21. ročník, úloha IV . E ... *valivý odpor* *(8 bodů; průměr 4,00; řešilo 21 studentů)*

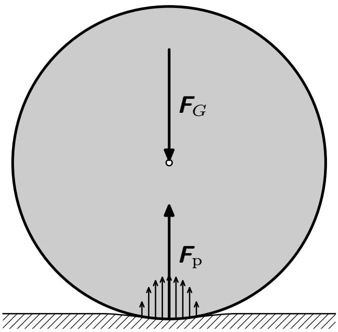
Pečlivě experimentálně prověřte, zda valivý odpor válce závisí na jeho poloměru či ne.

Různé názory v knihách objevil Jano Lalinský.

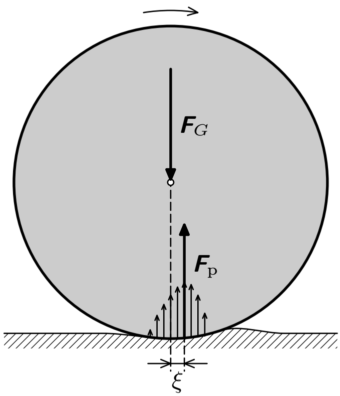
V následujícím vzorovém řešení se nebudeme pokoušet příliš o vlastní třeskuté invence a raději shrneme a okomentujeme vaše nápady a přístupy k experimentální úloze.

Teorie

Když válec leží nehybně na vodorovné podložce, podložka i válec se trochu zdeformují a vznikne styčná plocha. Lze si představit, že na této ploše je nějakým způsobem rozložen tlak, kterým podložka působí na válec. Tento tlak se místo od místa mění, ale je rozložen symetricky a výsledná síla působící od podložky na válec je stejně velká a opačného směru než tíhová síla a míří do těžiště válce. Jedině v tom případě totiž jsou výslednice sil a momentů působící na válec nulové, a válec je tedy v klidu.



Obr. 1. Silové působení mezi podložkou a válcem v klidu



Obr. 2. Silové působení mezi podložkou a válcem v pohybu

Když se válec kutálí, tlak není ve styčné ploše rozložen symetricky a ani styčná plocha nemusí ležet přesně pod těžištěm válce. Jak válec na náběžné straně stlačuje podložku, rozložení tlaku se spíše posune ve směru pohybu a výsledná síla od podložky $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ již nemíří do těžiště válce, i když vektor $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ má stejnou velikost a směr jako tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ působící v těžišti. Vůči těžišti válce (tedy jeho středu) potom $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ působí momentem valivého odporu $M = \xi F_\mathrm{p}$, kde ξ značí takzvané rameno valivého odporu. V literatuře se dočteme, že rameno valivého odporu ξ je dáno materiálem válce a podložky, nikoli však poloměrem válce. Často se valivý odpor vysvětluje také tak, že válec před sebou tlačí jakýsi hrbolek.

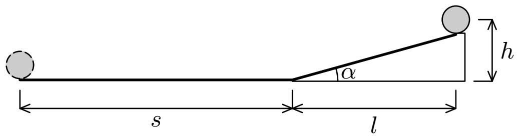
Moment $\boldsymbol{M}$ má na zpomalení valení stejné účinky, jako kdybychom působili silou $F_\mathrm{v} = M/r$ ve středu válce proti směru pohybu. Jak vyplývá z předchozího výkladu, je síla valivého odporu F_v jistě závislá na tíze válce, a lze tedy psát

$$F_\mathrm{v} = \mu(r) mg = \frac{\xi(r)}{r} mg \,. \tag{1}$$

Našim úkolem je nyní zjistit, zda a jak členy μ a ξ závisejí na poloměru válce.

Příprava a provedení měření

Budiž naší motivací pro vyřešení úkolu otázka, zda se vyplatí vlaky opatřit většími koly. Snažme se proto zajistit, aby zkoumané válce různých poloměrů měly shodnou hmotnost a podélný rozměr, hmotnost vlaku se také příliš nezmění, když bude mít trochu větší kola.



Obr. 3. Schéma experimentu

Pravděpodobně v domácích podmínkách nejsnáze a nejlépe proveditelný způsob měření, který také většina řešitelů použila, je následující.

Válec pouštíme z určité výšky h z nakloněné roviny. Válec na nakloněné rovině získá kinetickou energii a dále se valí již po vodorovné podložce pokryté nějakým měkkým materiálem. Vlivem valivého odporu se na vodorovné podložce v určité vzdálenosti zastaví. Potenciální energie válce se snížila o mgh a válec opět stojí, a tedy síla valivého odporu vykonala práci rovnou rozdílu potenciálních energií. Práce síly F_v tedy je

$$F_\mathrm{v} s = mgh\,. \tag{2}$$

Nejlépe je měkkým materiálem pokrýt i nakloněnou rovinu. Vyhneme se tak přemýšlení nad tím, jak velký je valivý odpor pro materiál roviny a zda ho můžeme zanedbat. Jakou práci vykoná F_v při cestě válce po nakloněné rovině? Můžeme uvažovat i obecně zprohýbanou rozjezdovou dráhu. Předpokládejme, že síla $F_\mathrm{v} = \mu N$, přičemž N je složka tíhové síly ve směru kolmém na podložku. Práce síly F_v na každém maličkém úseku dráhy $\mathrm{d}l$ je pak

$$\mathrm{d}W = \mu mg \cos\alpha \,\mathrm{d}l\,,$$

kde α je sklon elementu dráhy $\mathrm{d}l$. Ovšem výraz $\cos\alpha\,\mathrm{d}l$ je přesně roven průmětu úseku dráhy $\mathrm{d}l$ do vodorovné osy. Práce síly F_v vykonaná na rozjezdové dráze je tedy

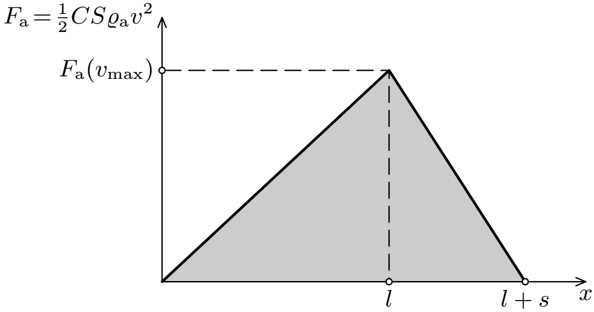
$$W = \mu mgl\,,$$

kde l je průmět rozjezdové dráhy do vodorovné roviny. Nedomýšleli jsme zvýšené přitlačení válce v důsledku odstředivé síly při zakřivení rozjezdové dráhy. Ale v případě, že naše rozjezdová dráha má jen malý sklon a výšku a není moc divoká, nemusíme se předešlými úvahami vlastně vůbec zaobírat a řekněme, že nám touto nejasností vznikne chyba maximálně 2 cm.

Můžeme zanedbat odpor vzduchu? Pro naše konkrétní uspořádání, jehož parametry jsou uvedeny dále, odpor změní výsledky o několik procent, a má tedy již cenu se jím zabývat a provést korekci na odpor vzduchu. Síla odporu vzduchu je přibližně dána

$$F_\mathrm{a} = \tfrac{1}{2} C S \varrho_\mathrm{a} v^2\,,$$

kde $S = 2rb$ je průřez válce délky b, ϱ_a hustota vzduchu, v rychlost válce a $C \approx 1$ je koeficient odporu vzduchu pro těleso tvaru válce. Kvadrát maximální rychlosti, kterou válec v ideálním případě dosáhne, je $v_\mathrm{max}^2 = 2gh/(1 + J/mr^2)$, kde J značí moment setrvačnosti válce.



Obr. 4. Závislost velikosti odporové síly vzduchu na ujeté vzdálenosti

Když válec zrychluje na rozjezdu, kvadrát rychlosti v podstatě lineárně roste s uraženou dráhou, a když válec naopak zpomaluje, v^2 lineárně klesá s uraženou dráhou. Práce vykonaná odporem vzduchu je rovna obsahu plochy pod křivkou závislosti F_a na poloze. Plocha pod touto křivkou je podle předešlé věty vlastně trojúhelník a práci W_a vykonanou odporem vzduchu na dráze $L = l + s$ lze odhadnout výrazem

$$W_a = \tfrac{1}{2}F_a(v_{max})L\,.$$

Bohužel odpor vzduchu je ošemetná věc a kupříkladu koeficient C závisí na mnoha věcech, dále F_a působí ve skutečnosti na dráze $l/\cos\alpha + s$, a proto odhadujeme chybu určení W_a až na 30 %. Význam odporu vzduchu by bylo možno snížit zvýšením hmotnosti válců.

Můžeme si být jisti, že máme vodorovnou podlahu? Podlaha by neměla mít větší stoupání než 1 mm na metr, což je zhruba i sklon rozlišitelný lepší vodováhou. Přesto jsme radši provedli měření i pro opačný směr kutálení a měření vyšlo v podstatě stejně a sklonem podlahy se dále zabývat nebudeme.

Válec se tedy zastaví po uražení dráhy, která splňuje

$$mgh = F_v L + W_a = \left(\mu mg - \frac{F_a(v_{max})}{2}\right) L\,.$$

Odtud

$$\mu = \frac{\xi}{r} = \frac{h}{L} - \frac{F_a(v_{max})}{2mg}\,. \tag{3}$$

Pro vyhodnocení členu μ a ξ užijeme tento vztah.

Vidíme, že třeba ξ závisí na veličinách r, h, L atd., které mají však svoje vlastní chyby σ_r, $\sigma_h, \ldots$ Jak na jejich základě rozumně odhadneme chybu ξ? Dejme tomu, že bychom měli odhadnout chybu veličiny y, kterou vypočteme jako funkci $f(x_1, x_2)$ dvou jiných veličin, jejichž chyby jsou σ_{x_1}, σ_{x_2}. Potom kvadrát chyby veličiny y vypočteme

$$\sigma_y^2 = \left(f(x_1, x_2) - f(x_1 + \sigma_{x_1}, x_2)\right)^2 + \left(f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 + \sigma_{x_2})\right)^2\,.$$

Zcela stejně postupujeme, i když y závisí na větším počtu veličin, a to nám dává recept na odhad chyby ξ.

Rozjezdovou dráhu jsme zhotovili z mírně ohnutého plechu, aby přechod na vodorovné valení byl hladký. Rovněž startovní bod leží na prakticky vodorovném úseku rozjezdové dráhy, abychom se nemuseli bát, že těžiště různě velkých válců bude umístěno na počátku do různých výšek oproti konečné poloze těžiště.

Slepili jsme dvě stejné karimatky a celou dráhu válce jimi překryli. Karimatky je třeba dobře napnout a poté kupříkladu přitížit těžkými prkny. Jako válce jsme použili plastové vodovodní trubky různých průměrů. Kousky trubek délky $b = 10\,\mathrm{cm}$ jsme doplnili betonem (přesněji směsí vody a cementu) tak, aby měly všechny válce hmotnost 80 g. Válce jsme vážili na kuchyňských vahách a jejich hmotnost se liší maximálně o 2 g. Při výpočtu odporu vzduchu potřebujeme znát hodnotu výrazu $\mathrm{J/m{\cdot}r^2}$. Pro homogenní válec nabývá hodnoty 1/2, pro tenkostěnnou trubku téměř hodnoty 1. Naše válce jsou tvořeny trubkou a homogennímválečkem z betonu a moment setrvačnosti celého válce je dán součtem momentů těchto dvou částí. Ze znalosti hmotnosti samotné trubky, samotného válečku z betonu, vnějšího a vnitřního průměru trubky moment J snadno vypočteme.

Výsledky měření

Valivý odpor jsme měřili celkem pro šest válců, každý válec jsme nechali valit desetkrát a pouštěli jsme je z výšky $h = (5{,}7 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}$. Průměr válce jsme změřili posuvným měřidlem a chybu poloměru potom odhadujeme na 0,1 mm.

Pro přehlednost uvádíme jen průměrnou délku uražené dráhy L a její směrodatnou odchylku σ_L Z uražené dráhy vypočteme dle (3) hodnotu koeficientu μ a rameno valivého odporu ξ.

Tabulka výsledků měření

r[mm]	$\bar{L}$[cm]	$\sigma_L[cm]$	$\mu \cdot 10^2$	$\sigma_\mu \cdot 10^2$	ξ[mm]	σ_ξ[mm]
9,9	236	2	2,34	0,09	0,23	0,01
12,7	256	3	2,13	0,09	0,27	0,01
16,0	281	3	1,91	0,08	0,31	0,01
20,1	304	4	1,73	0,08	0,35	0,02
24,9	329	4	1,57	0,08	0,39	0,02
31,6	358	2	1,41	0,08	0,44	0,03

Pokud nás nezajímá ani tolik přesná hodnota μ či ξ jako spíše, zda se tyto hodnoty mění při změně poloměru válce, pak pro tento účel můžeme při počítání chyby vynechat vliv nepřesnosti h, protože se h pro jednotlivá měření vůbec neliší a nepřesnosti pak budou menší než uvedené.

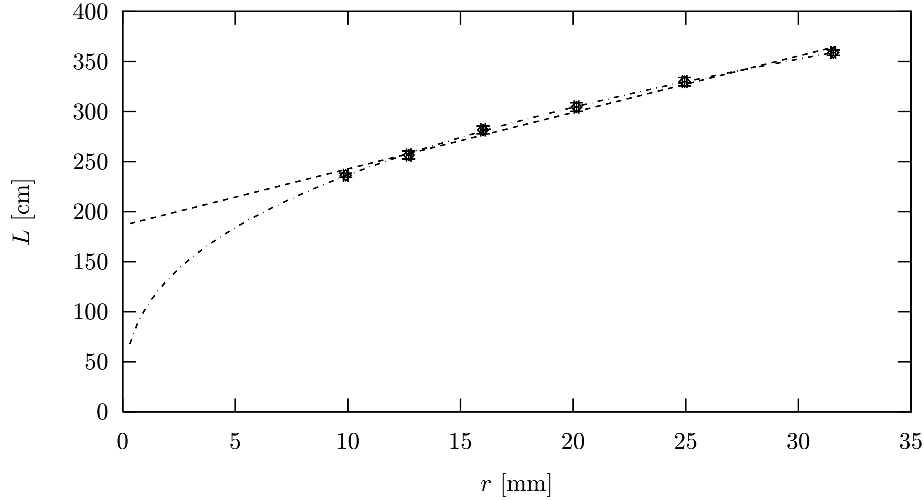
Větší válce se dokutálejí dál a μ s poloměrem klesá. Ovšem z naměřených hodnot je zřejmé, že rameno valivého odporu ξ v našem případě s poloměrem r roste. Větší válce se nedokutálejí tak daleko, jak bychom podle teoretického předpokladu čekali.

V grafech je vynesena závislost ξ na poloměru válce r a závislost uražené dráhy L na r. Vidíme, že hodnotami ξ lze proložit přímku. Můžeme se ale pokusit hodnoty proložit jinou závislostí. Je rozumné, aby tato závislost šla k nule, když poloměr jde k nule, a aby rameno valivého odporu nebylo nikdy větší než poloměr válce. Naopak pro velká r očekáváme, že ξ bude v podstatě konstantní v souladu s teoretickým předpokladem. Potom naměřené hodnoty lze proložit nějakou konkávní křivkou, jak jsme se o to pokusili v grafu. Tato proložená závislost ale možná dává pro malé r až příliš malé hodnoty ξ.

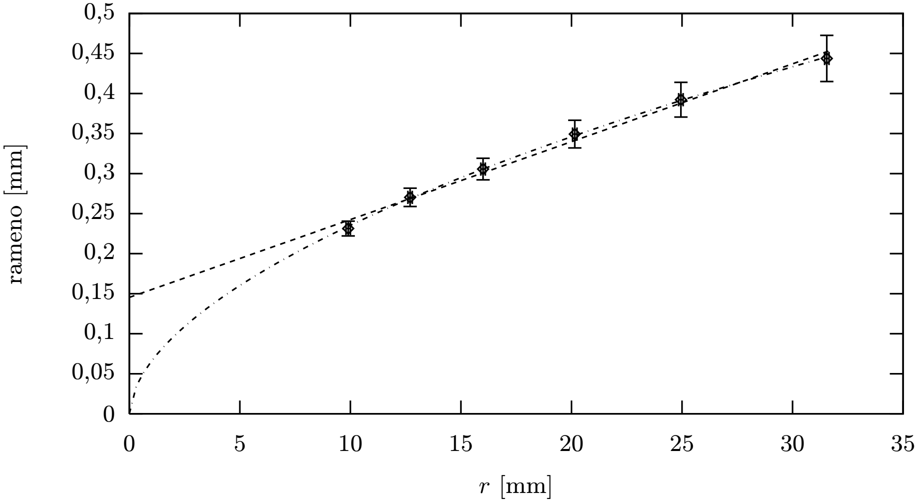
Závěr

Domníváme se, že zjištěná nekonstantnost ramena valivého odporu ξ při změně r je dána nevyzpytatelností povrchu karimatky a podobných měkkých povrchů. Rameno ξ v našem případě pro větší válce vychází zhruba půl milimetru. V technicky významném případě valení železného kola po železe je ξ asi desetkrát menší a v případě kuličky v kuličkovém ložisku až stokrát menší. Je pravděpodobné, že pro velké poloměry válců, kdy již bude velikost deformace karimatky malá vůči r, bude ξ skutečně přibližně konstantní. Oproti teoretickým předpokladům navíc můžeme zjistit, že rameno ξ závisí třeba i na hmotnosti válce.

Abychom však mohli dělat významnější závěry, bylo by třeba měření provést na mnoha různých površích.



Obr. 5. Závislost ujeté dráhy na poloměru válce



Obr. 6. Závislost ramena valivého odporu na poloměru válce

Další měření

Pokoušeli jsme se také změřit valivý odpor trochu jiným způsobem. Měřili jsme rozdíl doby, za kterou válec urazí 1 m po nakloněné rovině, když se v jednom případě valí po tabulce skla a v druhém případě po tabulce skla překryté karimatkou. (Nebo lze měřit jen dobu valení po nakloněné karimatce a ze znalosti sklonu poté vyhodnotit valivý odpor.) Měření byla ovšem zatížena příliš velkou chybou a touto metodou jsme nezískali žádné rozumné výsledky. (Rozmyslete si, v čem tento způsob může být horší než předešlý.)

Aby však naše snaha nevyšla úplně naprázdno, popišme aspoň, jak je možné si amatérsky sestrojit stopky, které automaticky změří dobu, za kterou válec ujede určitou vzdálenost.

Potřebujeme počítač s paralelním portem a operačním systémem Microsoft Windows 98 a starší nebo MS-DOS. (Linuxáři jistě vědí, jak něco podobného provést na Linuxu.) Potom si pořídíme Turbo Pascal a koupíme si samčí konektor k paralelnímu portu[1].

Paralelní port s 25 kolíky má pět vstupních kolíků. Na vstupní kolíky, jejichž čísla jsou 10, 11, 12, 13 a 15, lze přiložit logickou nulu nebo logickou jedničku a tuto hodnotu potom počítačem přečíst. Logická nula je napětí menší než cca 2 V oproti zemi a logická jednička napětí větší než cca 3 V oproti zemi. Na portu je zároveň několik kolíků značených GND s čísly 18 až 25, které jsou propojeny rovnou se zemí, a na těchto kolících je tedy vždy z definice 0 V.

Napětí na vstupních kolících je možno přečíst a uložit do proměnné příkazem `vstup := port[$379]`. V proměnné `vstup` najdeme číslo v rozmezí 0 až 255. Toto číslo je dekadickým zápisem osmibitového binárního čísla. Binární číslo složené z nul a jedniček říká, že na určitých kolících byla v momentě čtení logická jednička a jinde logická nula. Číslo $379 je adresa portu a dolar říká, že to je číslo v hexadecimálním tvaru. Adresa může být pro různé počítače různá, ale obvykle paralelnímu portu patří adresa $378 a několik následujících. V případě našeho počítače je při spuštění přečtená hodnota portu explicitně 255, tedy jakoby všechny kolíky byly připojeny ke kladnému napětí. Když tedy kolík připojíme na nulové napětí, lze tuto změnu zaznamenat.

Nyní si vyrobíme stykač z dvou plátků alobalu. Připájíme drát k některému ze vstupních kolíků paralelního portu (nepájíme samozřejmě přímo na port, ale na koncovku, kterou jsme si pořídili) a druhý drát ke kolíku GND. Izolepou připevníme každý drát k jednomu plátku alobalu. Nyní když váleček přejíždí stykač, plátky se dotknou a na přečteném portu zaznamenáme na určitém kolíku logickou nulu. Tím můžeme zahájit měření času, to znamená uložit si do proměnné aktuální čas, k čemuž slouží funkce `gettime`. Přechodem válce přes druhý stykač můžeme měření času ukončit, tzn. opět zjistíme aktuální čas, předešlý čas odečteme, a máme tudíž stopky.

Je potřeba si s tím maličko pohrát, ale při troše snahy to funguje a jsme schopni měřit s přesností na milisekundy.

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás měřila podobně, jako bylo uvedeno, a vesměs všem vyšlo, že se dráha válce zvětšuje s rostoucím poloměrem, tedy že μ klesá s r. Výsledky velmi závisí na vybraném povrchu a materiálu válce.

Ján Bogár válec připevnil na nit a nechal táhnout elektromotorkem s konstantními otáčkami. Mezi motorek a válec ještě umístil siloměr. Měřil tedy sílu potřebnou k udržení válce v rovnoměrném pohybu. *Zuzka Chlebounová* zase měřila, jak moc je nutné naklonit podložku, aby se válec dal do pohybu.

---

1) Všemožné elektrosoučástky seženeme třeba v pražských obchodech GES nebo GME.

Vymysleli jste nemálo způsobů, jak si pořídit válce různých poloměrů. Třeba *Zuzka Chlebounová* vylila papírové formy těstem a poté upekla. *Terka Jeřábková* vymazala trubky indulonou a naplnila sádrou. Ještě než sádra úplně zatuhne, je možné sádrové válce z trubky vytáhnout. Jiní vyráběli z modelíny, papíru, kouleli zavařovací sklenice a podobně. *Zuzka Dočekalová* navrhuje pojmout za válec toaletní papír, protože lze pěkně spojitě měnit jeho poloměr. Jako povrch dráhy posloužil většinou koberec či podobná měkká podložka.

Mimo jiné nás potěšil i *Jakub Michálek*, protože pěkně diskutoval vliv odporu vzduchu.

Marek Scholz
`mara@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.