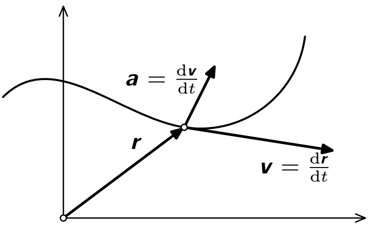
21. ročník, úloha I . 4 ... *zachraňte pivo* *(4 body; průměr 3,14; řešilo 44 studentů)*

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R. Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbít co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít.

Vymyslel Marek Pechal při jízdě narvanou 112kou.

Keďže nie každý má rád pivo, úlohu si rýchlo zredukujeme na hľadanie pohybu automobilu takého, aby maximálne zrýchlenie počas tohto pohybu bolo čo najmenšie. Máme pevne zadanú trajektóriu pohybu $\boldsymbol{r}(s)$ a počiatočnú veľkosť rýchlosti v. Úlohou teda je nájsť funkciu prejdenej dráhy $s(t)$ v závislosti na čase takú, aby jej derivácia (čo je veľkosť rýchlosti) v počiatočnom čase $t_0 = 0$ bola rýchlosť v, teda $s'(0) = v$, ďalej takú, že $s(0) = 0$ (to si tiež volíme), a nakoniec, čo je najdôležitejšie, aby maximálne zrýchlenie auta počas pohybu bolo čo najmenšie.

Je potrebné si uvedomiť, že $s''(t)$ nie je všeobecne zrýchlenie pohybu. Prečo? Funkcia $s(t)$ pohyb plne neurčuje. Je to len funkcia prejdenej dráhy a nehovorí nič o „tvare“ trajektórie. Preto ani nemôžme čakať, že z nej dokážeme vypočítať zrýchlenie, keďže zrýchlenie je tak veľmi závislé práve na tvare trajektórie. Však si len predstavte odstredivú silu, ktorá na vás pôsobí v autobuse v zátačke a ktorá vás možno neraz zhodila na zem, a práve tá je dôsledkom zrýchlenia spôsobeného nie tým, že autobusár šlapol na plyn, ale tým, že skrútil volant! Zrýchlenie je tak isto ako poloha či rýchlosť vektor a dostaneme ho tak, že dva krát zderivujeme polohový vektor ako funkciu času. Čiže



Obr. 1. Rychlost a zrychlení hmotného bodu

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}(s(t))}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Ak tak spravíte (pričom využijete, že poznáte „polomer otáčania“) a vyjadríte si veľkosť tohto vektora, dostanete celkom zrejmý vzťah

$$a = \sqrt{s''^2(t) + \left(\frac{s'^2(t)}{r}\right)^2}\,, \tag{1}$$

ktorý vyjadruje fakt, že zrýchlenie má vo všeobecnom prípade dve zložky – tzv. tečné zrýchlenie, vyjadrujúce to, či autobusár šlapol na plyn (či na brzdu), a normálovú zložku, súvisiacu s pohybom po zakrivenej trajektórii. V našom prípade je v prvej časti pohybu, keď sa blížime k zákrute po rovnej ceste, druhý člen nulový (r ide k nekonečnu) a naopak, ak sa pohybujeme rovnomerne po kružnici, tak vzťah (1) dá známy vzorec pre dostredivé zrýchlenie (s polomerom otáčania r).

Vráťme sa však k úlohe. Ak sa na úlohu pozeráme viac matematicky, môže sa nám javiť ako neľahká – hľadáme funkciu $s(t)$, ktorá je oproti iným funkciám z celej škály funkcií v niečom lepšia – ak počítame zrýchlenie jednoducho dosadením do vzorca (1) a nakoniec nájdeme to maximálne, tak je vždy menšie ako keby sme zobrali hocictorú inú funkciu. Ako takúto úlohu riešiť?

V zásade pôjde o to, že síce hľadať jednu najlepšiu funkciu je ťažké, ale povedať o funkcii, že najlepšou nie je, až také nemožné nebude, keďže stačí nájsť ľubovolnú funkciu, ktorá je lepšia! Zoberme si teda na mušku skupiny funkcií s nejakou vlastnosťou a snáď sa nám podarí v každej skupine vylúčiť čo najviac funkcií a úloha sa potom môže značne zjednodušiť.

Ak by sa auto pohybovalo tak, že dorazí k zátačke s nejakou rýchlosťou $v_0 \leq v$, tak tvrdíme, že nemôže byť výhodnejší pohyb ako ten, keď vodič v zátačke ($s > d$) nešlape na plyn a nebrzdí, teda $s''(t) = 0$, a keď od počiatku až po začiatok zátačky ($0 \leq s \leq d$) sa vodič pohybuje s rovnomerným zrýchlením. Vzorec (1) nám potom určí veľkosť zrýchlenia v zátačke $a_2 = v_0^2/R$ a pred zátačkou[1] $a_1 = (v^2 - v_0^2)/2d$. Prečo neexistuje lepší pohyb pri danom v_0?

Ak by vodič niekde v zátačke dupol na plyn (alebo pribrzdil), tak v tomto okamihu bude zrýchlenie (podľa vzorca (1)) určite väčšie, ako keby šiel rovnomerne. To isté platí i pre pohyb pred zátačkou: Ak by sa vodič rozhodol, že bude spomaľovať so zrýchlením nutne menším ako a_1, tak sa mu zjavne nepodarí dobrzdiť na rýchlosť v_0 na začiatku zátačky. Bolo by to naozaj proti zdravému rozumu, ak by sme s menším zrýchlením ubrzdili auto skôr ako s väčším! Ešte ošetríme patologický príklad, že by vodič pred zátačkou svoju rýchlosť zvýšil, tj. dupol na plyn. V tomto prípade je úplne zjavné, že ak by sa vodič nakoniec umúdril a začal brzdiť (znova so zrýchlením menším či rovným a_1), tak by to už neubrzdil. Takže vďaka týmto úvahám sme došli k záveru, že pohyb, kde vodič najskôr rovnomerne spomaľuje a v zátačke nerobí nič, dá pri danom v_0 najmenšie maximálne zrýchlenie z celej škály rôznych pohybov jednak v prvej časti pohybu do zátačky, ako aj v zátačke. To ale znamená, že naozaj neexistuje pohyb, pri ktorom by vodič dosiahol menšie maximálne zrýchlenie počas celého pohybu a zároveň do zátačky vošiel rýchlosťou v_0. Keby náhodou taký existoval, tak by nutne jeho maximálne zrýchlenie muselo byť menšie ako jedno zo zrýchlení a_1 a a_2 a teda i oba maximálne zrýchlenia tohto pohybu v časti do zátačky a v zátačke by museli byť menšie ako aspoň jedno z a_1 a a_2, čo ale nastať nemôže.

Existuje nejaká rýchlosť, s ktorou keď rozumne vojdeme do zátačky, taká, že pri všetkých ostatných možných rýchlostiach bude maximálne zrýchlenie zodpovedajúce danému pohybu vždy väčšie? Odpoveď môžme nájsť celkom ľahko, keďže pre každú v_0 vieme nájsť prislúchajúce minimálne maximálne zrýchlenie, ktoré vieme dosiahnúť. Toto zrýchlenie je práve to väčšie číslo z a_1 a a_2. Ešte raz si napíšme, čomu sa tieto zrýchlenia rovnajú

$$a_1 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2d}, \quad a_2 = \frac{v_0^2}{R}.$$

Všimnime si, že a_1 pre v_0 idúce od 0 po v klesá až dosiahne nulu a a_2 naopak z nuly stúpa nahor. To ale znamená, že to väčšie zrýchlenie je najmenšie vtedy, keď sa zrýchlenia rovnajú. Rovnosť zrýchlení nastane pre

$$v_0 = v\sqrt{\frac{R}{R + 2d}}.$$

To sa ale môžme len a len tešiť! Našli sme dokonca práve jeden pohyb, ktorý je lepší ako všetky ostatné. Len samozrejme ak uvažujeme, že auto do zákruty vôbec dorazí dokonca s rýchlosťou $v_0 \leq v$. No týchto prípadov sa zbavíme už ľahko. Ak by auto dorazilo do zátačký s rýchlosťou $v_0 > v$, ľahko sa presvedčíme, že jeho zrýchlenie v zátačke bude určite väčšie ako a_2 v prípade nášho nájdeného pohybu. Podobne ak do zátačky vôbec nedorazí, tak určite niekde vo vzdialenosti $s < d$ od začiatku zastane. Zrejme by mohol svoje spomalovanie trocha zmierniť takým spôsobom, že by zabrzdil presne na začiatku zátačky. No to sme už ve vyšetrenom prípade, o ktorom vieme, že existuje lepší.

[1]) Keďže sa zrýchluje rovnomerne a zrýchli sa z rýchlosti v na v_0, priemerná rýchlosť bude $(v + v_0)/2$, čiže dráhu d prejde za čas $t = 2d/(v + v_0)$ a zrýchlenie už ľahko dopočítame zo vzorca (1), tj. $a_1 = |s''|$.

Takže konečne môžme prehlásiť, že pohyb taký, že vodič rovnomerne spomaluje so zrýchlením

$$a = \frac{v^2}{R + 2d}$$

a v zátačke udržiava zodpovedajúcu rýchlosť konštantnú, spôsobí najmenšie maximálne zrýchlenie zo všetkých možných pohybov.

Úlohu sme samozrejme mohli riešiť viacej intuitívne (no i teraz sme sa niekedy na intuíciu spoliehali) a možno niektoré veci toľko neodôvodňovať, ale chceli sme byť poriadnejší a pri našich dôkazoch i matematickejší. To, či sa nám to podarilo a či to malo význam ponecháme zhodnotiť vám.

Pavol Pšeno
semo@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.