit tak, že elektron obíhající kolem jádra vytváří proudovou smyčku a ta má, jak známo, magnetický moment. Když se stane to, že všechny atomární magnetické momenty mají stejný směr (feromagnet), máme magnet. Každý magnetický dipól (proudová smyčka) kolem sebe vytváří magnetické pole, prostřednictvím kterého působí na okolní dipóly.

Skutečný magnet se sice skládá z malých atomárních dipólů, jako celek však dipólem není. Abychom byli schopni vyřknout alespoň nějakou teoretickou předpověď, jako nejjednodušší přiblížení předpokládáme, že magnet dipól je.

Jak se píše v učebnicích, magnetické pole dipólu klesá ve velkých vzdálenostech od něj jako $1/r^3$. Energie dipólu \mathbf{m} v poli \mathbf{B} je $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, tudíž síla mezi dipóly klesá jako $1/r^4$. Na druhou stranu, pokud jsou dva magnety velice blízko, takže každá indukční čára vycházející z jednoho magnetu skončí ve druhém, je síla konstantní – nezávisí na vzdálenosti. Co bude platit v našem případě?

Vzdálenosti, na kterých budeme sílu mezi magnety měřit, bude srovnatelná s velikostí magnetů. Nemůžeme tedy mluvit o tom, že bychom byli v režimu velké vzdálenosti, kdy platí $F \sim 1/r^4$. Naopak síla není ani konstantní, neb měříme její pokles, dokud udrží dva magnety u sebe.

Zdá se, že jsme ve svízelné situaci. To nás však nesmí mrzet. Úlohu jsme proto zadali jako experimentální, abychom si onu závislost síly na vzdálenosti magnetů proměřili. Můžeme očekávat, že síla bude klesat pomaleji než $1/r^4$.

Na závěr teoretického úvodu uvedme, že v analogii z elektrostatikou bychom mohli sílu mezi dvěma kolineárními dipóly (dipóly leží na jedné přímce, dipólové momenty mají opačný směr) zapsat jako

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+2L)^2} - \frac{2}{(x+L)^2} \right), \quad (1)$$

kde Υ je konstanta závislá na materiálu a rozměrech magnetu a L je charakteristický rozměr magnetu. Pro $x \gg L$ se lze přesvědčit¹, že síla klesá podle vztahu $F = 6L^2\Upsilon/x^4$. V opačné limitě $x \ll L$ však síla diverguje, vztah tedy pro velice krátké vzdálenosti nedává správné předpovědi. Uvidíme, jak bude odpovídat naměřeným hodnotám.

¹⁾ Formulí pro sílu přepíšeme

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{(1+2L/x)^2} - \frac{2}{x^2} \frac{1}{(1+L/x)^2} \right)$$

a využijeme Taylorův rozvoj $1/(1+\xi)^2 = 1 - 2\xi + 3\xi^2 + O(\xi^4)$.

Měření

Měřili jsme sílu mezi magnety, mezi těmi stejnými, jako každý řešitel obdržel v obálce se šestou sérií. Jak měřit, jsme vám napověděli. Mezi magnety budeme vkládat listy papíru a budeme měřit sílu nutnou na odtržení magnetů od sebe. Je vhodné použít nějaký jemný papír, jednak kvůli malé hmotnosti a jednak kvůli malé tloušťce.

Vzdálenost magnetů můžeme určit jako počet listů papírů mezi magnety krát tloušťka papíru. Tloušťku papíru pak nejlépe zjistíme opakovaným měřením tloušťky několika desítek vrstev papíru, čímž podstatně snížíme chybu měření i chybu statistickou. Jinou možností je měřit vzdálenost mikrometrem pro každé měření zvlášť.

Sílu nutnou k odtržení magnetů od sebe lze měřit siloměrem nebo vážením. Měření siloměrem bude zatíženo velkou chybou. Jednak proto, že siloměry nejsou většinou konstruovány k dostatečně přesnému měření. Podstatnější je však fakt, že k odtržení magnetů dojde náhle a neočekávaně a maximální výchylna siloměru půjde odečíst jen během krátkého okamžiku.

Lepší metoda je následující. Jeden magnet upevníme tak, že rozhraní mezi magnety bude vodorovné, a na ten druhý spodní budeme zavěšovat závaží, dokud nedojde k odtržení. Jako závaží lze použít cokoli, nejlepší je však něco, co lze přidávat po malých kouscích, jako například písek nebo voda. Po odtržení změříme hmotnost závaží včetně spodního magnetu a případné pomocné konstrukce připevněné k magnetu (tj. miska), do které umístíme závaží. K měření hmotnosti použijeme dostatečně přesné váhy. Síla, která způsobila odtržení magnetů od sebe, je, jak tušíte, tíhová síla. Tu určíme snadno z hmotnosti vztahem $F = mg$. Jediné úskalí spočívá ve velikosti tíhového zrychlení, za kterou budeme dosazovat hodnotu $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Tím se dopustíme systematické chyby, ale zanedbatelné vůči ostatním chybám.

Výsledky

Dovolili jsme si převzít hodnoty naměřené *Terkou Jeřábkovou*, která provedla nejpreciznější měření, za což ji velice chválíme. Považte sami. Měřila sílu pro 30 různých vzdáleností (tedy až 29 vrstev papírů) a pro každou vzdálenost měřila sílu pětkrát. Tloušťka jednoho papíru byla $(0,100 \pm 0,002) \text{ mm}$. Naměřené hodnoty naleznete v tabulce a v grafu na obrázku 1. Kromě hodnot zobrazujeme i chybu měření síly Δ_F pomocí chybových úseček. Chybu určení vzdálenosti magnetů považujeme za zanedbatelnou oproti chybě změřené síly, a proto ji do grafu nezakresluje.

Změřené hodnoty síly mezi magnety pro různé vzdálenosti

x [mm]	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40
F [N]	2,12	1,90	1,65	1,49	1,34	1,20	1,11	0,99	0,88	0,82	0,79	0,72	0,67	0,61	0,57
Δ_F [N]	0,05	0,09	0,05	0,12	0,09	0,07	0,10	0,05	0,08	0,04	0,02	0,05	0,04	0,03	0,05
x [mm]	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
F [N]	0,54	0,49	0,44	0,42	0,36	0,36	0,32	0,30	0,27	0,25	0,25	0,23	0,22	0,19	0,17
Δ_F [N]	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03	0,02	0,03	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03

Změřením 30 bodů závislosti naše úsilí samozřejmě skončit nesmí. Naměřenými body proložíme křivku. Předpokládejme nejprve mocninnou závislost $F(x) = A(x/b - 1)^{-c}$ a hledáme hodnoty parametrů A , b a c . Výsledkem je

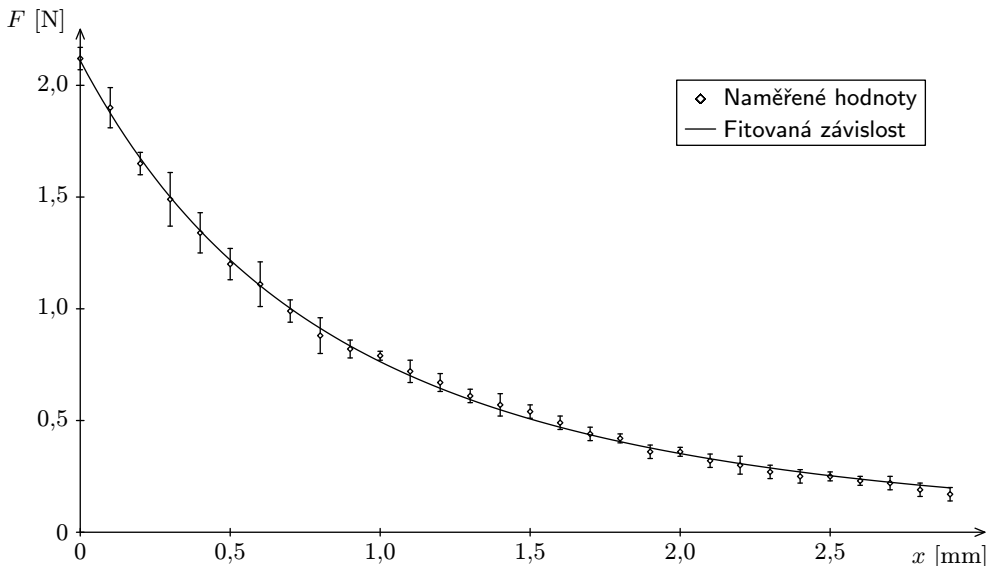
$$A = (2,1 \pm 1,5) \text{ N}, \quad b = (2,8 \pm 0,6) \text{ mm}, \quad c = (3,3 \pm 0,6).$$

Křivka této fitované závislosti je vynesena v grafu na obrázku 1.

Rovněž můžeme změřené body fitovat funkcí ve tvaru (1), kterou jenom zkorigujeme posunem počátku souřadnic o a . Námí zvolená nulová vzdálenost mezi magnety totiž nemusí odpovídat nulové vzdálenosti podle teoretického modelu. Parametry vyjdou

$$\Upsilon = (12 \pm 9) \text{ N} \cdot \text{mm}^2, \quad L = (2,7 \pm 1,7) \text{ mm}, \quad a = (2,0 \pm 0,4) \text{ mm}.$$

Výsledná funkce má téměř identický průběh jako předchozí mocnná závislost, v grafu jí tedy odpovídá stejná křivka (v daném zvětšení by mezi křivkami nebyl patrný rozdíl).



Obr. 1. Graf závislosti síly mezi magnety na jejich vzdálenosti

Diskuse a závěr

Sílu mezi magnety v závislosti na jejich vzdálenosti jsme měřili v rozmezí od nulové vzdálenosti, až dokud byla síla mezi magnety našimi možnostmi měřitelná, tj. v rozmezí 0–3 mm. Měření se dalo realizovat relativně přesně, což lze vidět i z grafu, protože body leží na hladké křivce a nejsou kolem ní „příliš rozházené“.

Hledali jsme mocnnou závislost, která nejvíce odpovídá změřeným bodům, a výsledkem byl pokles zhruba se třetí mocninou vzdálenosti $c = (3,3 \pm 0,6)$. To je očekávaný závěr (pokles je pomalejší než se čtvrtou mocninou).

Při fitování teoretického vztahu (1) jsme dospěli k výsledku, který také výborně vystihuje závislost změřenou, a navíc jsme získali odhad pro rozměr magnetu $L = (2,7 \pm 1,7) \text{ mm}$, což odpovídá realitě.

Sluší se ještě okomentovat výsledné chyby. Jistě jste si všimli, že chyby fitovaných parametrů jsou poměrně velké. To je způsobeno tím, že parametrů je hodně, nemáme pro ně žádná omezení a změřené body postihují relativně krátký interval. Například pokud výrazně změním hodnotu parametru Υ , můžeme to kompenzovat posunem funkce ve směru osy x , tedy změnou

parametru a a dostaneme srovnatelně dobrou křivku. Pokud bychom znali b při prvním fitu či a ve druhém, výsledky by se výrazně zpřesnily.

Při měření bylo také nutné neopomenout faktu, že síla se může měnit i při vzájemném otáčení magnetů. To je způsobeno tím, že magnety byly uchyceny v kovových pouzdrech, do kterých mohly být vlepeny trochu nakřivo.

Poznámky k došlým řešením

S většinou řešení jsem byl spokojen a sešlo se jich hojně. Obzvlášť jsem oceňoval řešitele, kteří měřili pečlivě a nebyli líní změřit sílu pro co nejvíce vzdáleností. Také jsem oceňoval ty, kteří neskončili u měření a pustili se do fitování a vyhodnocení chyb, což by měl být neopomenutelný fakt při měření závislosti dvou veličin. Někteří řešitelé fitovali exponenciální závislosti, což je vzhledem k fyzikální povaze úlohy neopodstatněné.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz