Milí přátelé!

Vítáme vás v XXI. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Všechny informace o semináři naleznete v přiloženém letáku. Zde shrneme jen to nejdůležitější.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíru vaše jméno a příjmení, adresu pro korespondenci, e-mail, školu, třídu a rok maturity. Řešení každé úlohy pište na *zvláštní* papír formátu A4 a *všechny* papíry podepište. Není třeba posílat řešení všech úloh, řešitelé, kteří vyřeší vše, jsou výjimkou.

Další informace najdete také na `http://fykos.mff.cuni.cz`. Přejeme vám spoustu příjemných chvil strávených s naším seminářem. Na řešení úloh první série se těší

organizátoři

Zadání I. série

Termín odeslání: 15. října 2007

Úloha I . 1 ... *míhání krajiny*

Prozkoumejte skutečnost, že se při pohledu z jedoucího vlaku vzdálenější objekty na horizontu zdánlivě pohybují po okně pomaleji, zatímco sloupy u trati se jen tak mihnou. Jak závisí tato zdánlivá rychlost pohybu krajiny na její vzdálenosti od cestující veřejnosti?

Úloha I . 2 ... *zachraňte bublinu*

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina?

Úloha I . 3 ... *vážíme si Slunce*

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočtěte podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy.

Úloha I . 4 ... *zachraňte pivo*

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R. Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbít co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít.

Úloha I . P ... *orosená odměna aneb ať vám kozel neuteče*

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokrk, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná neobtížnější jej přeskočit?

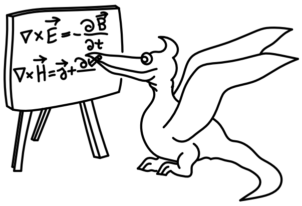
Úloha I . E ... *ulovte si hlemýždě*

Změřte, jaký nejpomalejší pohyb je schopné zaregistrovat lidské oko. Konkrétně měřte nejmenší okamžitou úhlovou rychlost vybraného objektu vzhledem k nehybnému pozadí, kterou vaše neustále otevřené oko dokáže zpozorovat během doby maximálně 5 s.

Pár tipů na pomalé pohyby: plazení hlemýždě, pohyb Slunce vůči obzoru při západu, otáčení hodinových ručiček, růst rostlin, růst živočichů, vzájemný pohyb hvězd . . .

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`



Seriál o počítačové fyzice

O čem to bude?

Začínáme se dnes zabývat pro vás nadmíru užitečným tématem – využitím počítače pro řešení nespočetného množství úloh, a to nejen fyzikálních problémů. Letošní seriál nás také naučí jinému pohledu na matematický aparát, který využijeme při výpočtech na počítači. To nám mimo jiné umožní snáze vypočítat derivace, integrály, řešit diferenciální rovnice. Zkrátka téměř cokoliv.

Sami jistě cítíte, že si budeme moci hrát s jakýmkoliv fyzikálním systémem, omezeni budeme jen naší silou a rychlostí procesorů. A i kdyby si kvůli vašim budoucím zběsilým výpočtům vaše mašinky přály raději odejít do křemíkového nebe, můžeme jejich práci rozdělit mezi více procesorů a spustit je na superpočítači, který běží v našem univerzitním výpočetním středisku.

Prvním přírodním jevem, který si vezmeme na mušku, je gravitační působení a jeho účinky. Důvody jsou k tomu dva. Klasický popis je pro každého jednoduše pochopitelný. Avšak již úloha, kdy na sebe gravitačně působí tři volná tělesa, například tři hvězdy, které kolem sebe obíhají, není analyticky řešitelná. Co to znamená? Že například dráhy těchto těles, dobu oběhu apod. můžeme vypočítat pouze použitím nějaké přibližné numerické metody[1] a zpravidla jen na počítači. Vývoj celého systému je třeba počítačově nasimulovat.

1) Neděste se prosím vás tohoto sprostého slova, naopak řešit něco numericky, tedy číselně, je principiálně jednodušší postup než obecný analytický, tedy odvozování vzorečků.

Takto modelovat se dá cokoliv. Bloudění opilého námořníka, požár v pralese, růst buněk, kvantová turbulence v supratekutém héliu (pokud byste to zvládli), časový vývoj naší Sluneční soustavy či crash test automobilu. Většinu času budeme věnovat simulacím čistě fyzikálním. Výběr témat můžete hodně ovlivnit sami, pokud se s námi během roku podělíte o své choutky.

A v čem to budeme dělat? Málokdo tuší, kolik se toho dá simulovat už v tom „blbém“ Excelu[2]. Bez problému nám v něm může rotovat celá hvězdokupa. Navíc díky FYKOSímu textu Úvod do programování, jejž doporučujeme stáhnout z našeho webu, si během hodinky úplně každý, kdo umí na počítači alespoň nainstalovat nějaký program, nainstaluje překladač Pascalu a naučí se nejnutnějším základům vyššího programování.

Těšíme se na vaše řešení. Uvítáme rovněž jakékoliv ohlasy. Napište nám prosím, co vám jde, co vám nejde a co byste se rádi dozvěděli! Uvědomujeme si, že je třeba si osvojit spoustu dovedností s počítačem, které se vám však budou ve fyzice i životě nesmírně hodit. A jako se vším je nejtěžší začít. Proto, abychom vás neodradili, a naopak vám umožnili se spoustu skvělého naučit, tak další díl se pokusíme ušít na míru vašim ohlasům. Jeho převážná většina může být pro ty pokročilejší opakováním, nicméně ti zajisté uznají, že dobře si osvojit esenciální základy programování je důležité. Věříme, že pak už to půjde všem místo po banánové slupce jako po másle.

Chtěl bych zmínit pár dobrých zdrojů. V knihovničce Fyzikální olympiády[3] je k nalezení text Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Dále se numerickými metodami zabývá seriál osmého ročníku FYKOSu. Určitě proto neváhejte navštívit náš Archiv ročenek. Dále mohu doporučit Houmpejdž Tomáše Ledvinky[4], počítačového fyzika z Ústavu teoretické fyziky, jenž na Matematicko-fyzikální fakultě přednáší Programování pro fyziky. Naším tématem se zabývá i devátá kapitola prvního dílu Feynmanových přednášek z fyziky.[5]

Kapitola 1: Gravitace

Pro simulování gravitačního působení nám postačí dvě věci. Newtonův druhý pohybový zákon, který říká, že síla je součinem hmotnosti a zrychlení

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}\,. \tag{1}$$

A Newtonův gravitační zákon. Ten praví, že velikost gravitační síly působící mezi dvěma hmotnými body je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

$$F = \varkappa\,\frac{M_1 M_2}{r^2}\,,$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti hmotných bodů, r je jejich vzdálenost a $\varkappa$ je gravitační konstanta. Její změřená hodnota je $(6{,}6742 \pm 0{,}0010) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$. Také po vás ve škole učitel křičel, abyste dodali, že tato gravitační síla je přitažlivá a působí ve směru spojnice hmotných bodů? Zapišme to vektorově

$$\boldsymbol{F} = -\varkappa\,\frac{M_1 M_2 \boldsymbol{r}}{r^3}\,. \tag{2}$$

2) Je to dle mého soudu snad nejlepší software, jaký kdy Microsoft udělal!

3) `http://fo.cuni.cz/index.php?file=25`

4) `http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka`

5) Zabřednout do tajů programování vám může pomoci knížka Pavla Töpfera: *Algoritmy a programovací techniky*, která obohacuje mnohé školní knihovny.

V čitateli zlomku jsme $\boldsymbol{r}$ označili tučně, abychom zdůraznili, že se jedná o vektor neboli o dvě souřadnice x a y určující velikost a směr spojnice hmotných bodů (třeba Měsíce a Země v rovině oběhu). Ve jmenovateli zlomku r značí pouze velikost vektoru $\boldsymbol{r}$, tzn. jeho délku, a proto zde zvýrazněno není. Reprezentuje-li například onu vzdálenost Měsíce od Země, bývá výhodné umístit těžší hmotný bod do počátku souřadnic. Z Pythagorovy věty pak získáme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, kde x a y jsou souřadnice polohy Měsíce.

Jak jste na střední škole definovali okamžitou (nikoliv průměrnou) rychlost? Jako změnu polohy (označíme $\Delta \boldsymbol{R}$) za velmi krátký časový úsek Δt, čili

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t}\,,$$

kde $\Delta \boldsymbol{R}$ chápeme jako změnu polohového vektoru. A co je zrychlení? Nic jiného než změna rychlosti za velmi krátký časový úsek

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\,.$$

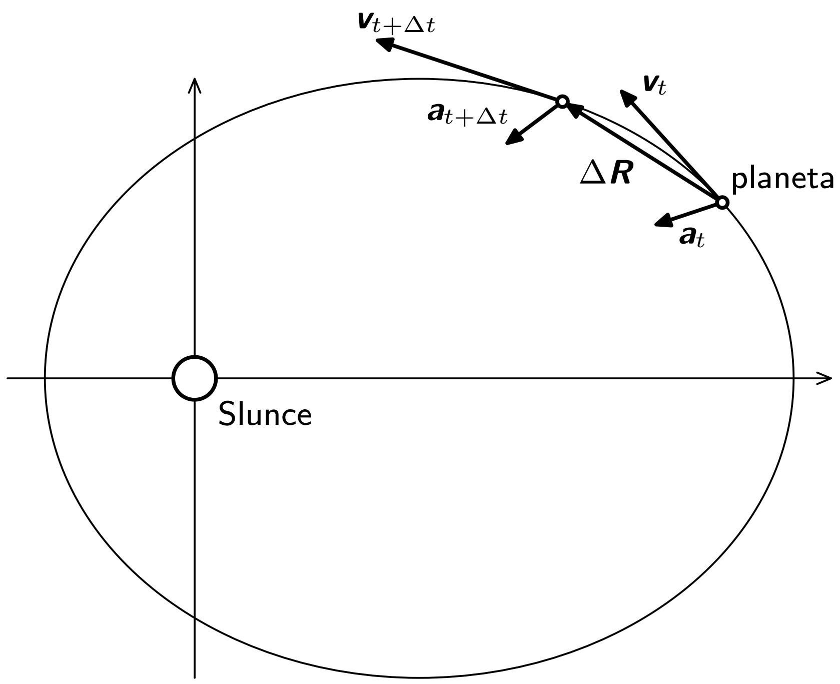
Pohyb planety kolem Slunce

Uvažme například planetu obíhající Slunce. Při numerickém modelování nejprve zvolíme počáteční podmínky systému v čase t_0:

- počáteční polohu $\boldsymbol{R}_{t_0}$ planety, například $[-0{,}6; 0]$ (první číslo $-0{,}6$ je x-ová souřadnice polohového vektoru a druhé je y-ová souřadnice), pro jednoduchost zatím neuvádíme jednotky,
- dále počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_{t_0}$ planety, například $[0; 1]$ (čili $v_x = 0$ a $v_y = 1$).

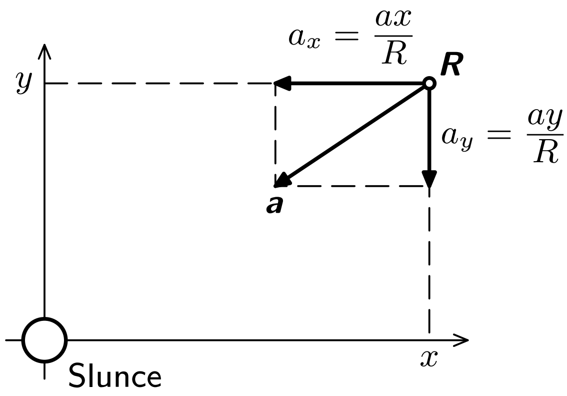
A pak ještě musíme zvolit krátký časový interval třeba $\Delta t = 0{,}1$.

Jaká bude poloha planety v čase $t_1 = t_0 + \Delta t$? Užijme právě zavedených vztahů pro okamžitou rychlost a zrychlení, které platí tím přesněji, čím je Δt menší. Planeta tedy za dobu Δt změní svou polohu o $\Delta \boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}\Delta t$ a zrychlí o $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\Delta t$. Proto poloha planety v čase $t_0 + \Delta t$ bude $\boldsymbol{R}_{t_0+\Delta t} = \boldsymbol{R}_{t_0} + \boldsymbol{v}_{t_0}\Delta t$, rychlost planety bude $\boldsymbol{v}_{t_0+\Delta t} = \boldsymbol{v}_{t_0} + \boldsymbol{a}\Delta t$. A čemu se rovná zrychlení $\boldsymbol{a}$?



Obr. 1. Pohyb planety okolo Slunce

Například na povrchu Země při volném pádu je zrychlení téměř všude stejné $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$, což je přibližně v soustavě souřadné spojené se Zemí $a_x = 0\,\mathrm{N}$ a $a_y \doteq -9{,}81\,\mathrm{N}$ (minus, protože urychluje směrem dolů). A u planety obíhající Slunce? V každém bodě prostoru bude zrychlení jiné, je však snadné jej vypočítat. Jak už jsme zmínili, vystačíme s Newtonovým gravitačním a druhým pohybovým zákonem. Spojme je tedy dohromady.



Obr. 2. Určení souřadnic zrychlení

$$M_\mathrm{p}\boldsymbol{a} = -\varkappa\,\frac{M_\mathrm{p}M_\mathrm{S}\boldsymbol{R}}{R^3}\,,$$

kde M_p je zde hmotnost planety a M_S hmotnost Slunce. Na obou stranách rovnice se M_p vykrátí. Zjistili jsme tedy, že zrychlení $\boldsymbol{a}$ planety na hmotnosti planety nezávisí.

Za předpokladu, že hmotnost Slunce je mnohem větší než hmotnost planety $M_\mathrm{S} \gg M_\mathrm{p}$, můžeme gravitační působení planety na Slunce zanedbat. Slunce tedy zůstane nehybně ukotvené v počátku souřadné soustavy a $\boldsymbol{R}$ je potom polohovým vektorem planety. Získáváme tak vztahy pro obě souřadnice zrychlení

$$a_x = -\varkappa\,\frac{M_\mathrm{S}x}{R^3}\,,\quad a_y = -\varkappa\,\frac{M_\mathrm{S}y}{R^3}\,. \tag{3}$$

Už víme, jak vypočítat polohu $\boldsymbol{R}$ i rychlost $\boldsymbol{v}$ planety v čase $t_1 = t_0 + \Delta t$ a jak počítat $\boldsymbol{a}$. Provedeme znovu tu samou rošádu s planetou pro další krátký časový úsek Δt a takto budeme dále odborně řečeno iterovat pomocí takzvaných rekurentních vzorců[6]

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + \Delta t\,,\\ \boldsymbol{R}_{t_i+\Delta t} &= \boldsymbol{R}_{t_i} + \boldsymbol{v}_{t_i}\Delta t\,,\\ \boldsymbol{v}_{t_i+\Delta t} &= \boldsymbol{v}_{t_i} + \boldsymbol{a}_{t_i}\Delta t\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Výsledky simulace

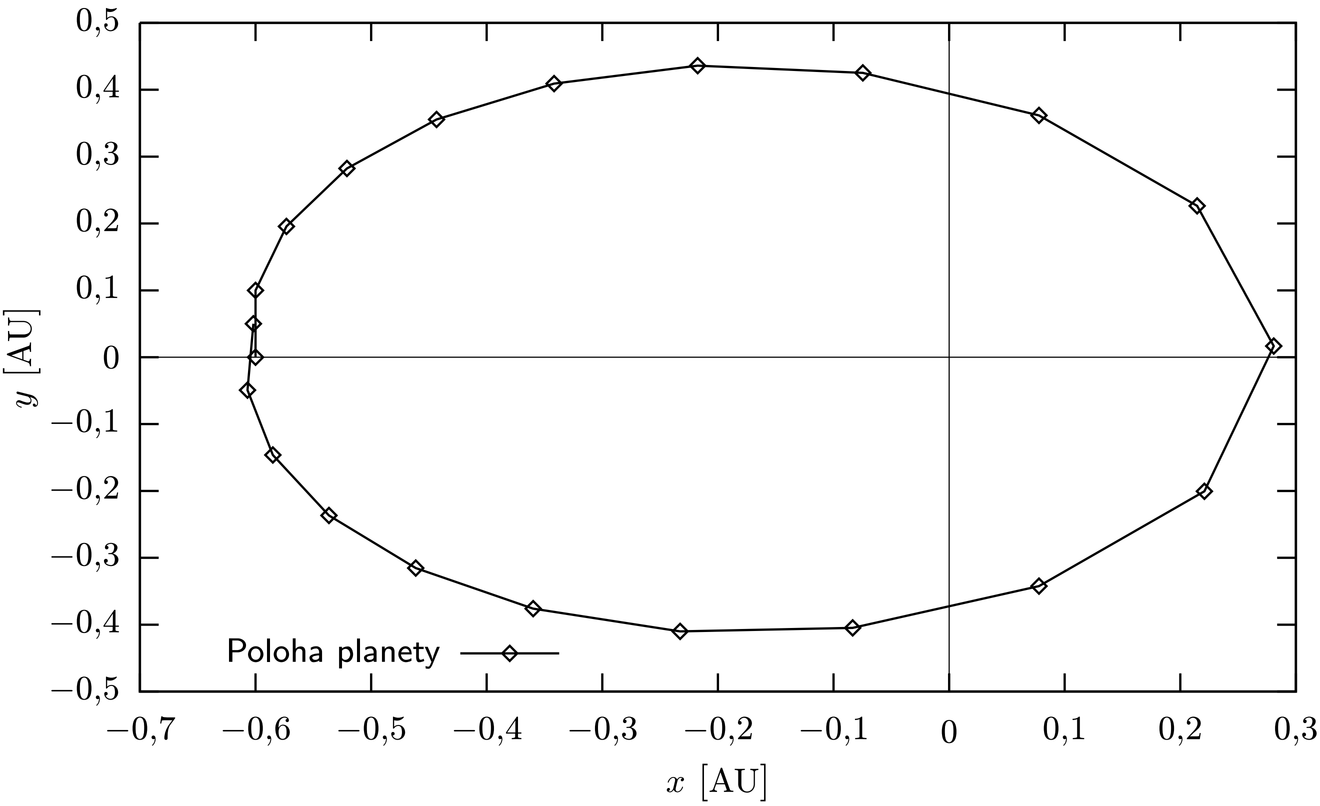
Nyní již umíme úplně vše, abychom mohli provést například takovýto výpočet. Počáteční poloha planety je $x_0 = -0{,}6\,\mathrm{AU}$ a $y_0 = 0\,\mathrm{AU}$. AU je astronomická délková jednotka (Astronomical Unit). Její velikost je střední vzdálenost Země od Slunce, přibližně $150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$. Počáteční rychlost planety je $v_{x0} = 0\,\mathrm{AU{\cdot}rok^{-1}}$ a $v_{y0} = 1\,\mathrm{AU{\cdot}rok^{-1}}$. A nechť $\varkappa \cdot M_\mathrm{S} = 1\,\mathrm{AU^3{\cdot}rok^{-2}}$, což přibližně řádově platí pro hmotnost našeho Slunce[7], které váží asi $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$. Vyzkoušejte sami, že zvolíme-li časový krok 0,1 roku, vypočteme následující tabulku hodnot (viz též graf na obr. 3).

6) Rekurentní vzorec nebo předpis nám určuje posloupnost (zde posloupnost poloh a rychlostí planety v jednotlivých časových intervalech), jejíž následující člen se dá určit ze znalosti jednoho nebo více členů předcházejících. Proto je také nutné znát člen první, tj. počáteční podmínku.

7) Nevěříte-li, můžete si to ověřit. Převeďte gravitační konstantu z jednotek základních (m, kg a s) na jednotky použité (AU, kg a rok).

Vypočtené hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení planety.

t [rok]	x [AU]	y [AU]	r [AU]	a_x [AU/rok^2]	a_y [AU/rok^2]	v_x [AU/rok]	v_y [AU/rok]
0	-0,6000	0,0000	0,6000	2,7778	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	-0,6000	0,1000	0,6083	2,6659	-0,4443	0,2666	0,9556
0,2	-0,5733	0,1956	0,6058	2,5792	-0,8797	0,5245	0,8676
0,3	-0,5209	0,2823	0,5925	2,5046	-1,3574	0,7750	0,7319
0,4	-0,4434	0,3555	0,5683	2,4156	-1,9368	1,0165	0,5382
0,5	-0,3417	0,4093	0,5332	2,2541	-2,6998	1,2419	0,2682
0,6	-0,2175	0,4361	0,4874	1,8791	-3,7671	1,4298	-0,1085
0,7	-0,0746	0,4253	0,4318	0,9263	-5,2834	1,5225	-0,6369
0,8	0,0777	0,3616	0,3699	-1,5355	-7,1474	1,3689	-1,3516
0,9	0,2146	0,2264	0,3120	-7,0679	-7,4587	0,6621	-2,0975
1	0,2808	0,0167	0,2813	-12,6166	-0,7501	-0,5995	-2,1725
1,1	0,2208	-0,2006	0,2983	-8,3187	7,5547	-1,4314	-1,4170
1,2	0,0777	-0,3423	0,3510	-1,7973	7,9170	-1,6111	-0,6253
1,3	-0,0834	-0,4048	0,4133	1,1816	5,7340	-1,4930	-0,0519
1,4	-0,2327	-0,4100	0,4714	2,2212	3,9133	-1,2708	0,3394
1,5	-0,3598	-0,3760	0,5204	2,5524	2,6676	-1,0156	0,6062
1,6	-0,4614	-0,3154	0,5589	2,6430	1,8070	-0,7513	0,7869
1,7	-0,5365	-0,2367	0,5864	2,6607	1,1741	-0,4852	0,9043
1,8	-0,5850	-0,1463	0,6030	2,6678	0,6672	-0,2184	0,9710
1,9	-0,6069	-0,0492	0,6088	2,6889	0,2180	0,0504	0,9928
2	-0,6018	0,0501	0,6039	2,7327	-0,2274	0,3237	0,9701



Obr. 3. Vypočtené polohy planety v jednotlivých časových okamžicích.

Planeta oběhla přibližně za 1,95 roku. Mohli bychom z vypočtených hodnot odečíst třeba ještě délku poloos, avšak vidíme, že poněkud nepřesně. Velice jednoduše lze dosáhnout velkého zpřesnění užitím jemnějšího časového kroku (třeba 0,01 roku) nebo přesnější numerickou metodou (o numerických metodách též v Úvodu do programování).

Úloha I . S ... *gravitace*

Krom programu `Planeta.xls` prosím stáhněte též `DveHvezdy.xls` a `TriHvezdy.xls`. Může se vám hodit přečíst již zmíněný dokument Úvod do programování. Díky němu budete určitě schopni stáhnout a přeložit program `Planeta.pas`, `DveHvezdy.pas` a `TriHvezdy.pas`. Všechny uvedené soubory naleznete na našich www stránkách. Cvičením a přípravou na úlohy je tyto programy pochopit a lehce si s nimi pohrát, zkusit si do nich „zašťourat“ či je lehce poupravit.

a) Úkolem prvním je obohatit alespoň dva programy o něco svého nebo je upravit podle svého. Například nejrůzněji pozměňte počáteční podmínky a hmotnosti. Nebo k systému přidejte další planetu či další hvězdu. Také můžete vyzkoušet pozměnit gravitační zákon a počítat se silou $F = A/R^2 + B/R^3$, kde A a B jsou pevně zvolené konstanty apod.
b) Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít.

Jako řešení obou úloh nám prosím zašlete obrázky s bohatým komentářem. Uveďte alespoň stručné vysvětlení, co to na těch obrázcích je. Dále, jakým způsobem jste při výpočtu postupovali a pomocí kterého výpočetního systému jste jej provedli.

Zdá-li se vám, že vás podceňujeme a dáváme jen lehké a podbízivé úlohy, možná vás o opaku přesvědčí druhá úloha. Je zajímavá a už o něco složitější. Na druhou stranu ne příliš těžká, abyste to nezvládli. S chutí do ní! Výhodou numerického simulování je totiž to, že ať už počítáte planet deset nebo sto, tak je počítáte stále stejným způsobem, jen jich tam prostě započítáte více. Takže ač program budete psát jen o trochu déle, mnohem déle se bude provádět jeho výpočet. Avšak matematická náročnost úlohy se nezmění.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.