Milí řešitelé!

Nový ročník FYKOSu se rozbíhá a chtěli bychom dát příležitost všem studentům ještě se zapojit do řešení našeho semináře. Pokud je ve vašem okolí stále někdo, koho fyzika baví, ale o našem semináři neví nebo si myslí, že FYKOS není pro něj, neboť ho řeší jenom vítězové celostátního kola olympiády, vysvětlete mu prosím, že to není pravda.

Novým řešitelům bychom chtěli vzkázat, ať se nelekají toho, že v zadání úloh se často neobjeví ani jediná zadaná veličina, narozdíl od středoškolských učebnic, kde bývají zadané právě všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Ať už uvažuješ o studiu na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy nebo ne, přijď nás navštívit na Dnu otevřených dveří, který se koná v úterý 27. listopadu (bližší informace na `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`). Potkáš se s organizátory i účastníky FYKOSu. Na místě bude k dostání ročenka 20. ročníku, která se právě tiskne.

Připomeňme na závěr několik organizačních záležitostí.

Řešení úloh 1. série s průběžnou výsledkovou listinou dostanete se zadáním 3. série během prosince. Ať už svá řešení posíláte poštou či emailem, nezapomínejte se na každou stránku (papíru či dokumentu) podepsat. Přiřadit nepodepsané řešení k řešiteli se nám nemusí vždy podařit.

Aktuální dění v semináři sledujte na našich www stránkách `http://fykos.mff.cuni.cz`. Naleznete tam zadání a řešení úloh, aktuální pořadí, diskusní fórum a mnoho dalších věcí.

Přejeme plno nápadů při řešení úloh a s těmi pilnými z vás se těšíme na viděnou na jarním soustředění.

Organizátoři

Zadání II. série

Termín odeslání: 10. prosince 2006

Úloha II . 1 ... *flusanec*

Představte si, že jedete rychlíkem. Díváte se ven z otevřeného okna a sledujete okolní krajinu. O tři okna dál po směru jízdy nějaký zákeřný lump vyplivne žvýkačku. Kolik času máte, aby jste stihli uhnout? Samozřejmě přepokládáme, že žvýkačka je dokonalá koule a z okna nebyla vyhozena, nýbrž vlastně položena do proudu vzduchu.

Úloha II . 2 ... *zmoklé autíčko*

Navrhněte sklon a tvar předního skla automobilu tak, aby z něj kapky dešťové vody při rychlosti auta 80 km/h nestékaly dolů, ale do stran. Ověřte, zda váš výsledek odpovídá skutečnosti. Co dalšího určuje sklon čelního skla?

Úloha II . 3 ... *víno teče proudem*

Vinaři a řidiči kamionu dobře znají šikovné přelévání kapalin z těžkých nádob. Vinař Ignác chce stočit víno z jednoho demižonu do druhého. Nejprve položí prázdný demižon na zem a plný do výšky Δ. Potom demižony propojí hadičkou a trochu z ní zespodu potáhne. Víno začne samovolně proudit do spodního demižonu. Za jak dlouho bude všechno víno stočeno? Předpokládejte, že demižony jsou stejné válce poloměru R a výšky H.

Úloha II . 4 ... *nabitá anténa*

Dva stejné náboje umístíme na oba konce tuhé nevodivé tyčky. Jaký výkon budeme potřebovat na otáčení tyčky konstantní úhlovou rychlostí kolem osy procházející středem tyčky. Tření zanedbejte.

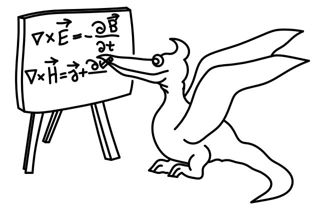
Úloha II . P ... *zachraňte bublinu?*

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat . . . Když však podle stavové rovnice ideálního plynu vypočítáte hustotu vzduchu v bublině, zjistíte, že je bublina těžší než voda. Je to možné?

Pokud souhlasíte, vysvětlete svoji odpověď. Pokud nesouhlasíte, vypočítejte, jaké budou parametry bubliny (především hustota).

Úloha II . E ... *bubo bubo*

Experimentálně prověřte tvrzení, že vinnou rotace Země se na severní (jižní) polokouli vír vody vypouštěné otvorem otáčí doprava (doleva). Mají-li mít vaše závěry váhu, musíte provést dostatečný počet měření v různých podmínkách.



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Parciální diferenciální rovnice

Jak jsou ty diferenciální rovnice lehké!

V minulé kapitole seriálu jsme užitím druhého Newtonova pohybového zákona a gravitačního zákona sestavili pohybové rovnice pro nebeská tělesa. Řešili jsme je numericky. Což znamená, že jsme pomocí většího množství jednoduchých aritmetických operací, jako je sčítání a násobení, mohli vypočítat, jak se budou vyvíjet dráhy tří obíhajících se hvězd.

Tento postup je aplikovatelný na libovolný systém konečného počtu hmotných bodů. Známe-li působící síly a počáteční podmínky, stačí sestavit rovnice dle pohybového zákona, napsat je do počítače, stisknout klávesu a světe div se.

Zkušenější si mohli všimnout, že přitom řešíme (integrujeme) diferenciální rovnice druhého řádu. Těm, kteří ještě nevědí, co je to derivace, doporučuji nahlédnout do literatury[1].

K řešení diferenciální rovnice jsme použili Eulerovy metody, jako metody velmi intuitivní a velmi jednoduché. Byli samozřejmě vyvinuty i jiné, rychlejší a přesnější. Jako velmi dobrá, silná a stále ještě jednoduchá, se ukázala metoda Rungeho-Kuttova. Popsali jsme vám ji ve FYKOSím Úvodu do programování[2]. Abychom ji mohli použít, nepotřebujeme nutně rozumět jejímu odvození. Velmi ji doporučujeme, neboť dává mnohem přesnější výsledky než metoda Eulerova.

---

[1] Derivace je podstatou diferenciálních rovnic. Jako literaturu uvádím Feynmanovy přednášky z fyziky, článek Diferenciální počet ve fyzice z knihovničky Fyzikální olympiády, případně seriál o matematickém aparátu fyziky XVI. ročníku FYKOSu.

[2] k nalezení na FYKOSím webu

Parciální diferenciální rovnice

Dosud jsme zmiňovali pouze obyčejné diferenciální rovnice. Budeme-li studovat jevy v látkách, jako šíření vln, proudění tepla nebo třeba intenzitu elektrického a magnetického pole, přivede nás fyzika k trošku jiným, tzv. parciálním diferenciálním rovnicím.

Diferenciální rovnice jsou matematické objekty se stejnými vlastnostmi, jaké mají algebraické rovnice. Narozdíl od nich zde však nevystupují jako proměnné čísla, ale funkce a jejich derivace. Nejznámější diferenciální rovnicí je druhý Newtonův pohybový zákon: hmotnost m krát zrychlení $\boldsymbol{a}$ hmotného bodu, neboli druhá derivace polohového vektoru podle času $\ddot{\boldsymbol{r}}$, se rovná působící síle $\boldsymbol{F}$.

$$m\boldsymbol{a} = m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}\,. \tag{1}$$

Matematicky řečeno, $\boldsymbol{r}$ je taková funkce času, kterou když dvakrát zderivujeme a přenásobíme konstantou m, získáme funkci $\boldsymbol{F}$.[3] Tato diferenciální rovnice je obyčejná, neboť v ní vystupují pouze obyčejné derivace. My ovšem můžeme zavést i jiné derivace.

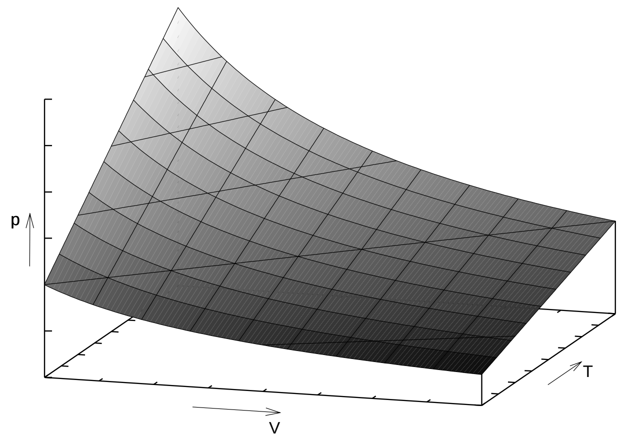
Mějme například ideální plyn. Jeho stavovou rovnici ze střední školy bezpečně znáte

$$pV = nRT\,,$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem, n je počet molů částic plynu, R je univerzální plynová konstanta a T je termodynamická teplota. Nás teď může zajímat, jak se mění za různých okolností tlak. Vyjádříme jej proto z předchozí rovnice

$$p(T, V) = nR\,\frac{T}{V}\,.$$

Tlak plynu je funkcí dvou proměnných, a to teploty a objemu. Pokud bychom připustili, že se počet částic plynu může měnit, pak dokonce tří, tuto možnost však nyní uvažovat nebudeme.



Obr. 1. PVT diagram pro ideální plyn

Ptáme se, jaká je malá změna tlaku dp při malé změně teploty dT a při konstantním objemu a počtu částic. Tato změna je při malém zvýšení teploty určitě přímo úměrná velikosti dT a konstantou úměrnosti je derivace tlaku podle teploty. Protože derivujeme pouze podle jedné proměnné, nazveme tuto derivaci parciální a formálně ji zapíšeme pomocí symbolu ∂, kterému můžeme říkat „parciátko".

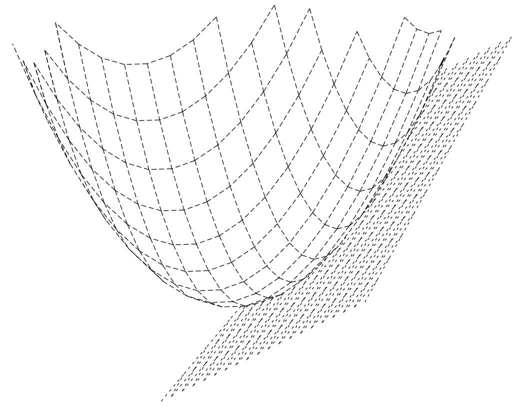
$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}\right)_{V,n=\mathrm{konst}} \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V}\,,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{T,n=\mathrm{konst}} \rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}\,.$$

[3] Fyzikálně odsud například plyne, že nepůsobí-li na hmotný bod žádné síly, pak setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. První pohybový zákon je tedy existenční! Tvrdí, že existuje alespoň jeden inerciální vztažný systém, ve kterém izolovaný hmotný bod setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. To, že těchto systémů je nekonečně mnoho a jsou všechny stejně dobré, byla kdysi potíž, kvůli které musela vzniknout mechanika relativistická.

Můžeme vypočítat i parciální derivaci podle V a tzv. úplnou derivaci (totální diferenciál) funkce, která je zobecněním obyčejné derivace pro funkce více proměnných. Geometrickým významem obyčejné derivace je směrnice tečny ke grafu (křivce) funkce. Úplná derivace určuje tečnou plochu, či dokonce nadplochu ve vícerozměrném případě, ke grafu (ploše či nadploše) funkce. Zní to velice učeně, ale z obrázku lze nahlédnout, že jde pouze o naprosto přirozené zobecnění derivace obyčejné.

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial T}\,\mathrm{d}T + \frac{\partial p}{\partial V}\,\mathrm{d}V = \frac{nR}{V}\,\mathrm{d}T - \frac{nRT}{V^2}\,\mathrm{d}V\,.$$



Obr. 2. Tečná plocha ke grafu funkce více proměnných

Existuje velice elegantní zápis vektorových parciálních diferenciálních rovnic lidově zvaný „nabliáda“. Rozhodli jsme se pojednat o něm ve zvláštním článku, který najdete na FYKOSím webu. Tento text, přirozeně pojmenovaný Nabliáda, občas překračuje nutnou znalost pro čtení seriálu, navíc se může ještě časem rozrůst.

Vedení tepla

Zůstaňme ještě chvíli u termodynamiky. Uvažujme kovovou tyčku o jednotkovém průřezu, kterou na jednom konci držíme mokrým hadrem na teplotě T_1. Druhý konec strčíme nad plamen, čímž jej zahříváme na teplotu T_2. Co se bude dít?

Tyčkou začne proudit teplo Q. Všimněme si, že fyzikové značí teplo zpravidla stejným písmenem, jako se značí elektrický náboj. Tuto souvislost hned využijeme. Označme si definitoricky

$$I \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde dQ je malé množství tepla, které za malý časový interval dt prošlo jednotkovou plochou. Nově zavedenou veličinu I pojmenujeme tepelný tok[4]. Ta se ukazuje být přímo úměrná teplotnímu gradientu, není-li příliš velký. Této větě se říká Fourierův zákon. Gradient je rozdíl teplot v místech $x + \mathrm{d}x$ a x dělený jejich vzdáleností dx.

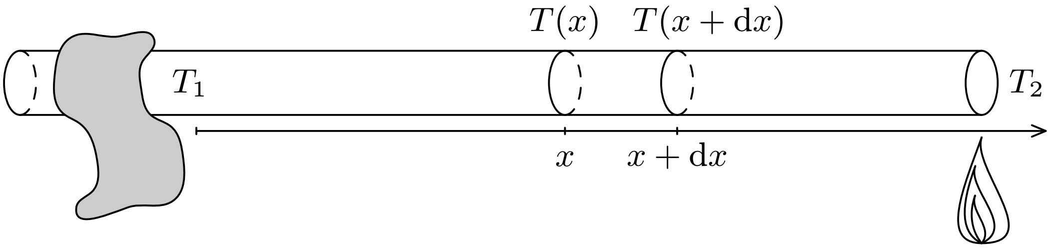
$$I(x) \sim \frac{T(x + \mathrm{d}x) - T(x)}{\mathrm{d}x}\,.$$

Abychom tvrzení elegantně matematicky zapsali, zaveďme si teplotu $T(x,t)$ jako funkci dvou proměnných, která říká, jaká je teplota tyčky v místě x v čase t. Teplotní gradient je potom $\partial T(x,t)/\partial x$. Gradient též značíme symbolem ∇T a můžeme jej zobecnit do více rozměrů. Je to vektor kolmý k hladinám (plochám) o stejné teplotě a má směr největšího vzrůstu. Rozmyslete si, zda je orientovaný ve směru, či proti směru proudění tepla.

$$I = -\lambda \nabla T = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,.$$

Materiálovou konstantou úměrnosti je tepelná vodivost λ. Samozřejmě se s teplotou mírně mění, my to však v našem modelu zanedbáme. Kdyby vás to trápilo, bude jen dobře, pokud se pokusíte při počítačovém modelování tento vliv započítat.

[4]) Tepelný tok má význam tepla, které projde jednotkovým průřezem za jednotku času.



Obr. 3. Vedení tepla v kovové tyčce

Pokusme se odpovědět na otázku, co se stane, je-li ∇T v nějakém okamžiku t všude stejný. Například to znamená, že tyčkou proudí všude stejně velký tepelný tok. Matematicky to lze zapsat takto

$$\frac{\partial \nabla T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_t = \mathrm{konst} \quad \Rightarrow \quad I(x)_t = \mathrm{konst}\,.$$

Na jednom konci ohříváme plamenem tyčku na konstantní teplotu T_2 a tyčka přijímá tepelný tok I, který ustáleně proudí na druhý konec. Zde tyčku chladíme na teplotu T_1 a odebíráme stejně veliký tok I. Teplota tyčky se s časem už nemění ($\partial T/\partial t = 0$). Byla tudíž dosažena termodynamická rovnováha.

Došli jsme k závěru, že teplotní rozdělení systému v rovnováze splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0\,,$$

Matematickým výsledkem je slavná Laplaceova rovnice. K zápisu lze užít „nabliády", protože toto tvrzení neplatí jen v jednom rozměru, ale i obecně ve více rozměrech. Například v rovině má tvar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0\,.$$

Obecně Laplaceovu rovnici zapisujeme

$$\nabla^2 T = 0\,.$$

Systém však v rovnováze nebyl od začátku. Můžeme předpokládat, že tyčka byla docela rovnoměrně prohřátá, než jsme ji začali opékat. Pak se na jednom konci velice rychle zahřívala a nějakou dobu trvalo, než teplo doteklo až na druhý konec. Víme tedy, že $\partial^2 T/\partial x^2$ se nerovná vždy nule. Ale čemu? Zřejmě by matematicky mělo platit

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)\,. \tag{2}$$

Jak však fyzikálně interpretovat pravou stranu rovnice? Nemohli bychom si pomoci nějakou analogií s elektrickým nábojem? Uvědomme si, že v každém místě elektrického obvodu prochází vždy stejný proud (nemění-li se vlastnosti obvodu, jako je například odpor potenciometru). Proč? Protože jinak by se v nějaké části obvodu kumuloval elektrický náboj a k tomu nedochází, neboť elektrické náboje stejného znaménka se silně odpuzují.

Teplo v tyčce se však shromažďovat může. Vynásobíme-li pravou stranu $\mathrm{d}x$, pak se bude rovnat rozdílu tepla $\mathrm{d}Q'$, které vteklo plochou o souřadnici x a vyteklo plochou v $x + \mathrm{d}x$ v krátkém časovém intervalu $\mathrm{d}t$. Dobře si rozmyslete znaménko.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t}\,.$$

Hromadění tepla se projeví zvětšením teploty T. Píchneme-li tedy teploměr do sice libovolného, avšak pevného bodu x, teplota se tam bude měnit. Zapíšeme proto přírůstek teploty za malý časový interval pomocí parciální derivace

$$\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t} \sim \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,.$$

Závisí to přímo úměrně na hmotnosti, která se zde rovná délkové hustotě tyče ϱ vynásobené délkou $\mathrm{d}x$, a na tepelné kapacitě C, čili

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t} = C\varrho\,\frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,.$$

Promyslíme-li si dobře zmíněné fyzikální argumenty, tak jsme de facto odvodili rovnici vedení tepla. Zbývá už jen formálně rovnici integrovat (vykrátit diferenciály $\mathrm{d}x$) a vrátit se k rovnici (2). (Proveďte sami!) Výsledkem je rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k\,\frac{\partial T}{\partial t}\,,$$

kde $k = C\varrho/\lambda$. Úloha o vedení tepla je v izotropním prostředí prostorově invariantní, čili je symetrická ve všech směrech, a proto platí

$$\nabla^2 T = k\,\frac{\partial T}{\partial t}\,.$$

Tuto rovnici můžeme ještě trochu zobecnit pro případ, kdy se v objemu, v němž vedení tepla vyšetřujeme, vyskytují nějaké vnější zdroje tepla (v materiálu může například probíhat chemická reakce uvolňující teplo). Tyto zdroje můžeme charakterizovat hustotou výkonu na jednotkový objem p.

Ve výrazu pro $\mathrm{d}Q'/\,\mathrm{d}t$ se pak objeví dodatečný člen $-p\,\mathrm{d}x$ a rovnice vedení tepla pak bude mít tvar

$$\nabla^2 T = k\,\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\lambda}\,p\,.$$

Vyšetřujeme-li jen rovnovážné rozložení (tj. $\partial T/\partial t = 0$), pak dostaneme takzvanou Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\lambda}\,p\,. \tag{3}$$

Elektrostatika

Další typickou úlohou vedoucí k řešení parciálních diferenciálních rovnic je hledání elektrostatického potenciálu při zadaném rozložení nábojů (nebo obecněji při zadaných okrajových podmínkách).

Jen pro připomenutí poznamenejme, že potenciál je veličina charakterizující elektrické pole[5], která v každém bodě prostoru vyjadřuje potenciální energii, jakou by měl zde umístěný jednotkový náboj. Potenciál obyčejně značíme φ a mezi ním a intenzitou elektrického

5) Pouze v jednodušších případech – například v elektrostatice. Obecně k popsání elektrického pole potřebujeme i tzv. vektorový potenciál.

pole $\boldsymbol{E}$ (ta vyjadřuje sílu, která by v daném bodě působila na jednotkový náboj) platí vztah[6]

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi\,.$$

Abychom mohli napsat nějakou rovnici svazující potenciál φ s rozložením nábojů v prostoru, musíme se uchýlit ke známým Maxwellovým rovnicím, konkrétně pak k takzvanému Gaussovu zákonu. Ten zjednodušeně řečeno říká, že zdrojem elektrického pole je náboj. Tedy pokud je v určité oblasti prostoru obsažen celkový náboj Q, pak tok elektrického pole hranicí této oblasti je úměrný tomuto náboji. Matematicky lze toto tvrzení elegantně zapsat pomocí operátoru nabla jako

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\,.$$

Zde ϱ značí objemovou hustotu náboje a $1/\varepsilon_0$ je konstanta úměrnosti (ε_0 je tzv. permitivita vakua). Dosadíme-li do Gaussova zákona vyjádření $\boldsymbol{E}$ pomocí potenciálu, dostaneme

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon_0}\,. \tag{4}$$

Vyšla nám rovnice, podle níž má být Laplace z neznámé funkce roven dané funkci. S takovou rovnicí jsme se už setkali při řešení problému vedení tepla. Roli teploty nyní hraje potenciál a roli hustoty tepelných zdrojů hustota náboje.

K jejímu řešení můžeme samozřejmě použít stejné postupy jako pro řešení rovnice vedení tepla. Jediná novinka, kterou nám elektrostatika přinese, je jiný možný druh okrajových podmínek. Zatímco při vedení tepla jsou většinou dány hodnoty neznámé funkce (teploty) na hranici uvažované oblasti, nyní se můžeme setkat i s následujícím případem.

Do elektrostatického pole (generovaného například nějakými plochami udržovanými na daném potenciálu) vložíme dokonale vodivý předmět. Jak bude nyní vypadat průběh potenciálu? Zjevně musíme opět řešit Poissonovu rovnici s předepsanými hodnotami potenciálu na daných plochách, avšak navíc musíme zajistit, aby potenciál na povrchu vloženého vodiče byl konstantní. Proč? Kdyby náhodou nebyl, podle vztahu $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ by existovala nenulová složka elektrického pole tečná k povrchu vodiče, která by v něm samozřejmě způsobila vznik proudů, a nešlo by tedy o statický případ.

Numerické metody řešení PDR

Parciální diferenciální rovnice se řeší úplně stejně jako obyčejné diferenciální rovnice. Jenom je zapotřebí postup zobecnit do více rozměrů. Připomeňme, jakým kouzlem jsme získali numerický předpis pro derivaci funkce jedné proměnné.

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,.$$

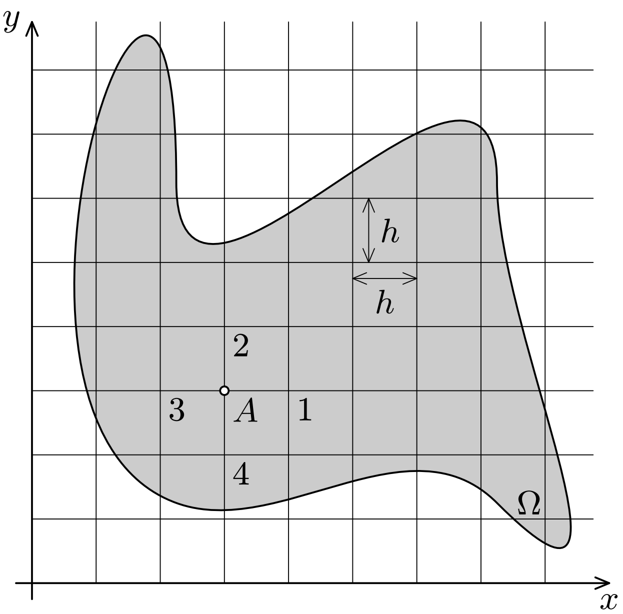
[6] Zkuste se pořádně (klidně i na celý týden) zamyslet nad tím, že tepelný tok a elektrického pole $\boldsymbol{E}$ je vlastně téměř úplně to samé. Jsou navíc v mnoha aspektech ekvivalentní s přirozeným prouděním vody. Jediným zásadním rozdílem zůstává, že zdrojem proudění vody je čerpadlo, zdrojem elektrického pole je elektrický náboj a zdrojem tepla je třeba mikroprocesor vašeho počítače. Pochopíte-li proudění vody, pochopíte elektrostatiku, stejně tak vedení tepla nebo například difúzi, kde částice „tečou“ proti koncentračnímu gradientu. Tato analogie se projevuje i tím, že výsledné rovnice budou mít úplně stejný matematický tvar. K pochopení vám pomůže význam divergence, o kterém píšeme v Nabliádě.

Funkce $f(x)$ zobrazuje x z nějaké oblasti Ω na obor funkčních hodnot, který se značí $f(\Omega)$. Oblast Ω je v jednorozměrném případě podmnožinou osy reálných čísel $\mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že jde o interval. Pomyslně jsme si jej rozdělili na malinkaté úsečky délky h.

O něco výhodnější je numericky počítat derivaci pomocí symetrického vztahu, kdy získáme de facto hodnotu derivace uprostřed malých úseček.

$$f'(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}\,,$$

Přesnost výpočtu závisí na velikosti h. Otázka na rozmyšlenou: Zvolíme-li si menší h, bude numerický výpočet derivace přesnější? Platí to obecně? Vaši odpověď můžete podrobit počítačovému experimentu nejlépe nezávislém na vyšetřované funkci.



Obr. 4. Rozdělení oblasti Ω na čtverečky

Ve vícero rozměrech budeme mít kupříkladu funkci $g(x,y)$ pro jednoduchost jen dvou proměnných x a y, $(x,y) \in \Omega$. Oblast Ω bude nyní část roviny, kterou si zase rozdělíme třeba na malé čtverečky (někdy se může hodit i jiné dělení). Nebo si můžete představit, že na Ω hodíme síť. Derivace si rozepíšeme pomocí diferencí mezi jednotlivými uzly sítě. Jde o triviální aplikaci poslední rovnice, ovšem nejen „horizontálně“ ale i „vertikálně“. Ukážeme si to na příkladu Poissonovy rovnice[7], se kterou jsme se již setkali (rovnice (3) a (4)).

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \varrho\,,$$

kde ϱ je nějaká zadaná funkce také dvou proměnných $(x,y) \in \Omega$. Vyjádřeme si první a druhé derivace podle x a y v bodě $A = (a_x, a_y)$.

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_A = \frac{g(a_x + h/2, a_y) - g(a_x - h/2, a_y)}{h}\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_A = \frac{g(a_x + h, a_y) - 2g(A) + g(a_x - h, a_y)}{h^2}\,.$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_A = \frac{g(a_x, a_y + h/2) - g(a_x, a_y - h/2)}{h}\,, \qquad \left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_A = \frac{g(a_x, a_y + h) - 2g(A) + g(a_x, a_y - h)}{h^2}\,.$$

Označme si podle obrázku

$$g(a_x + h, a_y) = g(1)\,, \quad g(a_x, a_y + h) = g(2)\,, \quad g(a_x - h, a_y) = g(3)\,, \quad g(a_x, a_y - h) = g(4)$$

a zapišme výsledek

$$\left.\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right|_A + \left.\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right|_A = \frac{g(1) + g(2) + g(3) + g(4) - 4g(A)}{h^2} = \varrho(A)\,. \tag{5}$$

[7]) Poissonova rovnice je parciální diferenciální rovnice ve tvaru Laplaceův operátor na neznámou funkci g se rovná nějaká jiná daná funkce ϱ. Laplaceova rovnice je speciální případ $\varrho = 0$.

Právě pro rovinné případy se velice hodí Excel, který už jen v principu tím, že je to tabulkový kalkulátor, udělá spoustu práce za nás. Možnosti užití Excelu jsou velice limitované (rozhodně však záleží na úhlu pohledu), na druhou stranu se pro několik věcí hodí velice dobře. Vytvořili jsme v něm pro vás programy `laplace.xls` a `poisson.xls` vyšetřující elektrický potenciál jednoduchého dvojrozměrného problému se zadanými okrajovými podmínkami (první z nich v nepřítomnosti nábojů, řeší tedy Laplaceovu rovnici; druhý pak pro zadané rozložení náboje řeší Poissonovu rovnici).[8]

Máte-li pocit, že k numerickému vyřešení Poissonovy rovnice ještě něco postrádáme, máte pravdu. V jednorozměrném případě jsme se potřebovali „odpíchnout" od počátečních podmínek. Z poslední rovnice jsme schopni vypočítat $g(A)$ jen tehdy, známe-li již $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ a $g(4)$. Co s tím?

Zřejmě musíme zadat okrajové podmínky na hranici oblasti Ω. Například teplotu na povrchu předmětu, jehož tepelné rozložení počítáme. Nebo zkoumáme-li elektrické pole, které budí v prostoru nabitý elektrický vodič, tak víme, jaký je potenciál na jeho povrchu a taky víme, že velmi daleko od něj již bude pole téměř nulové. Okrajové podmínky jsou tedy hodnoty hledané funkce na hranici oblasti $\partial\Omega$, uvnitř které funkci počítáme.

Postupuje se tak, že se „odrazíme" od okrajových podmínek – hodnot funkce g v uzlech na hranici. Do všech ostatních uzlů dosadíme nulu.

$$g(x,y) = 0 \qquad \forall(x,y) \in \Omega \setminus \partial\Omega \,.$$

Máme tedy nějak zadány hodnoty funkce ve všech uzlech sítě. Přepočítáváme je postupně pomocí odvozeného numerického předpisu (5) všechny (až na hraniční body, ty musejí být samozřejmě pevné) pořád dokola, čímž konvergujeme ke správnému řešení.

Jde o jednoduchý a přirozený postup, který názorně pochopíte, pohrajete-li si s tím trochu v Excelu. Někdy může být potřeba v Excelu povolit rekurentní počítání hodnot.[9] On za odměnu provádí právě výše zmíněné mnohonásobné přepočítávání za nás, což je velice pohodlné.

Úloha II . S ... *porcování divokých rovin*

Skladování uranu

Palčivá otázka jaderné energetiky je skladování vyhořelého radioaktivního paliva. Většinou se skladuje ve válcových článcích ponořených ve vodní lázni, která drží jejich povrch na konstantní teplotě asi 20 °C. Na vás je nyní zjistit, jaké bude rozložení teploty v článcích tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm. Článek bude poměrně vysoký a proto nás zajímá rozložení tepla v příčném řezu. Uran bude zaujímat koncentrický kvádr se čtvercovou podstavou o hraně 5 cm. Ze zkušenosti s válcovými kapslemi víme, že bude mít konstantní teplotu okolo 200 °C.

Zahřívající se drát

Máme velmi dlouhý drát kruhového průřezu o poloměru r z materiálu o tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ. Přiložíme na něj konstantní elektrické napětí. Nechť je intenzita elektrického pole (tj. napěťový spád) uvnitř drátu konstantní, rovnoběžná s jeho osou a její

---

8) Naleznete jej jako vždy na našem webu v sekci Seriál.

9) V nabídce „Nástroje" vyberte položku „Možnosti". Otevře se okno, v němž musíte na záložce „Výpočty" zaškrtnout možnost „Iterace" (s nastavením si později můžete zkusit pohrát).

velikost budiž E. Pak drátem bude procházet proud o plošné hustotě $j = \sigma E$ a bude se vytvářet Jouleovské teplo s objemovým výkonem $p = \sigma E^2$.

Protože materiál drátu má nenulovou tepelnou vodivost, vytvoří se v něm jisté rovnovážné rozložení teploty, které – jak víme – splňuje Poissonovu rovnici $\lambda \nabla^2 T = p$. Předpokládáme, že okraj drátu udržujeme na dané teplotě T_0. Tím máme dánu okrajovou podmínku potřebnou k vyřešení rovnice. Vzhledem k symetrii problému se můžeme omezit na její řešení pouze ve dvou rozměrech – na průřezu vodiče (teplota jistě nebude záviset na posunutí podél osy vodiče). Nyní by již bylo jednoduché problém vyřešit popsanými metodami.[10]

My si však situaci maličko zkomplikujeme a budeme předpokládat (zcela oprávněně), že měrná elektrická vodivost σ závisí na teplotě. Budeme tedy mít rovnici typu $\nabla^2 T = f(T)$.

Pokuste se tuto rovnici numericky vyřešit pro nějakou danou závislost vodivosti na teplotě (můžete si ji najít v literatuře, na internetu, nebo si klidně nějakou vymyslet) a najít tak rozložení teploty na průřezu drátu. Můžete se pokusit měnit intenzitu elektrického pole E a nakreslit voltampérovou charakteristiku drátu, vyzkoušet více druhů závislostí $\sigma(T)$ (třeba pro polovodič, jehož vodivost s rostoucí teplotou na rozdíl od obyčejného kovu roste) atd.

Vaší iniciativě samozřejmě meze neklademe a těšíme na pěkné nápady.

Kapacita krychle

Vypočítejte kapacitu dokonale vodivé krychle o straně délky $2a$. Pokud se budete nudit, můžete zkusit kvádr (a třeba závislost kapacity na délkách jednotlivých stran), případně jiné geometrické objekty.

Nápověda. Kapacita je poměr náboje na krychli rozmístěného ku potenciálu povrchu krychle (za předpokladu, že potenciál v nekonečnu je nulový). Problém tedy lze řešit tak, že si zvolíme libovolně potenciál krychle, vyřešíme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 \varphi = 0$ vně krychle a vypočítáme celkový náboj na krychli užitím Gaussova zákona (tj. určením intenzity elektrického pole derivováním potenciálu a výpočtem jeho toku vhodně zvolenou plochou obklopující krychli).

Úplným řešením je vymyšlení vhodného fyzikálního modelu, návrh jeho numerického řešení a realizace této úlohy na počítači. Bodově ohodnotíme, pokud úlohu fyzikálně rozvážíte a okomentujete. Nějaký bod by se našel i za návrh algoritmu, který byste rádi počítači předložili.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

10) Jde o Poissonovu rovnici s konstantní pravou stranou, se kterou se můžeme setkat například v modelu proudění viskózní kapaliny potrubím a která je shodou okolností pro kruhový průřez jednoduše řešitelná analyticky.