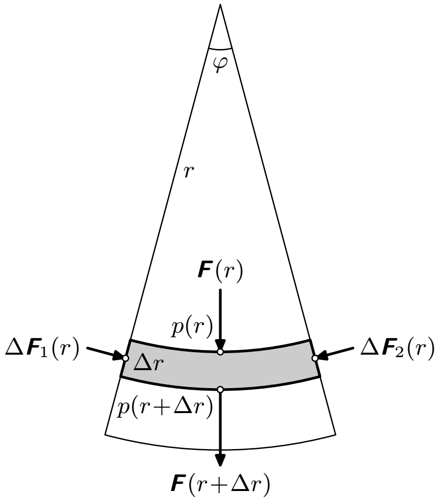
21. ročník, úloha V . 1 ... *pozor, neudus se* *(4 body; průměr 3,38; řešilo 21 studentů)*

Vstup do Rámy je otvor uprostřed jedné podstavy. Předtím, než vstoupíš a sundáš si skafandr, si však rozmysli, zda je na jeho ose dýchatelný vzduch. Jaká je jeho hustota v porovnání s hustotou na vnitřním povrchu, je-li teplota vzduchu všude stejná?

Tvrzení A. C. Clarka, že je na ose nulový tlak, zarazilo Martina Formánka i Jakuba Bendu.

Pro řešení je podstatný předpoklad, že vzduch uvnitř Rámy se otáčí spolu s Rámou. Tento stav je rovnovážný a dospěje se k němu v důsledku tření mezi vzduchem a okolím.

Ráma je symetrický dle své osy, stejně tak bude symetrické rozmístění molekul vzduchu. Tlak p i hustota ϱ vzduchu závisí jen na vzdálenosti r od osy Rámy, přičemž dle zadání $p(R) = 1\,\mathrm{atm}$ ($R = 8\,\mathrm{km}$ je poloměr Rámy).



Obr. 1

Z Rámovy atmosféry vyřízneme výseč s vrcholovým úhlem φ (viz obr. 1). Tuto výseč dále rozporcujeme na vrstvičky široké Δr. Rozeberme nyní síly působící na vzduch uvnitř jedné takové vrstvičky, která je vzdálená r od osy.

Tvar vrstvy je výhodný, neboť tlak vzduchu u horní strany je všude stejný, a to $p(r)$. Podobně u dolní strany je tlak $p(r+\Delta r)$. Šířku Δr zvolíme co nejmenší tak, aby se tlak a hustota vzduchu uvnitř vrstvičky měnily co nejméně. Toto nás bude také opravňovat bez komentáře zanedbávat sčítance úměrné $(\Delta r)^2$ (pokud se vám bude zdát, že jsme ve výpočtech na něco zapomněli, bude to pravděpodobně toto zanedbání). Řešení se podstatně zjednoduší pro malý vrcholový úhel φ (nejvýše 5°).

Plocha horní strany je $S(r) = r\varphi L$, kde L je délka Rámy, plocha dolní strany je $S(r+\Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L$ a plocha boční strany je $\Delta S = \Delta r L$. Výslednici sil působících na horní stranu určíme snadno. Ačkoli každá elementární síla má jiný směr, směr libovolné síly se od svislého směru liší maximálně o $\varphi/2$ a $\cos(\varphi/2) \approx 1$ díky malosti φ. Tedy

$$F(r) = r\varphi L p(r) \quad \text{a také} \quad F(r + \Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L p(r + \Delta r)\,.$$

Výslednice sil působících na boční stranu (všechny elementární síly jsou rovnoběžné) má velikost $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta r L p(r)$. Podstatná je výslednice sil působících na protější strany

$$|\Delta \boldsymbol{F}_1 + \Delta \boldsymbol{F}_2| = 2\Delta r L p(r) \sin(\varphi/2) \approx \Delta r \varphi L p(r)\,.$$

Zbývá určit celkovou odstředivou sílu působící na vzduch o hmotnosti m ve vybrané vrstvě. Odstředivé zrychlení je rovno $\omega^2 r$ ($\omega = 2\pi/(4 \cdot 60)\,\mathrm{s}^{-1}$ je úhlová rychlost Rámy), tedy síla je $m\omega^2 r$. Hmotnost vzduchu vyjádříme pomocí hustoty $m = r\varphi L \Delta r \varrho(r)$. Jak plyne ze stavové rovnice ideálního plynu, hustota vzduchu (za předpokladu, že je ideální plyn) je přímo úměrná tlaku

$$\varrho(r) = \frac{M_\mathrm{m}}{R_\mathrm{m} T}\, p(r) \equiv A p(r)\,,$$

kde $M_\mathrm{m} = 28{,}96\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ je molární hmotnost vzduchu, R_m je plynová konstanta a $T = 300\,\mathrm{K}$ je teplota vzduchu. Pro přehlednost jsme zavedli konstantu A. Celková odstředivá síla působící na element vzduchu potom je

$$F_\mathrm{o} = A\omega^2 r^2 \varphi L \Delta r p(r)\,.$$

V rovnováze je celková síla působící na každou vrstvu vzduchu nulová, to implikuje rovnici

$$r\varphi Lp(r) - (r+\Delta r)\varphi Lp(r+\Delta r) + \Delta r\varphi Lp(r) + A\omega^2 r^2 \varphi L\Delta r p(r) = 0\,,$$

po úpravě

$$\frac{p(r+\Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{A\omega^2 r^2 p(r)}{(r+\Delta r)} \approx A\omega^2 r p(r)\,.$$

Této „přírůstkové rovnici“[1] vyhovuje řešení ve tvaru[2]

$$\frac{p(r)}{p(0)} = \mathrm{e}^{A\omega^2 r^2/2}\,.$$

Za úkol bylo vyšetřit podmínky na ose Rámy. Tak tedy

$$p(0) = p(R)\mathrm{e}^{-A\omega^2 R^2/2} \doteq 0{,}78 p(R) = 0{,}78\,\mathrm{atm}\,.$$

Hustota je přímo úměrná tlaku, takže pro ni bude platit stejné $\varrho(0) = 0{,}78\varrho(R)$. Uvedená hodnota tlaku odpovídá nadmořské výšce zhruba 2000 m n. m. Po sundání skafandru s vnitřním atmosférickým tlakem pocítíme tlakovou změnu odpovídající vynoření se z dvoumetrové hloubky bazénu. S dýcháním mít žádný problém nebudeme.

Vaše řešení mě velice potěšila, většina z vás měla řešení správně, a dokonce si poradila i s řešením diferenciální rovnice (ať už analyticky nebo numericky na počítači jako *Jakub Klemsa*). Snad jen větší diskusi by si zasluhovalo odvození rovnice pro přírůstek tlaku na jedné vrstvě, o což jsem se pokusil v tomto řešení. Zvláštní pochvalu zaslouží *Jakub Michálek*,

---

1) Pro malé Δr přechází levá strana v derivaci $p'(r)$. Diferenciálního počtu znalí čtenáři tedy budou řešit diferenciální rovnici $p'(r) = A\omega^2 r p(r)$ separací proměnných

$$\int_{p(0)}^{p(r)} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_0^r A\omega^2 r\,\mathrm{d}r\,.$$

2) Jak se můžeme přesvědčit

$$\frac{p(r+\Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{p(0)\left(\mathrm{e}^{A\omega^2(r+\Delta r)^2/2} - \mathrm{e}^{A\omega^2 r^2/2}\right)}{\Delta r} \approx \frac{p(0)\mathrm{e}^{A\omega^2 r^2/2}\left(\mathrm{e}^{A\omega^2 r\Delta r} - 1\right)}{\Delta r} \approx A\omega^2 r p(r)\,,$$

neboť s využitím aproximace pro malé hodnoty argumentu $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$ zjistíme, že

$$\mathrm{e}^{A\omega^2 r\Delta r} = 1 + A\omega^2 r\Delta r\,.$$

který úlohu vyřešil elegantně pomocí Boltzmannova vztahu.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.