

Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou autorská řešení první série úloh společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmkoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou.

Vaši organizátoři



Zadání III. série



Termín odeslání: 21. ledna 2008

Úloha III.1 ... Angličani a Skoti

Mladý Malcolm MacDonald ze Skotska odjel studovat na univerzitu v Oxfordu.

Maminka se ho po prvním měsíci pobytu na kolejkách táže po telefonu: „Tak co, jak to jde? Co škola? Co koleje?“

„Škola je v pohodě, ale koleje moc ne. Ti Angličani jsou neskutečně hluční lidé. Na pokoji vlevo ode mě pořád někdo mlátí hlavou do zdi, napravo zase někdo celou noc řve a ječí.“

„Chudáčku. A jak to zvládáš s těmi hlučnými Anglány?“

„Nic si z toho nedělám. Jen tak tiše stojím v pokoji a hraju si na dudy.“

Předmětem této úlohy je, abyste odhadli, jak by se změnila rychlost rotace Země, kdyby Angličani a Skoti začali jezdit vpravo místo vlevo.

Úloha III.2 ... výtah až do nebe

Určete, jaké fyzikální vlastnosti musí mít materiál závěsného lana výtahu, který spojuje povrch Země a oběžnou geostacionární dráhu. Je vůbec takový materiál na Zemi dostupný?

Úloha III.3 ... hopsání po nakloněné rovině

Malou kuličku hodíme vodorovně na nakloněnou rovinu. Kulička po ní začne poskakovat a po N odrazech dopadne kolmo k povrchu nakloněné roviny (viz obr. 1). Jaký je úhel α nakloněné roviny? Předpokládejte, že se kulička odráží dokonale pružně, rotaci kuličky neuvažujte.



Obr. 1. Příklad trajektorie kuličky pro $N = 4$

Úloha III.4 ... částice na poli

Mějme elektrostatické pole neměnné v čase. Do toho pole vkládáme na stejné místo nabitou částici s nulovou počáteční rychlostí. Pečlivě sledujeme, jak se částice pohybuje, a zaznamenáváme si její trajektorii. A co nás překvapí – trajektorie částice nezávisí na její hmotnosti. Dokážete to vysvětlit?

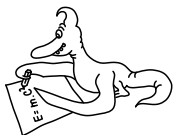
Úloha III.P ... příliv a odliv

Příliv a odliv jsou způsobeny slapovými silami, tj. především gravitační silou Měsíce. Příliv se opakuje každých 12 hodin a 25 minut, nicméně na zeměkouli pozorujeme vždy dva přílivy na opačných stranách zeměkoule. Tzn. jeden příliv oběhne Zemí za dvojnásobek doby, tj. asi 25 hodin. Tudíž na rovníku o délce 40 000 km se příliv musí pohybovat přibližně rychlostí $40\,000/25 \text{ km/h} = 1\,600 \text{ km/h}$. To je dokonce více než rychlost zvuku ve vzduchu.

Ze zkušenosti však víme, že voda v moři touto rychlostí neproudí, neboť lodě nám vozí banány z Kostariky atd. Je tedy nějaká chyba ve výpočtu, nebo je potřeba výsledek interpretovat jinak?

Úloha III.E ... zkoumáme pohyb Slunce

Změřte co nejpřesněji výšku Slunce nad obzorem v pravé poledne a dobu od východu středu slunečního disku do jeho západu. Odvážlivci se mohou pokusit vypočítat teoretickou délku dne a hodnoty srovnat a okomentovat případný nesoulad.



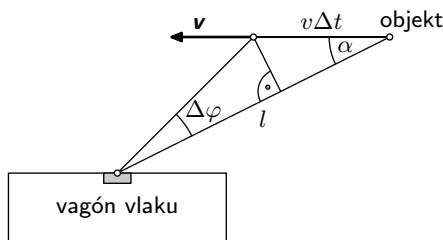
Řešení I. série

Úloha I. 1 ... míhání krajiny (3 body; průměr 2,46; řešilo 56 studentů)

Prozkoumejte skutečnost, že se při pohledu z jedoucího vlaku vzdálenější objekty na horizontu zdánlivě pohybují po okně pomaleji, zatímco sloupy u trati se jen tak míhnou. Jak závisí tato zdánlivá rychlost pohybu krajiny na její vzdálenosti od cestující veřejnosti?

Cestou domů napadla úloha Tomáše Jirotku.

Nejprve je důležité si uvědomit, že při sledování svého okolí pozorujeme *úhlové veličiny* (zorný úhel, úhlová rychlost, úhlové zrychlení...). Uvažujme nyní situaci jedoucího vlaku v soustavě spojené s vlakem. Vlak tedy stojí (zanedbáváme drobné vychylování jednotlivých vozů) a jeho okolí se pohybuje rychlostí v . Sledujeme objekt ve vzdálenosti l , který se vůči nám pohybuje rychlostí v . Úhel, který svírá vektor rychlosti se spojnicí vlaku s objektem, označme α . Pro úhlovou rychlost objektu na obzoru poté dostáváme vztah



Obr. 2. Zdánlivý pohyb krajiny

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left[\arctg \left(\frac{v\Delta t \sin \alpha}{l - v\Delta t \cos \alpha} \right) \right].$$

Jelikož se při pohybu obecně úhel mezi rychlostí a spojnicí mění, musíme uvažovat nekonečně malé časové úseky, proto v limitě dostáváme

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\arctg \left(\frac{v\Delta t \sin \alpha}{l - v\Delta t \cos \alpha} \right) \right] = \frac{v \sin \alpha}{l}.$$

Zde již vidíme hledanou závislost, zdánlivá rychlost objektů je nepřímo úměrná vzdálenosti od cestující veřejnosti. V obecném případě je též úměrná sinu úhlu mezi vektorem rychlosti a spojnicí s pozorovatelem ve vlaku.

Lukáš Malina

lukasm@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 2 ... zachraňte bublinu (5 bodů; průměr 2,08; řešilo 38 studentů)

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina?

Z hloubi duše vybublalo Janovi Lalinskému.

Vypuštěnou bublinu o objemu V žene nahoru vztlaková síla $F_{vz} = V\rho_k g$ a proti ní působí odpor prostředí spolu s tíhou F_G . Pro odporovou sílu použijeme Newtonův vztah

$$F_{\text{odp}} = \frac{1}{2} C S \rho_k v^2.$$

Bublinka brzděná touto silou dosáhne velice brzy ustálené rychlosti dané (pro její okamžité rozměry) rovnováhou

$$F_{\text{odp}} + F_G = F_{\text{vz}},$$

$$\frac{1}{2} C S \rho_k v^2 + n M_m g = V \rho_k g,$$

kde n značíme látkové množství a M_m molární hmotnost vzduchu ($\doteq 29$ g/mol).

Není žádným překvapením, že velikost bubliny se bude během stoupání měnit, protože se mění okolní tlak. Vztah mezi tlakem a hustotou (objemem) nějaké látky popisuje její stavová rovnice. V extrémních podmínkách Mariánského příkopu musíme použít van der Waalsovu rovnici, protože vzduch, byť daleko za kritickým bodem, tu ztrácí vlastnosti ideálního plynu. Platí

$$\left(p + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right) \cdot \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT,$$

kde $a = 0,14 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}$ a $b = 3,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Tlak p v hloubce h je $p(h) = h \rho_k g + p_{\text{atm}}$, nicméně atmosférický tlak lze bez obav zanedbat (chyba tímto zanedbáním způsobená je v řádu desítek sekund).

Chtěli bychom nyní ze stavové rovnice vyjádřit V jako funkci hloubky h , což je dost obtížné, a hlavně výsledek by byl kvůli složitosti dále nepoužitelný. Neuděláme ovšem velkou chybu, když člen $a(n/V)^2$ prohlásíme za mnohem menší než p a z našich úvah ho vypustíme. Zároveň předpokládáme, že teplota bubliny T bude konstantní a rovna přibližně 4°C , kterou očekáváme v takových hloubkách (je to teplota nejhustší vody). Pak

$$V = nb \left(1 + \frac{RT}{bh \rho_k g} \right) = nb \nu(h),$$

kde jsme pro úsporu místa zavedli funkci hloubky $\nu(h)$.

Další problém je otázka tvaru bubliny. V literatuře¹ se lze dočíst², že malé bublinky zachovávají přibližně kulový tvar, zatímco větší bubliny se mohou různě protahovat či zplošťovat v závislosti na rychlosti obtékání. Také samotné stoupání se neděje po přímce, nýbrž po spirále. My tu uvažujeme kulovou bublinu stoupající přímo vzhůru. Pak je $C \doteq 0,48$ a příčný průřez bubliny je roven

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi} \right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{9}{16} \pi n^2 b^2 \nu^2(h)}.$$

Ustálená rychlost stoupání tak (z výše uvedené rovnováhy sil) vychází

$$v = \sqrt{\frac{2g}{9\rho_k C}} \sqrt[6]{\frac{n}{\pi} \frac{\sqrt{b\nu(h)\rho_k - M_m}}{\sqrt[3]{b\nu(h)/4}}}.$$

Protože se rychlost s hloubkou mění, čas nezískáme jinak než integrací časového elementu $dt = dh/v(h)$ přes všechny hloubky od $H = 11$ km až k hladině. Tudíž

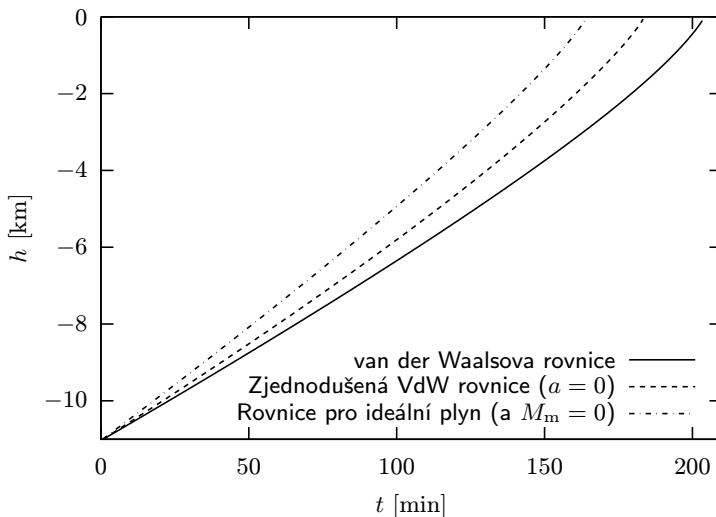
$$t = \int_0^H \frac{dh}{v(h)} = \sqrt[6]{\frac{9}{128} \frac{\pi}{n} \frac{\rho_k^3 C^3 b^2}{g^3}} \cdot \int_0^H \frac{\sqrt[3]{\nu(h)}}{\sqrt{b\nu(h)\rho_k - M_m}} dh.$$

¹⁾ <http://www.mae.cornell.edu/mingming/RecentResearch/3Dtracking/PF02.pdf>

²⁾ Někteří to odpozorovali v bazénu jako *Zuzka Dočekalová*.

Tento integrál nám stačí vypočítat numericky, což zvládne i lepší kalkulačka, natožpak čtenář letošního seriálu, a vyčíslíme-li i ostatní konstanty (hustotu mořské vody bereme $\rho_k = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), dostaneme

$$t \doteq \frac{1,1}{\sqrt[6]{n}} \cdot 10^4 \text{ s}\cdot\text{mol}^{1/6}.$$



Obr. 3. Graf závislosti $h(t)$ pro jednodolovou bublinku

Jednodolová bublina (pokud se po cestě nerozpadne) vyplave asi za 3 hodiny. Větší bublina poplave rychleji, menší pomaleji. Na přiloženém grafu je vynesena závislost okamžité hloubky bublinky na čase podle různých stupňů přiblížení při řešení této úlohy. Pokud bychom použili stavovou rovnici ideálního plynu a neuvažovali hmotnost vzduchu (proč?), dostali bychom asi 2,5 hodiny. Naopak pokud bychom postupovali podle nezjednodušené van der Waalovy rovnice, čas výstupu bubliny by se oproti uvedenému výpočtu přibližně o půl hodiny protáhl. V každém případě jsme získali jen dolní odhad času; netušíme, po jaké trajektorii bublinka ve skutečnosti poplave.

Jedna poznámka na závěr. Mnoho z vás použilo Stokesův viskózní odpor, tj. $F_{\text{odp}} = 6\pi\eta r v$, pak by ovšem ustálená rychlost bubliny byla příliš velká na zachování laminárního obtékání. Takový pohyb musí vyvolat turbulence, které bere v úvahu právě Newtonův vztah pro turbulentní odpor.

Jakub Benda

jakub@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 3 ... vážíme si Slunce (4 body; průměr 3,08; řešilo 38 studentů)

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočtete podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy.

K zahřátí mozků do nového ročníku FYKOSu zadal Pavel Brom.

Hmotnost Slunce určíme nejnázve z pozorování gravitačního působení Slunce na jeho oběžnice. Jelikož většina z vás dokáže odvodit třetí Keplerův zákon pro pohyb po kružnici, ukážeme si, že stejně platí i pro pohyb po elipse, a nakonec určíme samotnou hmotnost Slunce. V celém

řešení budeme značit hmotnost Slunce M a hmotnost hmotného bodu kolem Slunce obíhajícího pak m .

Označme si plošnou rychlost v_p , periodu oběhu T . Plocha elipsy je rovna πab (a je velikost hlavní poloosy, b pak velikost vedlejší). Z významu plošné rychlosti pak vyplývá, že

$$v_p T = \pi ab. \quad (1)$$

Potřebujeme vyjádřit plošnou rychlost. Moment hybnosti L hmotného bodu vzhledem ke středu centrální síly (Slunci) je konstantní (moment síly jakožto vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je nulový a zároveň je časovou derivací momentu hybnosti), tedy i jeho velikost $L = rmv \sin \alpha$ (α značí úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{v}). Výraz $rv \sin \alpha/2$ je konstantní a odpovídá plošné rychlosti v_p . Spojením posledních dvou rovnic dostáváme 2. Keplerův zákon, tedy že plošná rychlost

$$v_p = \frac{L}{2m}$$

je konstantní. Po dosazení do rovnice (1) získáme

$$LT = 2\pi mab. \quad (2)$$

Elipsa, po které těleso obíhá, se dá zapsat v polárních souřadnicích takto

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}.$$

Geometrický význam p je poměr mezi čtvercem velikosti malé poloosy a velikostí velké poloosy. Fyzikální význam je však ještě jiný, nicméně jeho kompletní odvození sahá za rámec tohoto výkladu³. Jedná se o vztah

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M}.$$

Ze zmíněných významů p plyne, že

$$L^2 = \frac{b^2}{a} Gm^2M.$$

Zbývá už jen dosadit do vztahu (2) a rovnici upravit na konečný tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Pro hmotnost Slunce platí

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}$$

a stačí již dosadit příslušnou periodu oběhu a velikost hlavní poloosy. Jelikož se nemusíme omezovat na planety obíhající přibližně po kružnicích, počítejme s Halleyovou kometou. Doba jednoho oběhu je 75,3 roku, její hlavní poloosa pak 17,3 AU. Po převedení na jednotky SI a dosazení vychází hmotnost Slunce

$$M = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

³⁾ Zájemcům jej samozřejmě můžeme zaslat (vychází ze zákona zachování mechanické energie), případně je uvedeno například v Havránkově *Klasické mechanice I.*, kapitola 4.3.

Navrhovali jste mnohé další metody, od těch jednodušších využívajících hustotu a objem, přes volné pády až po relativistické efekty. Nevýhodou většiny metod je jejich naprostá neproveditelnost, a i proto se jako nejlepší metoda jeví výše uvedená. Nicméně jsme uvítali všechny vaše návrhy a žádný nezůstal neohodnocen.

Kryštof Touška

krystof@fykos.mff.cuni.cz

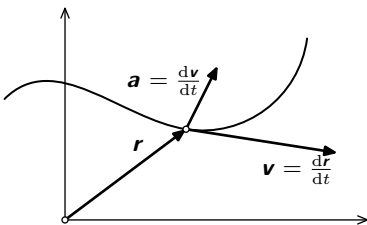
Úloha I. 4 ... zachraňte pivo (4 body; průměr 3,14; řešilo 44 studentů)

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R . Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbit co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít.

Vymyslel Marek Pechal při jízdě narvanou 112kou.

Keďže nie každý má rád pivo, úlohu si rýchlo zredukujeme na hľadanie pohybu automobilu takého, aby maximálne zrychlenie počas tohto pohybu bolo čo najmenšie. Máme pevne zadanú trajektóriu pohybu $\mathbf{r}(s)$ a počiatočnú veľkosť rýchlosti v . Úlohou teda je nájsť funkciu prejdenej dráhy $s(t)$ v závislosti na čase takú, aby jej derivácia (čo je veľkosť rýchlosti) v počiatočnom čase $t_0 = 0$ bola rýchlosť v , teda $s'(0) = v$, ďalej takú, že $s(0) = 0$ (to si tiež volíme), a nakoniec, čo je najdôležitejšie, aby maximálne zrychlenie auta počas pohybu bolo čo najmenšie.

Je potrebné si uvedomiť, že $s''(t)$ nie je všeobecne zrychlenie pohybu. Prečo? Funkcia $s(t)$ pohyb plne neurčuje. Je to len funkcia prejdenej dráhy a nehovorí nič o „tvare“ trajektórie.



Obr. 4. Rychlost a zrychlení hmotného bodu

Preto ani nemôžeme čakať, že z nej dokážeme vypočítať zrychlenie, keďže zrychlenie je tak veľmi závislé práve na tvare trajektórie. Však si len predstavte odstredivú silu, ktorá na vás pôsobí v autobuse v zátačke a ktorá vás možno neraz zhodila na zem, a práve tá je dôsledkom zrychlenia spôsobeného nie tým, že autobusár šlapol na plyn, ale tým, že skrútil volant! Zrychlenie je tak isto ako poloha či rýchlosť vektor a dostaneme ho tak, že dva krát zderivujeme polohový vektor ako funkciu času. Čiže

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}(s(t))}{dt^2}.$$

Ak tak spravíte (pričom využijete, že poznáte „polomer otáčania“) a vyjadríte si veľkosť tohto vektora, dostanete celkom zrejmy vzťah

$$a = \sqrt{s''^2(t) + \left(\frac{s'^2(t)}{r}\right)^2}, \quad (3)$$

ktorý vyjadruje fakt, že zrychlenie má vo všeobecnom prípade dve zložky – tzv. tečné zrychlenie, vyjadrujúce to, či autobusár šlapol na plyn (či na brzdu), a normálovú zložku, súvisiacu s pohybom po zakrivenej trajektórii. V našom prípade je v prvej časti pohybu, keď sa blížíme k zákrute po rovnej ceste, druhý člen nulový (r ide k nekonečnu) a naopak, ak sa pohybujeme rovnomerne po kružnici, tak vzťah (3) dá známy vzorec pre dostredivé zrychlenie (s polomerom otáčania r).

Vráťme sa však k úlohe. Ak sa na úlohu pozeráme viac matematicky, môže sa nám javiť ako neľahká – hľadáme funkciu $s(t)$, ktorá je oproti iným funkciám z celej škály funkcií v niečom

lepšia – ak počítame zrýchlenie jednoducho dosadením do vzorca (3) a nakoniec nájdeme to maximálne, tak je vždy menšie ako keby sme zobrali hociktorú inú funkciu. Ako takúto úlohu riešiť?

V zásade pôjde o to, že síce hľadať jednu najlepšiu funkciu je ťažké, ale povedať o funkcii, že najlepšou nie je, až také nemožné nebude, keďže stačí nájsť ľubovoľnú funkciu, ktorá je lepšia! Zoberme si teda na mušku skupiny funkcií s nejakou vlastnosťou a snaď sa nám podarí v každej skupine vylúčiť čo najviac funkcií a úloha sa potom môže značne zjednodušiť.

Ak by sa auto pohybovalo tak, že dorazí k zátačke s nejakou rýchlosťou $v_0 \leq v$, tak tvrdíme, že nemôže byť výhodnejší pohyb ako ten, keď vodič v zátačke ($s > d$) nešlape na plyn a nebrzdí, teda $s''(t) = 0$, a keď od počiatku až po začiatok zátačky ($0 \leq s \leq d$) sa vodič pohybuje s rovnomerným zrýchlením. Vzorec (3) nám potom určí veľkosť zrýchlenia v zátačke $a_2 = v_0^2/R$ a pred zátačkou⁴ $a_1 = (v^2 - v_0^2)/2d$. Prečo neexistuje lepší pohyb pri danom v_0 ?

Ak by vodič niekde v zátačke dupol na plyn (alebo pribrzdil), tak v tomto okamihu bude zrýchlenie (podľa vzorca (3)) určite väčšie, ako keby šiel rovnomerne. To isté platí i pre pohyb pred zátačkou: Ak by sa vodič rozhodol, že bude spomaľovať so zrýchlením nutne menším ako a_1 , tak sa mu zjavne nepodarí dobrzdiť na rýchlosť v_0 na začiatku zátačky. Bolo by to naozaj proti zdravému rozumu, ak by sme s menším zrýchlením ubrzdili auto skôr ako s väčším! Ešte ošetríme patologický príklad, že by vodič pred zátačkou svoju rýchlosť zvýšil, tj. dupol na plyn. V tomto prípade je úplne zjavné, že ak by sa vodič nakoniec umúdril a začal brzdiť (znova so zrýchlením menším či rovným a_1), tak by to už neubrzdil. Takže vďaka týmto úvahám sme došli k záveru, že pohyb, kde vodič najskôr rovnomerne spomaľuje a v zátačke nerobí nič, dá pri danom v_0 najmenšie maximálne zrýchlenie z celej škály rôznych pohybov jednak v prvej časti pohybu do zátačky, ako aj v zátačke. To ale znamená, že naozaj neexistuje pohyb, pri ktorom by vodič dosiahol menšie maximálne zrýchlenie počas celého pohybu a zároveň do zátačky vošiel rýchlosťou v_0 . Keby náhodou taký existoval, tak by nutne jeho maximálne zrýchlenie muselo byť menšie ako jedno zo zrýchlení a_1 a a_2 a teda i oba maximálne zrýchlenia tohto pohybu v časti do zátačky a v zátačke by museli byť menšie ako aspoň jedno z a_1 a a_2 , čo ale nastať nemôže.

Existuje nejaká rýchlosť, s ktorou keď rozumne vojdeme do zátačky, taká, že pri všetkých ostatných možných rýchlostiach bude maximálne zrýchlenie zodpovedajúce danému pohybu vždy väčšie? Odpoveď môžeme nájsť celkom ľahko, keďže pre každú v_0 vieme nájsť prislúchajúce minimálne maximálne zrýchlenie, ktoré vieme dosiahnuť. Toto zrýchlenie je práve to väčšie číslo z a_1 a a_2 . Ešte raz si napíšme, čomu sa tieto zrýchlenia rovnajú

$$a_1 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2d}, \quad a_2 = \frac{v_0^2}{R}.$$

Všimnime si, že a_1 pre v_0 idúce od 0 po v klesá až dosiahne nulu a a_2 naopak z nuly stúpa nahor. To ale znamená, že to väčšie zrýchlenie je najmenšie vtedy, keď sa zrýchlenia rovnajú. Rovnosť zrýchlení nastane pre

$$v_0 = v \sqrt{\frac{R}{R + 2d}}.$$

To sa ale môžeme len a len tešiť! Našli sme dokonca práve jeden pohyb, ktorý je lepší ako všetky ostatné. Len samozrejme ak uvažujeme, že auto do zákruty vôbec dorazí dokonca s rýchlosťou

⁴⁾ Keďže sa zrýchluje rovnomerne a zrýchli sa z rýchlosti v na v_0 , priemerná rýchlosť bude $(v + v_0)/2$, čiže dráhu d prejde za čas $t = 2d/(v + v_0)$ a zrýchlenie už ľahko dopočítame zo vzorca (3), tj. $a_1 = |s''|$.

ťou $v_0 \leq v$. No těchto případů sa zbavíme už ľahko. Ak by auto dorazilo do zátačky s rýchlosťou $v_0 > v$, ľahko sa presvedčíme, že jeho zrýchlenie v zátačke bude určite väčšie ako a_2 v prípade nášho nájdeného pohybu. Podobne ak do zátačky vôbec nedorazí, tak určite niekde vo vzdialenosti $s < d$ od začiatku zastane. Zrejme by mohol svoje spomalovanie trochu zmieriť takým spôsobom, že by zabrzdil presne na začiatku zátačky. No to sme už ve vyšetrenom prípade, o ktorom vieme, že existuje lepší.

Takže konečne môžeme prehlásiť, že pohyb taký, že vodič rovnomerne spomaluje so zrýchlením

$$a = \frac{v^2}{R + 2d}$$

a v zátačke udržiava zodpovedajúcu rýchlosť konštantnú, spôsobí najmenšie maximálne zrýchlenie zo všetkých možných pohybov.

Úlohu sme samozrejme mohli riešiť viacej intuitívne (no i teraz sme sa niekedy na intuíciu spoliehali) a možno niektoré veci toľko neodôvodňovať, ale chceli sme byť poriadnejší a pri našich dôkazoch i matematickejší. To, či sa nám to podarilo a či to malo význam ponecháme zhodnotiť vám.

Pavol Pšeno

semo@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. P ... orosená odměna aneb ať vám kozel neuteče (4 body; průměr 2,56; řešilo 32 studentů)

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokrč, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná nejobtížnější jej přeskočit?

Napadlo Honzu Prachaře na návštěvě příbuzných majících podobný problém.

Pro jednoduchost uvažujme, že kozel je hmotný bod a přeskočením plotu myslíme, že překoná krajní bod plotu. Kozel taktéž nemůže po plotu lézt, byť by to ve skutečnosti mohlo být možné.

V zadání není jasně řečené, jak pozemek vypadá a jak je situován. Budeme předpokládat, že ohrada je obdélníková a celá leží ve svahu o sklonu φ . Kozel si tedy může vybrat, jestli přeskočí tu část ohrazení, která leží ve vrstevnici, nebo se pokusí zdolat ohradu kolmo na vrstevnici. Se stranami plotu vystavěnými kolmo na vrstevnice nebudeme mít velkou práci. Kozel se k nim blíží po rovině, tudíž máme případ známý z běžné praxe. Jak postavit plot, aby ho bylo co nejtěžší přeskočit? Sami snadno odpovíme, že jedinec kolmo, protože kdybychom použili jakýkoliv jiný úhel, jen by se snížila celková výška plotu, což by kozlovi pomohlo.

Zaměříme se nyní na spodní okraj ohrady. Na kozla působí jediná síla – tíhová síla. Toto působení můžeme snadno rozložit do dvou směrů, tečného (rovnoběžného se svahem)

$$F_t = mg \sin \varphi$$

a normálového (kolmého na svah)

$$F_n = mg \cos \varphi.$$

Ďíky působení těchto sil se kozlovi zdá, jakoby ho něco popostrkovalo dopředu a také trochu nadlehčovalo (což je přesně ten pocit, který zažijete, když si stoupnete do svahu se zavazanými

očima). Tečná síla kozlovi vůbec nevádí, ba naopak, je to ta síla, která mu pomáhá se pořádně rozběhnout. Jediné, co musí ve skutečnosti překonávat je normálová složka tíhové síly. Nejhůře si proto povede, pokud bude donucen přeskakovat překážku, která má vrchol co nejdále od roviny svahu. Touto úvahou jsme převedli příklad na případ plotu v rovině a už víme, že odpověď zní stavět kolmo, ale tentokrát kolmo ke svahu.

Pro plot na horní straně pozemku platí stejná úvaha. Akorát pro chudáka kozla se zde situace komplikuje tečnou složkou tíhové síly, která mu teď nepomáhá, ale brzdí ho.

Je zajímavé, že takto se ve skutečnosti ploty nestavějí. Na plot, který je kolmý ke svahu, působí totiž nenulový moment tíhové síly a bez opěr zespodu by jistě brzy spadl. Navíc pokud by byl svah dostatečně prudký, náš kozel by plot klidně mohl přelézt.

Většina řešitelů se pokoušela k problému přistoupit z matematického hlediska a vypočítat úhel mezi plotem a svahem. Správným přístupem je vyjádřit si rovnici ochranné paraboly (tedy křivky, která udává, kam všude se můžeme s danou počáteční rychlostí dostat) a hledat místo, kde má tečna k této parabole stejný sklon jako svah. Tento přístup jistě vede k cíli, ale u této úlohy je možná až zbytečně komplikovaný.

Martin Formánek

`martin@fykos.mff.cuni.cz`

Úloha I. E ... ulovte si hlemýžď (7 bodů; průměr 4,09; řešilo 23 studentů)

Změřte, jaký nejpomalejší pohyb je schopné zaregistrovat lidské oko. Konkrétně měřte nejmenší okamžitou úhlovou rychlost vybraného objektu vzhledem k nehybnému pozadí, kterou vaše neustále otevřené oko dokáže zpozorovat během doby maximálně 5 s.

Pár tipů na pomalé pohyby: plazení hlemýžďe, pohyb Slunce vůči obzoru při západu, otáčení hodinových ručiček, růst rostlin, růst živočichů, vzájemný pohyb hvězd ...

Napadlo Honzu Prachaře při čekání v dopravní zácpě.

Teorie

Lidské oko je z hlediska vnímání pohybu poměrně nedokonalým přístrojem. Navíc, oko každého jedince je citlivé jinak, proto je celý pokus včetně výsledků velmi závislý na subjektu experimentátora. Kromě toho jsou rozlišovací schopnosti závislé také na denní době, aktuálním fyzickém i duševním stavu apod. Dále je třeba si uvědomit, že člověk nevnímá velikosti (a tedy ani rychlosti těles) absolutně, nýbrž relativně vzhledem ke vzdálenosti od sebe. Proto budeme nadále důsledně používat pojem úhlová velikost úsečky, jež budeme chápat jako velikost úhlu svíraného paprsky spojujícími naše oko a krajní body pozorované úsečky, a také zavedeme termín úhlová rychlost následujícím vztahem

$$\nu = \frac{v}{d}, \quad (4)$$

kde v je skutečná rychlost objektu ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem a d je vzdálenost mezi ním a pozorovatelem. Pozorný čtenář si jistě všimne, že stejným způsobem je definována úhlová rychlost rovnoměrného pohybu po kružnici; je tedy na místě dovysvětlit, že zmiňovaný zlomek má velmi malou hodnotu⁵. V zadaném experimentu jde totiž o změření nejmenší takové rychlosti, kterou je člověk schopen zjistit, a proto si uvedenou aproximaci přímočarého pohybu na kruhový můžeme dovolit.

⁵) Poznamenejme, že $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ platí pro malé hodnoty α .

Nyní, majíce slovníček pojmů, jsme připraveni na teoretické výpočty. Literatura obvykle uvádí, že minimální úhel, pod kterým je člověk s to rozlišit dva objekty, je $\varphi_0 = 60'' = \pi/10800$. (Například pozorujte tečku za touto větou z různých vzdáleností.) Je však třeba podotknout, že tato hodnota se týká dvou ve stejnou dobu existujících bodů, nikoliv jednoho se pohybujícího. Nicméně můžeme předpokládat, že v první moment si zapamatujeme polohu objektu a na pět sekund zavřeme oči (dle zadání). Jestliže se úhlová vzdálenost mezi polohami před zavřením a po otevření očí bude lišit alespoň o φ_0 , pozorujeme pohyb (či v tomto případě spíše jeho „diskrétní model“). Není těžké vypočítat, že úhlová rychlost pozorovaného tělesa musí být alespoň

$$\nu_0 = \frac{\varphi_0}{5} \text{ s}^{-1} = \frac{\pi}{54\,000} \text{ s}^{-1} \approx 5,82 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

A to je poměrně málo, o čemž se ostatně můžeme přesvědčit dosazením do vztahu (4). Berme proto tuto hodnotu jen jako jakýsi dolní odhad. Pro pozorování skutečného (spojitého) pohybu je navíc dobré mít vhodné referenční pozadí. Jistě ze zkušenosti víme, že je mnohem náročnější všimnout si pohybu modrého čtverečku 1×1 cm nad bílým papírem než téhož nad papírem milimetrovým, kde máme dostatečně hustou souřadnicovou síť.

Příprava a provedení experimentu

Vzhledem k vzorci (4) uvažme následující běžné pohyby jako vhodné pro naše měření: pohyb hvězd a planet po obloze, jízda vlakem a sledování vzdálených domů (na lokálce i blízkých; viz úloha I.1), plazení hlemýždě, plynulé otáčení ručiček hodin apod. Kromě těchto si můžeme sami nějaký „pomalý“ (ve smyslu malé úhlové rychlosti) pohyb vytvořit⁶. Tuto funkci splní i obyčejný program simulující pohyb na monitoru počítače. Nastavíme tedy vhodnou rychlost pohybu ($0,29 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$) nějakého výrazného obrazce a zbytek plochy necháme jednobarevný. Budeme se postupně přibližovat k monitoru, dokud v průběhu časového intervalu 5 sekund nepozorujeme pohyb. Optimálně provedeme několik měření s různými lidmi.

Tabulka výsledků měření

číslo měření i	vzdálenost d_i [m]	chyba $d_i - \bar{d}$ [m]	kvadrát chyby $(d_i - \bar{d})^2$ [m ²]
1	3,87	-0,03	0,00
2	3,79	-0,11	0,01
3	3,92	0,03	0,00
4	4,05	0,16	0,02
5	3,90	0,01	0,00
6	3,85	-0,05	0,00
7	3,67	-0,23	0,05
8	3,88	-0,02	0,00
9	4,11	0,22	0,05
10	3,91	0,02	0,00
$\bar{d} =$	3,90	$\sum_i (d_i - \bar{d})^2 =$	0,14

Z osobní zkušenosti s tímto měřením musíme ovšem přiznat, že je velmi těžké zaměřit se pouze na pohybující se objekt a nesledovat „nehybné“ okolí. Navíc je úloha zatížena poměrně

⁶ Na tomto místě bych rád pochválil *Zuzku Chlebovou* za její neotřelý přístroj využívající laserového ukazovátka jakožto indikátoru změny výšky vodní hladiny.

značnou a těžko odhadnutelnou chybou, která je způsobena velmi subjektivní metodou detekce pohybu. Z těchto důvodů je nutné brát následující výsledky s rezervou a stejně tak i statistické odchylky, kterých jsme se dopočítali.

Pro naměřené hodnoty vychází směrodatná odchylka přibližně $\sigma = 0,05$ m. Maximální vzdálenost, ze které jsme ještě byli schopni rozeznat pohybující se čtvereček během doby 5 sekund, pak je $(3,9 \pm 0,1)$ m. Odtud již snadno vypočítáme úhlovou rychlost pomocí vzorce (4)

$$\nu = \frac{0,29}{3\,900 \pm 100} \text{ s}^{-1} \approx (7,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

což je jen nepatrně víc oproti úhlové rychlosti rotace Země ($7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). A skutečně, při sledování západu naší životadárné hvězdy v blízkosti rovníku se ve dnech rovnodennosti každý může přesvědčit, jak Slunce doslova „mizí“ před očima. Dále je patrné, že náš teoretický dolní odhad nebyl až tak špatný, jak se na první pohled mohlo zdát.

Většina z vás, kdo jste se dobrali nějakého číselného výsledku, naměřila hodnoty z okolí našeho výsledku, proto je celkem pravděpodobné, že je rozumně správný.

Na závěr bych chtěl upozornit na poměrně častou chybu. Mnoho řešitelů špatně pochopilo pojem *úhlová rychlost*. Oproti našemu pojetí jste se uchylovali k pohybu po kružnici a občas i nechávali hlemýždě kroužit po vytyčené kruhové trajektorii.

Tomáš Jirotko

byrot@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. S ... gravitace (6 bodů; průměr 4,67; řešilo 15 studentů)

Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít.

Zadal autor seriálu Marek Pechal.

Jako autorské řešení vám podrobně předvedeme úlohu druhou vyšetřující pohyb tří hvězd, na které ilustrujeme i řešení úlohy první.

Na první pohled se může zdát, že není-li konkrétně zadána hmotnost hvězd M ani poloměr R trajektorie obíhající dvojice, pak nejsme schopni o jejich pohybu nic kloudného říct. Naštěstí je však opak pravdou. Změnou hmotnosti se nezmění charakter pohybu, ale pouze škála jeho charakteristických rozměrů a časů (jako bychom např. zvětšili, resp. zmenšili obraz a pustili záznam zpomalně, resp. zrychleně). Pokud si zavedeme bezrozměrný čas τ a prostoro-
rové průvodiče \mathbf{e}_i následujícím způsobem

$$t = \tau \sqrt{\frac{R^3}{\varkappa M}}, \quad \mathbf{r}_i = R \mathbf{e}_i,$$

získají pohybové rovnice zvláště jednoduchý tvar

$$\frac{d^2 \mathbf{e}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i|^3},$$

v němž už nefiguruje M ani R .

Domluvíme-li se, že obíhající hvězdy se budou na počátku pohybovat v rovině xy okolo počátku, pak počáteční podmínky budou⁷

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (-1, 0, 0), & \frac{d^2\mathbf{e}_1}{dt^2} &= (0, -\frac{1}{2}, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (1, 0, 0), & \frac{d^2\mathbf{e}_2}{dt^2} &= (0, \frac{1}{2}, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (0, 0, -\infty), & \frac{d^2\mathbf{e}_3}{dt^2} &= (0, 0, \frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Tyto rovnice už můžeme jednoduše řešit, máme-li k dispozici slušný program pro modelování gravitační interakce těles. Stačí položit hodnotu gravitační konstanty a hmotností všech tří hvězd za jednotkové, nastavit příslušné počáteční polohy a rychlosti a spustit simulaci.

Pascalovský program **gravitace.pas**, který příslušný výpočet provádí pomocí Runge-Kuttovy metody 4. řádu, si můžete stáhnout z webu FYKOSu. Jde o jednoduchý „simulátor gravitace“, do kterého můžete snadno nasadit libovolný (rozumný) počet těles a pak například pomocí gnuplotu kreslit jejich trajektorie.

Veškeré grafy ve vzorovém řešení této úlohy byly získány za pomoci právě tohoto programu. „Vnější“ hvězdu jsme při simulaci na začátku posadili na osu z do vzdálenosti 1000 (bezrozměrných jednotek) od počátku. Tato vzdálenost je vzhledem k rozměrům soustavy obíhajících hvězd velmi velká, a tak můžeme přibližně říct, že vnější hvězda přiletěla „z nekonečna“.

Velikost kroku při řešení pohybových rovnic jsme nastavili na 0,02 (bezrozměrné jednotky času). Tento krok je snad dostatečně malý – za takovou dobu opiší obíhající hvězdy ve své rotaci úhel přibližně 0,01 radiánu. O chybě, která bude zvolené hodnotě kroku odpovídat, se však můžeme pouze dohadovat. Určitou kontrolu bychom nad ní měli, pokud bychom užili některou z metod s proměnnou délkou kroku. Pro tentokrát tedy jednoduše předpokládejme, že krok je skutečně dost malý.

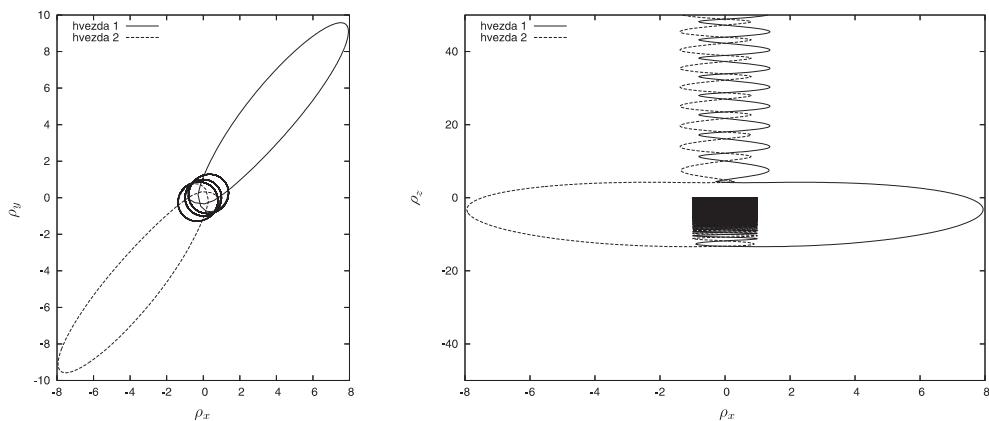
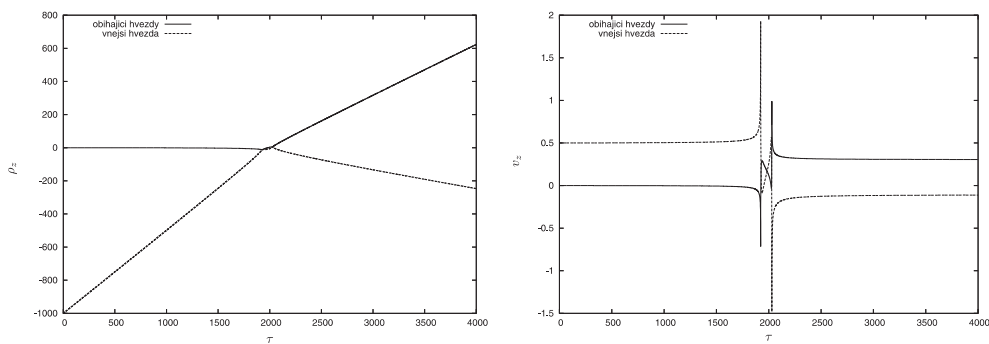
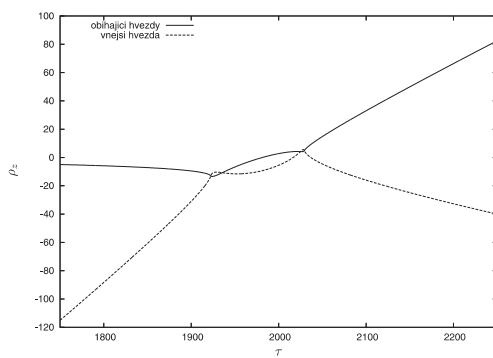
Při simulaci jsme provedli 200 000 výpočetních kroků. To při zvolené délce kroku dává celkový časový úsek 4000 jednotek, která pohodlně obsáhne dobu potřebnou pro přiblížení vnější hvězdy i její opětovné vzdálení do „velké“ vzdálenosti.

Ještě než ukážeme, jak zkoumaný pohyb všech tří hvězd podle našeho výpočtu vypadá, by bylo dobré říct, které údaje z vypočtených dat vlastně potřebujeme. Rozhodně totiž nemusíme zpracovávat všech osmnáct souřadnic poloh a rychlostí. Díky počáteční osově symetrii situace se souřadnice poloh a rychlostí obou obíhajících hvězd navzájem liší maximálně znaménkem (z -ové souřadnice polohy a rychlosti jsou si dokonce rovny). Navíc se vnější hvězda zřejmě bude pohybovat pouze na ose z (opět díky symetrii). A dále díky zákonu zachování hybnosti vždy můžeme určit z -ové souřadnice polohy a rychlosti obíhajících hvězd, známe-li z -ovou souřadnici polohy a rychlosti vnější hvězdy. Pro specifikaci stavu soustavy tedy stačí pouze šest údajů⁸.

Závislosti x -ových a y -ových souřadnic poloh a rychlostí obíhajících hvězd na čase pro nás nejsou příliš zajímavé (a zvládnutelné, protože si jejich grafy jistě dokáže vykreslit sám). Ukážeme tedy pouze grafy závislosti z -ových souřadnic poloh a rychlostí na čase a tvar průmětu trajektorie obíhajících hvězd do rovin xy a xz (yz se bude od xz lišit jen málo).

⁷⁾ Symbol ∞ zde pouze reprezentuje „hodně velké“ číslo.

⁸⁾ Ve skutečnosti čtyři, protože jsme zapomněli na zákony zachování momentu hybnosti a energie. Jimi vyjádřené vztahy mezi souřadnicemi poloh a rychlostí jsou však již poněkud krkolomné, a tak se spokojíme s šesti parametry.

Obr. 5. Průměty trajektorií obíhajících hvězd do rovin xy a xz Obr. 6. z -ové souřadnice poloh a rychlostí v závislosti na časeObr. 7. z -ové souřadnice polohy v závislosti na čase – detail

Na závěr ještě určíme, jakou rychlostí se bude pohybovat vnější hvězda po opětovném vzdálení „do nekonečna“. Mohli bychom to udělat například tak, že bychom jednoduše odečetli poslední vypočtenou hodnotu z -ové souřadnice její rychlosti. Lepší by ovšem bylo vzít v úvahu i fakt, že se rychlost bude i dále měnit (třebaže jen málo), a pokusit se extrapolovat její hodnotu v nekonečnu.

Všimneme-li si v grafu rychlosti, že její závislost ke konci sledovaného časového úseku vypadá téměř jako lineární lomená funkce, můžeme se pokusit část vypočtených dat touto funkcí fitovat (tj. najít takovou lineární lomenou funkci, která data co nejlépe aproximuje) a z jejich parametrů odhadnout rychlost hvězdy „v nekonečnu“. Tuto práci za nás může velmi rychle provést například program gnuplot⁹.

Ukazuje se, že časový vývoj rychlosti skutečně velmi dobře aproximuje lineární lomená funkce, hodnota rychlosti se limitně blíží (podle výpočtu gnuplotu) $-0,1069$.

Vnější hvězda se tedy po interakci s oběma dalšími „odrazí“ rychlostí přibližně pětinou proti počáteční. Použitím zákona zachování hybnosti si snadno odvodíme, že obíhající hvězdy se budou pohybovat ve směru osy z rychlostí rovnou asi třem pětinaám výchozí rychlosti vnější hvězdy.

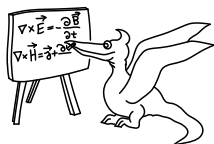
Pokud se zaměříme na kinetickou energii odpovídající pouze pohybu zúčastněných těles v z -ovém směru, zjistíme, že se jí při interakci hvězd přibližně čtvrtina „někam ztratila“. Jistě uhadneme kam – do potenciální energie soustavy obíhajících hvězd a do kinetické energie jejich pohybu v rovině xy (což lze ostatně pozorovat i na průmětu trajektorií do této roviny – jejich tvar se změnil z kruhového na eliptický, což je nutně provázáno změnou energie oběhu). V jistém smyslu jde tedy o nepružný ráz. Považujeme-li obě obíhající hvězdy za jediné těleso, pak jejich potenciální energie a kinetická energie pohybu v rovině xy reprezentuje vnitřní energii tohoto tělesa.

Při zkoumání diskutovaného problému se samozřejmě nemusíme omezovat jen na zadaný speciální případ, kdy se vnější hvězda na počátku pohybuje stejnou rychlostí jako obíhající hvězdy. Můžeme například zkoumat závislost charakteru pohybu všech tří hvězd na počáteční rychlosti vnější hvězdy. Výsledky, které jsme v tomto směru získali, jsou poměrně zajímavé (soustava hvězd totiž – poněkud vágně řečeno – vykazuje zároveň chování klasického i chaotického systému). Protože jsou však již poněkud nad rámec zadání úlohy a jejich zahrnutím by se toto autorské řešení neúměrně natáhlo, umístili jsme je pro případné zájemce na naše webové stránky v elektronické podobě. Zde se také můžete dočíst, jak lze do výpočtu zavést jisté užitečné korekce.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz

⁹⁾ Viz studijní texty na webových stránkách FYKOSu.



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Náhodné jevy

Po druhém, matematicky laděnějším díle, si odpočineme studiem náhody. Vezmeme si na mušku vzrušující biologii. Pokud jste začali číst seriál až nyní, tak to vůbec nevadí, neboť nepotřebujete znalosti z kapitol předcházejících.

Metoda Monte Carlo

Monte Carlo je metoda počítačové fyziky založená na náhodě a počtu pravděpodobnosti. Ilustrujeme ji na jednoduchém příkladu. Chceme zjistit plochu rybníka. Jako numericky velmi vhodná metoda se jeví vzít dělo a střílet náhodně do čtverce, ve kterém se celý rybník nachází. Po každém výstřelu budeme poslouchat, zda uslyšíme šplouchnutí vody, nebo ne. Necht' má čtverec obsah kupříkladu 100 m^2 . Vystřelíme-li stokrát, bude počet šplouchnutí odpovídat metřům čtverečnám rybníka. Ovšem s nějakou „spolehlivostí“¹⁰, neboť jde o náhodný proces.

Co je to plocha?

Mluvíli jsme o ploše. Pochopení tohoto pojmu shledávám natolik důležitým, že mu věnujeme několik odstavců a rozehrajeme matematickou, někdy až filosofickou diskusi základního pojmu – plocha. Budeme se snažit vyhnout technickým věcem a složitým výpočtům.

Ve škole vám jasně vysvětlí plochu (obsah) čtverců, obdélníků a trojúhelníků¹¹. Potom vám však také řeknou, že plocha kružnice je πr^2 . Tušíte proč?

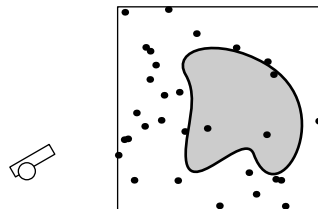
Všimněme si podstatné věci. Poměr obvodu a poloměru kružnice je zřejmě pro každou kružnici stejné číslo, pojmenované 2π . Dále nakreslíme do libovolné kružnice shodné rovnoramenné trojúhelníčky, z nichž vznikne pravidelný n -úhelník o délce strany a vepsaný dané kružnici.

Plocha trojúhelníka je základna a krát výška v_r dělena dvěma. Vidíme, že zjemňujeme-li trojúhelníky, tak jejich výška v_r se bude velmi přesně shodovat s poloměrem kružnice r a obvod námi zkonstruovaného n -úhelníku se začne blížit známému obvodu kružnice $o = 2\pi r$.

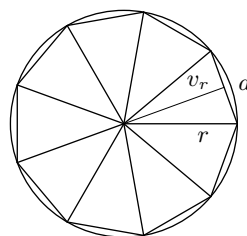
$$o \approx n \cdot a.$$

¹⁰⁾ Pokuste se ji nějak odhadnout.

¹¹⁾ Například metr čtvereční se zavede jako plocha čtverce metr krát metr. Jeho polovina, třeba obdélník půl metru krát metr, je polovina metru čtverečního. Jednoduše tedy plochu zobecníme pro obdélníky. Nasnadě jsou i trojúhelníky, neboť každý z nich můžeme rozdělit na dva pravoúhlé trojúhelníky. A pravoúhlý trojúhelník vznikne z obdélníku se stranami stejně velkými, jako jsou jeho odvěsny, rozpůlením podle úhlopříčky.



Obr. 8. Měření plochy rybníka metodou Monte Carlo



Obr. 9. Výpočet obsahu kruhu

Plocha n -úhelníku bude při zmenšování základů trojúhelníků pokrývat plochu vnitřku kružnice, pokusíme se ji vypočítat.

Jak jsme již zmínili, plocha S_T jednoho trojúhelníka se rovná $av_r/2$ a při velmi malém a se bude v_r rovnat r , proto

$$S_T \approx \frac{1}{2}ar.$$

Z předchozí rovnice svazující obvod kružnice a obvod obrazce tvořeného trojúhelníky můžeme vyjádřit, kolik trojúhelníků o základně a se na kružnici vejde

$$n \approx \frac{o}{a} = \frac{2\pi r}{a}.$$

Tímto počtem je potřeba plochu jednoho trojúhelníka vynásobit, abychom získali plochu celého kruhu S .

$$S = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ar}{2} \cdot \frac{2\pi r}{a} = \pi r^2.$$

Co se stalo? Touto úvahou jsme určili obsah kruhu. Podobně se odvozuje integrál. Chceme-li integrovat funkci, tj. zjistit plochu pod jejím grafem, tak plochu rozkrájíme na malinkaté obdélníky a sečteme jejich obsahy (pro kružnici byly sice šikovnější trojúhelníky, ale s obdélníky to jde také). Zkuste si tento postup pro funkci $f(x) = \text{konst}$, $f(x) = x$ nebo $f(x) = x^2$, například na intervalu $[0, 1]$. Takto se zobecní pojem plocha pro složitější útvary, než jsou jen obdélníky a trojúhelníky.

Souvislost určitého integrálu a primitivní funkce

Co se týče plochy, zbývá ještě jeden „filosofický“ problém. Integrál je zaveden jako plocha pod grafem funkce (jde o Riemannův integrál). Integrál však můžeme zavést také jako opak derivace

$$\int f(x) dx = F(x), \quad \text{jestliže} \quad F'(x) = f(x).$$

Funkci $F(x)$ nazýváme *funkcí primitivní* k $f(x)$ (integrálu zavedenému jako opak derivace říkáme Newtonův integrál).

Integrujeme-li funkci $f(x)$ na intervalu $[a, b]$, jedná se o *určitý integrál* $\int_a^b f(x) dx$, neboť výsledkem integrace je číslo – plocha pod grafem funkce mezi body a a b . Magicky se vypočítá jako rozdíl primitivní funkce k $f(x)$ v bodě a a v bodě b .

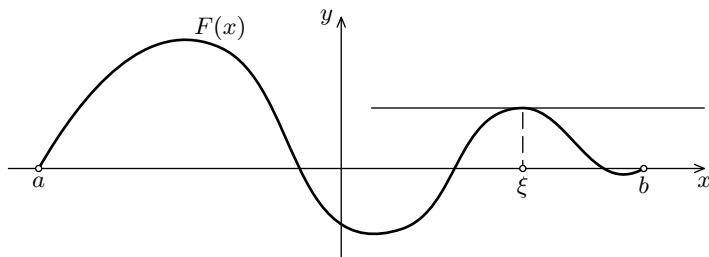
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (5)$$

Cvičení: Načrtněte si funkci $1/\sqrt{x}$ a $1/x^2$. Pokud znáte Newtonův integrál¹², vypočítejte $\int_0^1 1/\sqrt{x} dx$ a $\int_1^\infty 1/x^2 dx$. Výsledek je 2 a 1. Odůvodněte, proč se liší o právě 1 vašim náčrtem (symetrie).

Ale proč? Pokusíme se odpovědět a esenciální formuli dokázat. Důkazu předešleme dvě lemmata¹³, Rolleovu a Lagrangeovu větu o přírůstku funkce. Není to samoúčelné, neboť Lagrangeova věta je jednou z hlavních vět matematické analýzy.

¹²⁾ Newtonův integrál je velice hezky vysvětlen v *Integrálním počtu ve fyzice* z knihovničky Fyzikální olympiády.

¹³⁾ Lemmata jsou matematická tvrzení, mezi která se rozděluje důkaz celé věty.



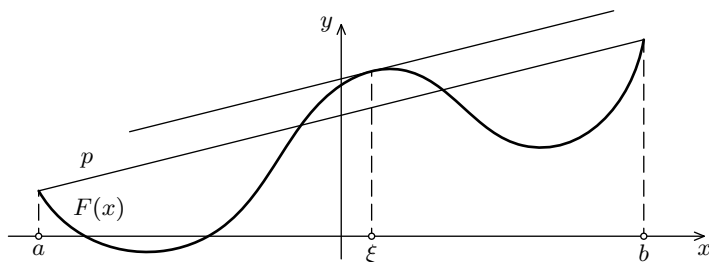
Obr. 10. Ke znění Rolleovy věty

Mějme libovolnou funkci $F(x)$, která má všude na nějakém intervalu $[a, b]$ spojitou¹⁴ derivaci, a $F(x)$ v bodě a i $F(x)$ v bodě b se rovnají nule.

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Rozmysleme si, že potom musí v nějakém bodě ξ z $[a, b]$ existovat tečna ke grafu funkce $F(x)$ taková, že je rovnoběžná s osou x (viz obr. 10). Protože směrnice tečny je derivace funkce, platí, že $F'(\xi) = 0$, což je znění Rolleovy věty.

Uvědomme si, že tvrzení platí také, je-li $F(a) = F(b) = A$, kde A je nějaké číslo. Neboť se jenom s $F(x)$ posuneme nahoru nebo dolů, což nemá na hledanou tečnu rovnoběžnou s osou x vliv. Formálně bychom mohli užít argumentu, že derivace konstanty se rovná nule.



Obr. 11. Ke znění Lagrangeovy věty

Zobecnění pro „skloněné“ funkce je také nasnadě – jde o tvrzení Lagrangeovy věty: Necht $F(x)$ má všude na nějakém intervalu $[a, b]$ spojitou derivaci. Potom existuje takové ξ z intervalu $[a, b]$, že $F'(\xi) = (F(b) - F(a))/(b - a)$. Neboli tečna v bodě ξ bude rovnoběžná s přímkou p danou předpisem $y = (F(b) - F(a))/(b - a) \cdot (x - a) + F(a)$.

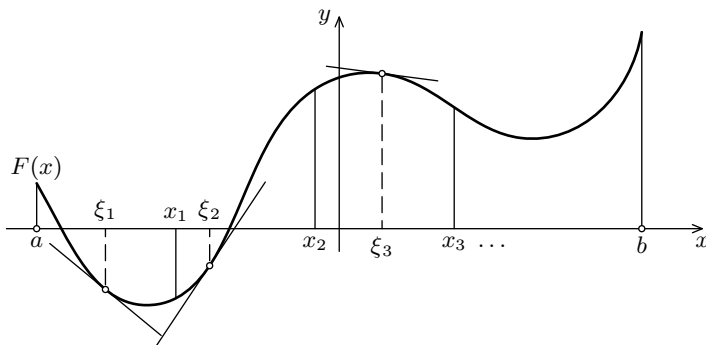
Důkaz se provede jednoduše z Rolleovy tím, že se funkce „nakloní“. Rozmyslete si ho za cvičení (užijte přímkou p).

Nyní jsme připraveni na důkaz věty samotné. Interval $[a, b]$ ekvidistantně rozdělíme, čili rozdělíme jej na n interválků $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, \dots, n$; $x_0 = a$; $x_n = b$) stejné délky $\eta = (b - a)/n$. Na každém interválku podle Lagrangeovy věty existuje ξ_i takové, že

$$F'(\xi_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\eta}.$$

¹⁴⁾ Derivace funkce na intervalu je opět funkce. Spojitá funkce je taková, jejíž graf můžu nakreslit, aniž bych zvedl tužku.

Definujme funkci $f(\xi_i) = F'(\xi_i)$. Na každém intervalku funkci $f(x)$ dodefinujeme tak, že má na celém i -tém intervalu hodnotu $f(x) \equiv f(\xi_i)$ pro $x \in [x_{i-1}, x_i]$.



Obr. 12. K důkazu souvislosti Newtonova a Riemannova integrálu

Vypočítejme plochu pod grafem funkce $f(x)$. Plocha pod funkcí na i -tém intervalku je hodnota $f(\xi_i)$, kterou na něm funkce $f(x)$ nabývá, krát délka intervalu.

$$S_i = f(\xi_i)\eta = F'(\xi_i)\eta = \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{\eta} \eta = F(x_{i+1}) - F(x_i).$$

A celková plocha S_a^b pod $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ bude součtem přes všechny intervalky

$$\begin{aligned} S_a^b &= \sum_{i=1}^n F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Naše argumentace zůstává v platnosti pro jakékoli n . Necháme-li n růst nade všechny meze, intervalky se nekonečně zmenší – stanou se z nich body reálné osy. Funkce $f(x)$ plně přejde v derivaci $F'(x)$ na $[a, b]$, čili $F(x)$ bude primitivní funkcí k $f(x)$. A plocha pod grafem funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Pravděpodobnost

Otázku, jaká je pravděpodobnost, že bude na Titanu či Europě život si položil asi každý z nás. Slovo pravděpodobnost používají lidé od nepaměti. Přejde nám samozřejmě tvrzení, že pravděpodobnost padnutí šestky na hrací kostce je jedna šestina. Tibetští mnichové se pokoušeli toto tvrzení ověřit, a tak celý život v klášteře házeli kostkou a sledovali, jaké jsou pravděpodobnosti padnutí jednotlivých čísel. Bohužel jim to samozřejmě nikdy přesně jedna šestina nevycházelo, neboť nikdy nevyrobili absolutně dokonalou kostku.

Poučme se však od nich v jedné věci. Mohlo by se zdát na první pohled zvláštní pravděpodobnost měřit. Ale stejně jako hmotnost určujeme vážením, hořlavost hořením, svítivost svícením, tak pravděpodobnosti měříme házením.

Pravděpodobností jsme se v Evropě začali matematicky zabývat až v 1. polovině 17. století ve Francii v souvislosti s hazardními hrami a náhodnými jevy. Zakladateli byli především Pascal, Fermat a Huygens. Hrávalo se tehdy v kostky a sázelo se například na to, jestli při n hodech kostkou padne šestka. Vystala tedy otázka: Jak mám vsadit, abych neprohloupil? Zvládnete odpovědět?

Kolikrát musím hodit kostkou, aby padla šestka s pravděpodobností větší než jedna polovina? Hodím-li n -krát kostkou, může padnout 6^n výsledků (6^n neuspořádaných n -tic). Při každém hodu je pět možností nepříznivých – šestka nepadla. Celkem, při n hodech, je nepříznivých 5^n výsledků. Předpokládáme, že každý výsledek je stejně pravděpodobný. Potom je přirozené určit pravděpodobnost jako poměr počtu všech pozitivních výsledků ku počtu všech možných výsledků. Pravděpodobnost $P(n)$ padnutí šestky při n hodech je

$$P(n) = \frac{6^n - 5^n}{6^n}.$$

Položíme-li z podmínky $P(n) = \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2} = \frac{6^n - 5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Nevíš-li, jak dál, logaritmuj!

$$\ln \frac{1}{2} = n \ln \frac{5}{6}, \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{5}{6}} \doteq 3,8.$$

Teorie pravděpodobnosti je nyní opět jednou z nejmodernějších matematických disciplín. Velmi hezkým pojednáním o pravděpodobnosti je šestá kapitola Feynmanových přednášek. Na internetu je zdarma kniha od Grinsteada a Snella *Introduction to probability*.

Cvičení: Máme pytlík, ve kterém je buď bílý, nebo černý kamínek. Vhodíme do něj bílý. Protřeseme a jeden náhodně vytáhneme. Vytáhli jsme bílý, jaká bude pravděpodobnost, že další tažený kamínek bude také bílý?

Náhodná proměnná¹⁵

Omniskem matematické analýzy je číslo. Derivace funkce v bodě je číslo, určitý integrál je číslo. Čísla také vstupují do funkcí. „Naopak“, hlavní pojem teorie pravděpodobnosti je *náhodná proměnná*, která vstupuje do funkcí, kterým se říká stochastické funkce. Náhodná proměnná však není číslo, je složitější než číslo. Náhodná proměnná je *množina stavů a jejich pravděpodobností*. U hrací kostky je množina stavů jednička, dvojka až šestka a jejich pravděpodobnosti jsou $1/6$. Neznám-li plně množinu stavů a pravděpodobnost každého stavu, nemám náhodnou proměnnou plně uchopenou.

¹⁵⁾ Omlouvám se, že tento paragraf nebude původní, ale hodně jsem přejal od profesora Josefa Kvasnici z jeho knihy *Matematický aparát fyziky*. Kvasnicovy úvahy shledávám jedinečnými, velice krásnými, ve kterých jsem se obrovsky zhlédl, a nebyl jsem schopný vymyslet formulaci svou, alespoň trochu stejně dobrou.

Existují náhodné proměnné i se spojitě proměnnými stavy. Například poloha x a rychlost v molekuly plynu. Množinou stavů je interval, případně plocha i celá rovina \mathbb{R}^2 atd. Je-li $N(v) dv$ počet částic plynu s rychlostí v intervalku $[v, v + dv]$, potom podíl

$$df(v) = \frac{N(v) dv}{N_0},$$

kde N_0 je celkový počet molekul, představuje pravděpodobnost toho, že namátkou vybraná molekula bude mít rychlost v v intervalu $[v, v + dv]$. Takovéto funkci $f(x)$ říkáme hustota pravděpodobnosti a $f(x) dx$ je pravděpodobnost, že nastane jev z intervalu $[x, x + dx]$.

Pojem *střední* nebo také *očekávané hodnoty* náhodné veličiny je zobecněním aritmetického průměru. Nechť při n měřeních doby života mionu jsme získali hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Aritmetickým průměrem \bar{x} těchto hodnot nazýváme číslo

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n). \quad (6)$$

Takovouto střední hodnotu lze interpretovat následovně: Nechť x je nějaká hodnota náhodné veličiny a $(x - x_i)$ jsou odchylky od této hodnoty. Funkce

$$g(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

je součet druhých mocnin těchto odchylek od nějaké referenční hodnoty x . Hodnotu x zvolíme tak, aby tento součet čtverců byl minimální. Minimum nalezneme tím, že $g(x)$ zderivujeme a položíme rovno nule

$$g'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \dots + 2(x - x_n) = 0.$$

Řešením je $x = \bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$. Aritmetický průměr je tak jednoduchým důsledkem metody nejmenších čtverců¹⁶.

Mezi hodnotami x_1, x_2, \dots, x_n mohou být některé stejné. Seřadíme je do skupin tak, že hodnota x_1 se vyskytuje m_1 krát, hodnota x_2 se vyskytuje m_2 krát atd., přičemž součet všech m_i se rovná celkovému počtu měření

$$m_1 + m_2 + \dots = \sum_i m_i = n.$$

Po takovémto seskupení stejných hodnot přepíšeme aritmetický průměr (6) ve tvaru tzv. váženého průměru

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i m_i x_i.$$

Podíl m_i/n je relativní četnost hodnoty x_i , tj. podíl případů příznivých hodnotě x_i k celkovému počtu všech případů. Pro velká n můžeme tyto podíly ztotožnit s pravděpodobnostmi $p_i = m_i/n$ hodnot x_i .

¹⁶⁾ Jedná se o jednu ze základních statistických metod využívaných při zpracování fyzikálních měření. Bližší informace naleznete v příslušné literatuře.

Tímto jsme ospravedlnili velice důležitou definici střední hodnoty. Střední hodnotou náhodné proměnné $\langle x \rangle$ je *suma součinu stav krát jeho pravděpodobnost*, přičemž sčítáme přes všechny stavy náhodné proměnné

$$\mu = \sum_i x_i p_i . \quad (7)$$

Předpokládá se, že náhodná proměnná je normovaná, což znamená, že $\sum_i p_i = 1$. Nejedná-li se o diskrétní náhodnou proměnnou, ale o spojitou, přejde suma přirozeně v integrál.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx . \quad (8)$$

Hodnoty x_i náhodné veličiny se obecně liší od střední hodnoty $\langle x \rangle$. Dochází k odchylkám $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$, neboli též k fluktuacím. Vypočítejme střední hodnotu těchto fluktuací.

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_i p_i \Delta x_i = \sum_i p_i x_i - \langle x \rangle \sum_i p_i = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0 .$$

Střední hodnota fluktuace se rovná nule, odchylky od střední hodnoty se vyskytují stejným dílem na obě strany. Informaci o absolutní hodnotě těchto odchylek poskytuje kvadrát fluktuací

$$(\Delta x_i)^2 = (x_i - \langle x \rangle)^2 = x_i^2 - 2\langle x \rangle x_i + \langle x \rangle^2 .$$

Střední hodnotu této veličiny, takzvanou *střední kvadratickou odchylku* neboli *disperzi* náhodné proměnné vypočítáme vztahem

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_i p_i (\Delta x_i)^2 .$$

Ukažte, že

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 , \quad (9)$$

kde

$$\langle x^2 \rangle = \sum_i x_i^2 p_i ,$$

a zobecněte pojem disperze i pro spojitě náhodné proměnné (zamění se jen suma za integrál).

Centrální limitní věta

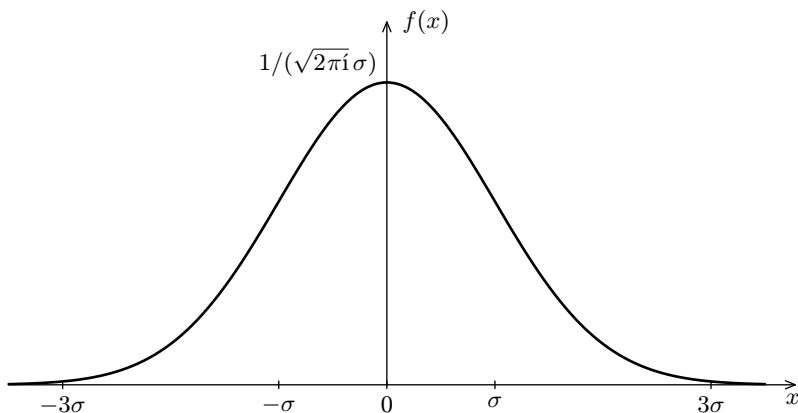
Nejdůležitějším pravděpodobnostním rozdělením je normální neboli Gaussovo rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) , \quad (10)$$

kde μ a σ jsou konstanty. Z právě zavedených definic můžeme vypočítat střední hodnotu a disperzi normálního rozdělení. Provedte si za užitečné cvičení na integrály. Výsledkem je střední hodnota μ a disperze σ^2 .

Centrální limitní věta mluví matematicky o tom, co fyzik většinou ví, že náhodné jevy, na které má vliv mnoho faktorů (a žádný z nich není příliš dominující), se chovají podle normálního, nebo-li Gaussova rozdělení pravděpodobnosti. Například Maxwelllovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu je Gaussovým rozdělením ve třech rozměrech.

Centrální limitní věta je důležitou větou teorie pravděpodobnosti podobně jako Lagrangeova věta v analýze. Její důkaz je minimálně na několik stránek a vyžaduje navíc již nějakou znalost teorie. Fyzikovi se někdy velice hodí, má-li něco rigorózně (matematicky, naprosto precizně) dokázané, co může pro svou práci použít.



Obr. 13. Gaussovo rozdělení pro $\mu = 0$

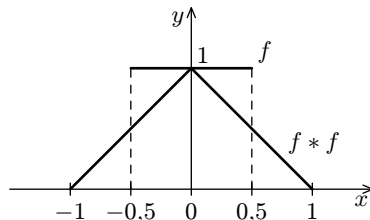
Pojďme se trochu blíže podívat, jak věta funguje. Mějme n (spojitých) náhodných proměnných s hustotami pravděpodobnosti $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$), každou s nějakou střední hodnotou μ_i a disperzí σ_i^2 . Když náhodné proměnné sčítáme, tak s n jdoucím do nekonečna dostaneme podle centrální limitní věty náhodnou proměnnou s normálním rozdělením, které má střední hodnotu $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ a disperzi $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

Jak se sčítají náhodné proměnné? Můžeme to ilustrovat na hracích kostkách, i když půjde jenom o jednoduchý příklad. Házíme dvakrát kostkou a ptáme se, s jakou pravděpodobností padnou jednotlivé součty (2 až 12). Tyto pravděpodobnosti dostaneme sčítáním dvou náhodných proměnných, odpovídajících jednotlivým hodům kostkou. Teď to zobecníme na spojité náhodné proměnné s hustotami pravděpodobnosti $f(x)$ a $g(x)$ definované na celé reálné ose. Jejich součet bude mít hustotu pravděpodobnosti $(f * g)(x)$, která se rovná

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

Tento výraz vypadá možná složitě, neboť platí obecně. Zkusíte-li však sečíst dvě stejné náhodné proměnné pro jednoduchost rovnoměrně rozdělené (každý stav má stejnou pravděpodobnost) na intervalu $[-0,5; 0,5]$. Zjistíte, jak elegantně formule funguje, aniž byste cokoliv integrovali.

Centrální limitní věta proto dává návod, jak Gaussovo rozdělení zkonstruovat na počítači. Generátor rovnoměrného rozdělení mívají programovací jazyky již zabudovaný. Necháme-li tímto generátorem vygenerovat několik náhodných čísel a uděláme z nich aritmetický průměr, bude tento aritmetický průměr také náhodný. Avšak jeho pravděpodobnostní rozdělení bude se zvyšujícím se počtem čísel konvergovat k rozdělení normálnímu.



Obr. 14. Ke konvoluční formulce

Tento proces ilustruje program Celith, který visí na webu. Za minimální vhodný počet náhodných čísel pro konstrukci dostatečně přesného Gaussova rozdělení se považuje 12.

Rybníček s Bernoullim

Nyní, když jsme prodiskutovali plochu, pravděpodobnost a náhodnou proměnnou, se můžeme opět vrátit k metodě Monte Carlo a rybníčku. V Monte Carlu jde o využití náhody – střílíme náhodně do čtverce. To, co náhodným procesem získáme, statisticky zpracujeme. Dejme tomu, že jsme vystřelili N koulí, třeba 10 000. Počet metrů čtverečních S získáme jako podíl počtu šplouchnutí N_s a N , vynásobený velikostí čtverce S_c

$$S = \frac{N_s}{N} S_c.$$

Krom výsledné plochy je pro nás však také velice důležité, jak spolehlivý je výpočet po N výstřelech. Což je vlastně informace o tom, jak rychle výpočet konverguje k správné hodnotě. Člověka můžeme označit za spolehlivého, přijde-li téměř vždy na schůzku, na které je očekáván. Podíváme se z tohoto pohledu i na náš rybník.

Necht q je poměr plochy rybníčku a celkové plochy čtverce. Veličinu q můžeme ztotožnit s pravděpodobností, že koule do rybníčku při jednom výstřelu spadne. Pak s pravděpodobností $1 - q$ do rybníčku nespadne. Zamysleme se nad tím, jaká bude pravděpodobnost, že z n výstřelů nám do rybníčku spadne právě k koulí?

Pravděpodobnost, že k -krát koule v rybníce skončí a $(n - k)$ -krát ne (z celkem n výstřelů), by měla být $q^k(1 - q)^{n-k}$. Násobit můžeme proto, že jednotlivé výstřely jsou na sobě nezávislé. Je to stejný problém, jako když se ptáme na pravděpodobnost, že šestka na hrací kostce k -krát padne a $(n - k)$ -krát ne. Protože je nám jedno, v jakém pořadí šestky či nešestky nastaly nebo šplouchnutí či nešplouchnutí nastalo, je třeba součin $q^k(1 - q)^{n-k}$ vynásobit počtem všech možných kombinací, ve kterých jev k -krát nastal a $n - k$ rát nenastal, neboli počtem všech možných výběrů k prvků z n , jež se značí $\binom{n}{k}$ a nazývá se binomické číslo, čili

$$p(k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}. \quad (11)$$

Dostali jsme takzvané *binomické* nebo taky Bernoullioho rozdělení pravděpodobnosti. Zmíníme se raději v krátkosti o binomickém čísle, pokud už jej však znáte, tak si za cvičení alespoň dokažte, že pravděpodobnost $p(k)$ je normovaná, neboli $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} = 1$.

Jak jsme řekli, binomické číslo $\binom{n}{k}$ je počet všech kombinací, jak můžeme vybrat k prvků z n -prvkové množiny. Existuje $n!$ uspořádaných n -tic všech prvků, takzvaných permutací. První prvek totiž můžeme do všech n -tic vybrat n způsoby, druhý $n - 1$ způsoby atd. Nás však vůbec nezajímá, jak je v těchto n -ticích $(n - k)$ prvků uspořádaných, protože ty vybírat nebudeme. Nás však nezajímá ani to, jakým způsobem je uspořádáno těch k prvků vybraných. Proto $n!$ vydělíme $(n - k)!$ a $k!$ a dostaneme výsledek

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Očekávali bychom, že střední hodnota binomického rozdělení $\langle k \rangle$ se rovná součinu pravděpodobností padnutí jedné koule do rybníčku krát počet všech vystřelených koulí. Výpočet střední hodnoty opravdu provedeme jako cvičení na to, jak se počítání binomických čísel vyhnout. Dle binomické věty

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Jako trik zderivujeme výraz podle a

$$n(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} a^{k-1} b^{n-k}.$$

Ještě jej z estetických a sugestivních důvodů vynásobme a

$$an(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bude-li nyní $a = q$ a $b = 1 - q$, získáme onen očekávaný výsledek

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} = nq.$$

Dobře, nás však zajímá, jaká je spolehlivost, že počet padnutí dělových koulí do rybníčku se jen velmi málo liší od střední hodnoty. O tom nás informuje disperze. To pro vás již nebude žádný problém vypočítat. Využijte tvrzení (9), čili

$$\langle (\Delta k^2) \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2.$$

Postupujte podobně jako výše, jen binomickou větu zderivujte dvakrát podle a . Budete-li počítat správně, získáte výsledek

$$\langle (\Delta k^2) \rangle = nq(1-q).$$

Vidíme, že disperze se zvyšujícím se n roste. Což je logické, neboť se nám celé pravděpodobnostní rozložení rozšiřuje. Na druhou stranu nám to neříká to, co bychom chtěli. Nás zajímá nějaká *relativní disperze*, vztahená k tomu, jak moc je střední hodnota velká. Proto se zavádí relativní disperze vztahem

$$(\delta k)^2 = \frac{\langle (\Delta k^2) \rangle}{\langle k \rangle^2} = \frac{1-q}{n}.$$

Jde k nule jako $1/n$. Získali jsme tedy závislost, jak se zvyšujícím se počtem dělových koulí klesá relativní kvadratická odchylka od správné hodnoty. Toto je ekvivalentní s otázkou, jak rychle se ke správné hodnotě blížíme. Chceme-li odpovědět na otázku, jak spolehlivě jsme se po n krocích přiblížili ke správné hodnotě, musíme požadovanou spolehlivost nějak vyčíslit. Kupříkladu se zeptáme, jaká je pravděpodobnost, že jsme se nezmýlili o více než centimetr čtverečný. To je stejný výpočet jako pravděpodobnost, že jsme se o více než jeden centimetr čtverečný zmýlili. Výše uvedené vzorce již umožní takovéto pravděpodobnosti vypočítat.

Poissonovo a Gaussovo rozdělení

Nyní dáme do souvislosti binomické rozdělení, centrální limitní větu a Gaussovo rozdělení. Při té příležitosti odvodíme ještě jedno velice důležité rozdělení pravděpodobnosti, a to Poissonovo.

Poissonovo rozdělení je asymptotickým (limitním) případem binomického rozdělení pro takzvaně řídké nebo vzácné jevy, tj. je-li q malé a n hodně velké. Vezměme pravděpodobnost q

jako klasický poměr příznivých případů ν k n . Přepíšeme-li podle toho binomické rozdělení, získáme

$$p(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k}.$$

Rozepíšeme-li binomické číslo a lehce přeskupíme členy, získáme

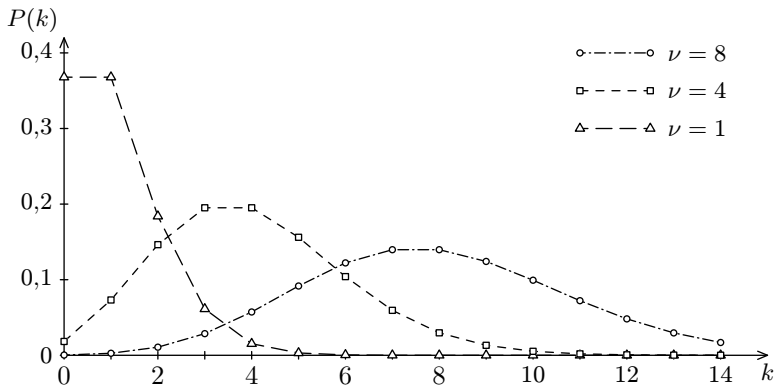
$$p(k) = \frac{\nu^k n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k! n^k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n.$$

Teď upravíme pouze druhý zlomek

$$p(k) = \frac{\nu^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n.$$

Provedeme limitu $n \rightarrow \infty$. S prvním zlomkem to nehne. Z dalších členů takováto limita udělá jedničku až na poslední zlomek, který $(1 - \nu/n)^n \rightarrow e^{-\nu}$ (lze to ukázat například Taylorovým rozvojem). Poissonovo rozdělení $P^\nu(k)$ s parametrem ν má tedy tvar

$$P^\nu(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}. \quad (12)$$



Obr. 15. Poissonovo rozdělení pro různé hodnoty parametru ν , pro větší názornost jsou body spojené lomenou čarou

Je jednoduché ukázat, že Poissonovo rozdělení je normované. Stačí vzít Taylorův rozvoj

$$e^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!},$$

potom vidíme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \right) \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}} = 1.$$

Jako cvičení se můžeme pokusit vypočítat střední hodnotu a rozptyl. Pro kontrolu využijme toho, že střední hodnota i kvadratická odchylka jsou stejné.

Jiným limitním případem binomického rozdělení je, když se náhodné hodnoty soustřeďují do úzké oblasti kolem střední hodnoty μ . Hledejme hustotu pravděpodobnosti ve tvaru

$$p(x) = e^{g(x)},$$

kde $g(x)$ je nějaká funkce. Rozvineme ji v Taylorovu řadu kolem bodu μ a členy třetího a vyššího řádu zanedbáme.

$$g(x) = g(\mu) + \frac{g'(\mu)}{1!} (x - \mu) + \frac{g''(\mu)}{2!} (x - \mu)^2 + \dots$$

Můžeme předpokládat, že $p(x)$ má v μ maximum. Potom má i $g(x)$ v μ extrém a derivace $g(\mu)' = 0$. Druhá derivace bude záporná, označme ji

$$g''(\mu) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Přepíšeme-li $p(x)$ podle těchto úprav, získáme

$$p(x) = C \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

kde $C = g(\mu)$ je zatím neznámá konstanta z Taylorova rozvoje, která se určí normováním. Gaussovo rozdělení má tedy tvar

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tvrzení, že binomické rozdělení konverguje ke Gaussovu rozdělení, je speciálním případem centrální limitní věty.

Distribuční funkce a generování náhodných čísel

Jeden návod na generování náhodných čísel jsme ukázali pro normální rozdělení. Ukážeme ještě jeden obecný postup, budeme k tomu potřebovat zavést distribuční funkci.

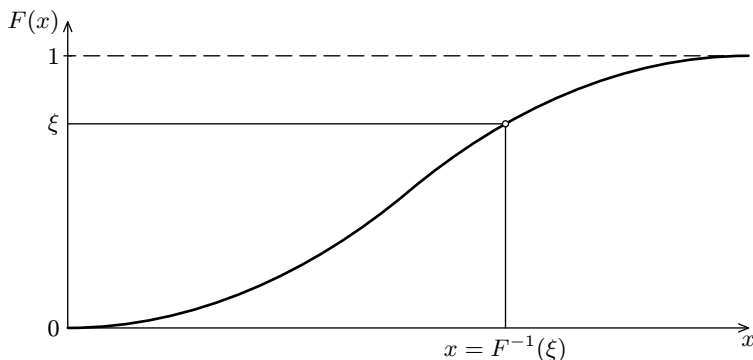
Distribuční funkce $F(x)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina X , s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ bude nabývat menší nebo stejné hodnoty jako x . Pro spojitě náhodné proměnné to bude integrál

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx,$$

pro diskrétní náhodnou proměnnou suma

$$F(x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Při studiu distribučních funkcí se velice hodí, že jsme se zabírali plochou. Distribuční funkce je vždy neklesající a nabývá hodnot od nuly do jedné (uvažujeme normované náhodné proměnné). Neklesající je mimo jiné proto, že hustota pravděpodobnosti $f(x)$ či diskrétní rozložení je vždy nezáporné. U spojitých náhodných proměnných nabývá hodnot od nuly do jedné, protože plocha pod grafem hustoty pravděpodobnosti je 1.



Obr. 16. Příklad distribuční funkce

Dále je jasné, že distribuční funkce je strmější tam, kde je $f(x)$ větší, například z toho důvodu, že $f(x)$ je u spojitých proměnných derivací distribuční funkce. Generujeme-li náhodná čísla ξ od 0 do 1, získáme z nich čísla x náhodně rozložená dle $f(x)$ přes distribuční funkci velice jednoduše.

$$\xi = F(x), \quad x = F^{-1}(\xi).$$

Například normální rozdělení bohužel nemá analyticky vyjádřitelnou distribuční funkci, protože neexistuje analytické vyjádření integrálu $\int e^{-x^2} dx$. Musíme ji tedy počítat numericky.

Jak to bude s Poissonovým rozdělením? Distribuční funkce je sumou

$$F(K) = \sum_{k=0}^K \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}.$$

Takže vygenerujeme ξ a budeme počítat sumu, dokud nepřesáhne hodnotu ξ . Všimněme si však, jak na nás křičí ze jmenovatele vykřičník. Oprávněně, neboť roste pekelně rychle. To však znamená, že pravděpodobnost pro velká k velice rychle klesá. Není divu, vždyť jsme Poissonovo rozdělení odvodili pro vzácné jevy. Aby nám nevznikly na počítači problémy s velkými čísly, můžeme to vyřešit tak, že sumu třeba pro $k > 10$ „uřízneme“, je-li parametr ν dostatečně malý. V opačném případě nelze použít klasické datové typy a je nutné naučit váš program pracovat s tzv. dlouhými čísly.¹⁷

Epidemie

V tomto paragrafu budeme matematicky studovat nemoci s epidemickým průběhem jako u chřipky, kterou lidé léčí v řádu dnů nebo jednoho týdne. Nemoci se budeme bránit dvěma strategiemi vakcinace. Jednak začneme lidi vakcinovat, jakmile epidemie začne (omezujeme se v tomto případě na nemoci, kdy vakcína účinkuje ihned), potom srovnáme průběh epidemie s případem, kdy jsme naočkovali určité procento lidí již předem. Samozřejmě to srovnáme ještě i s tím, pokud jsme neočkovali vůbec.

Výhodou preventivního očkování je, že epidemie bude určitě mírnější. Otázkou zůstává, bude-li výrazně mírnější, než při vakcinaci až po vypuknutí epidemie. Nevýhodou je, že můžeme očkovat proti epidemii nemoci, která vůbec nenastane.

¹⁷⁾ Návod, jak na dlouhá čísla, naleznete v naší programátorské kuchařce na webu.

Pokusme se vytvořit co nejjvýstižnější, ale na druhou stranu co nejjednodušší model epidemie. Zajímáme se o nemoci jako chřipka, jejíž epidemie propukne v nějakém městě, pak zde žije svým životem a potom se přenese zase někam jinam. Nás bude zajímat právě průběh v jednom městě. Občany rozdělíme do tří skupin: zdraví, nemocní a lidé, co už nemoc prodělali a uzdravili se a nadále jsou během této epidemie imunní. Počet lidí v první skupině označíme x , počet lidí ve druhé skupině y a počet ve třetí z . Počet všech občanů je N . Jelikož nás nyní zajímají docela krátkodobé epidemie, nemá cenu do modelu zahrnovat úmrtí a rození, proto v každém okamžiku

$$N = x + y + z.$$

Nyní si rozmysleme vhodný model toho, jak se počty lidí v těchto skupinkách budou vyvíjet v čase. Časové kroky δt vezmeme diskrétní, třeba hodinové. Za každou hodinu se ve středním slova smyslu nakazí nějaká část zdravých. Nakazí se jich tím víc, kolik je zdravých, ale také tím více, čím víc bude nemocných, kteří můžou nákazu předat, proto

$$x_{t+1} = x_t - \beta x_t y_t \delta t,$$

kde konstanta β je intenzita nákazy. Součin $x_t y_t$ můžeme chápat jako počet všech možných kontaktů mezi nakaženými a zdravými, konstanta β je tedy infekčnost nemoci – pravděpodobnost, s jakou se nemoc přenesou z jednoho člověka na druhého za nějaký čas. U chřipky se ukazuje přibližně $0,4/N$ za den.

V případě, že začneme vakcinovat (předpokládejme lineárně v čase), musíme počet všech, kteří se mohou nakazit, snížit o počet vakcinovaných¹⁸.

$$x_{t+1} = x_t - \beta(x_t - V_t)y_t \delta t,$$

kde V_t je počet vakcinovaných v čase t . V případě, že očkujeme lineárně v čase, je

$$V_t = \Lambda t,$$

kde konstanta Λ vyjadřuje rychlost očkování, uvažme asi dvě procenta obyvatel denně.

Nákaza je řídký náhodný jev. Za jednu hodinu se může nakazit jen malá část ze všech zdravých lidí. Proto položíme celý člen $\beta(x_t - V_t)y_t \delta t$ jako parametr ν Poissonova rozdělení pravděpodobnosti. Proč právě Poisson? Jde o diskrétní rozdělení, které vychází z binomického, v němž jsme se ptali na pravděpodobnost, že se k -krát něco stane a $(n - k)$ -krát nikoli. A to je náš případ.

$$x_{t+1} = x_t - \text{Poisson}(\beta(x_t - V_t)y_t \delta t).$$

Zbývá vyjádřit vývoj počtů lidí y a z v ostatních skupinkách. Hodnota y se zvýší o počet lidí, kteří se nakazili, minus lidí, kteří se uzdravili, což můžeme jednoduše zapsat jako

$$y_{t+1} = y_t + (\text{nakažení za dobu } \delta t) - \gamma y_t \delta t,$$

kde γ je přibližně $1/(\text{doba uzdravení})$. U chřipky je doba uzdravení asi čtyři dny, přičemž jak dlouho může nemocný někoho nakazit, je pro nás důležitější, než jak dlouho bude muset ležet v posteli a jak dlouho nebude muset do školy. Pro úplnost

$$z_{t+1} = z_t + \gamma y_t \delta t.$$

¹⁸⁾ Při programování potom nezapomeňte pohlídat, že od určitého momentu přestanete mít koho vakcinovat.

Entropie

Entropie S je nějaká neuspořádanost systému, například vašeho pokojíku. Definuje se jako

$$S = - \sum_i p_i \ln p_i . \quad (13)$$

Je ústředním pojmem statistické fyziky, která se dá dokonce i netradičně formulovat jako soubor energie s entropií. Mějme systém, který se vyskytuje ve stavech o energiích ε_i s pravděpodobnostmi p_i . Střední energie systému je $\sum_i \varepsilon_i p_i$. Jak víme, tak děje v přírodě mají takový spád, aby entropie systému narůstala (jako ve vašem pokojíku) a energie systému byla naopak co nejmenší. Faktorem, jenž rozhoduje o tom, který z trendů bude významnější, se ukazuje být termodynamická teplota T . Při vysokých teplotách je nejdůležitější entropie, při nízkých naopak energie. Například v ledu jsou molekuly uspořádány v pravidelné krystalové mřížce, zvýšíme-li teplotu, tak se toto uspořádání rozpadne a získáme kapalinu. Budeme-li dále zvyšovat teplotu, pak postupně získáme vodní páru, která nemá pevný objem, a plazmu, která ztrácí i iontové vazby.

Úkolem je nyní minimalizovat výraz

$$L = \sum_i p_i \varepsilon_i + k_B T \sum_i p_i \ln p_i ,$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, jejíž hodnota je $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$. Předpokládáme, že pravděpodobnost je normovaná na jedničku, tj. $\sum_i p_i = 1$. Chceme nalézt minimum L , zderivujeme jej tedy podle p_i a položíme rovno nule.

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \varepsilon_i + k_B T (\ln p_i + 1) = 0 ,$$

odkud

$$p_i = \exp \left(- \frac{\varepsilon_i}{k_B T} - 1 \right) .$$

Normujeme-li p_i na jedničku, získáme slavné Boltzmannovo rozdělení statistické fyziky

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp \left(\frac{-\varepsilon_i}{k_B T} \right) ,$$

kde $Z = \sum_i \exp(-\varepsilon_i/k_B T)$ je partiční suma.

K entropii můžeme dojít i jiným způsobem. Matematik Claude Shannon v padesátých letech minulého století zavedl funkci určující minimální množství informace v bitech nutné k přenosu zprávy. Mějme osm krabiček (nebo bitů). V jedné krabičce je bombón (nebo jednička). Jakou minimální informaci (počet bitů) potřebujeme k tomu, abychom znali umístění bombónu? Rozmyslete si, že je to právě $\log_2 8 = 3$. Na radu fyzika von Neumanna Shannon svou funkci pojmenoval entropie, neboť je matematicky ekvivalentní s termodynamickou entropií. Posléze se ukázalo, že souvislost mezi nimi je hlubší. Při přenosu informace je nutné vykonat určitou práci, která má například za následek zvýšení teploty systému. Takový systém se pak může nacházet ve více různých energetických stavech. Jeho popis se tím stane složitějším.

Simulované žíhání

Arzenál numerických metod nabízí velké množství účinných algoritmů pro hledání extrémů zadaných funkcí. Vybrali jsme pro vás jeden, který je obzvláště zajímavý z fyzikálního pohledu. Jde o takzvané *simulované žíhání* (*simulated annealing*), metodu, která se hodí obzvláště v případech, kdy má minimalizovaná funkce diskrétní (a přitom velmi obsáhlý) definiční obor.

Princip této metody je inspirován statistickou fyzikou. Pokud kov zahřátý na vysokou teplotu ochlazujeme dostatečně zvolna, dostaneme na konci velmi pravidelnou strukturu krystalické mřížky, která minimalizuje její energii.

Můžeme si tedy představovat, že zadaná funkce, kterou máme minimalizovat, představuje energii nějakého systému.

Zavedeme si „teplotu“ T tohoto systému, která bude ovlivňovat intenzitu simulovaných tepelných fluktuací v něm, a tu budeme v průběhu výpočtu snižovat.

Na začátku výpočtu, kdy je teplota vysoká, se systém může dostat prakticky do všech přípustných stavů. Se snižující se teplotou však jeho ochota podnikat kroky do energeticky vyšších stavů klesá a začíná se zdržovat spíše v oblastech s nižší energií. Nakonec pro velmi nízké teploty systém „zamrzne“ v minimu energie.

Obecně je toto minimum pouze lokální, ale díky pomalému ochlazování máme docela dobrou šanci, že nalezneme globální minimum. To je výhoda simulovaného žíhání proti primitivnějším algoritmům, které pouze mechanicky sledují směr nejrychlejšího klesání uvažované funkce a jsou tak poměrně náchylné k uváznutí v mělkém lokálním minimu.

Tolik tedy k teorii a teď už konečně k tomu, jak simulované žíhání prakticky realizovat. Vše si popíšeme na konkrétním případě, a sice na slavném *problému obchodního cestujícího* (*travelling salesman problem* – TSP). Ten má uskutečnit okružní pracovní cestu po N daných městech a otázkou je, jak zvolit jejich pořadí, aby nacestovaná vzdálenost byla co nejmenší. O tomto problému je známo, že při jeho řešení nemáme prakticky jinou možnost než vyzkoušet všechny možné trasy.¹⁹ Při větším počtu měst je tedy hledání přesného řešení nad síly dnešních počítačů.

Naštěstí se však ukazuje, že některé algoritmy dokáží tento problém řešit s poměrně dobrými výsledky přibližně a hlavně v rozumném čase. Jedním z takových algoritmů je právě simulované žíhání.

Než začneme psát vlastní program, musíme si rozmyslet, co bude našim konfiguračním prostorem (tj. množinou možných stavů). V případě TSP to bude zřejmě množina všech okružních cest po N městech. Dále musíme zvolit „energií“, kterou budeme minimalizovat. Nejjednodušší volbou bude položit ji rovnu celkové délce cesty.

Ještě si musíme ujasnit, jak budeme provádět v našem systému „fluktuace“. Potřebujeme v každém kroku provádět malé změny konfigurace. Přírozenou volbou²⁰ je vybrat náhodně jistý úsek cesty a změnit směr, ve kterém jím cestující projde.

Když takovou změnu provedeme, vypočítáme novou energii (délku), zjistíme její změnu ΔE oproti energii v předchozím stavu a vypočítáme pravděpodobnost P , s jakou tuto fluktuaci

¹⁹⁾ Samozřejmě si můžeme pomoci nějakými chytrými úvahami, kterými předem vyloučíme zjevně nesmyslné možnosti, ale ani tak svou situaci moc nezlepšíme.

²⁰⁾ Použitou například v Press, W. H.: *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press 1992. <http://www.nr.com>

přijmeme (jinak se vrátíme k předchozímu stavu), jako

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right).$$

Je-li $P \geq 1$, změnu ponecháme vždy. V tomto vztahu T značí naši uměle zavedenou „teplotu“.

Popsaný krok budeme provádět mnohokrát za sebou a přitom budeme postupně snižovat teplotu, dokud se nestanou další změny v hodnotě energie natolik malými či málo pravděpodobnými, že by další pokračování výpočtu již nemělo smysl.

V předešlé větě, ačkoliv se může zdát zcela zřejmá a jasná, se ve skutečnosti skrývá největší problém při používání simulovaného žíhání. Určení optimálního průběhu snižování teploty (jejíž počáteční hodnota by měla být řádově rovna maximálnímu změnám energie, které lze v systému při jednom kroku očekávat) a celkového počtu kroků většinou vyžaduje jisté experimentování. Pokud totiž není průběh žíhání volen vhodně, můžeme touto metodou dostat dokonce horší výsledky, než by nám poskytla primitivní strategie zvolit vždy krok snižující energii.

Detailnější popis použití simulovaného žíhání pro řešení TSP včetně klíčových částí kódu bude možno nalézt ve studijním textu na webu. Pro zájemce o další informace o této metodě, kteří se nezaleknou trochy teorie, doporučujeme článek²¹ na internetu.

Úloha III. S ... bloudění námořníka, pí-obvod a epidemie v Praze

- a) Integrujte metodou Monte Carlo funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Zkuste také numericky určit hodnotu tohoto integrálu od $-\infty$ do $+\infty$.

Návod: Funkce je symetrická vůči počátku, čili ji stačí integrovat na intervalu $[0, +\infty)$.

Proveďte substituci $x = 1/t - 1$, čímž změníte meze integrálu od 0 do 1.

- b) Opilý námořník vstoupil na molo dlouhé 50 kroků a široké 20 kroků. Jde směrem k pevnině. Při každém kroku dopředu však zavravorá zároveň o krok nalevo nebo napravo. Zjistěte, s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.

Námořník měl štěstí a neutopil se. Druhou noc se však opět vydává opilý z lodi na pevninu. Tentokrát však vane stálý vítr o rychlosti $3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, který způsobí to, že na jednu stranu udělá krok s pravděpodobností 0,8 a na druhou stranu s pravděpodobností 0,2. Zjistěte, s jakou pravděpodobností námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se.

Třetí noc se námořník opět vydává opilý na pevninu. Tentokrát však vane proměnlivý vítr. Vane podle normálního rozdělení se střední hodnotou $0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a disperzí $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Zjistěte, s jakou pravděpodobností tentokrát námořník dojde až na břeh a s jakou pravděpodobností spadne do moře a utopí se. Můžete uvažovat, že námořník jde pomalu a setrvačností větru lze zanedbat. Komu by to vadilo, nechť vymyslí, jak by vítr v po sobě jdoucích krocích koreloval.

- c) Máme k dispozici 50 rezistorů o odporech 50Ω a chceme z nich sestavit obvod, jehož celkový odpor v ohmech bude co nejbližší číslu π . Pokuste se metodou simulovaného žíhání najít obvod, který by tomuto požadavku vyhovoval co nejlépe.

Pro určování celkového odporu obvodu si můžete přizpůsobit program, který najdete na našich webových stránkách.

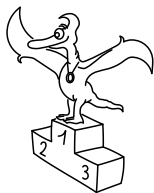
²¹) Ingber, L.: *Simulated Annealing: Practice versus Theory*.

http://www.ingber.com/asa93_sapvt.ps.gz

Pokud se na tento úkol necítíte, můžete zkusit zahrnout do problému obchodního cestujícího zakřivení zemského povrchu a pokusit se jej vyřešit pro nějakou konkrétní množinu měst na Zemi (například všechna hlavní města v Evropě, USA atd.).

- d) Zkoumejte vývoj epidemie v Praze, uvažujte 1 milión obyvatel. Intenzita nákazy β je $0,4/1\,000\,000$ za den, uzdravení γ je $(\text{čtyři dny})^{-1}$. Na počátku je nakaženo 100 lidí. Porovnejte průběh epidemie při očkování předem dvaceti procent lidí s průběhem epidemie při očkování až během epidemie s rychlostí půl procenta denně. A také s průběhem bez očkování. Konec epidemie vyhlásíme, bude-li méně jak 20 lidí nemocných.

Je spousta údajů, které můžete z počítačové simulace získat. Krom středovaného průběhu epidemie uveďte pro zajímavost též graf, kde ukážete prvních pět náhodných simulací. Dále můžete sledovat fluktuace. Můžete též výsledky porovnat s deterministickým modelem, když neuvážete náhodnost nakažení. Těžištěm hodnocení bude, kolik různých zajímavých dat dokážete hezky zpracovat.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	5	4	4	4	7	6	33	<i>100</i>	33
1. Stanislav Fořt	G P. de Coubertina, Tábor	2	2	4	3	1	2	2	16	<i>48</i>	16
2. Tomáš Volf	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	2	4	2	–	–	13	<i>65</i>	13
3. Ji-Hong Min	1st Internat. School, Ostrava	3	2	3	1	1	2	–	12	<i>44</i>	12
4. Petra Kňážděková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	3	1	4	–	–	11	<i>55</i>	11
5. Zuzana Bogárová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	3	–	2	–	–	8	<i>73</i>	8
6.–7. Ondřej Maslikiewicz	SPŠ Hronov	2	2	–	3	–	–	–	7	<i>58</i>	7
Barbora Veselková	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	1	3	1	–	–	–	7	<i>44</i>	7
8. Michal Pokorný	G Děčín	–	–	–	–	–	–	4	4	<i>67</i>	4
9.–10. Tomáš Bartoněk	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	1	–	–	1	–	1	–	3	<i>21</i>	3
Ondřej Palla	SPŠ Hronov	0	–	1	–	0	2	–	3	<i>17</i>	3

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	5	4	4	4	7	6	33	<i>100</i>	33
1. Zuzana Dočekalová	G Ostrava - Hrabůvka	2	2	4	4	4	6	6	28	<i>85</i>	28
2.–3. Petr Čagaš	G Lesní čtvrť, Zlín	3	4	4	4	1	5	6	27	<i>82</i>	27
Petr Ryšavý	G J. Heyrovského Praha	3	3	3	3	4	5	6	27	<i>82</i>	27
4. Ján Bogár	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	3	3	4	3	–	–	16	<i>80</i>	16
5. Kateřina Honzáková	G Jana Keplera, Praha	3	–	4	4	–	3	–	14	<i>78</i>	14
6. Tereza Steinhartová	G J. K. Tyla, Hradec Králové	3	2	4	4	–	–	–	13	<i>81</i>	13
7. Martin Chudjak	SPŠ Martin	2	1	4	1	1	3	–	12	<i>44</i>	12
8.–9. Tereza Jeřábková	SPŠ a SOU Letohrad	3	–	–	4	–	4	–	11	<i>79</i>	11
Veronika Paštyková	G J. Ortena, Kutná Hora	2	1	3	2	3	–	–	11	<i>55</i>	11
10. František Steinhäuser	G Dačice	2	1	3	1	3	–	–	10	<i>50</i>	10
11.–14. Jana Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	–	3	–	–	4	–	9	<i>64</i>	9
Jakub Klemsa	G J. Vrchlického, Klatovy	3	–	–	3	3	–	–	9	<i>82</i>	9
Lukáš Kripner	G T. G. Masaryka, Litvínov	3	–	–	4	2	–	–	9	<i>82</i>	9
Lada Peksová	G Ch. Dopplera, Praha	2	–	3	4	–	–	–	9	<i>82</i>	9
15. Michal Müller	G Jevíčko	3	–	–	3	–	–	–	6	<i>86</i>	6
16.–17. Adam Mohammad	1st Internat. School, Ostrava	1	–	2	–	2	–	–	5	<i>45</i>	5
Anna Vacířová	VOŠ a SPŠ G Evropská Praha	0	1	1	2	1	–	–	5	<i>25</i>	5
18. Irena Pavličková	G a SOŠ Frýdek-Místek	3	–	–	–	–	–	–	3	<i>100</i>	3
19.–21. Michal Bajcar	G F. Živného, Bohumín	2	–	–	–	–	–	–	2	<i>67</i>	2
Simona Laňková	G Havlíčkův Brod	0	1	–	1	–	–	–	2	<i>17</i>	2
Michal Španko	G Havlíčkův Brod	–	2	–	–	–	–	–	2	<i>40</i>	2

Kategorie třetích ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	5	4	4	4	7	6	33	<i>100</i>	33
1. Pavel Malý	G Ch. Dopplera, Praha	3	–	4	4	4	6	6	27	<i>96</i>	27
2. Michal Maizner	G Žilina - Vlčince	3	3	4	4	2	7	3	26	<i>79</i>	26
3. Martin Výška	G Nad Alejí, Praha	2	3	3	4	4	–	7	23	<i>88</i>	23
4.–6. Michael Hahl	G Ch. Dopplera, Praha	3	2	3	4	3	7	–	22	<i>81</i>	22
Karel Kolář	G Špitálská, Praha	3	–	4	4	–	7	4	22	<i>92</i>	22
Hana Šustková	G Trutnov	3	2	4	4	4	2	3	22	<i>67</i>	22
7. Michal Koutný	G Masarykovo nám., Třebíč	3	3	4	4	2	4	–	20	<i>74</i>	20
8. Alžběta Pechová	SPŠ strojnická Vsetín	3	1	3	3	2	3	4	19	<i>58</i>	19
9. Peter Ondráč	G Humenné	3	2	3	4	3	–	–	15	<i>75</i>	15
10. Jakub Töpfer	G Jana Keplera, Praha	3	3	3	4	–	–	–	13	<i>81</i>	13
11.–13. Lukáš Cimpl	G Frenštát pod Radhoštěm	3	2	3	–	2	2	–	12	<i>52</i>	12
Zuzana Chlebounová	G M. Kopernika, Bílovec	2	3	–	–	–	7	–	12	<i>80</i>	12
Alžběta Kadlecová	G Jana Keplera, Praha	3	2	–	4	–	3	–	12	<i>63</i>	12
14.–15. Josef Tkadlec	G Jana Keplera, Praha	2	3	3	3	–	–	–	11	<i>69</i>	11
Martin Zahradník	G Třeboň	3	1	–	3	4	–	–	11	<i>69</i>	11
16. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	2	2	1	–	–	4	–	9	<i>47</i>	9
17. Jana Figulová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	4	–	–	7	<i>100</i>	7
18.–19. Václav Obrázek	G Jana Keplera, Praha	2	–	–	4	–	–	–	6	<i>86</i>	6
Ondřej Růžička	G a SOŠ Hořice	3	1	1	1	–	–	–	6	<i>38</i>	6
20.–21. Miroslav Klímš	G M. Kopernika, Bílovec	–	–	–	–	–	–	5	5	<i>83</i>	5
Dana Suchomelová	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	–	–	–	2	–	–	5	<i>71</i>	5
22.–23. Eva Hašková	G a SOŠ Úpice	1	2	–	1	–	–	–	4	<i>33</i>	4
Vojtěch Tuma	G Roudnice nad Labem	2	2	–	–	–	–	–	4	<i>50</i>	4

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	5	4	4	4	7	6	33	<i>100</i>	33
1. Jakub Michálek	G Jana Keplera, Praha	4	2	4	5	4	5	6	30	<i>91</i>	30
2. Jan Hermann	G Český Krumlov	4	5	–	4	4	–	7	24	<i>109</i>	24
3. Juraj Hartman	Jiráskovo G Náchod	3	–	4	4	–	–	1	12	<i>71</i>	12
4. Lukáš Ledvina	PČG Karlovy Vary	3	3	–	4	–	–	–	10	<i>83</i>	10
5. Prabhat Rao Pinnaka		3	1	3	–	1	–	–	8	<i>50</i>	8
6. Lukáš Drápal	G Ch. Dopplera, Praha	–	–	3	4	–	–	–	7	<i>88</i>	7



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz