

21. ročník, úloha IV. 2 ... zahřívání koule (4 body; průměr 3,63; řešilo 38 studentů)

V této úloze budeme studovat vliv teploty na moment setrvačnosti kovového tělesa. Pro tento účel necháme tělesem procházet pevnou osu, kolem které se bude otáčet. Jak se změní moment setrvačnosti J tělesa při zvýšení jeho teploty o ΔT , je-li koeficient teplotní roztažnosti kovu α . Pokud si nevíte rady, zkuste uvažovat kouli nebo válec.

V Havránkovi se úloha líbila Pavlu Motlochovi.

Pro vyřešení úlohy nám bude stačit znalost několika základních vztahů. Moment setrvačnosti J libovolného tuhého tělesa vůči pevné ose se definuje vztahem

$$J = \int r^2 dm, \quad (1)$$

kde r je vzdálenost elementu hmotnosti dm od osy otáčení. Změníme-li teplotu tělesa o ΔT , změní se vzdálenost libovolného bodu (tedy elementu hmotnosti dm) od pevné osy z původní vzdálenosti r na r' . Moment setrvačnosti zahřátého tělesa lze zapsat jako

$$J' = \int (r')^2 dm. \quad (2)$$

Předpokládáme-li, že zkoumané těleso je izotropní (materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti), platí mezi vzdálenostmi r a r' vztah

$$r' = r(1 + \alpha\Delta T), \quad (3)$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti.

Z (3) dosadíme do (2) a upravíme užitím vztahu (1)

$$J' = \int r'^2 dm = \int r^2(1 + \alpha\Delta T)^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 \int r^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 J.$$

Moment setrvačnosti se tedy změní o

$$\Delta J = J' - J = (2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2)J.$$

Protože koeficient teplotní roztažnosti α nabývá řádově hodnot 10^{-5} K^{-1} , můžeme kvadratický člen oproti lineárnímu zanedbat

$$\Delta J \approx 2\alpha\Delta T J.$$

Velmi nás potěšilo, že úlohu správně vyřešili téměř všichni řešitelé. Jen někteří uvažovali definici momentu setrvačnosti v součtovém tvaru

$$J = \sum_i m_i r_i^2,$$

který je však vhodný pouze pro popis soustav s konečným počtem hmotných bodů. Výsledek, který se dostane použitím tohoto vztahu, je samozřejmě stejný, ale z formálního hlediska je vhodnější použít tvar (1).

Daniel Šimsa

daniel@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.