

ALEŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV

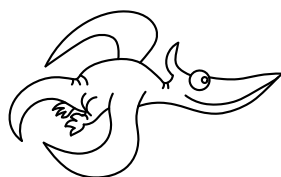
Fyzikální korespondenční seminář

XXI. ročník – 2007/08



***matfyz*press**

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	12
Zadání experimentálních úloh	79
Řešení experimentálních úloh	80
Seriál o počítačové fyzice	105
1. Gravitace	106
2. Parciální diferenciální rovnice	110
3. Náhodné jevy	120
4. Kvantová mechanika	134
5. Numerické integrování	136
6. To nejlepší na konec	141
Řešení úloh ze seriálu	148
Akce FYKOSu	183
Podzimní soustředění v Chrasticích	183
Jarní soustředění v Zásce	184
Týden saplikovanou fyzikou	186
FYKOSí Fyziklání 2008	189
Pořadí nejlepších řešitelů	191



Předmluva

Milý čtenáři,

právě se začínáš do ročenky XXI. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy (FYKOSu MFF UK), který proběhl ve školním roce 2007/2008.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol u nás. Je organizován především studenty a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK a také zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snaží se zaujmout studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem vždy bylo rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm sešitků, v nichž nalezne šest sérií po sedmi úlohách, z nichž jedna je experimentální a jedna tzv. seriálová. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují vždy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídká je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení ať už klasickou poštou nebo přes internet. Organizátoři pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě samotného korespondenčního semináře připravujeme pro naše řešitele i jiné aktivity. Těmi nejpopulárnějšími jsou bezesporu dvě týdenní soustředění, jedno na jaře a druhé na podzim. Během nich se zhruba 30 nejlepších řešitelů dozví mnoho zajímavého z fyziky a matematiky na dopoledních přednáškách a jedno odpoledne pak teorii ověřují v praxi při různých experimentech. Nechybí samozřejmě ani odpočinek a zábava v podobě nejrůznějších her v přírodě.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

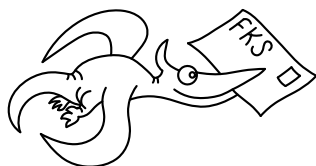
I letos se nám podařilo protáhnout tento Den na celý Týden s aplikovanou fyzikou, v jehož rámci jsme kromě pražských pracovišť navštívili také optické dílny v Turnově, severočeské elektrárny společnosti ČEZ apod. Velmi vydařený byl i letošní ročník FYKOSího Fyziklání, kterého se zúčastnilo 40 týmů z České i Slovenské republiky. To je pro nás přesvědčivým důkazem, že zájem o fyziku i o naši fakultu je v řadách středoškoláků stále velmi silný.

Na našich webových stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých ročníků zde naleznou průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a repor-

táže z našich akcí, diskuzní fórum, podrobné informace a pravidla pro zapojení se do soutěže a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXI. ročníku. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím ponouknout čtenáře, aby se před pouhým přečtením řešení pokusil úlohu sám rozmyslet. Další částí je Seriál o počítačové fyzice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci knížky se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na emailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 526

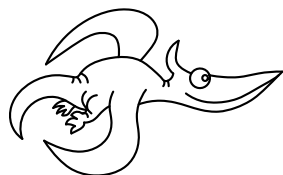
www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

A jak vypadal XXI. ročník očima statistiky? Řešilo jej 77 studentů z 49 základních a středních škol ze čtyř států. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 1114 došlých řešení.

Pořadí škol

Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Ludovíta Štúra, Trenčín	12	36,1	433
G Jana Keplera, Praha	7	47,1	330
G Ch. Dopplera, Praha	4	49	196
G Ostrava - Hrabůvka	1	116	116
G J. Heyrovského, Praha	1	113	113
G J. K. Tyla, Hradec Králové	1	112	112
G Špitálská, Praha	1	105	105
G Trutnov	1	102	102
G Masarykovo nám., Třebíč	1	102	102
G Lesní čtvrť, Zlín	1	101	101
PČG Karlovy Vary	1	80	80
SPŠ a SOU Letohrad	1	78	78
G M. Koperníka, Bílovec	2	38	76
G Český Krumlov	1	75	75
G Jura Hronca, Bratislava	1	72	72



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... mihání krajiny

Prozkoumejte skutečnost, že se při pohledu z jedoucího vlaku vzdálenější objekty na horizontu zdánlivě pohybují po okně pomaleji, zatímco sloupy u trati se jen tak mihnou. Jak závisí tato zdánlivá rychlost pohybu krajiny na její vzdálenosti od cestující veřejnosti? (řešení str. 12)

Úloha I.2 ... zachraňte bublinu

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina? (řešení str. 13)

Úloha I.3 ... vážíme si Slunce

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočtete podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy. (řešení str. 15)

Úloha I.4 ... zachraňte pivo

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R . Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbít co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít. (řešení str. 16)

Úloha I.P ... orosená odměna aneb ať vám kozel neuteče

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokr, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná nejobtížnější jej přeskočit? (řešení str. 19)

Úloha II.1 ... flusanec

Představte si, že jedete rychlíkem. Díváte se ven z otevřeného okna a sledujete okolní krajinu. O tři okna dál po směru jízdy nějaký zákeřný lump vyplivne žvýkačku. Kolik času máte, abyste stihli uhnout? Samozřejmě předpokládáme, že žvýkačka je dokonalá koule a z okna nebyla vyhozena, nýbrž vlastně položena do proudu vzduchu. (řešení str. 20)

Úloha II.2 ... zmoklé autíčko

Navrhnete sklon a tvar předního skla automobilu tak, aby z něj kapky dešťové vody při rychlosti auta 80 km/h nestékaly dolů, ale do stran. Ověřte, zda váš výsledek odpovídá skutečnosti. Co dalšího určuje sklon čelního skla?

(řešení str. 22)

Úloha II.3 ... víno teče proudem

Vinaři a řidiči kamionů dobře znají šikovní přelévání kapalin z těžkých nádob. Vinař Ignác chce stočit víno z jednoho demižonu do druhého. Nejprve položí prázdný demižon na zem a plný do výšky Δ . Potom demižony propojí hadičkou a trochu z ní zespondu potáhne. Víno začne samovolně proudit do spodního demižonu. Za jak dlouho bude všechno víno stočeno? Předpokládejte, že demižony jsou stejné válce poloměru R a výšky H .

(řešení str. 23)

Úloha II.4 ... nabitá anténa

Dva stejné náboje umístíme na oba konce tuhé nevodivé tyčky. Jaký výkon budeme potřebovat na otáčení tyčky konstantní úhlovou rychlostí kolem osy procházející středem tyčky? Tření zanedbejte.

(řešení str. 28)

Úloha II.P ... zachraňte bublinu?

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat ... Když však podle stavové rovnice ideálního plynu vypočítáte hustotu vzduchu v bublině, zjistíte, že je bublina těžší než voda. Je to možné?

Pokud souhlasíte, vysvětlete svoji odpověď. Pokud nesouhlasíte, vypočítejte, jaké budou parametry bubliny (především hustota).

(řešení str. 35)

Úloha III.1 ... Angličani a Skoti

Předmětem této úlohy je, abyste odhadli, jak by se změnila rychlost rotace Země, kdyby Angličani a Skoti začali jezdit vpravo místo vlevo.

(řešení str. 36)

Úloha III.2 ... výťah až do nebe

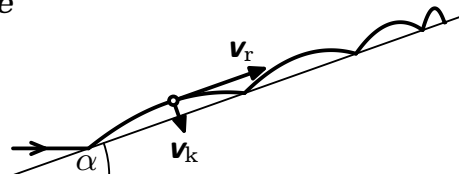
Určete, jaké fyzikální vlastnosti musí mít materiál závěsného lana výtahu, který spojuje povrch Země a oběžnou geostacionární dráhu. Je vůbec takový materiál na Zemi dostupný?

(řešení str. 38)

Úloha III.3 ... hopsání po nakloněné rovině

Malou kuličku hodíme vodorovně na nakloněnou rovinu. Kulička po ní začne poskakovat a po N odrazech dopadne kolmo k povrchu nakloněné roviny (viz obr. 1). Jaký je úhel α nakloněné roviny? Předpokládejte, že se kulička odráží dokonale pružně, rotaci kuličky neuvažujte.

(řešení str. 41)



Obr. 1. Příklad trajektorie kuličky pro $N = 4$

Úloha III.4 ... částice na poli

Mějme elektrostatické pole neměnné v čase. Do toho pole vkládáme na stejné místo nabitou částici s nulovou počáteční rychlostí. Pečlivě sledujeme, jak se částice pohybuje, a zaznamenáváme si její trajektorii. A co nás překvapí – trajektorie částice nezávisí na její hmotnosti. Dokážete to vysvětlit? (řešení str. 42)

Úloha III.P ... příliv a odliv

Příliv a odliv jsou způsobeny slapovými silami, tj. především gravitační silou Měsíce. Příliv se opakuje každých 12 hodin a 25 minut, nicméně na zeměkouli pozorujeme vždy dva přílivy na opačných stranách zeměkoule. Tzn. jeden příliv oběhne Zemí za dvojnásobek doby, tj. asi 25 hodin. Tudíž na rovníku o délce 40 000 km se příliv musí pohybovat přibližně rychlostí $40\,000/25\text{ km/h} = 1\,600\text{ km/h}$. To je dokonce více než rychlost zvuku ve vzduchu.

Ze zkušenosti však víme, že voda v moři touto rychlostí neproudí, neboť lodě nám vozí banány z Kostariky atd. Je tedy nějaká chyba ve výpočtu, nebo je potřeba výsledek interpretovat jinak? (řešení str. 47)

Úloha IV.1 ... znají včely geometrii?

Jestliže jste někdy viděli včelí plást, jistě vás upoutala pravidelnost, s jakou je vybudován. V podélném řezu tvoří stěny buňky pravidelný šestiúhelník a buňky jsou k sobě seskupeny tak, že pokrývají celou rovinu plástu.

Proč mají včelí buňky tvar právě šestiúhelníků, a ne například obdélníků nebo pětiúhelníků? (řešení str. 48)

Úloha IV.2 ... zahřívání koule

V této úloze budeme studovat vliv teploty na moment setrvačnosti kovového tělesa. Pro tento účel necháme tělesem procházet pevnou osu, kolem které se bude otáčet. Jak se změní moment setrvačnosti J tělesa při zvýšení jeho teploty o ΔT , je-li koeficient teplotní roztažnosti kovu α . Pokud si nevíte rady, zkuste uvažovat kouli nebo válec. (řešení str. 49)

Úloha IV.3 ... sopka burácí

Nedávno v televizi proběhl dokument o výbuchu sopky Krakatoa v srpnu 1883. Pozoruhodné je, že rachot výbuchu dočasně ohlušil lidi (nějakou dobu nic neslyšeli) ve vzdálenosti 50 km od vulkánu. Dokonce byl slyšet jako vzdálené hřmění ve městě Alice Springs v centrální Austrálii, tj. asi 5 000 km (slovy pět tisíc kilometrů) od sopky.

Jaká byla hodnota akustického tlaku v dB v místě výbuchu? Můžeme předpokládat, že platí zákon úbytku intenzity se čtvercem vzdálenosti, či jaký zákon úbytku intenzity bude platit pro tento případ? (řešení str. 50)

Úloha IV.4 ... zachraňte ledvinu

ÚOOZ¹ zjistil, že mafie disponuje mobilními válečnými lasery, které jsou všechny řízeny z centrály v horském pohraničním sídle Oberniederdorf, vzdáleném

¹⁾ Útvar pro odhalování organizovaného zločinu

od zbraní maximálně 50 km (ve větší vzdálenosti je signál už slabý a nespolehlivý). Z centrály sledují dění v podsvětí v Karlových Varech, na které všechny lasery míří, aby udeřily v pravý čas.

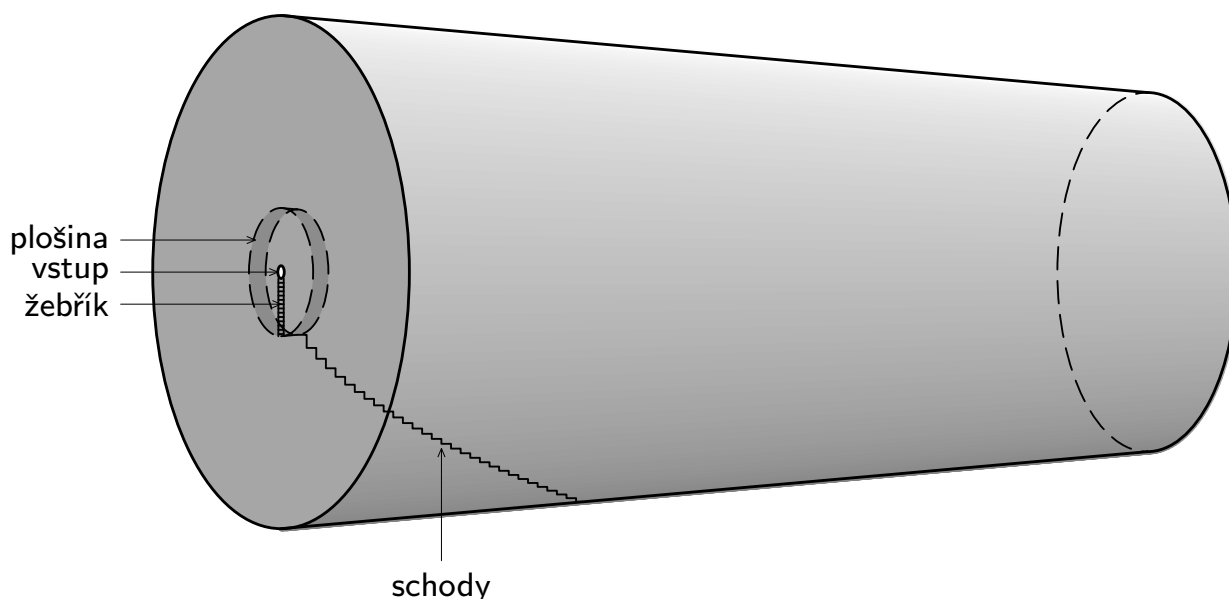
Pomozte nevinným obyvatelům Karlových Varů nalézt vhodný tvar, příp. i umístění spojitě zrcadlové plochy, která by pokud možno všechny laserové paprsky odrazila nejlépe na řídicí centrálu! Problém můžete řešit v rovině, ale zejména oceníme prostorové řešení, pokud existuje. Samozřejmě je požadován důkaz, aby Karlovarští peníze neinvestovali zbytečně. (řešení str. 52)

Úloha IV . P ... projekt 5

Navrhněte spravedlivou (či co nejvíce spravedlivou) pětistěnnou kostku. Přesněji máme na mysli takové pětistěnné těleso, které se při hození na podložce zastaví na každé své stěně se stejnou pravděpodobností. (řešení str. 55)

V páté sérii opustíme fyziku a vykročíme do světa sci-fi. Vesmír brázdí nemálo kosmických lodí a také Ráma². Ráma je obří mezihvězdné plavidlo zkonstruované mimozemskou civilizací, která připlula do sluneční soustavy. Připravíme vás na odvážnou výpravu do jeho nitra a zamyslíme se nad strastmi, které na vás číhají.

Ráma má tvar válce o délce 54 km a vnitřním průměru 16 km. Jeho vnitřek je vyplněn vzduchem. Ráma má dokonce svou vlastní umělou gravitaci, která vzniká tím, že se otáčí kolem své osy jednou za čtyři minuty. Na vnitřním povrchu pláště má vzduch tlak jedné atmosféry.



Obr. 2. Pohled na Rámu

²⁾ A. C. Clarke: Setkání s Rámou, Návrat Rámy, Zahrady Rámovy, Ráma tajemství zbavený.

Úloha V.1 ... pozor, neudus se

Vstup do Rámy je otvor uprostřed jedné podstavy. Předtím, než vstoupíš a sundáš si skafandr, si však rozmysli, zda je na jeho ose dýchatelný vzduch. Jaká je jeho hustota v porovnání s hustotou na vnitřním povrchu, je-li teplota vzduchu všude stejná? (řešení str. 58)

Úloha V.2 ... otázka přežití

Od vchodu vede k vnitřnímu povrchu žebřík. Již jsi po něm sestoupil kilometr, když vtom jsi neopatrně sklouzl a pustil se žebříku. Jakou rychlostí dopadneš na povrch Rámy a za jak dlouho? Máš šanci přežít? (řešení str. 61)

Úloha V.3 ... schody z nebe

Žebřík vede jen dva kilometry na plošinu, ze které se dále sestupuje po schodech, jež se mohutným obloukem klenou nad krajinou. Schodiště má zvláštní tvar. Je totiž postavené tak, že se na každý krok vynaloží stejná práce. Odvoď, jak závisí výška schodu na vzdálenosti od osy Rámy, pokud je délka schodů konstantní. Také můžeš určit, jaký tvar má onen oblouk. (řešení str. 62)

Úloha V.4 ... sluneční konzerva

Ráma cestuje mezi hvězdami tak, že polovinu času rovnoměrně zrychluje a polovinu času rovnoměrně zpomaluje. Právě se pohybuje kolem Slunce po parabole s vrcholem na orbitě Země. energii získává ze slunečního záření (žádný reaktor nebo obří baterie jsi na něm neobjevil) a jeho povrch absorbuje 80 % dopadající energie. Nasbírání při průletu sluneční soustavou dostatečnou energii, aby se dostal k Sirku, který je vzdálen 12 světelných let, za 24 let? (řešení str. 65)

Úloha V.P ... rámatřesení

Úspěšně ses dostal na povrch Rámy. Z ničeho nic se Ráma několikrát otrásl a zdá se ti, že se změnila rychlost jeho rotace. Tato otázka tě velice tíží. Navrhni proto několik způsobů, jak bys změněnou periodu rotace určil. (řešení str. 69)

Pták FYKOSák letěl v létě 2007 na prázdniny do Jižní Ameriky. Svůj výlet dlouho plánoval, chtěl obletět celý kontinent, zhlédnout husté amazonské pralesy, zasněžené vrcholky And, patagonské nížiny i poušť Atacama, jezero Titicaca a pláž Copacabana. Cesta však dopadla tragicky, pták FYKOSák se už nikdy nevrátil.

Když letěl nad kolumbijskými pralesy, byl mylně považován za tajného agenta CIA a upadl do zajetí Revoluční ozbrojené lidové armády Kolumbie (FARC). Již téměř rok je pterodaktyl uvězněný kdesi v zajateckém táboře uprostřed kolumbijské džungle, strádá hladem a steskem. Za jeho propuštění požaduje FARC vysoké výkupné. Pokud bychom ho chtěli zaplatit, museli bychom zrušit soustředění a možná i celý seminář na několik let.

Dejte své chytré hlavy, silné paže a odvahu dohromady a pomozte nám vysvobodit ptáka FYKOSáka!

Úloha VI.1 ... pterodaktyl sestřelen

Pterodaktyl letěl ve výšce 1 km nad pralesem rychlostí 4 m/s. Guerillový válečník, držící v ruce kalašnikov (kulka opouští hlaveň rychlostí 710 m/s), ho spatřil nad hlavou a vystřelil. Pták FYKOSák byl trefen do křídla a začal padat. Jak daleko od válečníka dopadl? (Odpor vzduchu si dovoluete zanedbat.)

(řešení str. 70)

Úloha VI.2 ... vaření hada

Ubohý pterodaktyl ze své klece s obavami pozoruje divokou zvěř v okolní džungli. Zejména ho zaujal párek bezstarostných hadů, kteří se chystali vlézt do jeho klece. Věznitelé je však neúprosně sevřeli klacky tvaru písmene Y. Z hadů bude výborná večeře, malou radost z toho má i pták FYKOSák, ačkoliv dává přednost jinému než hadímu masu.

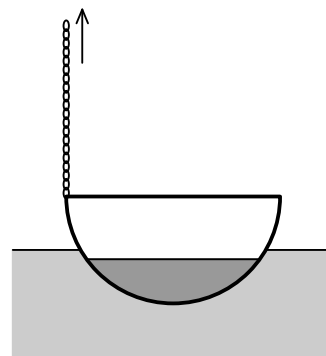
Tuhé maso jedovatých hadů se musí vařit při vyšší teplotě, k tomu se používá papiňák. Nádoba se naplní z poloviny vodou, v druhé polovině zůstane vzduch, potom se uzavře a pomalu zahřívá. Při jaké teplotě se začne voda v hrnci vařit? V jakých fázích voda existuje při rostoucí teplotě?

(řešení str. 71)

Úloha VI.3 ... hadí polévka

Když je hadí maso uvařené, kuchaři z něj připravují hadí polévku v měděných hrncích, které mají tvar polokoule o průměru 40 cm. Hrnc s polévkou dávají potom vychladit do nedalekého jezera. Když ho nechají plavat, ponoří se o 10 cm. K bodu na okraji hrnce je připevněn řetízek. Pokud za řetízek zatáhneme, a zvedneme tak okraj hrnce o 10 cm, nateče do hrnce voda?

(řešení str. 72)



Obr. 3. Kotlík s řetízkem

Úloha VI.4 ... rychlý úprk

Pták FYKOSák statečně prchá chodbou (nemůže v ní letět), v patách má dva vojáky, kterým se před okamžikem vymkl z pout. Chodba zatáčí ve tvaru písmene L a pterodaktyl horlivě přemýšlí, jak dál.

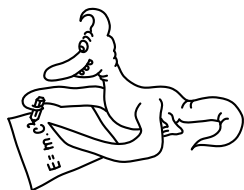
Chodba je široká w , pterodaktyl běží rychlostí v_0 a zatáčka je ve vzdálenosti d . Pokud velikost ptákovy zrychlení dosáhne hodnoty a_{krit} , pterodaktyl uklouzne, spadne a bude chycen. Po jaké dráze má běžet a jak se má naklánět, aby ho zatáčka zdržela co nejméně?

(řešení str. 74)

Úloha VI.P ... mission impossible

Naplánujte záchrannou misi a vysvobodte ptáka FYKOSáka. Nezapomeňte na plán B, příp. C.

(řešení str. 77)

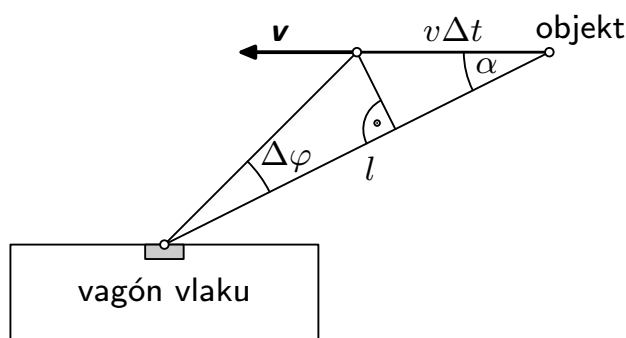


Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... míhání krajiny

Prozkoumejte skutečnost, že se při pohledu z jedoucího vlaku vzdálenější objekty na horizontu zdánlivě pohybují po okně pomaleji, zatímco sloupy u trati se jen tak mihnou. Jak závisí tato zdánlivá rychlost pohybu krajiny na její vzdálenosti od cestující veřejnosti?

Nejprve je důležité si uvědomit, že při sledování svého okolí pozorujeme *úhlové veličiny* (zorný úhel, úhlová rychlost, úhlové zrychlení...). Uvažujme nyní situaci jedoucího vlaku v soustavě spojené s vlakem. Vlak tedy stojí (zanedbáváme drobné vychylování jednotlivých vozů) a jeho okolí se pohybuje rychlostí v . Sledujeme objekt ve vzdálenosti l , který se vůči nám pohybuje rychlostí v . Úhel, který svírá vektor rychlosti se spojnicí vlaku s objektem, označme α . Pro úhlovou rychlost objektu na obzoru poté dostáváme vztah



Obr. 4. Zdánlivý pohyb krajiny

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{v\Delta t \sin \alpha}{l - v\Delta t \cos \alpha} \right) \right).$$

Jelikož se při pohybu obecně úhel mezi rychlostí a spojnicí mění, musíme uvažovat nekonečně malé časové úseky, proto v limitě dostáváme

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{v\Delta t \sin \alpha}{l - v\Delta t \cos \alpha} \right) \right) = \frac{v \sin \alpha}{l}.$$

Zde již vidíme hledanou závislost, zdánlivá rychlost objektů je nepřímě úměrná vzdálenosti od cestující veřejnosti. V obecném případě je též úměrná sinu úhlu mezi vektorem rychlosti a spojnicí s pozorovateli ve vlaku.

Úloha I.2 ... zachraňte bublinu

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat. Jakou rychlostí bude stoupat? Bude se tato rychlost měnit? Za jaký čas vystoupá až na hladinu? Jak velká je nejrychlejší bublina?

Vypuštěnou bublinu o objemu V žene nahoru vztlaková síla $F_{vz} = V\rho_k g$ a proti ní působí odpor prostředí spolu s tíhou F_G . Pro odporovou sílu použijeme Newtonův vztah

$$F_{odp} = \frac{1}{2}CS\rho_k v^2.$$

Bublinka brzděná touto silou dosáhne velice brzy ustálené rychlosti dané (pro její okamžité rozměry) rovnováhou

$$\begin{aligned} F_{odp} + F_G &= F_{vz}, \\ \frac{1}{2}CS\rho_k v^2 + nM_m g &= V\rho_k g, \end{aligned}$$

kde n značíme látkové množství a M_m molární hmotnost vzduchu ($\doteq 29$ g/mol).

Není žádným překvapením, že velikost bubliny se bude během stoupaní měnit, protože se mění okolní tlak. Vztah mezi tlakem a hustotou (objemem) nějaké látky popisuje její stavová rovnice. V extrémních podmínkách Mariánského příkopu musíme použít van der Waalovu rovnici, protože vzduch, byť daleko za kritickým bodem, tu ztrácí vlastnosti ideálního plynu. Platí

$$\left(p + a\left(\frac{n}{V}\right)^2\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT,$$

kde $a = 0,14 \text{ J}\cdot\text{m}^3\cdot\text{mol}^{-2}$ a $b = 3,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$. Tlak p v hloubce h je $p(h) = h\rho_k g + p_{atm}$, nicméně atmosférický tlak lze bez obav zanedbat (chyba tímto zanedbáním způsobená je v řádu desítek sekund).

Chtěli bychom nyní ze stavové rovnice vyjádřit V jako funkci hloubky h , což je dost obtížné, a hlavně výsledek by byl kvůli složitosti dále nepoužitelný. Neuděláme ovšem velkou chybu, když člen $a(n/V)^2$ prohlásíme za mnohem menší než p a z našich úvah ho vypustíme. Zároveň předpokládáme, že teplota bubliny T bude konstantní a rovna přibližně 4°C , kterou očekáváme v takových hloubkách (je to teplota nejhustší vody). Pak

$$V = nb\left(1 + \frac{RT}{bh\rho_k g}\right) = nb\nu(h),$$

kde jsme pro úsporu místa zavedli funkci hloubky $\nu(h)$.

Další problém je otázka tvaru bubliny. V literatuře se lze dočíst, že malé bublinky zachovávají přibližně kulový tvar, zatímco větší bubliny se mohou různě protahovat či zplošťovat v závislosti na rychlosti obtékání. Také samotné stoupaní se neděje po přímce, nýbrž po spirále. My tu uvažujeme kulovou bublinu stoupající přímo vzhůru. Pak je $C \doteq 0,48$ a příčný průřez bubliny je roven

$$S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{V}{\frac{4}{3}\pi}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{9}{16}\pi n^2 b^2 \nu^2(h)}.$$

Ustálená rychlost stoupání tak (z výše uvedené rovnováhy sil) vychází

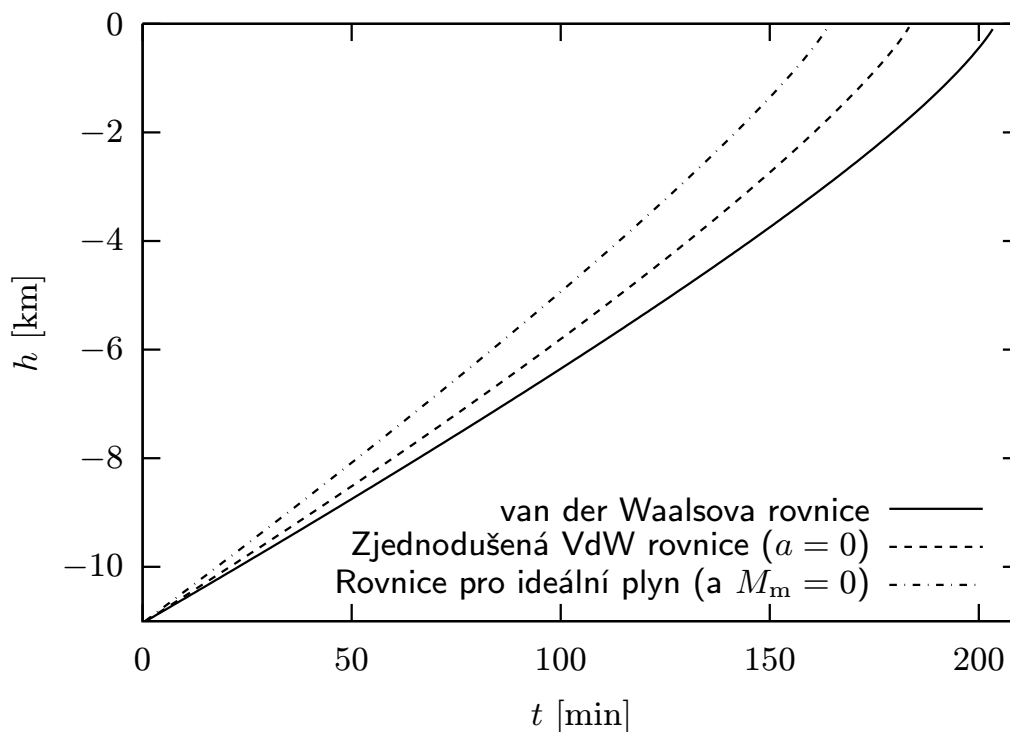
$$v = \sqrt{\frac{2g}{9\rho_k C}} \sqrt[6]{\frac{n}{\pi}} \frac{\sqrt{b\nu(h)\rho - M_m}}{\sqrt[3]{b\nu(h)/4}}.$$

Protože se rychlost s hloubkou mění, čas nezískáme jinak než integrací časového elementu $dt = dh/v(h)$ přes všechny hloubky od $H = 11$ km až k hladině. Tudíž

$$t = \int_0^H \frac{dh}{v(h)} = \sqrt[6]{\frac{9}{128} \frac{\pi}{n} \frac{\rho_k^3 C^3 b^2}{g^3}} \cdot \int_0^H \frac{\sqrt[3]{\nu(h)}}{\sqrt{b\nu(h)\rho_k - M_m}} dh.$$

Tento integrál nám stačí vypočítat numericky, což zvládne i lepší kalkulačka, natožpak čtenář letošního seriálu, a vyčíslíme-li i ostatní konstanty (hustotu mořské vody bereme $\rho_k = 1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), dostaneme

$$t \doteq \frac{1,1}{\sqrt[6]{n}} \cdot 10^4 \text{ s}\cdot\text{mol}^{1/6}.$$



Obr. 5. Graf závislosti $h(t)$ pro jednomolovou bublinku

Jednomolová bublina (pokud se po cestě nerozpadne) vyplave asi za 3 hodiny. Větší bublina poplave rychleji, menší pomaleji. Na přiloženém grafu je vynesena závislosti okamžité hloubky bublinky na čase podle různých stupňů přiblížení při řešení této úlohy. Pokud bychom použili stavovou rovnici ideálního plynu a neuvažovali hmotnost vzduchu (proč?), dostali bychom asi 2,5 hodiny. Naopak pokud bychom postupovali podle nezjednodušené van der Waalsovy rovnice, čas výstupu bubliny by se oproti uvedenému výpočtu přibližně o půl hodiny protáhl. V každém

případě jsme získali jen dolní odhad času; netušíme, po jaké trajektorii bublinka ve skutečnosti poplave.

Úloha I.3 ... vážíme si Slunce

Navrhněte několik metod ke stanovení (odhadu) hmotnosti Slunce, dostatečně je vysvětlete a vypočtěte podle nich hmotnost naší nejbližší hvězdy.

Hmotnost Slunce určíme nejspíše z pozorování gravitačního působení Slunce na jeho oběžnice. Jelikož většina čtenářů jistě dokáže odvodit třetí Keplerův zákon pro pohyb po kružnici, ukážeme si, že stejně platí i pro pohyb po elipse, a nakonec určíme samotnou hmotnost Slunce. V celém řešení budeme značit hmotnost Slunce M a hmotnost hmotného bodu kolem Slunce obíhajícího pak m .

Označme si plošnou rychlost v_p , periodu oběhu T . Plocha elipsy je rovna πab (a je velikost hlavní poloosy, b pak velikost vedlejší). Z významu plošné rychlosti pak vyplývá, že

$$v_p T = \pi ab. \quad (1)$$

Potřebujeme vyjádřit plošnou rychlost. Moment hybnosti L hmotného bodu vzhledem ke středu centrální síly (Slunci) je konstantní (moment síly jakožto vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je nulový a zároveň je časovou derivací momentu hybnosti), tedy i jeho velikost $L = rmv \sin \alpha$ (α značí úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{v}). Výraz $rv \sin \alpha/2$ je konstantní a odpovídá plošné rychlosti v_p . Spojením posledních dvou rovnic dostáváme 2. Keplerův zákon, tedy že plošná rychlost

$$v_p = \frac{L}{2m}$$

je konstantní. Po dosazení do rovnice (1) získáme

$$LT = 2\pi mab. \quad (2)$$

Elipsa, po které těleso obíhá, se dá zapsat v polárních souřadnicích takto

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - k)}.$$

Geometrický význam p je poměr mezi čtvercem velikosti malé poloosy a velikostí velké poloosy. Fyzikální význam je však ještě jiný, nicméně jeho kompletní odvození sahá za rámec tohoto výkladu³ Jedná se o vztah

$$p = \frac{L^2}{Gm^2M}.$$

³⁾ Viz např. kniha A. Havránek: *Klasická mechanika I*, kapitola 4.3.

Ze zmíněných významů p plyne, že

$$L^2 = \frac{b^2}{a} G m^2 M.$$

Zbývá už jen dosadit do vztahu (2) a rovnici upravit na konečný tvar

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Pro hmotnost Slunce platí

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2}$$

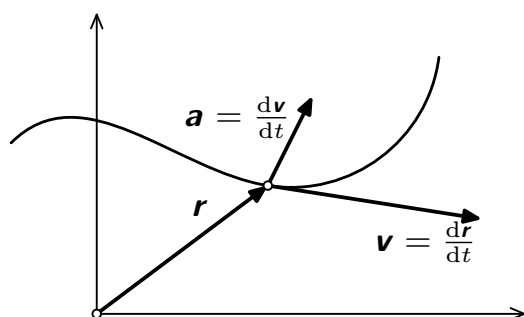
a stačí již dosadit příslušnou periodu oběhu a velikost hlavní poloosy. Jelikož se nemusíme omezovat na planety obíhající přibližně po kružnicích, počítejme s Halleyovou kometou. Doba jednoho oběhu je 75,3 roku, její hlavní poloosa pak 17,3 AU. Po převedení na jednotky SI a dosazení vychází hmotnost Slunce

$$M = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}.$$

Úloha I.4 ... zachraňte pivo

Nákladní automobil jedoucí rychlostí v veze láhve piva. Řidič si náhle všiml, že po ujetí vzdálenosti d ho čeká nebezpečná zatáčka, která má poloměr R . Vžijte se do řidiče a vymyslete, jakou taktiku zvolit při brzdění, jestliže počet rozbitých láhví piva je úměrný největšímu zrychlení a vy jich chcete rozbít co nejméně. Zbytek piv můžete za odměnu vypít.

Protože ne každý má rád pivo, úlohu snadno převedeme na hledání takového pohybu automobilu, aby maximální zrychlení po dobu tohoto pohybu bylo co nejmenší. Máme pevně zadanou trajektorii pohybu $\mathbf{r}(s)$ a počáteční velikost rychlosti v . Úkolem je tedy najít funkci ujeté dráhy $s(t)$ v závislosti na čase, aby její



Obr. 6. Rychlost a zrychlení hmotného bodu

derivace (tj. velikost rychlosti) v počátečním čase $t_0 = 0$ byla rychlost v , tedy $s'(0) = v$, dále $s(0) = 0$ a nakonec, což je nejdůležitější, aby maximální zrychlení auta bylo co nejmenší možné.

Je třeba si uvědomit, že $s''(t)$ není obecně zrychlení pohybu. Proč? Funkce $s(t)$ pohyb úplně neurčuje. Je to jen funkce ujeté dráhy a nevypovídá nic o „tvaru“ trajektorie. Proto ani nemůžeme očekávat, že z ní dokážeme vypočítat zrychlení, neboť to je závislé

i na tvaru trajektorie. Stačí si vzpomenout na odstředivou sílu, která působí na

cestujícího v autobuse projíždějícím zatáčkou. Tato síla je důsledkem zatáčení podle tvaru silnice a nikoliv zrychlováním či zpomalováním autobusu.

Zrychlení je vektorová veličina, kterou získáme tak, že dvakrát podle času zderivujeme vektor polohy

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}(s(t))}{dt^2}.$$

Vypočítáme-li velikost zrychlení s využitím toho, že známe „poloměr otáčení“, dostaneme vztah

$$a = \sqrt{(s''(t))^2 + \left(\frac{(s'(t))^2}{r}\right)^2}, \quad (3)$$

který vyjadřuje fakt, že zrychlení má v obecném případě dvě složky – tečnou, která působí ve směru pohybu, a normálovou, která je na pohyb kolmá a způsobuje zatáčení. V našem případě je v první části pohybu, když se blížíme k zatáčce po rovné silnici, druhý člen (3) nulový (r jde do nekonečna) a naopak, při rovnoměrném průjezdu kruhové zatáčky rovnice přechází do známého vzorečku pro dostředivé zrychlení.

V řešení úlohy nám půjde o to najít v jistém smyslu „nejlepší“ funkci. Budeme si všimnout skupin funkcí s nějakou vlastností a budeme doufat, že se nám z každé skupiny podaří vyloučit co nejvíc funkcí a zjednodušit si tak úlohu.

Pokud by se auto pohybovalo tak, že dorazí k zatáčce rychlostí $v_0 \leq v$, tak tvrdíme, že toto nemůže být výhodnější nežli případ, kdy se řidič od začátku sledovaného úseku až k začátku zatáčky ($0 \leq s \leq d$) pohybuje s rovnoměrným zrychlením a zatáčku pak projede konstantní rychlostí. Vzorec (3) nám potom určí velikost zrychlení v zatáčce $a_2 = v_0^2/R$ a před zatáčkou⁴ $a_1 = (v^2 - v_0^2)/2d$. Proč ale pro dané v_0 neexistuje lepší pohyb?

Pokud by v zatáčce řidič zrychlil nebo zpomalil, zrychlení v onom okamžiku by podle vzorce (3) bylo určitě větší, než kdyby jel rovnoměrně. To samé platí i pro pohyb před zatáčkou. Kdyby se rozhodl zpomalovat se zrychlením nutně menším než a_1 , tak se mu nemůže podařit dobrzdit na rychlost v_0 na začátku zatáčky. Bylo by to i proti zdravému rozumu, kdybychom s menším zrychlením auto ubrdili snáze než s větším! Zbývá ošetřit patologický případ, že by řidič před zatáčkou ještě přidal. Pak je zjevné, že i kdyby nakonec zmoudřel a zkusil zpomalit (se zrychlením menším nebo rovným a_1), tak už by to neubrdil.

Díky těmto úvahám jsme došli k závěru, že pohyb, kde řidič nejdříve rovnoměrně zpomalí a v zatáčce jede rovnoměrně, dá při daném v_0 nejmenší potřebné maximální zrychlení auta. To však neznamená, že neexistuje pohyb, při kterém by řidič dosáhl menšího maximálního zrychlení po dobu celého pohybu a zároveň do zatáčky vjel rychlostí v_0 . Kdyby náhodou takový existoval, tak by nutně jeho maximální zrychlení muselo být menší než jedno ze zrychlení a_1 a a_2 , a tedy i obě

⁴) Jelikož se zrychluje rovnoměrně a zrychlí se z rychlosti v na v_0 , průměrná rychlost bude $(v + v_0)/2$, takže dráhu projede za čas $t = 2d/(v + v_0)$ a zrychlení už snadno dopočítáme z (3), tj. $a_1 = |s''|$.

maximální zrychlení tohoto pohybu v části do zatáčky a v zatáčce by musely být menší než aspoň jedno z a_1 a a_2 , což ale nemůže nastat.

Existuje nějaká rychlost vjezdu do zatáčky, že bude minimalizovat maximální zrychlení potřebné pro projetí zatáčky? Odpověď zjistíme snadno, pokud pro každou v_0 budeme umět vypočítat ono maximální zrychlení. To je právě to větší z čísel a_1 a a_2 . Ještě jednou proto připomeneme, že

$$a_1 = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2d} \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{v_0^2}{R}.$$

Všimneme si, že a_1 pro v_0 jdoucí od 0 do v klesá až do nuly a a_2 naopak z nuly stoupá. To však neznamená, že to větší zrychlení je nejmenší tehdy, když se obě rovnají. Rovnost zrychlení nastane pro

$$v_0 = v \sqrt{\frac{R}{R + 2d}}.$$

Tudíž jsme našli právě jeden pohyb, který je lepší než všechny ostatní. To platí za předpokladu, že auto vjede do zatáčky rychlostí $v_0 \leq v$. Pokud by však přijelo rychlostí $v_0 > v$, snadno se přesvědčíme, že jeho zrychlení někde v průjezdu zatáčkou bude větší nežli a_2 . Uvažme ještě jeden možný scénář. Jestliže by automobil do zatáčky ani nedorazil, tak by musel zabrzdil již ve vzdálenosti $s < d$. Zřejmě by mohl své zpomalování zmírnit tím, že by dobrzdil až na začátku zatáčky. Ale tento případ již máme vyřešen a víme, že existuje lepší řešení.

Konečně můžeme prohlásit, že pohyb, při němž automobil nejprve zpomaluje se zrychlením

$$a = \frac{v^2}{R + 2d}$$

a v zatáčce udržuje konstantní rychlost, způsobí nejmenší maximální zrychlení ze všech možných pohybů.

Úloha I. P ... orosená odměna aneb ať vám kozel neutěče

Chováte neposlušného kozla, jehož oblibou je přeskakovat plot k sousedům. Nahánění kozla už máte pokrky, proto jste nakoupili vyšší pletivo, kterým chcete svůj pozemek nově oplotit. Místo, kde má plot stát, je ve svahu, a tak je situace trochu komplikovanější. Vy si ale jistě poradíte. Pod jakým úhlem plot vzhledem ke svahu postavit tak, aby bylo pro kozla co možná nejobtížnější jej přeskočit?

Pro jednoduchost uvažujme, že kozel je hmotný bod a přeskočením plotu myslíme, že překoná krajní bod plotu. Kozel taktéž nemůže po plotu lézt, byť by to ve skutečnosti mohlo být možné.

V zadání není jasně řečeno, jak pozemek vypadá a jak je situován. Budeme předpokládat, že ohrada je obdélníková a celá leží ve svahu o sklonu φ . Kozel si tedy může vybrat, jestli přeskočí tu část ohrazení, která leží ve vrstevnici, nebo se pokusí zdolat ohradu kolmou na vrstevnici. Se stranami plotu vystavěnými kolmo na vrstevnice nebudeme mít velkou práci. Kozel se k nim blíží po rovině, tudíž máme případ známý z běžné praxe. Jak postavit plot, aby ho bylo co nejtěžší přeskočit? Sami snadno odpovíme, že jedinečně kolmo, protože kdybychom použili jakýkoliv jiný úhel, jen by se snížila celková výška plotu, což by kozlovi pomohlo.

Zaměříme se nyní na spodní okraj ohrady. Na kozla působí jediná síla – tíhová síla. Toto působení můžeme snadno rozložit do dvou směrů, tečného (rovnoběžného se svahem)

$$F_t = mg \sin \varphi$$

a normálového (kolmého na svah)

$$F_n = mg \cos \varphi.$$

Díky působení těchto sil se kozlovi zdá, jakoby ho něco popostrkovalo dopředu a také trochu nadlehčovalo (což je přesně ten pocit, který zažijete, když si stoupnete do svahu se zavázanýma očima). Tečná síla kozlovi vůbec nevádí, ba naopak, je to ta síla, která mu pomáhá se pořádně rozběhnout. Jediné, co musí ve skutečnosti překonávat je normálová složka tíhové síly. Nejhůře si proto povede, pokud bude donucen přeskakovat překážku, která má vrchol co nejdále od roviny svahu. Touto úvahou jsme převedli příklad na případ plotu v rovině a už víme, že odpověď zní stavět kolmo, ale tentokrát kolmo ke svahu.

Pro plot na horní straně pozemku platí stejná úvaha. Akorát pro chudáka kozla se zde situace komplikuje tečnou složkou tíhové síly, která mu teď nepomáhá, ale brzdí ho.

Je zajímavé, že takto se ve skutečnosti ploty nestavějí. Na plot, který je kolmý ke svahu, působí totiž nenulový moment tíhové síly a bez opěr zespodu by jistě brzy spadl. Navíc pokud by byl svah dostatečně prudký, náš kozel by plot klidně mohl přelézt.

Úloha II.1 ... flusanec

Představte si, že jedete rychlíkem. Díváte se ven z otevřeného okna a sledujete okolní krajinu. O tři okna dál po směru jízdy nějaký zákeřný lump vyplivne žvýkačku. Kolik času máte, abyste stihli uhnout? Samozřejmě předpokládáme, že žvýkačka je dokonalá koule a z okna nebyla vyhozena, nýbrž vlastně položena do proudu vzduchu.

Zadání této úlohy se sice jeví poměrně jednoduché, ale k úplnému řešení vede poměrně dlouhá cesta plná odhadů a zanedbání.

První problém je proudění okolo vagónu. Vzhledem k tomu, že vlak s sebou strhává okolní vzduch, nebude rychlost vzduchu vůči lidem ve vagóně přesně rovna rychlosti vlaku, ale bude menší. Nicméně tento i další jevy při řešení zanedbáme a při řešení se omezíme na popis pohybu malé kuličky v proudu plynu známých parametrů. Budeme uvažovat turbulentní proudění a tudíž i Newtonův vzorec pro výpočet velikosti odporové síly

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2 = \frac{1}{2}CS\rho\dot{x}^2,$$

kde C je součinitel odporu a S průřez kolmý k rychlosti v (\dot{x} , tečka představuje první derivaci podle času).

Pro jednodušší popis budeme uvažovat vztažnou soustavu spojenou s jedoucím vagónem. Označíme-li v_0 rychlost vlaku, pak Newtonovy pohybové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{1}{2}CS\rho(v_0 - \dot{x})\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}, \\ m\ddot{y} &= -g - \frac{1}{2}CS\rho|\dot{y}|\sqrt{(v_0 - \dot{x})^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

To jsou sice pěkné rovnice, ale s jejich řešením už je to těžší. Uvážíme-li, že oproti velkým rychlostem ve vodorovném směru se svislá rychlost mění jen minimálně (doba letu bude určitě v řádech sekund, spíš desetin sekundy) a navíc bude tak malá, že se odporová síla téměř neprojeví, můžeme soustavu rovnic přepsat do podoby

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{1}{2}CS\rho(v_0 - \dot{x})^2, \\ m\ddot{y} &= -g, \end{aligned}$$

která je již snazší pro řešení. Začneme první rovnicí, druhou si ponecháme jenom jako kontrolu provedených aproximací až na konec.

Nejdřív se substitucí zbavíme druhé derivace na levé straně a vyšetříme časový průběh rychlosti (konstantu $CS\rho/2m$ označíme jako K) a rovnicí

$$\dot{v} = K(v_0 - v)^2$$

řešíme metodou separace proměnných. Tedy musíme vypočítat integrály

$$\int \frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \int K dt,$$

$$\frac{-1}{v - v_0} = C + Kt.$$

Konstantu C určíme z počátečních podmínek ($t = 0, v = 0$). Výsledek

$$v = \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t}$$

je kupodivu další diferenciální rovnice, kterou je třeba vyřešit, protože v je jen derivace polohy podle času (\dot{x}). Postup je jasný – opět separace proměnných, tj.

$$\int x dx = \int \frac{Kv_0^2 t}{1 + Kv_0 t} dt.$$

Výsledek už je potom hledaná závislost polohy žvýkačky na čase (integrační konstanta z předchozího vztahu vyjde nulová, neboť z počáteční podmínky $t = 0$ opět dostáváme $x = 0$)

$$x = v_0 t - \frac{1}{K} \ln(1 + Kv_0 t).$$

Protože počítáme v soustavě spojené s vlakem, stačí dosadit za x vzdálenost tří oken d a dořešit rovnici vůči t . Ale to bohužel analyticky nejde, a tak se musíme uchýlit k nějakému úhybnému manévru. Vzhledem k tomu, že letošní seriál se zabývá počítačovou fyzikou, není pro nás problém použít k dořešení poslední rovnice aspoň tabulkového procesoru. Budeme-li uvažovat parametry $C = 0,5$, $r = 0,5$ cm, $\rho = 1,2$ kg·m⁻³, $m = 1,4$ g, $v_0 = 140$ km·h⁻¹ a $d = 6$ m, vyjde $t = 0,79$ s.

Nyní je na čase se pozastavit nad druhou rovnicí – volným pádem žvýkačky. Dosadíme-li výsledný čas t do známého vztahu pro dráhu uraženou padajícím tělesem, $s = gt^2/2$, dospějeme k závěru, že žvýkačka za tuto dobu urazí asi 3 metry svisle dolů, tudíž nás vůbec nezasáhne.

Přesnější výsledek bychom dostali, kdybychom vyšli hned z první soustavy diferenciálních rovnic a simulovali rovnou ji; uvažují totiž odporovou sílu tak, jak ve skutečnosti působí – proti směru pohybu žvýkačky. Při použití stejných parametrů jako v předchozím výpočtu pak obdržíme čas t lišící se pouze o desetiny procent. Přesná hodnota poklesu však pro nás není tolik zajímavá, neboť by žvýkačka stále klesala tak rychle, že zásah by byl vyloučen.

Další možná aproximace spočívá v zanedbání změny horizontální rychlosti žvýkačky, tzn. flusanec se bude pohybovat rovnoměrně zrychleně (vůči vlaku). Výhodou je, že lze výsledek vypočítat přesně, ale bude mírně nadsazený, nicméně pokud se bude od skutečného lišit maximálně o polovinu reakční doby člověka, lze jej prohlásit za použitelný. Platí vztah

$$t = \sqrt{\frac{2d}{Kv^2}}.$$

Dosadíme-li opět stejné hodnoty, vyjde nám $t = 0,69$ s, což vyhovuje výše uvedeným podmínkám, ale stejně jako v předchozích případech žvýkačka dřív spadne na zem.

Úloha II.2 ... zmoklé autíčko

Navrhněte sklon a tvar předního skla automobilu tak, aby z něj kapky dešťové vody při rychlosti auta 80 km/h nestékaly dolů, ale do stran. Ověřte, zda váš výsledek odpovídá skutečnosti. Co dalšího určuje sklon čelního skla?

Než se vrhneme na počítání, podívejme se, jaké aproximace během našich výpočtů použijeme. Budeme se zabývat pouze „velkými“ kapkami. Drobné kapičky ze skla vůbec nestékají. To je způsobeno adhezními silami na rozhraní voda–sklo. Pro větší kapky na mokřém skle nebudeme tyto síly uvažovat.

Dále pro určení některých vztahů a tabelovaných konstant budeme kapku považovat za kouli. To je sice nemalé zjednodušení, ale tvar větších kapek se kouli vzdáleně blíží.

Největší problém je stanovení rychlosti vzduchu v těsném okolí předního skla. Proudění tekutin podél tak složitých tvarů, jako jsou karoserie aut, je velice komplikovaný problém, který se nedá řešit analyticky. Měření ukazují, že v blízkosti skla je velikost rychlosti vzduchu menší než velikost rychlosti auta. Směr proudění vzduchu samozřejmě kopíruje tvar skla. Budeme předpokládat lineární závislost rychlosti vzduchu na rychlosti auta (což je ve shodě s experimentem), tedy $v_{vz} = kv$, kde v_{vz} je velikost rychlosti vzduchu vůči kapce, v je rychlost auta a k je empirický koeficient. Ten obecně závisí i na sklonu předního skla. Aby naše úloha byla řešitelná, považujeme ostatní vlivy za rozhodující a berme k nezávislé na sklonu čelního skla α .

Když jsme si vyjasnili použité aproximace, podívejme se na problém samotný. Aby kapky nestékaly po skle dolů, musí být síla, která u stojícího auta stékání způsobuje (tedy gravitace), vyrovnána silou opačného směru, vznikající při pohybu auta (odpor vzduchu)

$$F = F_o . \quad (4)$$

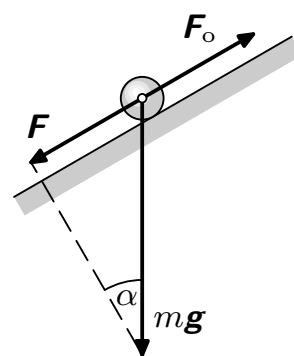
Složka tíhové síly, která působí rovnoběžně se sklem, má tvar

$$F = mg \sin \alpha . \quad (5)$$

Pro hmotnost kapky m platí $m = \rho_v V$, kde ρ_v je hustota vody a V je objem kapky.

Odporovou sílu vypočteme použitím Newtonova vzorce pro odpor prostředí (v našem případě vzduchu)

$$F_o = \frac{1}{2} C S \rho_{vz} v_{vz}^2 = \frac{1}{2} C S \rho_{vz} (vk)^2 , \quad (6)$$



Obr. 7. Síly působící na kapičku

kde C je součinitel odporu, S průřez vystavený proudění a ρ_{vz} hustota vzduchu. Nyní dosadíme z (5) a (6) do rovnice (4) a upravíme

$$\sin \alpha = \frac{CS\rho_{vz}(vk)^2}{2g\rho_v V}.$$

Nyní využijeme dříve ospravedlněné vztahy pro kouli $S = \pi r^2$ a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Tím dostaneme

$$\sin \alpha = \frac{3C\rho_{vz}(vk)^2}{8g\rho_v r}.$$

Pro hodnoty $C = 0,48$, $v = 22,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $k = 0,5$, $\rho_{vz} = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $r = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ (takovýto poloměr kapky si zvolilo i velké množství řešitelů), $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ dostáváme $\alpha \doteq 36^\circ$. To by odpovídalo skutečnému sklonu předního skla u aut. Tento výsledek jsme dostali, protože jsme vzali $k = 0,5$. O tomto koeficientu ve skutečnosti nic nevíme, takže jde jen o náhodu. Vzhledem k tomu, kolik zanedbání a přibližných vztahů jsme použili, nemůžeme žádné konkrétní výsledky považovat za věrohodné.

Nakonec se podívejme na druhou část úlohy. Aby kapky stékaly do stran, musí být přední sklo vypouklé. Odporová síla, vyvolaná proudem vzduchu, bude působit i do stran. Na úhlu α a tvaru (především zaoblenosti hran) předního skla závisí též součinitel odporu celého auta. Fyzikální vlastnosti však nejsou jediným hlediskem při návrzích karosérií. Významnou (často určující) roli hrají též designéři automobilových koncernů.

Úloha II.3 ... víno teče proudem

Vinaři a řidiči kamionů dobře znají šikovné přelévání kapalin z těžkých nádob. Vinař Ignác chce stočit víno z jednoho demižonu do druhého. Nejprve položí prázdný demižon na zem a plný do výšky Δ . Potom demižony propojí hadičkou a trochu z ní zesponu potáhne. Víno začne samovolně proudit do spodního demižonu. Za jak dlouho bude všechno víno stočeno? Předpokládejte, že demižony jsou stejné válce poloměru R a výšky H .

Předvedeme řešení úlohy s použitím integrálního počtu, ale i bez něj. Přidržíme se značení ze zadání. Navíc plošný průřez demižonu neboli plochu podstavy označme S_D , plošný průřez hadičky S_H . Aktuální výšku hladiny ve spodním demižonu nazvěme x ; výška hladiny oproti dnu ve vrchním demižonu pak je $H - x$.

Na počátku přepouštění umístíme spodní konec hadičky co nejnižší až na dno spodního demižonu a dále budeme tento konec držet ponořený pod úroveň hladiny. Každodenní zkušenost se stáčením vína nám říká, že rychlost přecerpávání by měla záviset na okamžitém rozdílu výšky hladin v demižonech, který je dán $h = \Delta + H - 2x$. Zároveň pokud budou oba konce hadičky ponořené, nebude záviset na tom, zda jsou u dna nebo těsně u hladiny. Tyto postřehy však vplynou z Bernoulliho rovnice, kterou použijeme k popisu problému. Bernoulliho

rovnice v podstatě popisuje proudění tekutiny v trubici, která mění svůj průřez a výšku nad zemí, a svým způsobem vyjadřuje zákon zachování energie pro kapalinu v tomto systému. I naše sudy spolu s hadičkou tvoří takovou trubici, která mění svůj průřez a výšku nad zemí. Rovnice v uvedeném tvaru platí za předpokladu, že proudění je ustálené, laminární a kapalina není viskózní, tedy energie se neztrácí třením. Blíže se o těchto předpokladech zmíníme na závěr. Podle Bernoulliho rovnice pro libovolná dvě místa v trubici platí

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2, \quad (7)$$

kde ρ je hustota kapaliny. Po řadě v , h , p jsou rychlost kapaliny, výška nad zemí a tlak v příslušném místě trubice. Nás nyní zajímá rychlost průtoku vína hadičkou. Předpokládejme na chvíli, že ústí hadičky ve spodním sudu je těsně u dna. Za první místo si zvolíme bod přesně na hladině vrchního sudu a druhé místo bude bod v hadičce těsně před ústím ve spodním sudu, tedy ve výšce nula. Víno se nestlačuje a objem proteklý hadičkou je tedy zřejmě stejný jako objem vyteklý ze sudu, z čehož plyne $S_D v_1 = S_H v_2$, a pro přehlednost

$$v_1 = k v_2, \quad k = \frac{S_H}{S_D}. \quad (8)$$

Dosazením do (7) získáme

$$\frac{1}{2}\rho(kv_2)^2 + \rho g(\Delta + H - x) + p_a = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_a + \rho g x, \quad (9)$$

kde p_a je atmosférický tlak, který je však nad hladinou obou sudů v podstatě stejný, a odečte se tedy. Můžeme si zde povšimnout, že rovnost vyjde na chlup stejná, ať už jsou konce hadičky u dna či těsně u hladiny, a nesejde na tom, jak je vysoko nejvyšší bod hadičky. Rovnost podělíme hustotou ρ a vyjádříme rychlost vína v hadičce jako

$$v_2 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)}{1 - k^2}} \quad (10)$$

a rychlost v_1 , jakou se posouvá hladina v demižonu, je

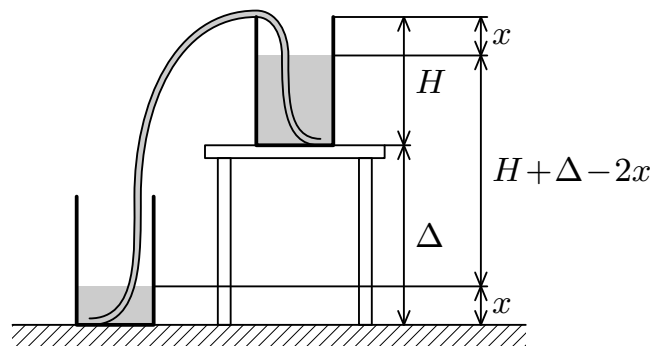
$$v_1 = \dot{x} = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}}. \quad (11)$$

Zápis \dot{x} znamená derivaci x podle času. Pokud máme velký demižon a tenkou hadičku, je faktor k velmi blízký nule a výraz $1 - k^2$ velmi blízký jedničce a (10) potom přechází ve známý vztah pro výtokovou rychlost uváděný ve tvaru $v = \sqrt{2gh}$. Tomu se samozřejmě nedivíme, protože při umístění spodního konce hadičky do vzduchu těsně nad hladinu můžeme hovořit o volném vytékání kapaliny otvorem, který je v hloubce $h = \Delta + H - 2x$ pod hladinou ve vrchním demižonu. Všimněme si však jedné zrady. Pokud bude $S_H/S_D = k = 1$, pak podle (10) vyjde rychlost v_2 nekonečná! To ale není možné, protože rychlost padajícího sloupce kapaliny bude odpovídat rychlosti při volném pádu. Problém je v tom, že Bernoulliho rovnice

v jednoduchém použitém tvaru platí pouze pro ustálené proudění, tedy takové, že se rychlost v čase nemění. Jak se hladiny přibližují, bude se rychlost proudění měnit každopádně, avšak pokud je S_D výrazně větší než S_H , rychlost se v čase mění jen velmi pomalu a Bernoulliho rovnici lze použít.

Víme tedy, jak závisí rychlost vína v hadičce na výšce hladiny x ve spodním demižonu, a vidíme, že skutečně závisí na rozdílu výšky hladin mezi demižony. Ještě zdůrazněme, že v rovnici (10) se v_2 a x v čase mění! Obecně tedy není možné vypočítat čas stočení tak, že objem vína vydělíme objemovým průtokem.

Uvedeme si hned dva způsoby, jak ze znalosti vztahu (10) vypočítat celkovou dobu T , za kterou všechno víno přeteče z vrchního sudu do spodního. První způsob nevyžaduje integrování.



Obr. 8. Schéma pokusu

Podívejme se pozorněji na vztah (11). Vidíme, že rychlost snižování hladiny je hrubě řečeno úměrná odmocnině výšky hladiny. Pro obyčejný rovnoměrně zrychlený pohyb platí, že rychlost roste hrubě řečeno s první mocninou času a dráha roste s druhou mocninou času a rychlost je tedy také svým způsobem úměrná odmocnině uražené dráhy. Uvažujme nyní obecný rovnoměrně zrychlený (zpomalený) pohyb se zrychlením a . Potom platí

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

což je kvadratická rovnice pro čas t , který vyjádříme pomocí známého vzorečku

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}{a}.$$

Dosazením za t do vztahu $v = v_0 + at$ a položením $x_0 = 0$ dostáváme

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2ax}. \quad (12)$$

To je ale velmi podobné vztahu (11). Porovnáním (11) a (12) jistě najdeme takové hodnoty v_0 a a , že dosáhneme rovnosti mezi (11) a (12) a nějaký rovnoměrně zrychlený vývoj výšky x tedy vyhovuje rovnici (11). Konkrétně

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g(\Delta + H)k^2}{1 - k^2}}, \quad a = -2g \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

Jediné, co víme o vývoji hladiny v sudu je právě vztah (11) a fakt, že $x(t = 0) = 0$. Našli jsme tudíž takový časový vývoj hladiny, že jsou splněny právě tyto dvě podmínky, a proto je tento časový vývoj ten skutečně realizovaný.

Výška hladiny se mění rovnoměrně zpomalně a dobu přetečení T určíme snadno. Automobil jedoucí rovnoměrně zrychleně ujede určitou dráhu za stejnou dobu jako automobil jedoucí celou dobu rychlostí rovnou průměrné rychlosti prvního auta⁵. To snadno ověříme třeba tak, že si nakreslíme graf závislosti rychlosti na čase a uvědomíme si, že uražená dráha je rovna obsahu plochy v grafu pod touto závislostí. Co platí pro auto, platí i pro přelévání vína. Na počátku $x = 0$, na konci, když je sud plný, $x = H$. Ze vztahu (11) snadno určíme počáteční a koncovou rychlost, průměrná rychlost je pak jejich aritmetický průměr a pro dobu T tudíž platí

$$T = \frac{2H}{\sqrt{\frac{2g(\Delta + H)k^2}{1 - k^2}} - \sqrt{\frac{2g(\Delta - H)k^2}{1 - k^2}}} = \sqrt{\frac{1 - k^2}{2gk^2}} \left(\sqrt{\Delta + H} - \sqrt{\Delta - H} \right).$$

Jak jsme řekli, použitý postup řešení je korektní pouze pro $k \ll 1$ a bez obav z velké nepřesnosti můžeme psát

$$T = \frac{S_D}{S_H} \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\sqrt{\Delta + H} - \sqrt{\Delta - H} \right).$$

Druhý způsob. Je třeba se vypořádat s tím, že jak se hladiny přibližují, přetečení určitého objemu vody trvá postupně déle a déle. Čas T lze dostat tak, že vždy vezmeme malý kousek objemu dV a spočteme dobu dT , za kterou tento malý kousek přeteče z jednoho sudu do druhého. Přetečením objemu dV se výška hladiny změní o malý kousek dx . Příští kousek objemu dV už bude tedy vytékat trošičku pomaleji než předchozí. Celkový čas T pak dostaneme součtem jednotlivých dT . Protože jsme dílčí objemy dV volili libovolně malé, suma přechází v integrál (dV je tak malý, abychom mohli předpokládat, že během jeho protékání se rychlost průtoku vlastně nemění). Zároveň patrně $dV = S_D dx$, na počátku je $x = 0$, na konci $x = H$ a objemový průtok hadičkou $Q = S_H v_2$. Konečně tedy můžeme psát integrál a aplikovat na něj klasickou matematickou mašinerii

$$\begin{aligned} T &= \int_0^T dt = \int_0^V \frac{dV}{Q} = \int_0^H \frac{S_D dx}{S_H \sqrt{2g(\Delta + H - 2x)/(1 - k^2)}} = \\ &= \frac{S_D}{S_H} \sqrt{\frac{1 - k^2}{2g}} \int_0^H \frac{dx}{\sqrt{\Delta + H - 2x}}. \end{aligned}$$

Integrál vypočteme užitím lineární substituce $z = \Delta + H - 2x$. Nové meze integrálu dostaneme dosazením původních mezí do vztahu pro z , tedy

$$\int_0^H \frac{dx}{\sqrt{\Delta + H - 2x}} = \int_{\Delta+H}^{\Delta-H} \frac{dz}{2\sqrt{z}} = [\sqrt{z}]_{\Delta-H}^{\Delta+H} = \sqrt{\Delta + H} - \sqrt{\Delta - H}$$

⁵⁾ Varování: uvedené platí skutečně jen pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

a celkový čas vychází

$$T = \frac{S_D}{S_H} \sqrt{\frac{1-k^2}{2g}} \left(\sqrt{\Delta+H} - \sqrt{\Delta-H} \right).$$

Pokud $\Delta < H$, víno nepřeteče všechno a spodní sud se naplní jen do výšky $x = (\Delta + H)/2$. Dobu přetékaní pak dostaneme jednoduše záměnou horní meze integrálu za $x = (\Delta + H)/2$.

Nakonec ještě sestavme diferenciální rovnici popisující časový vývoj výšky hladiny x . Umocněním (11) máme

$$\dot{x}^2 = \frac{2g(\Delta + H - 2x)k^2}{1 - k^2}.$$

Ted' obě strany rovnice zderivujeme podle času. Je třeba si uvědomit, že \dot{x}^2 je složená funkce, jejíž časová derivace je $2\dot{x}\ddot{x}$. Máme proto

$$2\dot{x}\ddot{x} = -\frac{4g\dot{x}k^2}{1 - k^2},$$

což podělíme \dot{x} , lehce upravíme a dostáváme výraz pro zrychlení výšky hladiny x v sudu

$$\ddot{x} = -2g \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

To je ale evidentně konstanta, čímž jsme potvrdili úvahu provedenou během prvního způsobu řešení. Dobu přečerpání T lze tedy určit již uvedeným způsobem. Mohla by nás třeba ještě zajímat přímo závislost x na čase. Jediná funkce, jejíž druhá derivace je konstantní, je obecná kvadratická funkce $x(t) = At^2 + Bt + C$. Je třeba jen dopočítat koeficienty A , B , C . Avšak jistě platí $\ddot{x} = 2A$, $\dot{x}(t=0) = B$, $x(t=0) = C = 0$.

Vraťme se k předpokladům Bernoulliho rovnice. Otázku ustáleného proudění jsme již probrali. Velice silným předpokladem je nulová viskozita vína. Viskozita hrubě řečeno vyjadřuje, jak velké je tření mezi dvěma různě rychlými vrstvami tekutiny. Při průtoku vína hadičkou se víno tře o stěny hadičky a navíc proudění je při stěně hadičky pomalejší než uprostřed a pomyslné vrstvy kapaliny se třou i mezi sebou. Třením vzniká teplo, a proto v hadičce dochází ke ztrátě energie a Bernoulliho rovnice přestává platit. Čím je proudění rychlejší, tím jsou tření a ztráty energie větší.

Kupříkladu když jsme zkoušeli přelévat vodu z výšky půl metru tenkou hadičkou o průměru půl centimetru, pak doba přelévání byla pro hadičku dlouhou jeden metr o polovinu delší než pro půlmetrovou hadičku. Rozdíl je tedy velice výrazný, a vypočtený čas T je proto jakýmsi nedosažitelným minimem. Možná by šlo provést korekce vztahu (9) přidáním na pravou stranu členu $\alpha lv_2/r$, který vyjadřuje ztrátu energie v hadičce délky l a poloměru r , přičemž α je nějaká konstanta odpovídající konkrétní kapalině. Uvědomme si také, že i při vstupu kapaliny do

spodního demižonu v důsledku tření dojde k jejímu zbrzdění na rychlost v_1 a mechanická energie se nevyhnutelně ztrácí.

Zkusme si také rozmyslet, kdy je proudění v hadičce nevířivé. Při popisu proudění se zavádí takzvané *Reynoldsovo číslo*, definované

$$Re = \frac{vr\rho}{\eta},$$

kde v je střední rychlost proudění, r poloměr trubice a η dynamická viskozita. Ze zkušenosti víme, že pokud rychlost vody v trubici vzroste natolik, že Re je přibližně větší než 1000, proudění přejde v turbulentní. Dosazením konkrétních hodnot zjistíme, že se to při přelévání vína klidně může stát. Uvědomme si, že při přelévání demižonů je rychlost v trubičce v ideálním případě nezávislá na jejím poloměru a k vířivému proudění dojde spíše při použití širší hadičky.

Úloha II.4 ... nabitá anténa

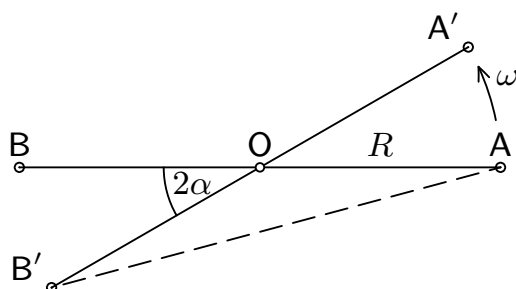
Dva stejné náboje umístíme na oba konce tuhé nevodivé tyčky. Jaký výkon budeme potřebovat na otáčení tyčky konstantní úhlovou rychlostí kolem osy procházející středem tyčky? Tření zanedbejte.

V průběhu řešení užíváme následující symboly: R označuje polovinu délky tyčky, a tedy poloměr kružnice, po které se oba náboje pohybují, ω značí úhlovou rychlost otáčení tyče, q budeme značit velikost obou nábojů. Co se týče fundamentálních konstant, volíme tradičně c jako velikost rychlosti světla ve vakuu a ε_0 permitivitu vakua.

Jak bylo uvedeno v zadání, tyčka spojující oba náboje je nevodivá a nehmotná. To znamená, že se v příkladu projevuje pouze jako mechanismus udržující náboje na kruhové trajektorii a nijak ji do našich úvah nemusíme zahrnovat. Tato idealizace byla zvolena proto, abychom se nemuseli zabývat konkrétními detaily souvisejícími s realizací takového uskupení, ale mohli se soustředit zcela na elektromagnetickou stránku věci.

Jak nás učí teorie relativity, žádný „reálný objekt“ se nemůže v prostoru pohybovat rychlostí větší, než je rychlost světla ve vakuu. Pro řešení úlohy stačí vědět, že elektromagnetické pole takovým objektem je (např. proto, že nese energii a hybnost).

Uvažujme nyní následující model silového působení mezi dvěma náboji. Každý z nábojů vysílá v každém okamžiku do prostoru informaci o své poloze a rychlosti (signál) a tato informace se prostorem šíří konečnou rychlostí. Když potom jeden náboj zachytí signál pocházející od druhého náboje, tak si jej „zpracuje“ a na základě informací v tomto signálu obsažených se začne pohybovat (jak, o tom za



Obr. 9. Otočení tyčky během šíření signálu

chvíli). Tento model má své zjevné „mouchy“, ale v základě správně vystihuje podstatu probíraného působení, především tu následující.

Každou informaci, kterou jeden náboj vyšle, přijme vzhledem ke konečné rychlosti šíření signálu druhý náboj se zpožděním. Protože se ale během doby, kdy signál putoval prostorem, mohl zdrojový náboj pohybovat, jsou informace, které má cílový náboj k dispozici, „zastaralé“. Jinak řečeno, cílový náboj se chová tak, jako by se zdrojový náboj v okamžiku příjmu signálu nenacházel tam, kde se skutečně nachází, ale tam, kde se nacházel v okamžiku vyslání signálu.

Síla působící na náboj není kolmá k jeho rychlosti, neboť jak jsme ukázali, než se jeden náboj dozví o tom, že na něj z toho a toho místa působí druhý náboj silou, tak se celá soustava stihne během šíření signálu ještě o kousek potočit. Tím se nepatrně změní úhel mezi působící silou a rychlostí náboje, vektory síly a rychlosti potom již nejsou kolmé a výsledný výkon není nulový.

První věcí, kterou ve svém řešení musíme zjistit, je velikost úhlu 2α , o který se celá soustava otočí v době mezi vysláním signálu z prvního náboje a zpracováním signálu druhým nábojem. Pro lepší názornost si celou situaci znázorníme graficky (viz obr. 9). Vodorovná pozice tyčky odpovídá okamžiku vyslání signálu, šikmá okamžiku příjmu signálu.

Jelikož se celá soustava otáčí rovnoměrně, bude se signál šířit po čas $2\alpha/\omega$. V tomto čase urazí signál rychlostí c vzdálenost mezi místy vyslání a příjmu signálu; tato místa jsou na obrázku znázorněna body A a B'. Z obrázku je patrné, že se jedná o délku základny rovnoramenného trojúhelníka o ramenech délky R a s vrcholovým úhlem $\pi - 2\alpha$, tedy o vzdálenost $2R \cos \alpha$. Srovnáním obou časů dospíváme k rovnici o jedné neznámé α ,

$$\frac{2\alpha}{\omega} = \frac{2R \cos \alpha}{c}.$$

Pro tuto rovnici bohužel nedokážeme najít obecné řešení (rozuměj funkci několika proměnných, do které bychom dosadili hodnoty parametrů v , c a získali bychom řešení). To by v případě komplikovanějších navazujících výpočtů mohlo představovat problém, nicméně v tomto případě získaná rovnice plně postačuje. Pokud by nás totiž zajímala hodnota řešení pro nějaký konkrétní případ, můžeme do dané rovnice dosadit a vyřešit ji numericky nebo pomocí mocinného rozvoje (pro malé rychlosti otáčení můžeme funkci kosinus rozvinout do několika prvních členů Taylorova polynomu, čímž obdržíme přijatelnou polynomiální rovnici). Nám bude plně postačovat, že tato rovnice v každém případě řešení má, že toto řešení je jediné (rozmyslete si proč) a že jej v principu umíme nalézt. Označme si toto jediné řešení naší rovnice α_0 .

Zopakujme nyní ještě jednou, co jsme zatím zjistili. Silové působení mezi oběma náboji neprobíhá tak, jako by oba náboje odděloval úhel π , ale jako by jejich vzájemná úhlová vzdálenost byla pouze $\pi - 2\alpha_0$.

Nyní je konečně na čase říci si, jak probíhá „zpracovávání“ signálů, které si mezi sebou náboje posílají. Podívejme se tedy do knihy Feynmanovy přednášky

z fyziky⁶, kde se objevuje vzorec

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} \right).$$

Tento vzorec říká, že když se náboj prostřednictvím signálu dozví, že na místě popsaném polohovým vektorem \mathbf{r}' (s počátkem pevně fixovaným v místě, kde se nachází náboj přijímající signál) a odpovídajícím jednotkovým vektorem $\mathbf{e}_{r'}$ se nachází náboj velikosti q , má se chovat stejně, jako by byl v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} dané uvedeným vzorcem. Čárky se v uvedeném vzorci vyskytují proto, abychom měli na paměti, že máme dosazovat pozici zdrojového náboje v okamžiku vyslání signálu, nikoli jeho příjmu.

Zde je možno upozornit na jednu „mouchu“ modelu, který jsme uvedli v prvních odstavcích. Aby byl náš model konzistentní s teorií relativity, potřebovali bychom, aby polohový vektor, kterým se zabýváme, neměl pevný počátek, ale aby se jednalo o vektor vzájemné polohy obou nábojů, a aby tak silové působení nebylo závislé na volbě inerciální soustavy. V praxi se tento problém překlene tím, že si vzájemné působení většinou představujeme pomocí vektorových polí, s vektorem intenzity jako funkcí polohy v prostoru. Tento model je nicméně na první seznámení s předmětem možná až příliš složitý, proto jsme užili sice ne zcela správného, ale názornějšího modelu.

Abychom mohli užít uvedeného vztahu, je třeba zjistit, jak se s časem mění vektor polohy zdrojového náboje vůči místu přijmutí signálu (vůči bodu \mathbf{B}'). Užijeme proto oblíbenou fyzikální fintu: necháme čas, aby se posunul o malou hodnotu dt , a budeme sledovat, jak se celá situace změní. Během této krátké doby se úhlová vzdálenost zdrojového náboje a bodu \mathbf{B}' změní z hodnoty $\pi - 2\alpha$ na hodnotu $\pi - 2\alpha + \omega dt$. Tím se rovnoramenný trojúhelník osa otáčení–zdrojový náboj–bod \mathbf{B}' trochu zploští a úhel při jeho základně se zmenší o polovinu toho, o co se zvětší vrcholový úhel,

$$d\alpha = -\frac{\omega dt}{2},$$

což je zároveň úhel, o který se pootočí jednotkový vektor $\mathbf{e}_{r'}$ okolo bodu \mathbf{B}' . Je užitečné si povšimnout, že velikost této změny není závislá na čase, což lze interpretovat tak, že se vektor $\mathbf{e}_{r'}$ otáčí kolem bodu \mathbf{B}' rovnoměrnou úhlovou rychlostí $\omega/2$. Jak známo, vektory rychlosti a zrychlení takového pohybu jsou

$$\frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} = \frac{\omega}{2} \mathbf{f}_{r'}, \quad \frac{d^2 \mathbf{e}_{r'}}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{4} \mathbf{e}_{r'}.$$

Zde jsme označili $\mathbf{f}_{r'}$ jednotkový vektor kolmý k $\mathbf{e}_{r'}$ (vektor $\mathbf{e}_{r'}$ otočený o $\pi/2$ proti směru hodinových ručiček).

S pootočením vektoru \mathbf{r}' souvisí i změna jeho velikosti

$$r' = 2R \cos \alpha$$

⁶) Feynman, Leighton, Sands: *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Fragment, 2000, str. 372.

o hodnotu (opět uijeme rozvoj do Taylorova polynomu, tentokrát stačí do prvního řádu)

$$dr' = -2R \sin \alpha \, d\alpha = \omega R \sin \alpha \, dt .$$

Pro zpřehlednění zápisu si dopředu vypočteme veličinu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{r'^2} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{e}_{r'} \frac{1}{r'^2} \right) = \frac{d\mathbf{e}_{r'}}{dt} \frac{1}{r'^2} + \mathbf{e}_{r'} \left(-\frac{2}{r'^3} \frac{dr'}{dt} \right) = \\ &= \frac{\mathbf{f}_{r'} \omega R \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} R \omega \sin \alpha_0}{(2R \cos \alpha_0)^3} = \frac{\omega}{8R^2 \cos^3 \alpha_0} (\mathbf{f}_{r'} \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} \sin \alpha_0) . \end{aligned}$$

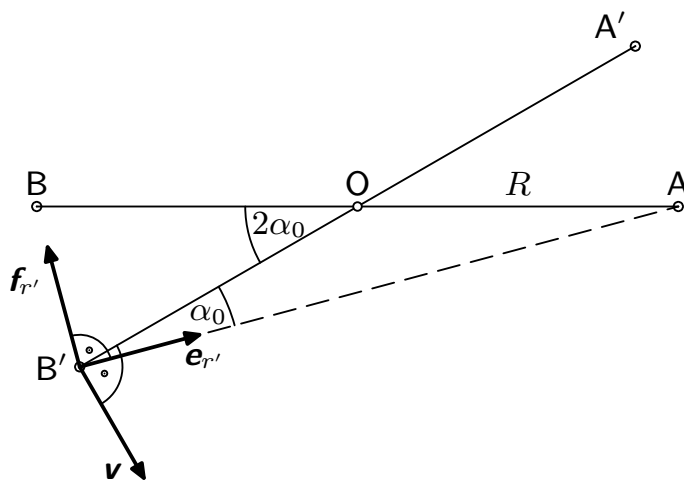
Nyní již stačí dosadit získané hodnoty do uvedeného vzorce a dostáváme velikost elektrické intenzity v bodě B' jako

$$\mathbf{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{e}_{r'}}{(2R \cos \alpha_0)^2} + \frac{2\omega R \cos \alpha_0}{8cR^2 \cos^3 \alpha_0} (\mathbf{f}_{r'} \cos \alpha_0 - 2\mathbf{e}_{r'} \sin \alpha_0) - \frac{\omega^2}{4c^2} \mathbf{e}_{r'} \right) .$$

Elektrická síla působící na každý náboj je potom z Lorentzova vztahu rovna

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\mathbf{e}_{r'} \left(\frac{1}{4R^2 \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega \sin \alpha_0}{2Rc \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2} \right) + \mathbf{f}_{r'} \left(\frac{\omega}{4Rc \cos \alpha_0} \right) \right) .$$

Abychom mohli vypočítat výkon, se kterým koná tato síla práci, potřebujeme určit úhel, který svírají vektory síly a rychlosti. Vektor rychlosti každého náboje je tečný ke kružnici, po které náboje obíhají, celá situace tedy vypadá stejně jako na obrázku 10. Z něho vidíme, že velikost úhlu mezi vektory \mathbf{v} a $\mathbf{e}_{r'}$ je rovna $\pi/2 - \alpha_0$ a úhel mezi vektory \mathbf{v} a $\mathbf{f}_{r'}$ je roven $\pi - \alpha_0$.



Obr. 10. Vzájemné postavení vektorů

Výkon, kterým konají práci elektrické síly působící na každý náboj, je potom dán skalárním součinem

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{-q^2 \omega R}{4\pi\epsilon_0} \left(\sin \alpha_0 \left(\frac{1}{4R^2 \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega \sin \alpha_0}{2Rc \cos^2 \alpha_0} - \frac{\omega^2}{4c^2} \right) - \cos \alpha_0 \left(\frac{\omega}{4Rc \cos \alpha_0} \right) \right) . \end{aligned}$$

To však ještě není všechno. Výkon, vypočtený z uvedeného vzorce je kladný. Protože máme zanedbat tření a magnetická síla práci nekoná (je kolmá k pohybu), tedy pokud by vše bylo tak, jak jsme to doposud uvažovali, energie soustavy by se sama od sebe zvyšovala, náboje by se navzájem urychlovaly a měli bychom co do činění s perpetuem mobile! Tento rozpor se dá naštěstí poměrně lehce vyřešit.

Zatím jsme totiž neuvažovali energii, kterou s sebou nese elektromagnetické pole. Hustota energie skryté v elektrickém poli je úměrná druhé mocnině velikosti vektoru elektrické intenzity a rovna $\rho = \varepsilon_0 E^2 / 2$. Pokud sem dosadíme za vektor elektrické intenzity výše odvozený vztah a vypočteme výkon, s jakým každý náboj vyzařuje do prostoru, dostaneme pro nerelativistické rychlosti nábojů vztah

$$P_2 = \frac{q^2 \omega^4 R^2}{6\pi \varepsilon_0 c^3}.$$

Případné zájemce o odvození tohoto vztahu odkážeme na již citované Feynmanovy přednášky z fyziky, neboť se jedná o poněkud delší výpočet. Je důležité, že se tímto způsobem vyzáří více energie, než kolik získají náboje vzájemnou interakcí, ve výsledku tedy vyšetřovaná soustava jako celek energii ztrácí a k žádnému rozporu zde nedochází.

Uvedené dva způsoby jsou jedinými cestami, kterými naše soustava může získávat nebo ztrácet energii. Celkový výkon, který soustava spotřebovává a který jí musíme dodávat, abychom ji udrželi v rovnoměrné rotaci, je tedy součtem obou výkonů přes oba náboje

$$P_{\text{total}} = 2(P_2 - P_1),$$

kde velikosti jednotlivých výkonů jsou uvedeny výše. Upozorňujeme ještě jednou, že odvozené řešení je platné pouze pro nerelativistické rychlosti nábojů.

Uveďme nyní ve stručnosti, jak bychom příklad řešili v případě, že bychom se zajímali o malé rychlosti obou nábojů. Pro malé hodnoty argumentu x získáme Taylorovým rozvojem

$$\begin{aligned} \cos x &\approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, & \sin x &\approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \\ (1-x)^a &\approx 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{6} x^3. \end{aligned}$$

Důležité je, že pokud místo daných funkcí použijeme uvedené polynomy, dopustíme se chyby, která je řádově rovna první zanedbané mocnině ω , čili pro malá ω se užitím přibližných vzorců dopustíme pouze malé chyby.

Nyní můžeme s těmito přibližnými vztahy vyřešit (alespoň přibližně pro malé rychlosti) tu ošklivou rovnici pro α_0 , se kterou jsme neuměli hnout,

$$\alpha_0 = \frac{\omega R}{c} \cos \alpha_0.$$

Předpokládejme, že můžeme řešení naší rovnice vyjádřit ve tvaru

$$\alpha_0 = A + B \frac{\omega R}{c} + C \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + D \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3,$$

a podívejme se, zdali nám tento předpoklad přinese nějaký užitek. Rozvoj jsme dělali do třetího řádu, protože se v dalších úpravách dostaneme na úroveň mocniny vyzařovacího členu. Dosaďme

$$\begin{aligned} A + B \frac{\omega R}{c} + C \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + D \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 &= \\ &= \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega R}{2c} \left(A + B \frac{\omega R}{c} + C \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + D \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \right)^2 + \\ &+ \frac{\omega R}{24c} \left(A + B \frac{\omega R}{c} + C \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + D \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \right)^4. \end{aligned}$$

Aby byla námi navržená hodnota skutečně řešením, musí se na obou dvou stranách rovnice rovnat koeficienty u nejnižších mocnin. Srovnáním koeficientů u těchto mocnin ω (nejprve u nulté, pak u první až u třetí) dostáváme pro hodnoty koeficientů postupně

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{2}.$$

Řešení rovnice je tedy přibližně

$$\alpha_0 \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{\omega^3 R^3}{2c^3}.$$

Doufáme, že vás již tato krátká ukázka přesvědčila o tom, že výše uvedené přibližné vzorce jsou velice užitečné a že díky nim dokážeme zjednodušit mnohé ošklivé vztahy.

Nyní počítejme všechny členy, které nás zajímají (vzhledem k dalšímu postupu musíme každý člen určit do řádu ω^3 , abychom se dostali na úroveň vyzařovacího členu):

$$\sin \alpha_0 \approx \alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6} \approx \frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3,$$

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_0} = (1 - \sin^2 \alpha_0)^{-1} \approx 1 + \sin^2 \alpha_0 \approx 1 + \alpha_0^2 \approx 1 + \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2,$$

$$\frac{\sin \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} = \sin \alpha_0 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha_0} \approx \left(\alpha_0 - \frac{\alpha_0^3}{6} \right) (1 + \alpha_0^2) \approx \frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3,$$

$$\frac{1}{\cos \alpha_0} = (1 - \sin^2 \alpha_0)^{-1/2} \approx 1 + \frac{\sin^2 \alpha_0}{2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2.$$

Tyto výrazy můžeme dosadit do odvozeného vztahu pro výkon P_1 a dostaneme

$$\begin{aligned}
 P_1 &\approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left. \left[\frac{1}{4R^2} \left(1 + \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 \right) - \frac{\omega}{2Rc} \left(\frac{\omega R}{c} + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) - \frac{\omega^2}{4c^2} \right] - \left(\frac{\omega}{4Rc} \right) \right] \approx \\
 &\approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\epsilon_0} \left(\left(\frac{\omega R}{c} - \frac{2}{3} \left(\frac{\omega R}{c} \right)^3 \right) \left(\frac{1}{4R^2} - \frac{\omega^2}{2c^2} \right) - \left(\frac{\omega}{4Rc} \right) \right) \approx \\
 &\approx \frac{-q^2\omega R}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2\omega^3 R}{3c^3} \right) \approx \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2\omega^4 R^2}{c^3}.
 \end{aligned}$$

Tento výsledek nás dostal do pěkných potíží! Říká nám totiž, že energie, kterou náboje získají vzájemnou interakcí, je s přesností do řádu ω^4 stejně velká jako energie, kterou náboje vyzáří. Tyto dva příspěvky se vzájemně vyruší, takže celkový výkon, který musíme nábojům dodávat, je úměrný nejméně páté mocnině úhlové rychlosti otáčení. Což je jistě zajímavý výsledek sám o sobě, nicméně pokud bychom chtěli i konstantu úměrnosti, museli bychom právě uvedený postup opakovat s tím, že bychom museli všechny členy určovat s přesností do páté mocniny ω . Jak jistě tušíte, výpočet je to poměrně zdlouhavý a ani na něj zde nemáme místo. Proto zde uvedeme pouze výsledek, ke kterému mohou zájemci dojít zcela analogickým postupem, jaký jsme zde právě uvedli. Výkon spotřebovaný jedním nábojem v důsledku vzájemné interakce je potom přibližně

$$P_1 = \frac{7\omega^6 R^4}{15\pi\epsilon_0 c^5}.$$

Tím jsme se však dostali do jiného problému. Tak malé odchylky jsou již na úrovni relativistických korekcí vztahu pro vyzařovaný výkon. Provedeme-li totiž výpočet výkonu vyzářeného zrychlující částicí relativisticky, dostaneme se ke vztahu

$$P_2 = \frac{q^2\omega^4 R^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} \approx \frac{q^2\omega^4 R^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right),$$

platnému snad již obecně. Zájemci jej naleznou třeba v knize D. J. Griffitha: *Introduction to Electrodynamics*.

Sečtením dvou posledních vztahů potom dostáváme pro výkon nutný k udržení rovnoměrné rotace soustavy výraz

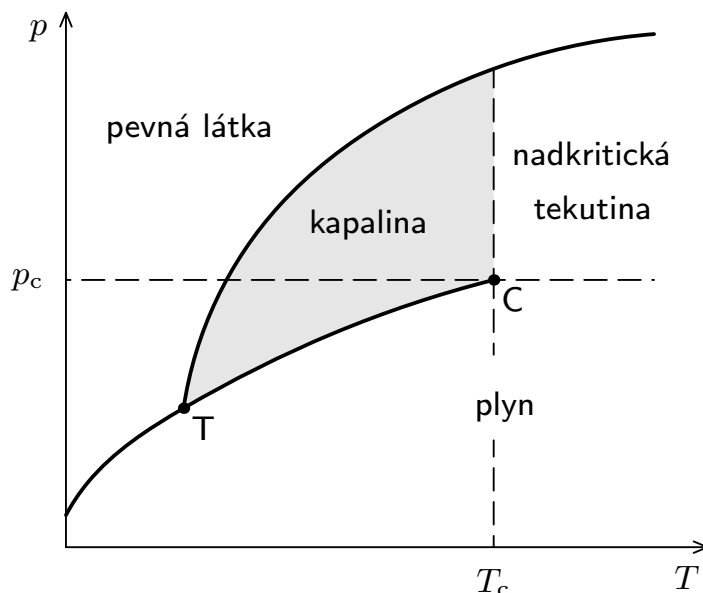
$$P_{\text{total}} = \frac{29\omega^6 R^4}{15\pi\epsilon_0 c^5}.$$

Úloha II. P ... zachraňte bublinu?

Batyskaf Trieste se ponořil do velké hloubky Mariánského příkopu a vypustil bublinu, která začala stoupat... Když však podle stavové rovnice ideálního plynu vypočítáte hustotu vzduchu v bublině, zjistíte, že je bublina těžší než voda. Je to možné?

Pokud souhlasíte, vysvětlete svoji odpověď. Pokud nesouhlasíte, vypočítejte, jaké budou parametry bubliny (především hustota).

Vzpomeňme nejprve, čím je charakteristický dobře známý model ideálního plynu. Rovnice popisující jeho stav je odvozená čistě z kinetických vlastností molekul, jež ho tvoří, nutně tedy zanedbává jejich vzájemné ovlivňování. Ale závislost potenciální energie dvou molekul na jejich vzdálenosti lze aproximovat konstantou (nulou) jen pro velké vzdálenosti částic – tj. pro plyn o nízké hustotě, tedy za nízkých tlaků či při energiích molekul podstatně vyšších než příslušná potenciální energie, tedy při velkých teplotách. Druhá idealizace spočívá v představě nulového rozměru částic. Ve skutečné látce existuje mez, za kterou už prostě stlačit nejde (mají-li zůstat zachovány elektronové obaly). Velikost vzájemné interakce charakterizujeme konstantou a a minimální objem označme b . Pak můžeme následujícím způsobem vylepšit stavovou rovnici ideálního plynu na tzv. van der Waalsovou rovnici



Obr. 11. Fázový diagram

Pro známé (resp. dohledatelné) hodnoty $p = h_{\text{O}_2} g \doteq 1100 \text{ atm}$, $T \approx 4^\circ\text{C}$ (teplota nejhustší vody), $a = 0,136 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $b = 3,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$ dostáváme kubickou rovnici pro molární objem V_m , již lze numericky řešit. Vezmeme-li v úvahu $\rho = M_m/V_m$, kde M_m je molární hmotnost vzduchu ($29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$), dostaneme

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

Pro známé (resp. dohledatelné) hodnoty $p = h_{\text{O}_2} g \doteq 1100 \text{ atm}$, $T \approx 4^\circ\text{C}$ (teplota nejhustší vody), $a = 0,136 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $b = 3,64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\cdot\text{mol}^{-1}$ dostáváme kubickou rovnici pro molární objem V_m , již lze numericky řešit. Vezmeme-li v úvahu $\rho = M_m/V_m$, kde M_m je molární hmotnost vzduchu ($29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$), dostaneme

$$\rho \doteq 580 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

To je docela hodně (přestože méně než cca $1400 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, které dává stavová rovnice pro ideální plyn) a na místě je otázka, nakolik v pořádku je představa o zachování plynnosti takto komprimované bubliny. Běžná zkušenost s reálným plynem říká, že při dostatečném tlaku začne kondenzovat na kapalinu⁷.

⁷⁾ Viz také diskuze k úloze II.E v XIX. ročníku.

Na obrázku je znázorněn typický fázový diagram plynu i pro hodně vysoké teploty a tlaky. Je-li teplota vyšší než kritická teplota (T_c), plyn při stlačování nikdy neprotne křivku rovnováhy mezi kapalinou a plynem, nikdy tedy nezkondukuje, pouze se dostaneme do zajímavé oblasti „nadkritické tekutiny“, v níž při žádném tlaku nenastane rovnováha mezi kapalinou a její sytou párou (tj. nevytvoří se nikdy něco jako kapičky, natož pak hladina). V tabulkách se lze dočíst, že kritická teplota vzduchu je $T_c = -140,7^\circ\text{C} \ll 4^\circ\text{C}$. Jsme tedy hluboko v nadkritické oblasti a rovnici lze použít, byť s určitou nepřesností – podle NIST⁸ je hustota pro uvedené hodnoty asi $615\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Lepší shody bychom dosáhli s lepší stavovou rovnicí, ty pak ale vyžadují více informací o popisovaném plynu.

Jak už bylo řečeno výše, od určitých tlaků je plyn takřka nestlačitelný kvůli nenulovému rozměru částic – stane se z něj pevná látka.

A konečně na úplný závěr této dvojdílné úlohy podotkneme, že při těchto tlacích se bublina ve vodě rozpustí ještě než uplave zlomek potřebné dráhy.

Úloha III.1 ... Angličani a Skoti

Předmětem této úlohy je, abyste odhadli, jak by se změnila rychlost rotace Země, kdyby Angličani a Skoti začali jezdit vpravo místo vlevo.

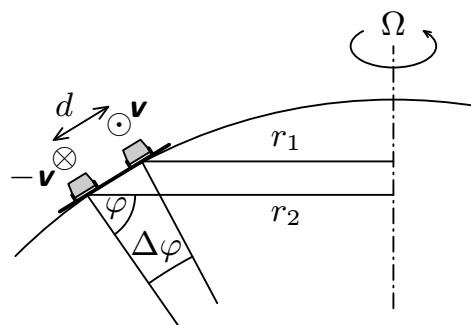
Mohlo by se zdát, že to, jestli Angličani a Skoti jezdí vpravo nebo vlevo, rotaci Země vůbec neovlivní. Vždyť pokud předpokládáme, že na každé silnici jezdí auta oběma směry ve stejném počtu, musí se tyto vlivy vyrušit. Podrobnější rozbor však ukazuje opak. Žijeme totiž na velké rotující kouli, nestačí proto sčítat hybnosti aut (celková hybnost je skutečně průměrně nulová, pokud lidé nemigrují), nýbrž momenty hybnosti.

Příčina změny tkví v tom, že mezi protijedoucími auty je jistá vzdálenost, označme ji d . Uvažujme tedy dvě protijedoucí auta o hmotnosti m jedoucí rychlostí o velikosti v v západovýchodním směru. Jejich celkový moment hybnosti ΔL vzhledem k zemské ose je (viz obr. 12)

$$\Delta L = mv(r_1 - r_2) = mvR(\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos\varphi),$$

kde R je poloměr Země, φ je zeměpisná šířka a pro $\Delta\varphi$ platí d/R . Pro kosinus uijeme součtový vzorec a přibližné vztahy $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, $\cos\Delta\varphi \approx 1$ (platící pro malé $\Delta\varphi$, v našem případě $\Delta\varphi \approx 10^{-6}$)

$$\begin{aligned} \Delta L &= mvR(\cos\varphi \cos\Delta\varphi - \sin\varphi \sin\Delta\varphi - \cos\varphi) \approx \\ &\approx mvR(\cos\varphi - \sin\varphi\Delta\varphi - \cos\varphi) = -mvR \sin\varphi\Delta\varphi. \end{aligned}$$



Obr. 12. Výpočet momentu hybnosti aut na silnici

⁸⁾ National Institut of Standards and Technology; <http://webbook.nist.gov/chemistry/fluid>

Pokud začnou obyvatelé Spojeného království jezdit vpravo (formální záměna $v \rightarrow -v$), změní se moment hybnosti zobrazené dvojice aut o

$$-2\Delta L = 2mvR \sin \varphi \Delta \varphi.$$

Změnu momentu hybnosti všech aut pohybujících se v daném okamžiku po silnicích Spojeného království, určíme sečtením odvozeného příspěvku pro všechny dvojice aut. Nechť se v průměru po silnicích pohybuje N aut, v každém směru $N/2$, pak celková změna momentu hybnosti bude

$$\Delta L_{\text{celk}} \sim NmvR \sin \varphi \Delta \varphi.$$

Jistě jste si všimli, že jsme nebrali v úvahu fakt, že ne všechny silnice směřují podél rovnoběžek. Pokud bychom odklon silnice od západovýchodního směru označili α a předpokládali, že silniční síť je dostatečně hustá, a tedy více méně náhodná, museli bychom sčítat přes všechny různé směry α , což by vedlo na nějaký číselný faktor v předchozím vztahu⁹. Ten však zanedbáme, jelikož si ve výsledku neděláme ambice vyšší než na řádový odhad.

Celkový moment hybnosti Země včetně všeho, co se nachází na jejím povrchu, se zachovává (neuvažujeme slapové působení Slunce a Měsíce). Změna momentu hybnosti zeměkoule tedy je $\Delta L_Z = -\Delta L_{\text{celk}}$. Moment hybnosti zeměkoule můžeme vyjádřit pomocí její úhlové rychlosti $L_Z = J\Omega$, kde $J \approx 2MR^2/5$ je moment setrvačnosti, M je hmotnost Země. Tedy $\Delta L_Z = J\Delta\Omega$. Nyní již můžeme vyjádřit změnu úhlové rychlosti rotace Země způsobené novými pravidly silničního provozu

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta L_Z}{J} \sim -\frac{5NmvR \sin \varphi \Delta \varphi}{2MR^2}.$$

Názornější bude znát změnu délky dne $T = 2\pi/\Omega$. Ze vztahu $\Delta T/T = \Delta\Omega/\Omega$ dostáváme

$$\Delta T = \Delta\Omega \frac{T}{\Omega} = \frac{T^2}{2\pi} \Delta\Omega \sim -\frac{5T^2 Nmv \sin \varphi \Delta \varphi}{4\pi MR} \sim -\frac{T^2 Nmv d}{3MR^2}.$$

Zbývá dosadit číselné hodnoty: $T = 1 \text{ den} \sim 9 \cdot 10^4 \text{ s}$, $N \sim 10^7$, $m \sim 10^3 \text{ kg}$, $v \sim 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $R \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\varphi \sim 50^\circ$, $d \sim 10 \text{ m}$, $M \sim 10^{25} \text{ kg}$ a získáme výsledek

$$\Delta T \sim -10^{-17} \text{ s}.$$

Rychlost rotace Země by se zpomalila řádově o sekundu za jednu miliardu let. Jak se dalo očekávat, směšně malá hodnota, žádným způsobem změřitelná, dá-li se vůbec mluvit o nějaké změně.

⁹⁾ Konkrétně bychom dostali střední hodnotu $\sin^2 \alpha$ čili $1/2$.

Úloha III.2 ... výtah až do nebe

Určete, jaké fyzikální vlastnosti musí mít materiál závěsného lana výtahu, který spojuje povrch Země a oběžnou geostacionární dráhu. Je vůbec takový materiál na Zemi dostupný?

Nejdříve se zamysleme nad hlavní myšlenkou vesmírného výtahu. Pro určitou výšku nad zemským povrchem platí, že těleso v ní obíhající po kruhové dráze bude mít oběžnou dobu rovnou jednomu dni (geosynchronní oběžná dráha). Tedy jeho úhlová rychlost bude stejná jako úhlová rychlost otáčení Země ω . Výšku této dráhy vypočteme z rovnosti odstředivé a gravitační síly

$$m\omega^2 R = G \frac{mM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}, \quad (13)$$

kde G je gravitační konstanta a M hmotnost Země. Číselně je $R = 35\,800$ km nad povrchem Země. Je-li navíc tato oběžná dráha v rovině rovníku, nazývá se geostacionární a obíhající satelit se na ní vůči povrchu Země nepohybuje. Je proto lákavé spojit toto místo s odpovídajícím místem na rovníku. Pravděpodobně prvním, kdo o tom uvažoval, byl Konstantin Ciolkovskij, myšlenku potom zpopularizoval A. C. Clarke v románu Rajské fontány.

Bohužel 35 800 km lana nestačí, takto krátké by spadlo na zem, protože se jeho těžiště nachází pod geostacionární dráhou. Musí se proto uvažovat buď s lanem delším, nebo s vynesením dodatečného závaží na vyšší oběžnou dráhu, které bude lano napínat. My dále budeme uvažovat první možnost.

Další věc je, jak lano bude vypadat. Ve skutečnosti nepůjde o výtah v pravém slova smyslu, protože kabina nebude lanem vytahovaná, nýbrž po něm bude šplhat vzhůru vlastními silami. Z různých dalších důvodů (např. minimalizování pravděpodobnosti srážky s vesmírným smetím) se ukazuje jako nejlepší tvar dlouhá tenká stuha¹⁰⁾. Dále se však ukáže, že napětí v laně nezávisí na jeho průřezu.

Jaká je podmínka pro to, aby lano vlastními silami vydrželo na geostacionární oběžné dráze? Stejně jako pro bodový satelit musí platit, že výsledná síla v neinerciální soustavě spojené s lanem musí být nulová. Tedy odstředivá síla způsobená otáčením Země musí vyrovnat gravitační sílu. Vypočítejme tedy délku H lana, pro kterou to platí. Na element lana dm působí gravitační a odstředivá síla

$$dF = dF_o - dF_g = r\omega^2 dm - G \frac{M dm}{r^2}. \quad (14)$$

Víme, že $dm = \sigma dr$, kde σ je délková hustota lana. Celkovou působící sílu získáme integrováním vztahu (14) přes celou délku lana (od povrchu Země do hledané výšky H). Jak jsme dříve zmínili, tato síla musí být nulová. V integrálu jsou elementární funkce, takže jej nebude problém vypočítat.

$$\int_{R_z}^H \left(G \frac{\sigma M}{r^2} - \sigma \omega^2 r \right) dr = 0,$$

¹⁰⁾ Viz například <http://www.spaceelevator.com/>.

$$G\sigma M \left(-\frac{1}{H} + \frac{1}{R_Z} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2} (H^2 - R_Z^2) = 0. \quad (15)$$

Podělíme-li rovnici členem $\sigma\omega^2/2$, u levé závorky dostaneme $2R^3$ (výšku geostacionární oběžné dráhy, jak jsme vypočítali v (13)). Rozepsáním závorek poté vyjde kubická rovnice

$$H^3 R_Z - H (R_Z^3 + 2R^3) + 2R^3 R_Z = 0, \quad (16)$$

jejíž jeden kořen se dá uhodnout ($H = R_Z$; v laně nulové délky se kupodivu odstředivá a gravitační síla vyrovnají) a zbylé dva dostaneme řešením kvadratické rovnice. Uvažujeme pouze ten s kladnou odmocninou z diskriminantu, protože ten druhý vyjde záporně.

$$H = \frac{1}{2} \left(\sqrt{R_Z^2 + \frac{8R^3}{R_Z}} - R_Z \right). \quad (17)$$

Dosadíme-li již dříve vypočítané veličiny a konstanty, vyjde $H \approx 150 \cdot 10^3$ km, což je skoro polovina vzdálenosti k Měsíci, ale tím se zatěžovat nebudeme.

Teď přejdeme k hlavní části úlohy. Musíme vypočítat průběh normálového napětí v laně v závislosti na výšce (počítané od středu Země). K výsledku se dostaneme podobně jako v předchozím případě. Síla napínající lano bude celková síla působící na spodní část lana.

$$F(h) = \int_{R_Z}^h (dF_o - dF_g).$$

Pomocí vztahu uvedeného v (14) zapíšeme konkrétní síly a integrujeme stejně jako při počítání délky lana.

$$F(h) = G\sigma M \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{h} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2} (h^2 - R_Z^2). \quad (18)$$

Musíme najít extrém této funkce, tedy položíme první derivaci podle h rovnou nule,

$$-\frac{GM\sigma}{h^2} + h\sigma\omega^2 = 0.$$

Je to opět kubická rovnice, jejíž jeden kořen uhodneme – derivace $F(h)$ je nulová pro $h = R$. Zbylé dva kořeny jsou imaginární a nezajímají nás. Průběh napínající síly je znázorněn na obrázku 13.

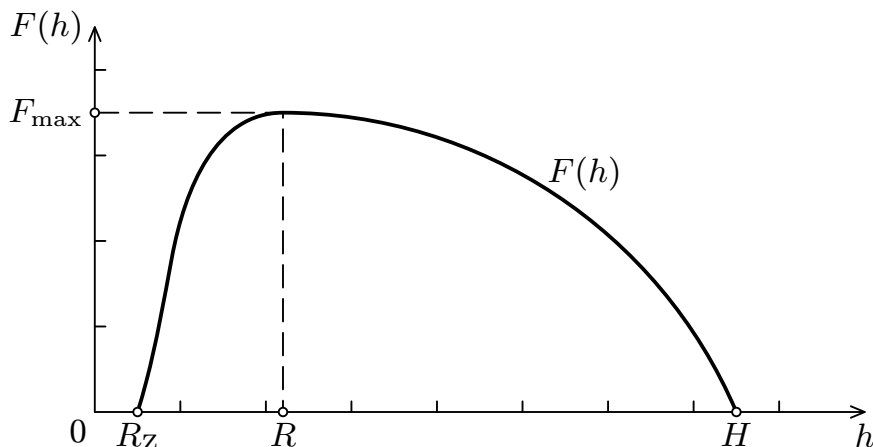
Velikost maximální napínající síly tedy bude (dosazení $h = R$ do $F(h)$)

$$F_{\max} = \sigma GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2} (R^2 - R_Z^2).$$

Využijeme-li souvislosti délkové hustoty σ s objemovou hustotou ρ ($\sigma = \rho S$, kde S je průřez lana), dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma_n = \frac{F_{\max}}{S} &= \frac{\sigma}{S} \left| GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2} (R^2 - R_Z^2) \right| = \\ &= \rho \left| GM \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R} \right) - \frac{\sigma\omega^2}{2} (R^2 - R_Z^2) \right|. \end{aligned}$$

Napětí opravdu nezávisí na průřezu lana a po vyčíslení vychází hodnota $\sigma_n = \rho \cdot 4,84 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.



Obr. 13. Graf závislosti síly na výšce

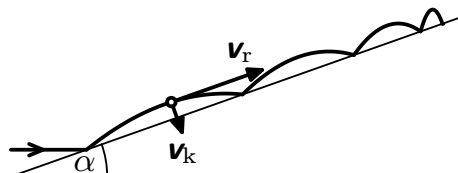
Nyní se dostáváme k jednomu menšímu problému. Zanedbali jsme totiž, že se lano vlastní tíhou natahuje, a tudíž se mění jeho hustota v závislosti na délce. (A to opačně než působící síla. Tam, kde bude $F(h)$ největší, bude hustota nejmenší a naopak.) Ale pokud bude mít materiál dostatečně velký modul pružnosti v tahu, protáhne se jen minimálně a zanedbání bude oprávněné. V integrálech pro výpočet působících sil bychom museli tuto závislost zohlednit a to by nebylo jednoduché. Spokojíme se s tím, že maximální dovolené normálové napětí v laně je přímo úměrné hustotě materiálu a konstanta úměrnosti je asi $5 \cdot 10^7 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

Jaké materiály tuto podmínku splňují? Snadno ověříme, že žádná běžná látka by neobstála. Jedinou světlou nadějí je lano z uhlíkových nanotrubek, jehož hustota je asi $1350 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, a tedy $\sigma_n = 65 \text{ GPa}$. Jejich teoretická mez pevnosti je asi dvakrát větší, tudíž nám to dává naději do budoucna (zatím dokážeme vyrábět pouze krátké trubičky, lano z nich stále čeká na vynálezce).

Další vlastnosti materiálu jako tepelná roztažnost, odolnost vůči povětrnostním vlivům a další se projeví jenom na malém úseku lana (v atmosféře), a tak jejich silové účinky můžeme zanedbat. Problémem by mohla být pouze skutečnost, že se vzdáleností od Země klesá elektrický potenciál a takovéto lano by bylo jedním velkým hromosvodem. Základna výtahu by tak měla být někde, kde se moc neblýská, a lano ošetřeno, aby mu zásah bleskem moc neškodil. Nicméně jakákoliv ochrana proti bleskům by byla potřeba jen v nízkých výškách, a tak se hmotnost lana příliš nezvětší.

Úloha III.3 ... hopsání po nakloněné rovině

Malou kuličku hodíme vodorovně na nakloněnou rovinu. Kulička po ní začne poskakovat a po N odrazech dopadne kolmo k povrchu nakloněné roviny (viz obr. 14). Jaký je úhel α nakloněné roviny? Předpokládejte, že se kulička odráží dokonale pružně, rotaci kuličky neuvažujte.



Obr. 14. Příklad trajektorie kuličky pro $N = 4$

Pohyb kuličky lze rozložit do dvou směrů – kolmého na rovinu a rovnoběžného s rovinou. Ve shodě s tímto pojmenováním budeme nadále používat indexy k a r . Kulička se odráží dokonale pružně a tedy odraz nijak nezmění hodnotu v_r a v případě v_k pouze změni znaménko. Ve směru kolmém pohyb mezi dvěma odrazy popisuje rovnice

$$v_k = v \sin \alpha - g \cos \alpha t.$$

Nyní vypočteme periodu skoku, tedy časový interval mezi dvěma dopady (tj. dvojnásobkem doby, pro které platí $v_k = 0$)

$$t_s = \frac{2v}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

Pohyb ve směru rovnoběžném popisuje rovnice

$$v_r = v \cos \alpha - g \sin \alpha t.$$

Kulička dopadne na rovinu kolmo, pokud bude v okamžiku dopadu rovnoběžná složka rychlosti nulová. To nastane právě v čase

$$t_N = \frac{v}{g} \operatorname{cotg} \alpha.$$

Aby situace nastala v okamžiku N -tého odrazu, musí platit $t_N = N t_s$, odkud s použitím předchozích rovností získáme

$$\frac{v}{g} \operatorname{cotg} \alpha = \frac{2Nv}{g} \operatorname{tg} \alpha,$$

z čehož pro hledaný sklon roviny máme

$$\alpha = \operatorname{arccotg} \sqrt{2N}.$$

To je hledaný sklon nakloněné roviny, při kterém na ni kulička dopadne kolmo, ale až poté, co se od ní předtím $(N - 1)$ -krát odráží.

Úloha III.4 ... částice na poli

Mějme elektrostatické pole neměnné v čase. Do toho pole vkládáme na stejné místo nabitou částici s nulovou počáteční rychlostí. Pečlivě sledujeme, jak se částice pohybuje, a zaznamenáváme si její trajektorii. A co nás překvapí – trajektorie částice nezávisí na její hmotnosti. Dokážete to vysvětlit?

Uvedeme si dva různé způsoby řešení problému. Zkoumáme pohyb hmotné nabitě částice v elektrostatickém poli. Všechny ostatní síly kromě elektrostatické zanedbáme. Toto pole je v čase neměnné, ale bod od bodu se může měnit, tedy každému bodu uvažovaného prostoru je přiřazen nějaký vektor elektrické intenzity \mathbf{E} , který charakterizuje pole.

Zobecněme zadání a uvažujme, že zkoumané částice mají kromě různé hmotnosti i různý náboj. Síla působící na nabitou částici v elektrostatickém poli je rovna výrazu $q\mathbf{E}$, kde q je velikost náboje částice. Každému bodu prostoru lze rovněž přiřadit elektrostatický potenciál φ . Vektor intenzity \mathbf{E} přímo souvisí s potenciálem vztahem

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

tedy intenzita míří směrem největšího spádu potenciálu a její velikost závisí na prudkosti tohoto spádu. Potenciální energie¹¹ částice v poli pak bude rovna $V = q\varphi$, přičemž V má význam práce potřebné k přenesení částice z „nekonečna“ do konkrétního bodu. Když se částice pohybuje pouze pod vlivem našeho pole, bude přírůstek její kinetické energie přesně roven úbytku potenciální energie. Mějme dvě rozdílné částice s náboji q, q' a hmotnostmi m, m' . Pokud částice startují z klidu ze stejného místa, jsou jejich kinetické energie T, T' v určitém bodě rovny úbytku potenciální energie, tedy

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = q\Delta\varphi, \quad T' = \frac{1}{2}m'(v')^2 = q'\Delta\varphi, \quad (19)$$

kde $\Delta\varphi$ značí úbytek potenciálu mezi startovním a aktuálním bodem. Lze tudíž psát

$$mv^2 = 2q\Delta\varphi, \quad m'(v')^2 = 2q'\Delta\varphi, \quad (20)$$

což se nám bude hodit dále.

Trajektorie částice je obecně zakřivená a každou malou část dráhy lze považovat za část kružnice, která má určitý poloměr. Tento poloměr se nazývá poloměr křivosti trajektorie v daném bodě. Směr rychlosti vždy míří ve směru tečny k trajektorii. Předpokládejme nyní, že dvě rozdílné částice nábojů q, q' a hmotností m, m' jsou v určité fázi pohybu na stejném místě a mají stejný směr rychlosti (nikoli velikost). Jejich kinetické energie jsou dány rovnicemi (19).

Pole působící v tomto místě lze rozložit na složku E_{\perp} kolmou k rychlosti a složku rovnoběžnou E_{\parallel} . Poloměr křivosti v tomto bodě označme R . Aby se částice pohybovala po kružnici s poloměrem R , musí na ni působit dostředivé

¹¹⁾ Energii nebudeme značit E , ale V , aby se nepletla s elektrickou intenzitou.

zrychlení $a_d = v^2/R$. Toto dostředivé zrychlení způsobuje síla působící ve směru do středu kružnice, tedy ve směru kolmém na pohyb. Pro zmíněnou sílu ale zřejmě platí

$$F_{\perp} = qE_{\perp} = ma_d = \frac{mv^2}{R}. \quad (21)$$

Vyjádríme R a posléze dosadíme z (20) a máme

$$R = \frac{mv^2}{qE_{\perp}} = \frac{2q\Delta\varphi}{qE_{\perp}} = \frac{2\Delta\varphi}{E_{\perp}}.$$

Sláva! Poloměr křivosti dráhy nezávisí na hmotnosti částice ani na jejím náboji a poslední vztah vyjde naprosto stejně i pro jinou částici s hmotností m' a nábojem q' . Pokud tedy naše dvě porovnávané částice mají v určitém místě kinetickou energii danou vztahem (19) a stejný směr rychlosti, pak mají v tomto místě i shodný poloměr křivosti trajektorie.

Ježto ale mají trajektorie stejný poloměr křivosti v jednom bodě, a letí tudíž jakoby po stejné kružnici, blízký bod na této kružnici bude prvkem obou trajektorií a v onom blízkém bodě budou mít obě částice opět stejný směr rychlosti a kinetické energie určené vztahem (19). Předěšlou úvahu můžeme opakovat až donekonečna a navíc na počátku, kdy jsou částice v klidu, mají částice opravdu shodný směr rychlosti a shodnou nulovou kinetickou energii. Z toho vyplývá, že trajektorie obou rozdílných částic mají ve všech bodech stejný poloměr křivosti, a jsou proto opravdu shodné. Použili jsme v podstatě metodu matematické indukce, přičemž indukční krok zmenšujeme donekonečna.

Povšimněme si, že v provedené „indukční“ úvaze nemusíme nutně uvažovat, že kinetické energie jsou určeny vztahem (19). Stačí, když jsou v poměru $T/T' = q/q'$. To je obecnější předpoklad. Dospějeme tak k závěru, že trajektorie dvou rozdílných částic se shodují, pokud má jejich počáteční rychlost stejný směr a počáteční kinetické energie jsou v poměru $T/T' = (mv^2)/(m'(v')^2) = q/q'$. Vyjádříme-li z této rovnosti rychlost \mathbf{v} , dostáváme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' \sqrt{\frac{m' q}{m q'}}. \quad (22)$$

Opět z provedené úvahy plyne, že poměr T/T' bude stejný pro všechny body trajektorie stejně tak jako poměr rychlostí. Shrnuto, částice letí po stejných trajektoriích různými rychlostmi, jejichž poměr je dán rovnicí (22).

Naší „indukční“ úvahy jsme se mohli však ušetřit. Uvažujme takto: jednu částici necháme pohybovat se v poli. Její trajektorie má v každém bodě určitý poloměr křivosti, tedy v každém bodě působila síla zapříčiňující toto zakřivení. Dejme tomu, že by se druhá částice pohybovala po stejné trajektorii. Byly by síly působící na částici opět takové, že by poloměr křivosti v každém bodě odpovídal působící síle? Na základě vztahu (21) odpovíme ano. Myšlené trajektorii tedy jakoby nelze nic vytknout, odpovídá všem působícím silám, a bude to tedy ta skutečně realizovaná.

Povězme si nyní, proč nemůžeme použít argument, že částice letí po siločárách. V obecném případě tomu tak skutečně není. Siločára je křivka, jejíž tečna v každém bodě je rovnoběžná se směrem intenzity \mathbf{E} . Pokud ale částice letí po zakřivené siločáře, musí na ni působit určitá dostředivá síla kolmá na rychlost, a tedy i kolmá na tečnu k siločáře. Taková kolmá síla tu ale není, protože elektrická síla míří ve směru tečny.

Prozkoumejme nyní trochu odlišný, docela elegantní způsob řešení. Částice se samozřejmě bude řídit pohybovou rovnicí

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Zrychlení \mathbf{a} a síla \mathbf{F} jsou zde vektory. Takový vektorový zápis není nic objevného, uvedená rovnice pouze skrývá tři rovnice – pro každou ze složek x , y , z zrychlení a síly jednu rovnici. Zrychlení \mathbf{a} však můžeme lépe zapsat jako

$$\mathbf{a} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}, \quad (23)$$

tedy jako druhou derivaci polohového vektoru částice¹². Pohybová rovnice částice v našem elektrostatickém poli proto je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (24)$$

Intenzita pole závisí samozřejmě na poloze, tedy zrychlení částice v určitém bodě závisí na intenzitě v tomto konkrétním bodě.

Zamysleme se nyní nad tím, jak se pohybová rovnice změní, pokud budeme čas měřit v jinak dlouhých jednotkách, než jsou vteřiny, nebo jednoduše na hodinkách, které běží třeba pomaleji. Nové časové jednotce budeme říkat třeba pseudosekunda se značkou σ . Dejme tomu, že počet časových jednotek τ zaznamenaný na našich zpomalených hodinkách souvisí s časem t měřeným v sekundách vztahem

$$t = k\tau, \quad \text{tedy} \quad \tau = \frac{t}{k}. \quad (25)$$

Jak se projeví použití těchto nových jednotek při měření zrychlení? Když měříme rychlost pomocí pomaleji běžících hodinek, bude číselně větší, konkrétně k -krát větší, protože ke změně polohy stačilo méně časových jednotek. Zrychlení měříme porovnáním rychlostí v blízkých okamžicích a opět při měření času v pseudosekundách bude ke změně rychlosti třeba méně časových jednotek a zrychlení vyjde číselně k -krát větší. Ale již rychlost vyšla k -krát větší a z této větší rychlosti teprve počítáme zrychlení a dostáváme tak převodní vztah mezi číselnými hodnotami zrychlení při použití různých časových jednotek

$$a[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}] = k^2 a[\text{m}\cdot\sigma^{-2}].$$

¹²⁾ Časová změna polohy je rychlost a časová změna rychlosti je zrychlení.

Tento vztah dobře vyplyne i formálním dosazením z (25) do (23)

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{d(k\tau)^2} = \frac{1}{k^2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2}. \quad (26)$$

Jedná se zde však o derivace a ne o pouhé zlomky a tak by se nám uvedená úprava měla určitě zdát trochu podezřelá, nicméně v tomto případě je korektní.

Teď pomocí vztahu (26) přepíšeme pohybovou rovnici (24), tedy

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = k^2 \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Všimněme si ale nyní klíčové myšlenky. Pokud zavedeme zrovna takové pseudo-sekundy a budeme mít takové hodinky, že faktor $k = \sqrt{m/q}$, potom lze pohybovou rovnici psát ve tvaru

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{d\tau^2} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (27)$$

a zde se již nevyskytuje náboj ani hmotnost!

Vezměme si teď druhou částici s nábojem q' a hmotností m' , jejíž polohu budeme značit polohovým vektorem \mathbf{r}' . Její pohybová rovnice je

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = \frac{q'}{m'} \mathbf{E}(\mathbf{r}').$$

I tuto rovnici ale můžeme napsat jinak, když budeme čas měřit namísto v sekundách v jiných jednotkách¹³ σ' a vztah mezi časy t a τ' bude dán faktorem $k' = \sqrt{m'/q'}$. Vztah mezi τ a τ' je potom zřejmě

$$\tau = K\tau', \quad \text{kde} \quad K = \sqrt{\frac{m' q}{m q'}}. \quad (28)$$

Pohybová rovnice při užití jiných časových jednotek σ' nabývá tvaru

$$\frac{d^2 \mathbf{r}'}{d(\tau')^2} = \mathbf{E}(\mathbf{r}')$$

a pohybové rovnice obou částic mají teď úplně stejný tvar! Pohybová rovnice (27), což je diferenciální rovnice druhého řádu, určuje spolu s počáteční polohou a rychlostí závislost polohy \mathbf{r} na čase τ .

Pokud ale $\mathbf{r}(\tau = 0) = \mathbf{r}'(\tau' = 0)$ a rychlosti

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau = 0) = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}(\tau' = 0),$$

¹³⁾ Zde už jsou nové časové jednotky σ' samozřejmě jiné než pseudosekundy σ v předěšlém výkladu.

což je při stejné počáteční poloze a nulové počáteční rychlosti splněno, pak pohyb první i druhé částice jsou určeny naprosto stejnými rovnicemi jen s tím rozdílem, že používáme pro čas jiné písmenko, a proto i řešení, tedy funkce $\mathbf{r}(\tau)$, resp. $\mathbf{r}(\tau')$ budou v obou případech naprosto shodná až na to, že jednou budeme v řešení psát τ a podruhé τ' . Množiny bodů, kterými částice projdou, tedy jejich trajektorie budou v obou případech shodné.

Částice budou pouze dráhu procházet rozdílnou rychlostí. Ve všech bodech trajektorie bude platit

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}$$

a díky vztahu (28) platí

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'},$$

takže podíl rychlostí (které již měříme ve stejných jednotkách) čárkované a nečárkované částice je K .

Všimněme si ještě, že podmínka na shodnost trajektorií

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}(\tau = 0) = \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'}(\tau' = 0) = K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau}(\tau = 0)$$

je splněna, pokud jsou rychlosti v poměru K , tedy počáteční rychlost nemusí být nutně nulová. Když mají obě částice stejný náboj, potom podle (28) $K = \sqrt{m'/m}$. Počáteční kinetická energie T (vyjádřená ovšem ne v joulech, ale v pseudojoulech, protože jinak měříme čas) první částice je pak

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} m' \left(K \frac{d\mathbf{r}'}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{2} m' \left(\frac{d\mathbf{r}'}{d\tau'} \right)^2,$$

a kinetické energie obou částic se tedy rovnají po celou dobu pohybu a rovnost počátečních kinetických energií je zřejmě podmínkou pro shodnost trajektorií. Patrně jsme tedy dospěli k naprosto stejným závěrům jako při prvním způsobu řešení.

Mohlo by se zdát, že to není pořádný důkaz, když jsme jenom derivovali, a fyzika v podstatě žádná. Je třeba si ale uvědomit, že 2. Newtonův zákon formulovaný v diferenciálním tvaru je zcela fundamentální zákon klasické fyziky a podle vši zkušenosti řešení pohybové rovnice jakožto rovnice diferenciální opravdu odpovídá skutečně realizovanému pohybu. Věříme, že diferenciální rovnice správně popisují náš svět, a proto i zde určitý fyzikální jev vysvětlujeme na základě matematické úpravy diferenciální rovnice.

Úloha III . P ... příliv a odliv

Příliv a odliv jsou způsobeny slapovými silami, tj. především gravitační silou Měsíce. Příliv se opakuje každých 12 hodin a 25 minut, nicméně na zeměkouli pozorujeme vždy dva přílivy na opačných stranách zeměkoule. Tzn. jeden příliv oběhne Zemí za dvojnásobek doby, tj. asi 25 hodin. Tudíž na rovníku o délce 40 000 km se příliv musí pohybovat přibližně rychlostí $40\,000/25 \text{ km/h} = 1\,600 \text{ km/h}$. To je dokonce více než rychlost zvuku ve vzduchu.

Ze zkušenosti však víme, že voda v moři touto rychlostí neproudí, neboť lodě nám vozí banány z Kostariky atd. Je tedy nějaká chyba ve výpočtu, nebo je potřeba výsledek interpretovat jinak?

Uvedený paradox by nastával, kdyby se kolem Země pohybovala určitá masa vody, zatímco zbytek by zůstával nehybný. Tomu tak však není. Žádná z molekul vody necestuje každý den kolem zeměkoule, ale zůstává přibližně na stejném místě a kmitá hlavně ve svislém směru.

Představme si vodorovný řetízek kuliček, z nichž každá kmitá ve svislé rovině. Vhodnou volbou fází jejich kmitání můžeme vytvořit iluzi vlny rychle se pohybující ve vodorovném směru, i když kuličky se vůbec nepřemísťují. Lze to přirovnat například k mexické vlně na stadionu.

Všímavý čtenář si uvědomí, že analogie popsaná v předchozím odstavci plně neodpovídá našemu případu. Vzhledem k tomu, že vodu můžeme považovat za nestlačitelnou, nemůže pohyb molekul probíhat jen ve vertikálním směru. Vzniklou mezeru můžeme ale zaplnit pomalým pohybem většího množství vody (oproti výšce přílivu řádově v metrech průměrná hloubka oceánu je 3 až 4 kilometry).

Ve skutečnosti je pohyb vody v oceánech ovlivňován mořskými proudy, nestejnou hloubkou a slaností. K problémům popsaným v zadání může docházet například u velké zátoky spojené s oceánem úzkým průlivem. Při přílivu zde vznikne takový proud, že lodě skutečně nemohou ze zátoky odplout.

Úloha IV.1 ... znají včely geometrii?

Jestliže jste někdy viděli včelí plást, jistě vás upoutala pravidelnost, s jakou je vybudován. V podélném řezu tvoří stěny buňky pravidelný šestiúhelník a buňky jsou k sobě seskupeny tak, že pokrývají celou rovinu plástu.

Proč mají včelí buňky tvar právě šestiúhelníků, a ne například obdélníků nebo pětiúhelníků?

Včely budou pravděpodobně tvořit nějaké pravidelné obrazce, jinak by musely uvažovat, mezi kterými dvěma stěnami vytvořit jaký úhel, aby jim to vycházelo. Také nás budou zajímat jenom rovinné obrazce, neboť včely budou chtít buňkami prolézat, a tedy budou po celé délce buňky potřebovat stejný průřez.

Buňkami by měla jít pokrýt rovina. Kdyby nebylo možné pokrýt obrazcem rovinu, byly by mezi jednotlivými buňkami nevyužitá volná místa a do plástů by se méně vešlo.

Pravidelné rovinné obrazce, kterými lze pokrýt rovinu, jsou tři – trojúhelník, čtverec a šestiúhelník. Konkrétní volbu zřejmě nebude mít na svědomí pouze jeden důvod, ale důvodů vícero, řekněme si alespoň ty nejnápadnější.

Prvním z nich je, že se včely nechtějí zbytečně vysilovat, a zvolí tedy takový obrazec, u kterého spotřebují při výstavbě nejméně materiálu. Snadno vypočteme, že při jednotném obvodu je poměr obsahů mezi rovnostranným trojúhelníkem, čtvercem a pravidelným šestiúhelníkem $1 : \sqrt{3} : 3$ (uvažujeme pouze pravidelné obrazce, neboť nepravidelné mají poměr obsahu ku obvodu horší), což vypovídá ve prospěch šestiúhelníku.

Dalším důvodem bude to, že se v buňkách líhnou larvy a larvy mají kruhový průřez, tedy by bylo vhodné, aby měly buňky tvar co nejvíce podobný kruhu, aby okolo larev nebylo mnoho volného místa. Toto také splňuje šestiúhelník (uvážíme-li, v duchu první podmínky, pouze obrazce, kterými lze vydláždit rovinu).

Šestiúhelníkové buňky jsou navíc pevnější než čtvercové, protože ve čtvercových by síla působila jenom na svislé přepážky, kdežto u šestiúhelníkových je síla částečně odváděna i do stran.

Také je zajímavé si uvědomit, jak vlastně vypadá včelí oko – je složené z malých šestiúhelníčků. Jistě se nabízí otázka, nakolik tato skutečnost ovlivňuje tvar buněk.

Úloha IV.2 ... zahřívání koule

V této úloze budeme studovat vliv teploty na moment setrvačnosti kovového tělesa. Pro tento účel necháme tělesem procházet pevnou osu, kolem které se bude otáčet. Jak se změní moment setrvačnosti J tělesa při zvýšení jeho teploty o ΔT , je-li koeficient teplotní roztažnosti kovu α . Pokud si nevíte rady, zkuste uvažovat kouli nebo válec.

Pro vyřešení úlohy nám bude stačit znalost několika základních vztahů. Moment setrvačnosti J libovolného tuhého tělesa vůči pevné ose se definuje vztahem

$$J = \int r^2 dm, \quad (29)$$

kde r je vzdálenost elementu hmotnosti dm od osy otáčení. Změníme-li teplotu tělesa o ΔT , změní se vzdálenost libovolného bodu (tedy elementu hmotnosti dm) od pevné osy z původní vzdálenosti r na r' . Moment setrvačnosti zahřátého tělesa lze zapsat jako

$$J' = \int (r')^2 dm. \quad (30)$$

Předpokládáme-li, že zkoumané těleso je izotropní (materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti), platí mezi vzdálenostmi r a r' vztah

$$r' = r(1 + \alpha\Delta T), \quad (31)$$

kde α je koeficient teplotní roztažnosti.

Z (31) dosadíme do (30) a upravíme užitím vztahu (29)

$$J' = \int (r')^2 dm = \int r^2 (1 + \alpha\Delta T)^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 \int r^2 dm = (1 + \alpha\Delta T)^2 J.$$

Moment setrvačnosti se tedy změní o

$$\Delta J = J' - J = (2\alpha\Delta T + \alpha^2\Delta T^2)J.$$

Protože koeficient teplotní roztažnosti α nabývá řádově hodnot 10^{-5} K^{-1} , můžeme kvadratický člen oproti lineárnímu zanedbat a vyjde nám

$$\Delta J \approx 2\alpha\Delta T J.$$

Úloha IV.3 ... sopka buráci

Nedávno v televizi proběhl dokument o výbuchu sopky Krakatoa v srpnu 1883. Pozoruhodné je, že rachot výbuchu dočasně ohlušil lidi (nějakou dobu nic neslyšeli) ve vzdálenosti 50 km od vulkánu. Dokonce byl slyšet jako vzdálené hřmění ve městě Alice Springs v centrální Austrálii, tj. asi 5 000 km (slovy pět tisíc kilometrů) od sopky.

Jaká byla hodnota akustického tlaku v dB v místě výbuchu? Můžeme předpokládat, že platí zákon úbytku intenzity se čtvercem vzdálenosti, či jaký zákon úbytku intenzity bude platit pro tento případ?

Úloha se zabývá šířením energie exploze ve vzduchu. Nejdříve vysvětlíme rozdíl mezi rázovou a zvukovou vlnou. Rázové vlny (angl. shockwave) vznikají při uvolnění velkého množství energie z malého objemu. Energie se v prostředí šíří rychlostí několikanásobně větší, než je rychlost zvuku. Při přechodu rázové vlny dochází ke skokovým změnám vlastností prostředí (teplota, tlak, hustota, příp. orientace magnetického pole). Energie nesená rázovou vlnou se vzdáleností velice rychle ubývá (až s třetí mocninou vzdálenosti). Základní zjednodušení, které se při výpočtech používá, je, že tlak a hustota mimo rázovou vlnu jsou zanedbatelné oproti tlaku a hustotě uvnitř rázové vlny. Za přepracovanou teorii vděčíme pánům Taylorovi a Sedovovi z projektu Manhattan. Všechny rázové vlny proto velice rychle degradují na běžné zvukové vlny. Při přechodu rázové vlny se částice prostředí pohybují velkými rychlostmi pouze ve směru jejího šíření. Naproti tomu při přechodu zvukové vlny částice oscilují docela malými rychlostmi oběma směry. Změnu tlaku při přechodu rázové vlny má na svědomí jednak dočasné nahuštění molekul za rázovou vlnou, jednak přímo pohyb molekul od centra exploze (tzv. „blast wind pressure“ Q). U silných rázových vln (více než cca 207 dB) je druhá složka větší. Při atmosférickém tlaku se všechny vlny intenzivnější než asi 194 dB chovají spíše jako rázové.

Nejprve zkusíme určit akustický tlak za předpokladu, že to, co slyšeli lidé v Austrálii, byl skutečně zvuk. Nanejvýš problematičké je zde odhadnout, jak silné asi bylo ono „vzdálené hřmění“. Použijeme pracovní odhad 40 dB (tichá ulice; muselo být dostatečně silné, aby ho bylo možné odlišit od hluku pozadí, tj. ne úplně na hranici slyšitelnosti). Intenzita zvuku je definována vztahem

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \mathbf{v}(t) dt,$$

kde T je perioda kmitů, $p(t)$ je okamžitá hodnota tlaku a $\mathbf{v}(t)$ rychlost pohybu částic. Měří se ve wattech na metr čtvereční. Absolutní hodnota intenzity zvuku (intenzita je vektor) v decibelech je

$$L_I[\text{dB}] = 10 \log \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2}, \quad (32)$$

respektive

$$L_P[\text{dB}] = 20 \log \frac{p}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}}, \quad (33)$$

kde I je absolutní hodnota intenzity v místě měření a p průměrná hodnota tlaku při přechodu zvukové vlny. Zde je nutno poznamenat, že rovnost

$$L_I = L_P$$

platí pouze přibližně a to jen do intenzity asi 120 dB. Pak už se kvůli fyzikálním vlastnostem vzduchu začínají obě hodnoty lišit a je třeba mezi nimi rozlišovat.

Absolutní hodnota intenzity ubývá se čtvercem vzdálenosti

$$I \sim \frac{1}{r^2}.$$

Důležitou roli hrají také jiné procesy. Vzduch se při přechodu zvukových vln mírně zahřívá. Všechny procesy, které se na disipaci energie podílejí, se většinou dají shrnout a jejich vliv lze popsat exponenciálním poklesem intenzity se vzdáleností. Ubývání se zvyšuje se stoupající vlhkostí, teplotou a je kvadraticky závislé na frekvenci zvuku (nízké frekvence jsou tlumené nejméně). Díky šikovně zvolené stupnici se dá mluvit o konstantním úbytku (v decibelech) na jednotku vzdálenosti. Za normálních podmínek jsou to pro nízké frekvence asi 4,7 dB/km, což je zanedbatelné na malé vzdálenosti, ale velice výrazné na 5000 kilometrech.

Vypočteme-li absolutní hodnotu intenzity v Austrálii číselně, dostaneme hodnotu $I \doteq 10^{-8} \text{ W/m}^2$. Intenzita 1 km daleko od výbuchu by byla 5000^2 -krát větší, z čehož dosazením do vzorečku (32) dostaneme hodnotu akustického tlaku asi 114 dB. Kdybychom teď započítali exponenciální ubývání 4,7 dB/km, dostali bychom 23 000 dB, což není realistický výsledek. Při použití rovnosti $L_I = L_P$ by pro tlak vycházelo naprosto nesmyslných více než 10^{1000} Pa. I když je za to částečně zodpovědný zjednodušený model poklesu intenzity se vzdáleností (exponenciální ubývání), dá se také nahlédnout, že energie se musela v blízkosti exploze šířit jiným způsobem (tlaková vlna).

Teorie rázových vln je poměrně komplikovaná. My použijeme několik přibližných empirických vzorečků, které se používají v pyrotechnice na odhad síly exploze (převzato z Kinney, *Explosive Shocks in Air*). Samotný přetlak rázové vlny P (rozíl tlaku před přechodem a těsně po přechodu rázové vlny) klesá jako

$$P[\text{dB}] \sim 20 \log \left(\frac{1}{r^3} \right). \quad (34)$$

Celkový akustický přetlak (ono p ve vzorci pro L_P) má však ještě složku způsobenou pohybem molekul

$$Q = \frac{1}{2} \rho U^2,$$

kde ρ je hustota vzduchu a U je rychlost pohybu molekul od exploze. Když c bude rychlost zvuku, tak U vypočítáme jako

$$U = \frac{P}{c\rho}$$

pro tlaky do zhruba 175 dB. Pro tlaky vyšší by byl vztah komplikovanější. Přibližně můžeme Q určit jako

$$Q = \frac{2,5 P^2}{7 \text{ atm} + P}.$$

Akustický tlak, který ohlušil lidi 50 km od výbuchu, odhadneme $L_P \doteq 160$ dB (výstřel z hlučné pušky 1 m od ucha). Podle (33) je tedy $p = 2$ kPa. Jelikož $p = P + Q$, dosazením z předchozího vztahu máme

$$p = P + \frac{2,5 \cdot P^2}{7 \text{ atm} + P} \Rightarrow P \doteq 1986 \text{ Pa}.$$

Ve vzdálenosti 50 km od výbuchu bylo tedy hlavní složkou P . Půl kilometru od výbuchu (tedy už uvnitř exploze) pak byl podle (34) P o 120 dB větší, tj. asi 1 GPa. Q bylo jednoduše $2,5 P = 2,5$ GPa (těch 7 atm je oproti 10 000 atm už zanedbatelných a uvedené vzorečky mají přesnost horší než 3 dB). Dohromady tedy $p \doteq 3,5$ GPa neboli úctyhodných 285 dB.

V literatuře je zvykem udávat až 310 dB (anebo asi 14 Gt TNT, zde se už používá Richteroва stupnice), což je více než desetkrát víc, ale myslí se tím celková energie uvolněná během několika dní trvání exploze. Jde jenom o řádový odhad. Podle *U.S. geological survey* měla exploze Sv. Heleny intenzitu asi 286 dB a 200 mil daleko ji bylo stále slyšet s hladinou intenzity 163 dB (rozbila několik oken). Blíže k výsledku by se možná dalo dopracovat i lepším odhadem intenzity zvuku, který ohlušil lidi 50 km daleko.

Úloha IV.4 ... zachraňte ledvinu

ÚOOZ¹⁴ zjistil, že mafie disponuje mobilními válečnými lasery, které jsou všechny řízeny z centrály v horském pohraničním sídle Oberniederdorf, vzdáleném od zbraní maximálně 50 km (ve větší vzdálenosti je signál už slabý a nespolehlivý). Z centrály sledují dění v podsvětí v Karlových Varech, na které všechny lasery míří, aby udeřily v pravý čas.

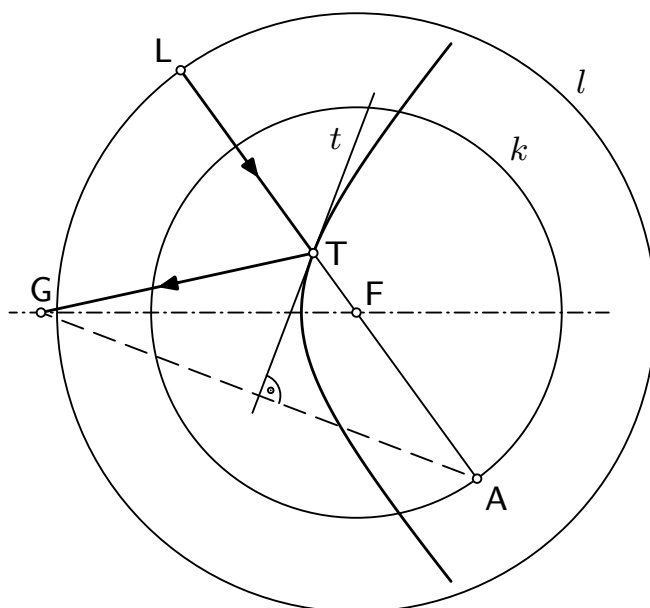
Pomozte nevinným obyvatelům Karlových Varů nalézt vhodný tvar, příp. i umístění spojitě zrcadlové plochy, která by pokud možno všechny laserové paprsky odrazila nejlépe na řídicí centrálu! Problém můžete řešit v rovině, ale zejména oceníme prostorové řešení, pokud existuje. Samozřejmě je požadován důkaz, aby Karlovarští peníze neinvestovali zbytečně.

V prvním kroku řešení je vhodné přeformulovat zadání na čistě geometrický problém, který budeme řešit s použitím geometrických a fyzikálních úvah. Mobilní lasery v podstatě určují paprsky náhodných směrů, které však mají jednu vlastnost společnou – protínají se v jediném místě (Karlovy Vary), které si můžeme dovolit nahradit bodem F (*focus*). Rovněž řídicí centrálu Oberniederdorf si nahradíme

¹⁴⁾ Útvar pro odhalování organizovaného zločinu

bodem G (*gangsters, gauners*). Přeformulované zadání v ideálním případě (tzn. všechny paprsky se odrazí do bodu G) zní: K pevným bodům F , G hledáme spojitou plochu (v prostoru), která každý libovolný paprsek jdoucí do jediného bodu (F) odrazí do jiného bodu (G).

Po fyzikální stránce předpokládáme přímočaré šíření paprsků ve vzduchu a platnost zákona odrazu, který je však důsledkem obecnějšího Fermatova principu. Právě v této úloze můžeme elegantně využít Fermatův princip, který říká, že světlo se šíří právě po časově extrémálních trajektoriích; v tomto případě extrémálními rozumíme nejkratší časové spojnice, tedy i nejkratší z hlediska uražené dráhy, neboť rychlost šíření světla ve vzduchu předpokládáme konstantní¹⁵. Je zřejmé, že přímka procházející body F a G zároveň představuje osu symetrie problému, a tedy postačí řešit problém v rovině tuto přímku obsahující. Prostorové řešení pak dostaneme snadno rotací nalezené křivky kolem osy FG . Můžeme se navíc pokusit odhadnout tvar takové křivky k pevným bodům F , G (viz obr. 15).



Obr. 15. Odrazná plocha

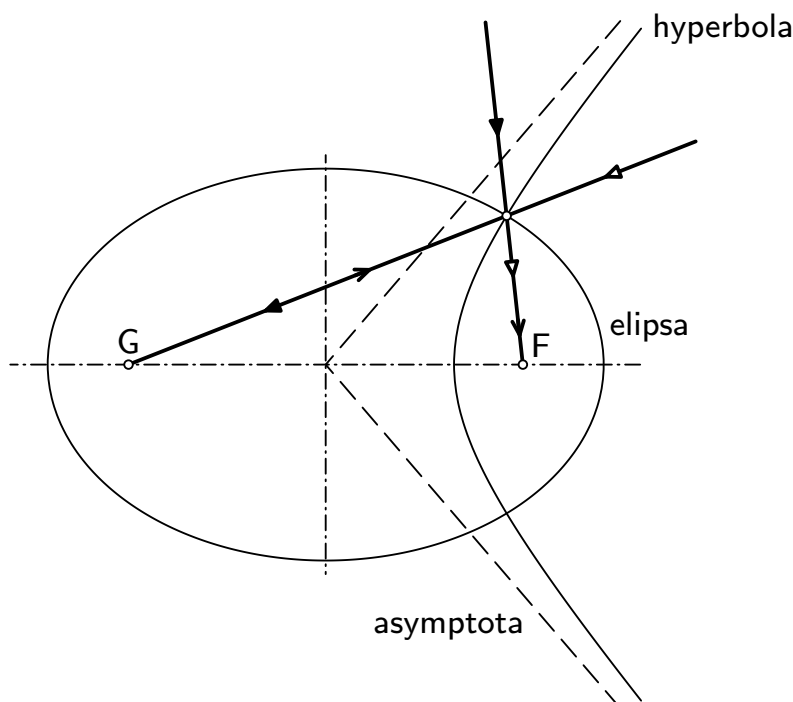
Zakresleme do obrázku jeden libovolně vybraný laser L . K realizaci Fermatova principu vypustíme všechny laserové paprsky v určitém okamžiku z kružnice l , a protože její poloměr $|LF| = c_1 = \text{konst.}$ proběhnou za stejný čas, dorazí do jejího středu F rovněž ve stejný okamžik, což požadujeme v duchu Fermatova principu. Nyní jim však do cesty postavíme odraznou plochu, která má všechny paprsky soustředit do jiného jediného bodu G . Žádný paprsek, žádný bod odrazné plochy by v duchu Fermatova principu neměl být výsadní, tedy očekáváme, že i po odrazu všechny paprsky dorazí do bodu G ve stejný okamžik za předpokladů naší realizace. Bod odrazu pro laser L označme T a veďme jím tečnu (tečnou rovinu) t k hledané křivce (odrazné ploše). Všechny paprsky musí urazit stejnou dráhu

¹⁵⁾ Nakreslete si rovinné zrcadlo, oko a předmět, např. tyčku, a rozmyslete si, že zobrazení rovinným zrcadlem využívající zákona odrazu Fermatův princip automaticky splňuje. Využijete vlastnosti zobrazení (osové souměrnosti) a trojúhelníkovou nerovnost.

$|LA| = c_2 = \text{konst.}$, tedy osová souměrnost s osou t musí zobrazit bod G na A , tzn. $|GT| = |TA|$. Jestliže si uvědomíme, že rozdíl vzdáleností v absolutní hodnotě

$$\begin{aligned} ||GT| - |TF|| &= ||GT| + |TL| - |TL| - |TF|| = |(|GT| + |TL|) - (|TL| + |TF|)| = \\ &= |(|TA| + |TL|) - (|TL| + |TF|)| = ||LA| - |LF|| = |c_2 - c_1| = \text{konst.}, \end{aligned}$$

odhalujeme zajímavou vlastnost, že rozdíl vzdáleností libovolného bodu (T) křivky od dvou pevně daných bodů (F a G) je konstantní. To je geometrická definice hyperboly (v rovině), resp. rotačního hyperboloidu v prostoru¹⁶.



Obr. 16. Porovnání hyperboly a elipsy

Navíc jsme během řešení objevili zajímavou vlastnost kuželoseček: Sférická plocha vrací paprsky jdoucí ze středu křivosti zpět do středu. Všechny paprsky vycházející z jednoho bodu do jiného odrazí právě jen rotační elipsoid. Nyní jsme zjistili, že rotační hyperboloid soustředí všechny paprsky směřující do jednoho bodu (primárního ohniska) do jiného (sekundárního ohniska). Odsud plyne, proč sekundární zrcátka oblíbených astronomických teleskopů (Cassegrainův dalekohled) mají tvar právě rotačního hyperboloidu. A konečně rotační paraboloid odrazí rovnoběžné paprsky (jdoucí z ohniska v nekonečno) do svého ohniska. Současně jsme odůvodnili název ohnisko pro tyto významné body.

¹⁶⁾ Zájemcům doporučujeme přečíst si analogické autorské řešení úlohy II.4 ze XVII. ročníku, kde je navíc uveden přímý důkaz hypotézy, který lze rovněž přeformulovat pro hyperbolu či rovinné zrcadlo. Řešení se liší v technickém detailu myšlenkové realizace Fermatova principu. V případě hyperboly jsme museli laserový paprsek vyslat z vnější obálové kružnice do středu, zatímco u elipsy mohla být jakási vnitřní kružnice degenerovaná na pouhý bod – jedno z ohnisek – a konstantní rozdíl vzdáleností přešel v konstantní součet.

Nezapomeňme na diskusi k původnímu problému. Dobře víme, že hyperbola má dvě větve a obě nutně splňují požadavek úlohy. Dále si vzpomeneme na významné přímky k větvím hyperboly, tzv. asymptoty, k nimž se hyperbola blíží v nekonečno. Zde uplatníme zadanou okolnost, že lasery nemohou být dále od centrály (G) než jistá vzdálenost, tedy díky omezení prostorového úhlu příchozích paprsků úloha má vždy řešení, kterých je v principu nekonečně mnoho.

Shrňme, že hledanou spojitou odraznou plochu představuje rotační hyperboloid, přičemž vzdálenost sídel (ohnisek) $|FG|$ odpovídá dvojnásobku excentricity ($2e$) a maximální vzdálenost centrály G od laserů L vymezuje prostorový úhel pro možné asymptotické kužele. Ke zvolené větvi hyperboly (před uplatněním rotační symetrie problému) a ke zvoleným asymptotám existuje příslušná velikost velké a malé poloosy. Tím jsou tvar i poloha odrazné plochy jednoznačně určeny a zároveň předpokládáme, že celé město F (Karlovy Vary) bude za ní schováno – plocha jím nebude procházet. Z obou větví hyperboly bychom zřejmě doporučili tu bližší ke Karlovým Varům, zejména kvůli úspoře materiálu, a tedy i finančních prostředků.

Úloha IV. P ... projekt 5

Navrhňte spravedlivou (či co nejvíce spravedlivou) pětistěnnou kostku. Přesněji máme na mysli takové pětistěnné těleso, které se při hodu na podložce zastaví na každé své stěně se stejnou pravděpodobností.

Patrně každý aspoň jednou v životě házel hrací kostkou. Jistě si po několika pokusech říkáte, že právě ta hodnota, kterou potřebujete, nikdy nepadne. Za takovouto hráčskou smůlu však zpravidla nemůže kostka samotná, ale cosi jako „zákon schválnosti“. Jeho opodstatněnost se dá matematicky ukázat na mnoha příkladech. Jmenujme alespoň obligátní prasklou žárovku v sériovém zapojení¹⁷. Avšak skutečnost je taková, že klasická (šestistěnná) hrací kostka i v tom nejobyčejnějším provedení je velmi dobře spravedlivá, neboť její tvar vychází z krychle. Krychle je jedno z pěti platónských těles, kterými dále jsou pravidelný čtyřstěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Žádné z uvedených těles však nemá pět stěn. První otázka, kterou je třeba zodpovědět, je, zda existují i jiná tělesa, jejichž užitím bychom obdrželi spravedlivou hrací kostku? Zkušeni hráči se možná setkali i s „desetistěnkami“ apod. Jsou však takové kostky spravedlivé? Jejich výrobci nás o tom sice přesvědčují, ale jaká je skutečnost?

Předně si ujasněme, že výstupem naší práce by mělo být těleso s rovinnými stěnami, které dopadne se stejnou pravděpodobností na každou z těchto stěn. Tím zakážeme poněkud zvrhlou kostku tvarem připomínající ragbyový míč. Co musí takový objekt splňovat? Především musí mít ve všech polohách po dopadu stejnou potenciální energii, tj. vzdálenost všech stěn od těžiště kostky musí být

¹⁷⁾ Viz například Jiří Anděl: *Matematika náhody*.

stejná. Dále by měly být všechny stěny identické (až na zrcadlovou symetrii) a identicky umístěné vůči všem ostatním. Jinak řečeno jedna stěna od druhé nesmí být rozlišitelná. To je z toho důvodu, aby při odvalování kostky po podložce nešlo předvídat, na kterou stěnu se kostka aktuálně převálí. V libovolném směru se vykoná stejná práce, tedy není nic pro kostku výhodnější. Vykonání stejné práce ve všech směrech pak ve svém důsledku vynucuje značnou symetričnost kostky. A konečně, těleso musí být nutně konvexní.

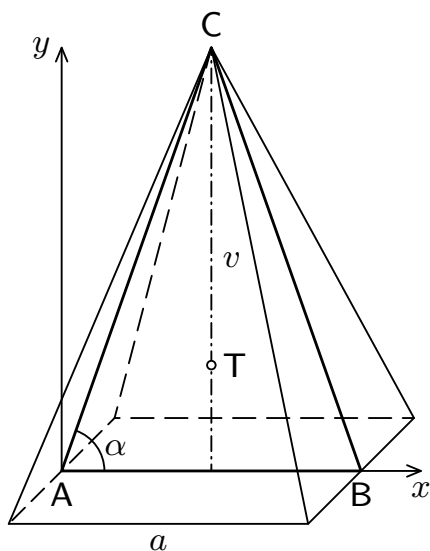
Pro konvexní tělesa s více než třemi stěnami platí Eulerův vzorec

$$V + N = E + 2,$$

ve kterém V značí počet vrcholů, N počet stěn a E počet hran. Jelikož jsou si všechny stěny spravedlivé kostky rovny, musejí mít všechny také stejný počet hran. Tento počet označme M . Protože každá hrana přísluší dvěma stěnám, máme snadno

$$E = \frac{1}{2}MN.$$

Protože nás zajímá pětistěnná kostka, $N = 5$, musí být číslo M sudé. Taková kostka se tedy musí skládat z pěti shodných sudoúhelníků. Z nich ovšem přichází v úvahu jedině čtverec, neboť každý další s více hranami by znamenal i větší počet stěn kostky.



Obr. 17. Jehlan

Tímto jsme dokázali, že zcela spravedlivá pětistěnná kostka nemůže existovat. Pokusme se v následujícím textu alespoň o nějaké dostatečně dobré přiblížení. Ihned nás napadnou dvě poměrně pravidelná pětistěnná tělesa: jehlan a trojboký hranol. Prozkoumejme obě z hlediska podmínek, které jsme definovali ve třetím odstavci.

Těžiště jehlanu se nachází v jedné čtvrtině jeho výšky, kterou označme v . Dále nechť a je délka strany podstavy. Podíváme-li se na řez jehlanu kolmý k podstavě a obsahující výšku, dostaneme opět trojúhelník, po němž v souladu s podmínkami požadujeme, aby vzdálenost těžiště jehlanu byla od všech stran shodná. Tento trojúhelník je zřejmě rovnoramenný. Umístíme počátek soustavy souřadnic do jednoho z vrcholů při základně, bez újmy na obecnosti nechť je to A v obvyklém značení trojúhelníka ABC. Pak souřadnice těžiště jehlanu jsou $T = (a/2, v/4)$. Chceme nyní provázat parametry a a v nějakou rovnicí. Přímka, jejíž podmnožinou je strana AC je vyjádřitelná jako $p: y = x \operatorname{tg} \alpha$, kde α je vnitřní úhel trojúhelníka, který očividně splňuje $\operatorname{tg} \alpha = v/(a/2)$. Vzdálenost bodu T od

přímky AC vypočítáme ze známého vzorečku

$$|AC, T| = \frac{\left| \frac{2v}{a} \frac{a}{2} - \frac{v}{4} \right|}{\sqrt{\left(\frac{2v}{a} \right)^2 + 1}} = \frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}}.$$

Chceme, aby tato vzdálenost byla stejná jako vzdálenost T od přímky AB. Rovnost

$$\frac{3av}{4\sqrt{4v^2 + a^2}} = \frac{v}{4}$$

je splněna, platí-li $\sqrt{2}a = v$. Bude-li mít jehlan takovýto poměr délky strany podstavy a tělesové výšky, pak bude mít ve všech stabilních polohách stejnou potenciální energii. Jehlan přesto není dobrým kandidátem pro spravedlivou pětistěnnou kostku. (Při kutálení je zapotřebí různých energií pro přetočení se přes jednotlivé hrany. A co teprv „horní“ vrchol!)

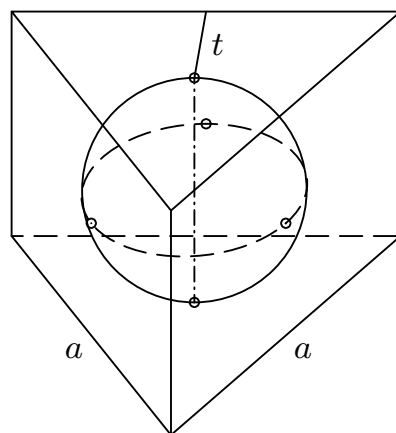
Naproti tomu situace s trojbokým hranolem je o poznání veselejší. Můžeme si ji přiblížit následujícím myšlenkovým experimentem. Mějme sféru a na ní umístěme pět elektronů. Ty se vlivem elektrostatických sil odpuzují, dokud se nedostanou do energeticky nejušpornější konfigurace. Je-li sféra normovaná (tj. má jednotkový poloměr), stačí najít minimum funkce

$$E = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^5 \frac{1}{d_{i,j}},$$

kde $d_{i,j}$ označuje vzdálenost i -tého od j -tého elektronu (vyjádříme je pomocí Pythagorovy věty a díky znalosti rovnice sféry). Řešení tohoto problému je matematicky velmi pracné, naštěstí existují počítače, s jejichž pomocí nám vyjde, že dva elektrony budou na pólech a zbylé se rovnoměrně rozmístí podél rovníku. Vzdálenosti mezi těmi ekvatoriálními jsou $\sqrt{3}$, resp. $\sqrt{2}$ mezi jedním z nich a elektronem na pólu. Jestliže nyní zkonstruujeme tečné roviny procházející místy, kde se nacházejí elektrony, dostaneme přesně trojboký hranol. Navíc bude splňovat podmínku o těžišti. To však není postačující podmínka férovosti kostky.

Pojďme ještě vypočítat optimální poměr velikostí jednotlivých stran hranolu. Zřejmě jeho základnou je rovnostranný trojúhelník. Nechť a je jeho strana a dále v buď jeho výška. Zřejmě platí $v = \sqrt{3}a/2$. Vzhledem k tomu, že těžiště trojúhelníka je v jedné třetině výšky, je vzdálenost těžiště od libovolné strany pláště hranolu $t = \sqrt{3}a/6$. Tělesová výška hranolu musí nutně být $2t$. Mějme tedy takovýto trojboký hranol a určíme nyní, jak velkou vykonáme práci při překlopení z jedné boční hrany na jinou. Z Pythagorovy věty máme

$$\Delta W \sim \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2} - t = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{1}{12}a^2} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a = t.$$



Obr. 18. Rozmístění pěti elektronů na sféře

Práce při překlápění z boční stěny na podstavu je naproti tomu úměrná výrazu $(\sqrt{2} - 1)t$. Ačkoli toto není ani polovina předchozí hodnoty, konstrukce kvalitnějšího modelu by byla mnohem komplikovanější, a proto si dovolíme takovouto nepřesnost.

Symetrické pětistěnné těleso jsme ukázali, že neexistuje, nicméně jsme našli hranol, který velmi dobře splňuje podmínky z úvodu. Kostky, které bychom však na základě této představy vyrobili, by však zcela jistě stoprocentně spravedlivé nebyly. Nicméně tento fakt neodrazuje výrobce, aby pětistěnnou kostku prodávali. Existuje dokonce patent číslo United States Patent 6926275, který vychází z naší představy o trojbokém hranolu a drobnými úpravami jej vylepšuje, aby byla kostka spravedlivější. Uvedené těleso však není pětistěnné, a tedy nevyhovuje podmínkám zadání úlohy.

Závěrem doplníme zdroje, ze kterých jsme čerpali:

- Diaconis, Keller: *Fair Dice*, American Math. Monthly 96, 1986;
- Fair Dice, <http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm>;
- Min-Energy Configurations of Electrons On A Sphere, <http://www.mathpages.com/home/kmath005/kmath005.htm>;
- Properties of Dice, <http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm>;
- US Patent 6926275, <http://www.freepatentsonline.com/6926275.html>.

Úloha V.1 ... pozor, neudus se

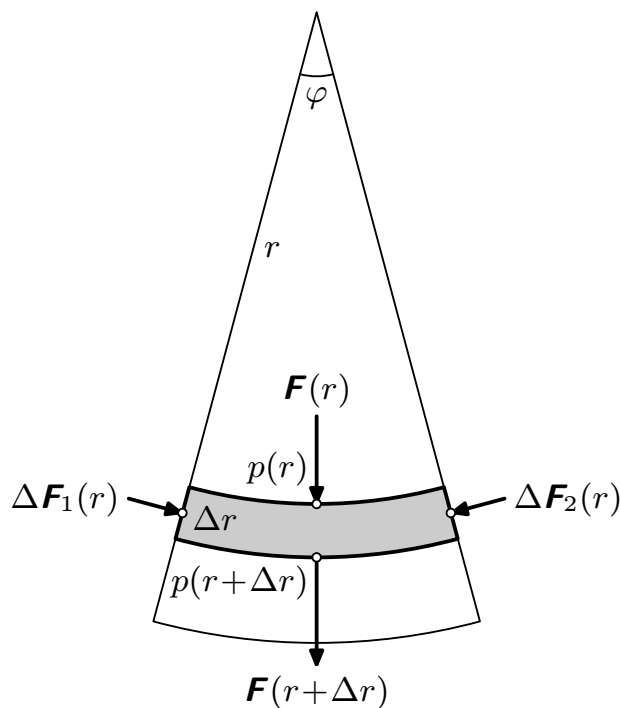
Vstup do Rámy je otvor uprostřed jedné podstavu. Předtím, než vstoupíš a sundáš si skafandr, si však rozmysli, zda je na jeho ose dýchatelný vzduch. Jaká je jeho hustota v porovnání s hustotou na vnitřním povrchu, je-li teplota vzduchu všude stejná?

Pro řešení je podstatný předpoklad, že vzduch uvnitř Rámy se otáčí spolu s Rámou. Tento stav je rovnovážný a dospěje se k němu vinou tření mezi vzduchem a okolím.

Ráma je symetrický dle své osy, stejně tak bude symetrické rozmístění molekul vzduchu. Tlak p i hustota ρ vzduchu závisí jen na vzdálenosti r od osy Rámy, přičemž dle zadání $p(R) = 1 \text{ atm}$ ($R = 8 \text{ km}$ je poloměr Rámy).

Z Rámovy atmosféry vyřízneme výseč s vrcholovým úhlem φ (viz obr. 19). Tuto výseč dále rozporcujeme na vrstvičky široké Δr . Rozeberme nyní síly působící na vzduch uvnitř jedné takové vrstvičky, která je vzdálená r od osy.

Tvar vrstvy je výhodný, neboť tlak vzduchu u horní strany je všude stejný, a to $p(r)$. Podobně u dolní strany je tlak $p(r + \Delta r)$. Šířku Δr zvolíme co nejmenší tak, aby se tlak a hustota vzduchu uvnitř vrstvičky měnily co nejméně. Toto nás bude také opravňovat bez komentáře zanedbávat sčítance úměrné $(\Delta r)^2$ (pokud se vám bude zdát, že jsme ve výpočtech na něco zapomněli, bude to pravděpodobně toto zanedbání). Řešení se podstatně zjednoduší pro malý vrcholový úhel φ (nejvýše 5°).



Obr. 19

Plocha horní strany je $S(r) = r\varphi L$, kde L je délka Rámy, plocha dolní strany je $S(r + \Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L$ a plocha boční strany je $\Delta S = \Delta r L$. Výslednici sil působících na horní stranu určíme snadno. Ačkoli každá elementární síla má jiný směr, směr libovolné síly se od svislého směru liší maximálně o $\varphi/2$ a $\cos(\varphi/2) \approx 1$ díky malosti φ . Tedy

$$F(r) = r\varphi L p(r) \quad \text{a také} \quad F(r + \Delta r) = (r + \Delta r)\varphi L p(r + \Delta r).$$

Výslednice sil působících na boční stranu (všechny elementární síly jsou rovnoběžné) má velikost $\Delta F_1 = \Delta F_2 = \Delta r L p(r)$. Podstatná je výslednice sil působících na protější strany

$$|\Delta \mathbf{F}_1 + \Delta \mathbf{F}_2| = 2\Delta r L p(r) \sin(\varphi/2) \approx \Delta r \varphi L p(r).$$

Zbývá určit celkovou odstředivou sílu působící na vzduch o hmotnosti m ve vybrané vrstvě. Odstředivé zrychlení je rovno $\omega^2 r$ ($\omega = 2\pi/(4 \cdot 60) \text{ s}^{-1}$ je úhlová rychlost Rámy), tedy síla je $m\omega^2 r$. Hmotnost vzduchu vyjádříme pomocí hustoty $m = r\varphi L \Delta r \varrho(r)$. Jak plyne ze stavové rovnice ideálního plynu, hustota vzduchu (za předpokladu, že je ideální plyn) je přímo úměrná tlaku

$$\varrho(r) = \frac{M_m}{R_m T} p(r) \equiv A p(r),$$

kde $M_m = 28,96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost vzduchu, R_m je plynová konstanta a $T = 300 \text{ K}$ je teplota vzduchu. Pro přehlednost jsme zavedli konstantu A . Celková odstředivá síla působící na element vzduchu potom je

$$F_o = A\omega^2 r^2 \varphi L \Delta r p(r).$$

V rovnováze je celková síla působící na každou vrstvu vzduchu nulová, to implikuje rovnici

$$r\varphi Lp(r) - (r + \Delta r)\varphi Lp(r + \Delta r) + \Delta r\varphi Lp(r) + A\omega^2 r^2 \varphi L\Delta r p(r) = 0,$$

po úpravě

$$\frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} = \frac{A\omega^2 r^2 p(r)}{(r + \Delta r)} \approx A\omega^2 r p(r).$$

Této „přírůstkové rovnici“¹⁸ vyhovuje řešení ve tvaru¹⁹

$$\frac{p(r)}{p(0)} = e^{A\omega^2 r^2/2}.$$

Za úkol bylo vyšetřit podmínky na ose Rámy. Tak tedy

$$p(0) = p(R)e^{-A\omega^2 R^2/2} \doteq 0,78p(R) = 0,78 \text{ atm}.$$

Hustota je přímo úměrná tlaku, takže pro ni bude platit stejné $\rho(0) = 0,78\rho(R)$. Uvedená hodnota tlaku odpovídá nadmořské výšce zhruba 2000 m n. m. Po sundání skafandru s vnitřním atmosférickým tlakem pocítíme tlakovou změnu odpovídající vynoření se z dvoumetrové hloubky bazénu. S dýcháním mít žádný problém nebudeme.

¹⁸⁾ Pro malé Δr přechází levá strana v derivaci $p'(r)$. Diferenciálního počtu znalí čtenáři tedy budou řešit diferenciální rovnici $p'(r) = A\omega^2 r p(r)$ separací proměnných

$$\int_{p(0)}^{p(r)} \frac{dp}{p} = \int_0^r A\omega^2 r dr.$$

¹⁹⁾ Jak se můžeme přesvědčit

$$\begin{aligned} \frac{p(r + \Delta r) - p(r)}{\Delta r} &= \frac{p(0) \left(e^{A\omega^2 (r+\Delta r)^2/2} - e^{A\omega^2 r^2/2} \right)}{\Delta r} \\ &\approx \frac{p(0)e^{A\omega^2 r^2/2} \left(e^{A\omega^2 r\Delta r} - 1 \right)}{\Delta r} \approx A\omega^2 r p(r), \end{aligned}$$

neboť s využitím aproximace pro malé hodnoty argumentu $e^x \approx 1 + x$ zjistíme, že

$$e^{A\omega^2 r\Delta r} = 1 + A\omega^2 r\Delta r.$$

Úloha V.2 ... otázka přežití

Od vchodu vede k vnitřnímu povrchu žebřík. Již jsi po něm sestoupil kilometr, když vtom jsi neopatrně sklouzl a pustil se žebříku. Jakou rychlostí dopadneš na povrch Rámy a za jak dlouho? Máš šanci přežít?

Úlohu budeme řešit z inerciální soustavy, ve které se Ráma otáčí kolem své osy s periodou T , takže pustíme-li se žebříku, už na nás nebude působit dostředivá síla a budeme se pohybovat rychlostí, jakou jsme se pohybovali v okamžiku, kdy jsme se žebříku pustili. Tedy alespoň pokud při výpočtu zanedbáme odpor vzduchu. Jakou rychlostí jsme se pohybovali, vypočteme ze vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

kde T je perioda rotace Rámy a r je naše vzdálenost od osy Rámy v okamžiku uklouznutí. Pohybovat se budeme po tečně k rotaci, tedy musíme urazit vzdálenost

$$d = \sqrt{R^2 - r^2},$$

a čas dopadu proto získáme ze vzorce

$$t = \frac{d}{v} = \frac{T\sqrt{R^2 - r^2}}{2\pi r} = 303 \text{ s}.$$

Rychlost dopadu bude vektorovým rozdílem rychlosti pádu a rychlosti pohybu povrchu. Rychlost pohybu povrchu je

$$v_p = \frac{2\pi R}{T}.$$

Složka rychlosti kolmá na povrch bude (z podobnosti trojúhelníků)

$$v_k = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R} v = \frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{RT},$$

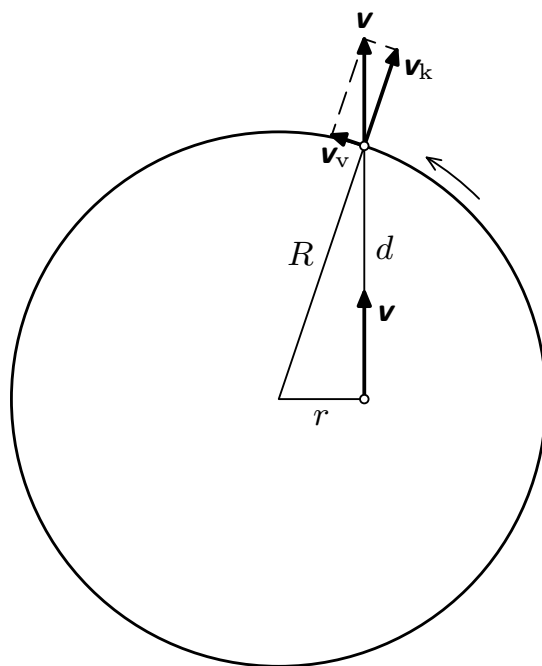
vodorovná složka rychlosti bude

$$v_v = \frac{rv}{R} = \frac{2\pi r^2}{RT}$$

a rychlost dopadu tedy bude

$$v_d = \sqrt{\left(\frac{2\pi r \sqrt{R^2 - r^2}}{RT}\right)^2 + \left(\frac{2\pi r^2}{RT} - \frac{2\pi R}{T}\right)^2} = \frac{2\pi}{T} \sqrt{R^2 - r^2} = 208 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pokud tedy budeme při vstupu na Rámu takto neopatrní, dopadneme na povrch za čas 303 s rychlostí $208 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a naše šance na přežití je tudíž malá.



Obr. 20. Skládání rychlostí

Úloha V.3 ... schody z nebe

Žebřík vede jen dva kilometry na plošinu, ze které se dále sestupuje po schodech, jež se mohutným obloukem klenou nad krajinou. Schodiště má zvláštní tvar. Je totiž postavené tak, že se na každý krok vynaloží stejná práce. Odvoď, jak závisí výška schodu na vzdálenosti od osy Rámy, pokud je délka schodů konstantní. Také můžeš určit, jaký tvar má onen oblouk.

Nejdříve si musíme ujasnit, proti kterým silám budeme konat práci. Jde o rotující soustavu a hlavní slovo zde má síla setrvačná odstředivá. V neinerciální soustavě spojené s rotujícím Rámou také pozorujeme účinky Coriolisovy síly, ale tu zanedbáme, jelikož otáčení Rámy a rychlost a hmotnost člověka stoupajícího po schodech jsou tak malé, že výsledná síla bude v jednotkách newtonů, což chodec ani nepozná.

Další věcí je tvar schodiště. Na obrázku ze zadání je schodiště vyvedeno jako křivka směřující podél osy Rámy, což je konstrukčně nevýhodné. Kvůli úspoře materiálu apod. je lepší schody postavit v podstavě válce.

K počítání výšky schodů v závislosti na poloměru se můžeme dobrat dvěma způsoby. Při prvním práci potřebnou na překonání jednoho schodu počítáme určitým integrálem ($W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr$), při druhém si řekneme, že výška schodů vůči Rámovi je zanedbatelná a tedy síla, proti které konáme práci se téměř nemění ($W = Fs$). Jak se vytrvalý čtenář může přesvědčit, oba postupy dávají kvantitativně téměř nerozlišitelné výsledky.

Ale fyzik zanedbá, co může, takže budeme uvažovat pouze ten způsob výpočtu, kde uvažujeme neměnné odstředivé zrychlení na výšce jednoho schodu.

Uveďme značení, která budeme používat. Ráma má vnitřní poloměr R , plošina je vzdálená H od osy rotace. Schody mají konstantní délku d a výška k -tého je h_k a jeho vzdálenost od Rámy je r_k . Pro počítání tvaru křivky uvažme, že $x = 0$ je u styku Rámovy podstavy s jeho pláštěm.

Nejdříve je potřeba určit, jaká práce bude nutná k překonání jednoho schodu. Tato práce musí být shodná pro všechny schody, tedy i pro první,

$$W = W_1 = m\omega^2 r_1 h_1 = m\omega^2 (R - h)h,$$

kde h je výška prvního schodu a $R - h$ je jeho vzdálenost od osy Rámy. Volíme tuto hodnotu proto, že chceme, aby první schod byl ten u paty schodiště a navíc aby vzdálenost plošiny posledního schodu od osy byla rovna H (čtenář si rozmyslí, proč je tedy $r_1 = R - h$).

Tedy obecně práce potřebná na překonání k -tého schodu bude rovna

$$W_k = m\omega^2 r_k h_k,$$

která ovšem musí být rovna práci W potřebné na překonání každého schodu, proto

$$\begin{aligned} m\omega^2 r_k h_k &= m\omega^2 (R - h)h, \\ h_k &= \frac{(R - h)h}{r_k}. \end{aligned}$$

Nic nám nebrání funkci spojitě prodloužit na celý interval $r \in (H, R)$, tedy

$$h_s(r) = \frac{(R-h)h}{r}.$$

Toto je hledaná závislost výšky schodu na vzdálenosti od osy Rámy, funkce je zřejmě nepřímá úměrnost. Nicméně tvar křivky to stále není. Vypočítáme-li směrnici tečny ke křivce, můžeme potom integrací vypočítat, jak křivka vypadá. Uvažme, že schod je oproti Rámuvi zanedbatelně malý a tedy tečnu ke schodišti vypočteme jako poměr výšky ku délce schodu. Výšku schodu popisuje už objevená závislost $h_s(r)$

$$\Delta r = \frac{(R-h)h}{r}.$$

Délku schodu známe, je konstantní, rovná d

$$\Delta x = d.$$

Tedy tečna ke schodišti bude poměr $\Delta r/\Delta x$. Uvážíme-li, že jednotlivé schody jsou zanedbatelně malé, tento poměr přejde k derivaci.

$$\frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{(R-h)h}{dr} \rightarrow \frac{dr}{dx}.$$

Odseparujeme proměnné a vypočteme integrály

$$\int r dr = \int \frac{(R-h)h}{d} dx,$$

$$r(x) = \sqrt{2 \left(\frac{(R-h)h}{d} x + C \right)},$$

Konstantu C určíme z podmínky, že $r(0) = H$. Tedy $C = H^2/2$. Hledaná závislost popisující tvar schodiště je tedy

$$r(x) = \sqrt{\frac{2(R-h)h}{d} x + H^2} \approx \sqrt{\frac{2Rh}{d} x + H^2}$$

a tvarem schodiště je tudíž parabola.

Uvažujeme-li schodiště v podstavě, bude v polárních souřadnicích pro délku schodu platit

$$d = r\Delta\varphi.$$

A tedy docházíme k rovnici, kterou vyřešíme obdobně jako v minulém případě.

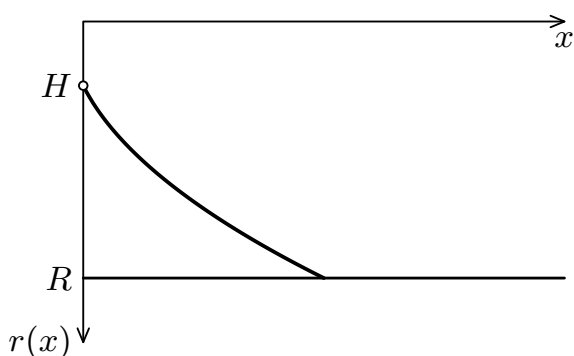
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{(R-h)h}{d},$$

$$\int dr = \int \frac{(R-h)h}{d} d\varphi,$$

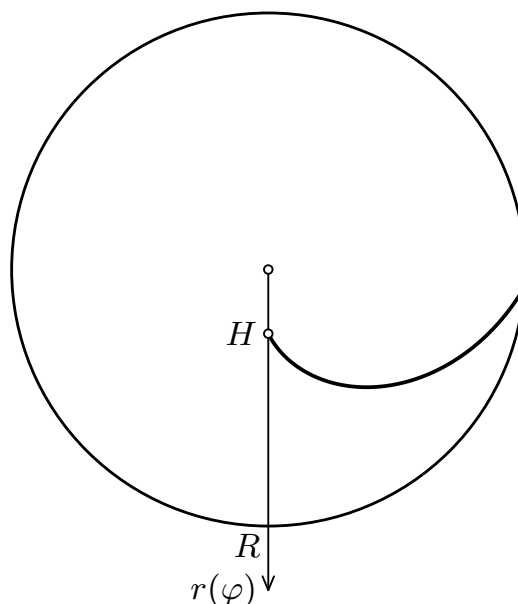
$$r(\varphi) = \frac{(R-h)h}{d} \varphi + D.$$

Konstantu D určíme tak, že stanovíme, že nulový úhel φ určuje začátek schodiště na plošině uprostřed podstavy, tedy $r(0) = H$, z čehož vyplývá, že i $D = H$. Hledaná závislost tedy je přímo úměrná úhlu φ .

$$r(\varphi) = \frac{(R-h)h}{d} \varphi + H \approx \frac{Rh}{d} \varphi + H.$$



Obr. 21. Tvar schodiště klenoucího se v Rámovi pro $d = 2h$



Obr. 22. Tvar schodiště v podstavě Rámově pro $d = 2h$

Z řešení vyplývá, že při obou způsobech konstrukce bude výška schodu klesat s první mocninou poloměru. Postavíme-li schodiště kolmo k podstavě Rámy, jeho tvarem bude parabola. Pokud jej ovšem postavíme v podstavě, bude to spirála.

Úloha V.4 ... sluneční konzerva

Ráma cestuje mezi hvězdami tak, že polovinu času rovnoměrně zrychluje a polovinu času rovnoměrně zpomaluje. Právě se pohybuje kolem Slunce po parabole s vrcholem na orbitě Země. Energii získává ze slunečního záření (žádný reaktor nebo obří baterie jsi na něm neobjevil) a jeho povrch absorbuje 80 % dopadající energie. Nasbírání při průletu sluneční soustavou dostatečnou energii, aby se dostal k Siriu, který je vzdálen 12 světelných let, za 24 let?

Tato úloha se zaměřila na energetickou náročnost Rámových poutí, které se skládají ze svižného přesunu mezi různými hvězdnými systémy a interakce s živými bytostmi v nich. V knižní předloze je mechanismus získávání energie utajený, ledaže by se jednalo o mohutný gravitační prak kolem Slunce, nicméně ten příliš účinný být nemůže (alespoň ne na cestě k Siriu), neboť relativní radiální rychlost Slunce a Siria je pouhých 7,6 km/s.

Jestliže volíme parabolickou trajektorii při průletu kolem Slunce, lze rychlost vesmírného plavidla na okraji sluneční soustavy považovat za zanedbatelnou. Pro jistotu si určíme její hodnotu. Vyloučíme-li z našich úvah všechna tělesa vyjma Slunce a Rámy, je energie vesmírné lodě

$$E = \frac{1}{2}mv(r)^2 - \frac{GM_{\odot}m}{r},$$

kde m je hmotnost Rámy a $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg hmotnost Slunce. Parabolu dostaneme pro mezní únikovou energii, $E = 0$, tudíž

$$v(r) = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{r}}. \quad (35)$$

Vezmeme-li jako hranici Sluneční soustavy začátek *heliosférické obálky*, okraj oblasti čištěné slunečním větrem od mezihvězdného materiálu, což činí asi $r_h \approx 90$ AU, dostaneme $v(r_h) \approx 4,5$ km/s. To sice není nula, ale na uvažovaných vzdálenostech od ní není daleko.

Jestliže má Ráma po opuštění systému nulovou rychlost a půlku cesty zrychluje a půlku zpomaluje, je jeho maximální rychlost rovná dvojnásobku průměrné rychlosti. Takže protože průměrná je

$$v_p = \frac{12 \text{ ly}}{24 \text{ y}} = \frac{1}{2} c,$$

dosáhne maximální rychlosti rychlosti světla, což hmotný objekt podle teorie relativity nedokáže. Zdá se tedy, že zadaná čísla jsou chybná, což je na jednu stranu (naneštěstí) pravda – cesta trvala Rámovi podle knihy pouhých 12 let a vzdálenost k Siriovi od Země je správně 8,6 ly – na druhou stranu, když se zahledíme na tento nový pár čísel, dojdeme k závěru, že tím spíše je popsáný manévř neproveditelný. Budeme tedy prozatím uvažovat nějakou bližší soustavu, například trojhvězdu Alfa Centauri ve vzdálenosti 4,4 ly a k otázce proveditelnosti v původním případě se vrátíme později.

Prvním úkolem je určení energie načerpané ze slunečního světla. Zářivý výkon Slunce (energie vyzářená za jednotku času) je $P_{\odot} = 385 \cdot 10^{24}$ W. Protože záření je kulově symetrické, na čelně nastavenou plochu S ve vzdálenosti r dopadá výkon

$$P = \frac{P_{\odot} S}{4\pi r^2}.$$

Protože Ráma záření o nižších frekvencích odráží, uloží podle zadání jen $\varkappa = 80\%$ z energie dopadajícího záření, což za jednotku času činí

$$dW^+ = \varkappa P dt = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi r^2} dt.$$

Celková dodaná energie je pak integrál předcházejícího příspěvku po celé trajektorii²⁰

$$W^+ = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{r^2}. \quad (36)$$

Pro jeho výpočet potřebujeme znát buď polohu Rámy v každém čase, nebo – lépe – ho trochu zjednodušit. Vyjděme z druhého Keplerova zákona o plochách opsaných průvodičem, totiž že se zachovávají. Je-li σ plošná rychlost, platí

$$\sigma \equiv \frac{1}{2} \omega r^2 \equiv \frac{1}{2} v r \sin \vartheta = \sigma_0, \quad (37)$$

přičemž ϑ je úhel sevřený vektorem rychlosti a průvodičem a σ_0 je konstanta. Toto platí i v přísluní ve vzdálenosti $R = 1$ AU od Slunce, kdy je rychlost Rámy tečná (radiální rychlost je v tu chvíli nulová), tedy $\vartheta = \pi/2$ a po dosazení dříve vypočtené rychlosti (35) do (37) máme

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} v(R) R = \sqrt{\frac{GM_{\odot} R}{2}}.$$

Pokud nyní z (37) vyjádříme úhlovou rychlost, dostaneme

$$\omega = \frac{1}{r^2} \sqrt{2GM_{\odot} R},$$

a jelikož $\omega = d\varphi/dt$, je konečně

$$\frac{dt}{r^2} = \frac{d\varphi}{\sqrt{2GM_{\odot} R}}.$$

Výsledným výrazem nahradíme připravený integrand v (36) a příslušně změňíme meze, pak

$$W^+ = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{4\pi \sqrt{2GM_{\odot} R}} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\varkappa P_{\odot} S}{2\sqrt{2GM_{\odot} R}}.$$

²⁰⁾ Příspěvek integrálu mimo sluneční soustavu je zanedbatelný a takto se nám bude snáze počítat.

Osvětlenou plochu válce odhadneme jako obdélník o rozměrech $50 \text{ km} \times 20 \text{ km}$ (délka krát průměr). Vyjde

$$W^+ \doteq 2 \cdot 10^{19} \text{ J}.$$

Pokud by se někdo vůbec nechtěl pouštět do integrování, byť takto jednoduchého, velice podobný výsledek asi $3,5 \cdot 10^{19} \text{ J}$ dostane následujícím odhadem: Většinu energie získá Ráma v periheliu, totiž na orbitě Země. Pokud se vzdálí, dopadá na něj méně světla, ale zato se, podle Keplerových zákonů, pohybuje pomaleji²¹. Při jednom svém oběhu tak Ráma získá skoro stejnou energii, jakou by načerpal na orbitě Země za jeden rok.

Nyní je na čase rozmyslet si cestu mezihvězdným prostorem. Z úvodních úvah je zřejmé, že se vesmírná loď neštítí relativistických rychlostí, použijeme tedy vzorec pro relativistickou kinetickou energii

$$W_k = m'c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma(v) - 1),$$

kde $\gamma(v) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Pokud loď zrychluje s konstantním zrychlením, D je vzdálenost mezi hvězdami a T plánovaná doba letu, je průměrná rychlost $v_p = D/T$ a maximální rychlost $v_{\max} = 2D/T$. Protože na začátku cesty se Ráma (téměř) nepohybuje, k urychlení na v_{\max} musíme dodat energii

$$\Delta W = mc^2 \left(\left(1 - \left(\frac{2D}{cT} \right)^2 \right)^{-1/2} - 1 \right),$$

Pokud Ráma stejným způsobem brzdí, je toto polovina celkové vydané energie. Letíme-li na Alfa Centauri po dobu 12 let, spotřebujeme tak

$$W^- = 2\Delta W \doteq 4 \cdot 10^{16} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} m,$$

což pro vesmírnou loď těžší než trabant znamená nutnost vézt s sebou dodatečné zdroje energie. Mnohasettisícitunový Ráma fungující na sluníčko by tedy nikam daleko nedoletěl.

Na konci úvodu jsme slíbili, že se ještě vrátíme k otázce realizovatelnosti zadaného Rámova způsobu cestování od Slunce k Siriovi. V předcházejícím řešení jsme předpokládali, že „konstantní zrychlení“ v zadání je myšleno z pohledu vnějšího pozorovatele. Z teorie relativity plyne, že rychleji se pohybující objekt má větší setrvačnost (rozuměj hmotnost), a tedy stejnému urychlování klade větší odpor. To ale znamená, že aby udržel Ráma stejné *vnější* zrychlení (pozorované například od Slunce), musí vynakládat stále větší výkon s tím, jak jeho rychlost roste. Tak se ale ztrácí předpokládaná ekonomičnost Rámových přesunů, totiž stálý (a tedy i minimální) výkon a s ním spojené opotřebovávání motorů. Pohledme proto nyní očima řidiče – bezvěkého tvora ovládajícího koráb Ráma, brázdícího na něm

²¹⁾ Nicméně intenzita je úměrná r^{-2} , zatímco perioda $r^{3/2}$, takže jejich součin přece jen klesá se vzdáleností – ale pomalu, jako $r^{-1/2}$.

hvězdné hlubiny po eóny let. Řidič není svázaný relativitou v tom smyslu, že by jeho rychlost byla jakkoliv omezená; při vyšších rychlostech dochází z jeho pohledu ke kontrakci vzdáleností ve směru jeho rychlosti podle známého vzorce $\Delta l_{\text{řidič}} = \Delta l_0 / \gamma(v)$ a pokud se jeho rychlost (vzhledem k soustavě počátek–cíl cesty) přiblíží k rychlosti světla, $\Delta l_{\text{řidič}}$ se zkracuje k nule a jím pozorovaná rychlost $v_{\text{řidič}}$ narůstá do nekonečna, neboť za stejný (vlastní) čas urazí γ -krát větší vzdálenost. Jinými slovy,

$$v_{\text{řidič}} = v\gamma(v). \quad (38)$$

Řidič navíc jistě vede loď tak, že konstantně zrychluje ze svého pohledu, $v_{\text{řidič}} = a_{\text{řidič}}t$, působí na něj konstantní setrvačná síla a Ráma má stabilní výkon. Z (38) vyčíslíme v ,

$$v(t) = \frac{a_{\text{řidič}}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{a_{\text{řidič}}t}{c}\right)^2}}, \quad (39)$$

což už stačí zintegrovat (s podmínkou $x = 0$ v $t = 0$) na

$$x(t) = \frac{c^2}{a_{\text{řidič}}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_{\text{řidič}}t}{c}\right)^2} - 1 \right). \quad (40)$$

Jestliže si nakreslíme graf této závislosti, snadno nahlédneme, proč se pohybu, při němž urychlovaný pozorovatel pociťuje konstantní zrychlení, říká *hyperbolický pohyb*. Nyní jsme schopni, dosazením $x = D/2 = 4,3$ ly pro $t = T/2 = 6$ y do (40), vyčíslit potřebné zrychlení, resp. zpomalení Rámy při cestě k Siriu,

$$a_{\text{řidič}} = \frac{4D}{T^2 - \left(\frac{D}{c}\right)^2} \doteq 4,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Zdá se tedy, že řidiči se ani příliš neodvápni kosti (má-li nějaké), ani ho v sirijském kosmodromu nebudou seškrabovat ze zadní stěny. Spotřebovanou energii získáme opět jako dvojnásobek kinetické energie Rámy letícího maximální rychlostí

$$W^- = 2mc^2 (\gamma(v_{\text{max}}) - 1),$$

kde v_{max} se vypočítá z (39) dosazením vypočteného zrychlení a $t = T/2$. Dohromady po úpravě je

$$W^- = \frac{4mc^2}{\left(\frac{cT}{D}\right)^2 - 1} \doteq 4 \cdot 10^{17} \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1} m.$$

Závěr je tedy stejný jako pro cestu na Alfa Centauri při konstantním vnějším zrychlení s tím, že z trabantu už zbyly jen nárazníky – Rámovi by nasbíraná energie nestačila.

Úloha V.P ... rámatřesení

Úspěšně ses dostal na povrch Rámy. Z ničeho nic se Ráma několikrát otrásl a zdá se ti, že se změnila rychlost jeho rotace. Tato otázka tě velice tíží. Navrhni proto několik způsobů, jak bys změněnou periodu rotace určil.

Nejjednodušší způsob, který určitě napadne každého jako první, je pokusit se změřit odstředivé zrychlení a u povrchu Rámy. Ze známých vzorečků pro rotující soustavy

$$a = \frac{v^2}{R}, \quad v = \omega R$$

snadno dostaneme, že nová perioda rotace Rámy je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{a}}.$$

Metod pro určení zrychlení a je mnoho. Prakticky můžeme použít jakýkoliv vztah, který známe ze Země, ve kterém vystupuje tíhové zrychlení. Průzkumníkům Rámy by tedy stačilo vyrobit si matematické kyvadlo. Také by se dalo měřit dostředivé zrychlení přímo, pomocí stopek. Tato metoda je však velmi nepřesná. Měření doby pádu tělesa bez optoelektronických prvků by nám dalo jen velmi hrubý odhad odstředivého zrychlení. Pouštění těles z větších výšek by zase poněkud zkomplikovalo výpočet, protože bychom museli uvažovat, že těleso odlétá po tečně k rotaci v daném místě. (Více se o tomto problému pojednává v úloze V.2.) Navíc ani u nás na Zemi se tato metoda k stanovení velikosti tíhového zrychlení nepoužívá.

Odstředivé zrychlení Rámy můžeme také jednoduše zjistit pomocí libovolných vah (až na ty rovnoramenné). Stačí totiž znovu zvážit libovolné těleso známé hmotnosti. Poměr pozemské a nové hmotnosti bude odpovídat podílu tíhového zrychlení Země s odstředivým zrychlením Rámy. Improvizované váhy si můžeme vyrobit i pomocí pružiny, jenom musíme nějakou metodou změřit její tuhost. Způsobů, jak to provést, aniž bychom použili tíhu nějakého tělesa, každého jistě napadne nepřeborně. Stačí vyrobit jakoukoliv sílu o známé velikosti, ať už elektrickou, magnetickou nebo jinou.

Máme však i možnosti, jak určit novou periodu rotace přímo. Jednou z nich je použití setrvačnicku. Roztočený setrvačník totiž zachovává rovinu rotace vůči venkovnímu pozorovateli. Stačilo by tedy dívat se na setrvačník a změřit dobu, za kterou vykoná obrátku. Setrvačník by však musel být upevněn tak, aby mu bylo umožněno volné natáčení. Takovému uchycení říkáme Cardanův závěs. Dalším způsobem z této kategorie je zaměřit se na libovolný pevný bod mimo Rámu. Pokud Ráma není dostatečně odstíněná (bohužel jeho plášť funguje jako Faradayova klec), můžeme detekovat zdroje libovolného záření z vnějšku. Přinejhorším ho můžeme vždy opustit a zjistit, jak je to doopravdy.

Jak je vidět z první úlohy, uspořádání Rámovy atmosféry je závislé na periodě rotace. Teoreticky by tedy mohlo pomoci změřit nový tlak vzduchu u povrchu nebo i jinde. Prakticky to však bude horší, protože atmosféra se přeuspořádá až

po určitém čase! Při roztáčení sklenice s vodou vytvoříte vír až po chvíli úsilí. Stejně tak rotující povrch Rámy bude strhávat atmosféru postupně a mnohem pomaleji než u analogie s vodou, protože vzduch má mnohem menší viskozitu. Každopádně změna rotace Rámy vyvolá uvnitř pěknou vichřici a je otázka, za jak dlouho budou údaje o tlaku vzduchu odpovídat nové periodě rotace, o přesnosti ani nemluvě.

Úloha VI. 1 ... *pterodaktyl sestřelen*

Pterodaktyl letěl ve výšce 1 km nad pralesem rychlostí 4 m/s. Guerillový válečník, držící v ruce kalašnikov (kulka opouští hlaveň rychlostí 710 m/s), ho spatřil nad hlavou a vystřelil. Pták FYKOSák byl trefen do křídla a začal padat. Jak daleko od válečníka dopadl? (Odpor vzduchu si dovoďte zanedbat.)

Předpokládejme, že válečník vystřelí hned, jakmile má pterodaktyla nad sebou, a že tedy mezi spatřením a výstřelem neuplyne žádný čas. Dále předpokládejme, že kulka pterodaktylem pouze projde a nepředá mu žádnou kinetickou ani potenciální energii, pouze způsobí zranění.

Pohyb kulky rozdělíme do vodorovného a svislého směru, vodorovná složka bude rovna rychlosti pohybu pterodaktyla v_p a svislou v_s dopočítáme na základě znalosti absolutní hodnoty rychlosti kulky v_k .

$$v_s = \sqrt{v_k^2 - v_p^2}.$$

Pterodaktyl tedy bude sestřelen za čas, za který projektil vyletí do výšky, v níž pták FYKOSák letí,

$$h = v_s t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}.$$

Druhá rovnice má sice dvě řešení, ale to větší nás nezajímá, neboť vyjadřuje čas, kdy se trajektorie protnou, až bude kulka padat dolů. Za tuto dobu pterodaktyl uletí vzdálenost

$$s_1 = v_p t_1 = v_p \frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g}.$$

Nyní ještě musíme vypočítat, o kolik se vzdálí během pádu. Vzhledem k tomu, že zanedbáváme odpor vzduchu, budeme předpokládat, že se bolestí schoulí do kloubíčka a bude padat volným pádem, místo aby se pokoušel plachtit. Dopadne tedy za čas

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

a za tento čas ještě uletí dráhu

$$s_2 = v_p t_2 = v_p \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Výsledná vzdálenost je součtem těchto dvou vzdáleností

$$s = s_1 + s_2 = v_p \left(\frac{\sqrt{v_k^2 - v_p^2} - \sqrt{v_k^2 - v_p^2 - 2gh}}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right).$$

Takže pterodaktyl dopadne 63 m od válečníka.

Úloha VI.2 ... vaření hada

Ubohý pterodaktyl ze své klece s obavami pozoruje divokou zvěř v okolní džungli. Zejména ho zaujal párek bezstarostných hadů, kteří se chystali vlézt do jeho klece. Věznitelé je však neúprosně sevřeli klacky tvaru písmene Y. Z hadů bude výborná večeře, malou radost z toho má i pták FYKOSák, ačkoliv dává přednost jinému než hadímu masu.

Tuhé maso jedovatých hadů se musí vařit při vyšší teplotě, k tomu se používá papíňák. Nádoba se naplní z poloviny vodou, v druhé polovině zůstane vzduch, potom se uzavře a pomalu zahřívá. Při jaké teplotě se začne voda v hrnci vařit? V jakých fázích voda existuje při rostoucí teplotě?

Nejprve si ujasněme počáteční stav našeho problému. V čase t_0 těsně po uzavření hrnce je nad vodní hladinou atmosféra skládající se z dusíku, kyslíku a zanedbatelného množství ostatních plynů a vodní páry. Její tlak označme p_0 . Jakmile začneme hrnec zahřívát, voda uvnitř se bude snažit dostat do dynamické rovnováhy se svým okolím. Tedy bude se vypařovat do doby, než se nad hladinou vytvoří sytá pára o tlaku p_s , jenž se odvíjí od teploty vody. Nad vodní hladinou tedy bude tlak $p = p_0 + p_s$.

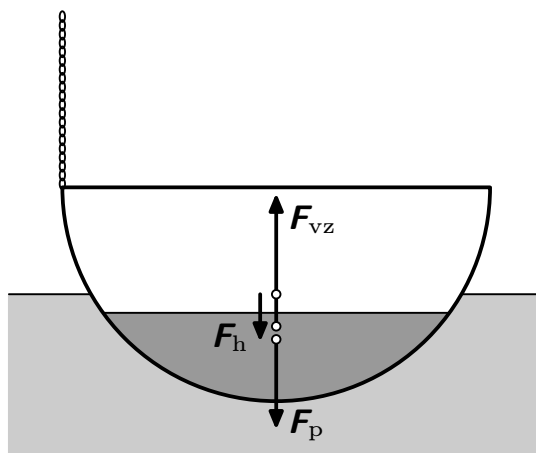
Nyní si ujasněme, co se děje během varu. Při varu vznikají uvnitř kapaliny bubliny syté páry o tlaku p_s , které vystupují k povrchu kapaliny. Ovšem aby k varu vůbec došlo, musí být nad hladinou kapaliny tlak menší nebo roven tlaku sytých par při dané teplotě. V našem případě je však tlak nad hladinou kapaliny větší o tlak p_0 , tedy k varu nikdy nedojde. Během dalšího zahřívání po vytvoření syté páry nad vodní hladinou se bude stav našeho systému pohybovat po křivce syté páry až ke kritickému bodu. Pro vodu je kritická teplota rovna 374°C a kritický tlak je roven $22,1\text{ MPa}$.

Zbývá ještě odpovědět na otázku, v jakých fázích se bude voda během zahřívání vyskytovat. Nejdříve se bude vyskytovat jako kapalina a plyn, po jisté době bude ve stavu kapaliny a její syté páry a konečně po dosažení kritického bodu bude voda existovat v superkritickém stavu.

Úloha VI.3 ... hadí polévka

Když je hadí maso uvařené, kuchaři z něj připravují hadí polévku v měděných hrncích, které mají tvar polokoule o průměru 40 cm. Hrnec s polévkou dávají potom vychladit do nedalekého jezera. Když ho nechají plavat, ponoří se o 10 cm. K bodu na okraji hrnce je připevněn řetízek. Pokud za řetízek zatáhneme, a zvedneme tak okraj hrnce o 10 cm, nateče do hrnce voda?

V této úloze si lehce procvičíme způsob řešení problémů, kde hledáme rovnovážnou polohu mechanické soustavy. Pro rovnovážnou polohu platí, že vektorový součet všech sil, stejně jako součet všech momentů sil na soustavu působících, je nulový. Momenty působících sil, tedy skalární součin vektoru síly a ramena $\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, je vždy třeba vztáhnout k určitému bodu prostoru, od kterého toto rameno odměřujeme. Pro různě zvolené vztažné body je velikost momentu sil obecně různá. Když je moment nulový vůči nějakému vztažnému bodu, nemusí být nulový vůči jinému. Pokud má ale mechanická soustava být a zůstat nehybná, musí být její změna momentu hybnosti vůči libovolnému vztažnému bodu nulová, což implikuje nulovou výslednici momentů sil vůči libovolnému vztažnému bodu.



Obr. 23. Hrnec s polévkou plave na hladině

Poloměr polokulového hrnce je $r = 20$ cm. Na počátku je hrnec ponořen do hloubky $r/2$, čemuž odpovídá objem „vytlačené“ vody V_0 , který bychom vypočetli jako objem kulové úseče. Tíhová síla \mathbf{F}_h působící na samotný hrnec, tíhová síla \mathbf{F}_p působící na polévku v něm a vztlaková síla \mathbf{F}_{vz} jsou v rovnováze, tedy jejich vektorový součet je roven nule. Působíště síly \mathbf{F}_h klademe do těžiště polokulovitěho hrnce, působíště \mathbf{F}_p do těžiště polévky a nakonec působíště \mathbf{F}_{vz} můžeme klást do těžiště vytlačené vody. Vztlaková síla je podle Archimédova zákona dána jako tíha objemu vody rovné ponořené části tělesa, tedy

$$F_{vz} = V_0 \rho g.$$

Všechny síly leží v jedné přímce a jejich moment vůči libovolnému bodu je proto nulový.

Nyní levý okraj hrnce vyzvedneme o $r/2 = 10$ cm. Jak velká část hrnce bude ponořena, pokud by se pravý okraj dotýkal přesně hladiny? Tuto novou polohu hrnce bychom dostali pouhým pootočením hrnce okolo středu myšlené koule, jejíž částí hrnec je, a ponořený objem se tedy oproti původní poloze vůbec nezmění. Aby i v této pootočené poloze byl hrnec v rovnováze, je třeba zajistit rovnováhu sil a momentů sil. Nadále platí

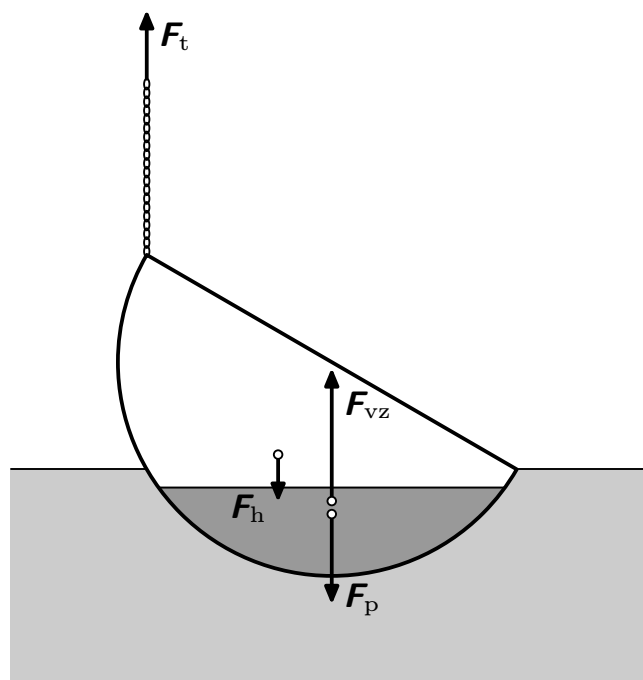
$$\mathbf{F}_h + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_{vz} = 0.$$

Síly už ale neleží v jedné přímce a hrnec má přirozeně tendenci otáčet se do původní stabilní polohy. Pro jeho udržení v nové poloze je třeba působit dvojicí sil, jejichž výslednice je nulová, ale působí silovým momentem. Museli bychom tedy hrnec na jednom okraji přivádět a na druhém stejnou silou přitlačovat.

V našem případě ovšem jen taháme za řetízek a působíme silou F_t ve směru kolmo vzhůru. Aby byla i teď splněna rovnováha sil, musí platit

$$F_h + F_p + F_{vz} + F_t = 0,$$

Síla F_{vz} musí být patrně menší než na počátku, a to právě o velikost síly F_t . Hrnec je proto ponořen do menší hloubky než $r/2$ a voda do něj nenateče (a ani z hrnce polévka nevyteče, protože pokud má hustotu srovnatelnou nebo větší než voda, je ji méně než objem V_0). Stejně tak uvažme moment sil vzhledem k bodu závěsu. Síla F_t působí nulovým momentem a síly F_{vz} a F_p mají stejné rameno, v důsledku vytažení se zkrátilo rameno síly F_h , a to musí být kompenzováno zmenšením síly F_{vz} .



Obr. 24. Hrnec v náklonu

Zde bychom mohli skončit, ale pokusme se ještě nastínit, jak bychom vypočítali, v jaké poloze se hrnec ustálí a jakou silou musíme tahat za řetízek.

Nechť proměnná y udává výšku levého okraje hrnce oproti původní poloze a proměnná α sklon obruby hrnce vůči vodorovnému směru. Vše podstatné, co o naší mechanické soustavě víme, lze shrnout do následujících rovnic:

$$\begin{aligned} m_h + m_p &= V_0 \rho g, \\ \rho g(V_0 - V(y, \alpha)) &= F_t, \\ hF_h \sin \alpha - rF_t \cos \alpha &= 0, \end{aligned}$$

kde m_h je hmotnost hrnce a m_p hmotnost polévky.

Výraz $V(y, \alpha)$ značí ponořený objem hrnce, který závisí na proměnných y, α . Tento výraz nebude příliš pěkný a nebudeme ho konkrétně vyjadřovat. Písmeno h udává vzdálenost těžiště duté polokoule (hrnce) od středu koule. Nadšenci si mohou jako jednoduché cvičení na integrování vypočítat, že $h = r/2$. Druhá rovnice vyjadřuje myšlenku, že vztlková síla poklesne o velikost tažné síly. Třetí z rovnic značí rovnováhu momentů sil vůči středu pomyslné koule, ramena sil F_{vz} a F_p jsou vůči tomuto bodu nulová. Bod, vůči kterému momenty vztahujeme, volíme tak, aby se rovnice co nejvíce zjednodušila. Dosazením druhé rovnosti do třetí získáme

snadno rovnici pro neznámou α . Ta však představuje rovnici s parametrem m_h , který neznáme. Pokud ale třeba budeme znát poměr m_h/m_p , určíme m_h , a rovnici pro neznámou α můžeme vyřešit například numericky metodou půlení intervalu.

Úloha VI.4 ... rychlý úprk

Pták FYKOSák statečně prchá chodbou (nemůže v ní letět), v patách má dva vojáky, kterým se před okamžikem vymkl z pout. Chodba zatáčí ve tvaru písmene L a pterodaktyl horlivě přemýšlí, jak dál.

Chodba je široká w , pterodaktyl běží rychlostí v_0 a zatáčka je ve vzdálenosti d . Pokud velikost ptákovy zrychlení dosáhne hodnoty a_{krit} , pterodaktyl uklouzne, spadne a bude chycen. Po jaké dráze má běžet a jak se má naklánět, aby ho zatáčka zdržela co nejméně?

Podstatou této úlohy bylo najít dráhu, která minimalizuje čas projetí zatáčkou. Správné řešení úlohy se ukázalo být (oproti očekávaní) poněkud komplikované.

Pokud by se však trajektorie ptáka FYKOSáka směla skládat jen z úseček a částí kružnice, nejednalo by se o příliš složitý problém. Za předpokladu, že při pohybu po kružnici musí pták FYKOSák zpomalit, byl nejvýhodnější největší možný poloměr, po kterém se mohl pohybovat svou maximální rychlostí a projel zatáčkou (kratší dráha – menší čas). Zapišeme-li dobu průchodu zatáčkou jako funkci poloměru (čas = doba brzdění na požadovanou rychlost + doba rovnoměrného pohybu + doba rovnoměrného pohybu po kružnici + doba zrychlování), nejkratší vyjde pro maximální poloměr. Do diskuze pak stačí poznamenat, že když bude zrychlení potřebné na zastavení z počáteční rychlosti na vzdálenosti $d + w$ větší než a_{krit} , tak už nemůže před zatáčkou ubrzdit aniž by narazil do protější stěny (anebo došlo ke smyku).

Vágní formulace úlohy zde nemusela být vždy na škodu. Mohli jsme totiž předpokládat vstupní podmínky, které se nám zrovna hodily. K velice originálním řešením lze dojít, učiníme-li dodatečné předpoklady o velikosti či směru počáteční rychlosti (např. začíná z nuly, směřuje k rohu zatáčky apod.).

Teď bychom měli vyjasnit, co jsme mysleli, když jsme v úvodu řekli „poněkud komplikované řešení“. V principu existují dvě metody, jak se úloha dala řešit. Praktická a teoretická. Tu první, kterou zde předvedeme, můžeme stručně nazvat „minimalizace času jako funkce parametrů s použitím downhill simplexové metody při dráze a průběhu rychlosti aproximovanými polynomiálními funkcemi“.

K dohledání aproximované dráhy a průběhu rychlosti použijeme počítač. Vysvětlení *downhill simplexové metody* by proto mělo patřit spíše do aktuálního seriálu. V principu se jedná o to, že namísto hledání přesné dráhy si ji budeme aproximovat nějakou polynomiální funkcí tvaru $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Čím více zvolíme členů této řady, tím bude naše aproximace přesnější. Podobně také rychlost zapišeme jako $v = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$. Potom vypočítáme čas T jako integrální funkci rychlosti po dráze. Dostaneme funkci, která bude záviset na parametrech a_i, b_i . Minimum funkce mnoha proměnných najdeme downhill

simplexovou metodou. Splnění podmínek úlohy docílíme vhodnou parametrizací a modifikací simplexové metody. Podrobněji můžeme postupovat následovně.

Řekněme, že v bodě A před zatáčkou k ní pták FYKOSák utíká svou maximální rychlostí v_{\max} a stejně daleko za ní utíká tou samou rychlostí, ale směrem od zatáčky. Okrajové podmínky můžeme zvolit zcela libovolně, na postupu řešení se nic nezmění.

Pak zavedeme pravoúhlou souřadnou soustavu s počátkem v rohu zatáčky a osou y rovnoběžnou s její osou. Souřadnici x vyjádříme jako funkci času a souřadnici y jako funkci x . Budeme předpokládat, že tyto funkce mají tvar

$$\begin{aligned}x &= a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0, \\y &= b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,\end{aligned}$$

kde jsme pro přehlednost zapsali obě funkce jen jako polynomy třetího řádu. Řád polynomů samozřejmě můžeme volit i vyšší podle toho, jakou přesnost požadujeme. Můžeme dokonce zvolit i obecnější funkce (třeba nahradíme t za $\tau = t - T_0$).

Dále zapíšeme podmínky úlohy. Budeme chtít, aby pták FYKOSák v žádném okamžiku nepřišel do kontaktu se stěnami chodby. To v dané souřadnicové soustavě vyjádříme nerovnostmi

$$|x| < y < |x| + \frac{\sqrt{2}}{2} b.$$

V žádném čase nemůže běžet rychleji nežli maximální (tedy počáteční) rychlostí

$$v^2 < v_{\max}^2, \quad v^2 = \dot{x}^2 + (y'\dot{x})^2,$$

kde tečkou značíme derivaci podle času a čárkou derivaci podle x . Požadavek na zrychlení menší než a_{krit} zapíšeme jako $a_t^2 + a_d^2 < a_{\text{krit}}^2$, tedy

$$(\ddot{x}^2 + (y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x})^2) + (kv^2)^2 < a_{\text{krit}}^2, \quad \text{kde křivost } k = \frac{1}{r} = \left| \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}} \right|.$$

Podmínku, že za zatáčkou dosáhnou funkce polohy a rychlosti požadovaných hodnot zapíšeme jako

$$v = v_{\max}, \quad y' = y'|_{t=0} \pm 10\%, \quad x = -x_A. \quad (41)$$

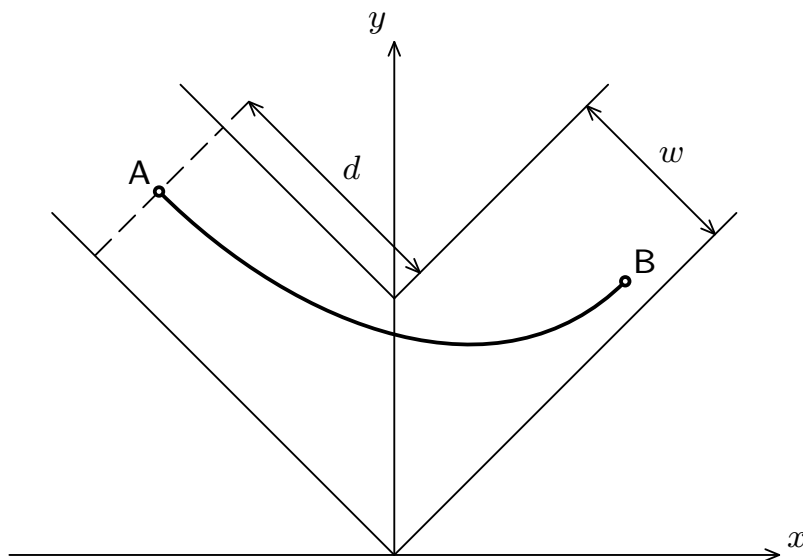
A konečně pták FYKOSák musí projít bodem A a mít v něm požadovanou rychlost, tedy pro $t = 0$ musí být hodnoty x a y a jejich derivace rovny hodnotám v bodě A. Jako poslední musíme doplnit ještě $t < T_{\max}$. Význam této poslední podmínky spočívá v tom, že zavrhneme ty dráhy, pro které by průchod zatáčkou trval příliš dlouho. Použitá parametrizace může totiž teoreticky popsat i dráhu, při které bude dělat kolečka v chodbě.

Podmínky pro povolené hodnoty parametrů a_i, b_i můžeme získat z předchozích vztahů tak, že do nich dosadíme funkce $x(t)$ a $y(x)$ v předpokládaném tvaru. Pro $t = 0$ plyne přímo z tvaru těchto vztahů podmínka $a_0 = x_A$. Z podmínky na

počáteční rychlost (derivace) plyne $a_1 = \dot{x}|_{t=0} = v_0^{(x)}$. To dosadíme do funkce $y(x)$ a můžeme vyloučit dva z koeficientů.

Nakonec zjistíme dobu průchodu zatáčkou. Při daných parametrech a_i, b_i zvolíme malý časový krok δt . Začneme v bodě A, vypočítáme \dot{x} a \dot{y} a zjistíme, kam se posune za δt . V tom bodě znovu vypočítáme rychlost stejně jako předtím atd. až dokud nejsou splněny podmínky (41) anebo celkový čas nepřesáhne povolené maximum.

Jestliže budeme uvažovat čas jako funkci parametrů a_i, b_i a souřadnice budeme uvažovat ve výše uvedeném tvaru, úloha se změní na hledání minima funkce několika proměnných. Celkem je jich osm, z počátečních podmínek však máme čtyři. Hledáme tedy minimum funkce čtyř proměnných. Problém je jen v tom, že nemáme její analytické vyjádření, ale jenom návod jak ji pro dané parametry vypočítat. A právě tenhle problém řeší simplexová metoda. Vysvětleme nyní její podstatu.



Obr. 25. Počítačová simulace trajektorie ptáka FYKOSáka v nepřehledné zatáčce

Představme si, že chceme třeba najít minimum spojitě funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$. Graf takové funkce ve třech dimenzích vypadá jako reliéf (jáma, kopec, ...). Vybereme v rovině (x, y) tři body. Můžeme to udělat tak, že jeden bod vybereme zcela náhodně (anebo se zkusíme trefit do blízkosti minima) a zbylé body budou od něho posunuté o nějakou vzdálenost vždy ve směru jiné souřadnice. Vypočítáme hodnotu funkce ve všech třech bodech. Vezmeme bod, ve kterém má funkce největší funkční hodnotu (pokud je jich víc ekvivalentních, vybereme kterýkoli), a zobrazíme ho symetricky podle přímky tvořené zbylými dvěma body. Teď by bod měl být blíže k minimu než zbylé dva tj. funkční hodnota v něm by měla být menší. Jestliže tomu tak není, zmenšíme trojúhelník tvořený vybranými body (posuneme zbylé body podél stran blíže ke středu trojúhelníku) a dále postupujeme stejně. Algoritmus končí ve chvíli, kdy jsou body u sebe blíže než je přesnost, se kterou chceme nalézt bod minima. Celý algoritmus si můžeme tedy představit tak, že „kutálíme“ trojúhelník po povrchu grafu funkce a v blízkosti

minima ho postupně zmenšujeme. Pro funkci tří proměnných už nebudeme kutálet trojúhelník po rovině ale čtyřstěn v trojrozměrném prostoru. Tento postup jde zobecnit i do více dimenzí. Výhoda této metody je ta, že není potřeba hledat derivace minimalizované (maximalizované) funkce. Stačí nám pouze znát funkční hodnoty ve vyšetřovaných bodech.

Modifikace simplexové metody pro naši úlohu spočívá v tom, že ne všechny body budou přípustné. Při výpočtu času musíme zároveň kontrolovat splnění všech podmínek úlohy. Pokud by se měl některý z bodů simplexu posunout do nepřipustné polohy, dostaneme pro daný čas T_{\max} a dojde ke zmenšení simplexu.

Při praktické implementaci jsme použili upravený kód z knihy Press et al.: *Numerical recipes in C*. Pro konkrétní hodnoty $d = 3$ m, $w = 2$ m a $v_{\max} = 8$ m/s jsme našli nejvýhodnější křivku pro průchod zatáčkou zobrazenou na obrázku. Doba pohybu po této křivce vyšla $t = 0,49$ s. Naproti tomu dostat se stejně daleko za zatáčku po nejvýhodnější čtvrtkružnici by trvalo přes 0,7 s. Už takhle jednoduchou aproximací jsme tedy zlepšili čas průchodu zatáčkou až o 30%! Kdybychom zvolili lepší aproximaci, případně si více pohráli s počátečním a koncovým bodem, tento čas by určitě šel ještě vylepšit.

Úloha VI. P ... *mission impossible*

Naplánujte záchrannou misi a vysvobodte ptáka FYKOSáka. Nezapomeňte na plán B, příp. C.

„Neletím nad tím pralesem už nějak dlouho?“ zamyslel se pták FYKOSák, když pod sebou už pátou hodinu neviděl nic než vrcholky stromů. A v tom se pod ním z ničeho nic objevila paseka, na které někdo poskakoval a mával jakousi holí. Kdo by si myslel, že to byl kmenový šaman, a letěl se podívat blíž, udělal by stejnou osudovou chybu jako pterodaktyl. Hůl nebyla hůl, ale kalašnikov, a než se FYKOSák stačil rozkoukat, už padal s prostřeleným křídlem mezi mahagony a další vzácné dřeviny. „¡Chupacabras, chupacabras!“ křičeli neznámí útočníci a mávali útočnými puškami ve vzduchu, načež si ptakoještěr uvědomil, že být zaměněn s legendární příšerou, která domorodcům drancuje stáda, není zrovna nadějná vyhlídka.

Když se za nějakou dobu probudil, už nebyl v pralese, ale v rezavé kleci uprostřed dvora neznámé haciendy. Ve stínu u vchodu poklimbávaly strážce a u hlavní brány ležel nepřipoutaný pes. A všude okolo hejna much a komárů. Najednou se rozletěly dveře a po dalších dvou gorilách z nich vyšel postarší, rovněž omaskávaný, muž, okolo kterého jako další otravný hmyz poletoval malý zavalitý hispánc a stále něco španělsky brebentil. V ruce držel FYKOSákův batoh a když došli ke kleci, zašmátral, našel ročenku FYKOSu a podal ji šéfovi.

„¿Qué es?“ španělsky se zeptal velitel.

„Ročenka FYKOSu.“ odpověděl česky pták FYKOSák.

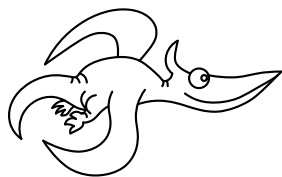
Obě strany brzo shledaly, že takhle to dál nepůjde, a po chvíli handrkování a hrozeb zbraní FYKOSák nalistoval v ročence tiráž a ukázal na email, na který

po nějaké době došla žádost o výkupné. Ale o tom vůbec nic nevěděl, a tak se rozhodl, že zkusí uprchnout sám, až se mu křídlo aspoň trochu zahojí.

Výkupné stále nepřicházelo, ale aspoň už jej nedrželi v kleci. Ochránka chytila jaguára, a tak rukojmí muselo z klece do cely a chudák šelma s klecí do cirkusu. Křídlo sice ještě trochu bolelo, ale kožní blána už byla vcelku srostlá a nějakou desítku kilometrů by snad už odletěl. Ale z rozhovorů mezi vojáky a personálem haciendy odposlechl, že jej zajala teroristická organizace FARC a že momentálně je na venkovském sídle jejího nejvyššího velitele, což byl ten stařík, kterého viděl první den. Z takového vězení se špatně utíká.

Ale rozhodně nepropadl zoufalství a pomalu, ale jistě se připravoval k útěku. V měkkých cihlách okolo dveří a oken vyškrabal drážku, kterou postupně zvětšoval. Jednou bude stačit mocný pterodaktylí kop a poletí ven i s „futrama“. Už jen čekal na správnou příležitost.

„¡Alarma!“ ozvalo se z chodby. Stráž sedící naproti FYKOSákově cele spadla ze židle a zbystřila. Pterodaktyl koukl škvírou ve dveřích ven a v tu ránu mu před nosem přeběhla skoro celá vojenská posádka a jeden doktor, který za nimi vlál jak praporek ve vichřici. Vojáci na chudáka felčara pokřikovali nějaké španělské nadávky, ze kterých FYKOSák pochytil jenom *infarkt* a *Tirotijo*, což byla přezdívka velitele a pomyslel si, že taková příležitost už se mu nenaskytne. Skočil na dveře, které podle očekávání povolily, a v oblaku prachu z vylámaných cihel dopadl na nic nečekajícího hlídače a utíkal směrem ke světlu. Ve shonu, který před chvílí vypukl, skoro nikdo nepostřehl, že vězeň chybí. Kdyby nenarazil na dva vojáky právě se vracející z latríny, které brzo setřásl, když bleskově proběhl rohem chodby a za sebou zvrhl pytel kuličkových ložisek (jaká náhoda, že tam zrovna byl), na kterých si pronásledovatelé doslova vylámali zuby, nikdo by si ho ani nevšiml. Dvůr byl prázdný, jak se všichni nahrnuli do budovy zjistit, co se děje s jejich velitelem. Mimochodem, dostal infarkt. FYKOSák na nic nečekal, zamával křídly a hned stoupal mimo dostřel kalašnikovů.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... ulovte si hlemýždě

Změřte, jaký nejpomalejší pohyb je schopné zaregistrovat lidské oko. Konkrétně měřte nejmenší okamžitou úhlovou rychlost vybraného objektu vzhledem k nehybnému pozadí, kterou vaše neustále otevřené oko dokáže zpozorovat během doby maximálně 5 s.

Pár tipů na pomalé pohyby: plazení hlemýždě, pohyb Slunce vůči obzoru při západu, otáčení hodinových ručiček, růst rostlin, růst živočichů, vzájemný pohyb hvězd...

(řešení str. 80)

Úloha II. E ... bubo bubo

Experimentálně prověřte tvrzení, že vinnou rotace Země se na severní (jižní) polokouli vír vody vypouštěné otvorem otáčí doprava (doleva). Mají-li mít vaše závěry váhu, musíte provést dostatečný počet měření v různých podmínkách.

(řešení str. 82)

Úloha III. E ... zkoumáme pohyb Slunce

Změřte co nejpřesněji výšku Slunce nad obzorem v pravé poledne a dobu od východu středu slunečního disku do jeho západu. Odvážlivci se mohou pokusit vypočítat teoretickou délku dne a hodnoty srovnat a okomentovat případný nesoulad.

(řešení str. 85)

Úloha IV. E ... valivý odpor

Pečlivě experimentálně prověřte, zda valivý odpor válce závisí na jeho poloměru či nikoliv.

(řešení str. 93)

Úloha V. E ... životní etapy Ramy

Bude mít Rama jiné fyzikální vlastnosti, poté co ji roztavíte a opět necháte ztuhnout? Doporučujeme měřit hustotu, viskozitu či barvu.

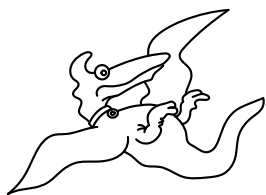
(řešení str. 99)

Úloha VI. E ... magnetický zámek

Cela, ve které je pterodaktyl vězněn, je uzamčena pomocí magnetického zámku. Americké tajné služby vlastní prototyp tohoto zámku a kousek z jeho magnetu vám posíláme v obálce se sérií. K otevření zámku bez klíče je nutné znát, jak závisí síla mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Změřte co nejpřesněji tuto závislost!

Návod: Mezi oba magnety postupně vkládejte tenké listy papíru a měřte sílu nutnou na odtržení magnetků od sebe.

(řešení str. 101)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... ulovte si hlemýžď

Změřte, jaký nejpomalejší pohyb je schopné zaregistrovat lidské oko. Konkrétně měřte nejmenší okamžitou úhlovou rychlost vybraného objektu vzhledem k nehybnému pozadí, kterou vaše neustále otevřené oko dokáže upozorovat během doby maximálně 5 s.

Pár tipů na pomalé pohyby: plazení hlemýžďe, pohyb Slunce vůči obzoru při západu, otáčení hodinových ručiček, růst rostlin, růst živočichů, vzájemný pohyb hvězd...

Teorie

Lidské oko je z hlediska vnímání pohybu poměrně nedokonalým přístrojem. Navíc, oko každého jedince je citlivé jinak, proto je celý pokus včetně výsledků velmi závislý na subjektu experimentátora. Kromě toho jsou rozlišovací schopnosti závislé také na denní době, aktuálním fyzickém i duševním stavu apod. Dále je třeba si uvědomit, že člověk nevnímá velikosti (a tedy ani rychlosti těles) absolutně, nýbrž relativně vzhledem ke vzdálenosti od sebe. Proto budeme nadále důsledně používat pojem úhlová velikost úsečky, jež budeme chápat jako velikost úhlu svíraného paprsky spojujícími naše oko a krajní body pozorované úsečky, a také zavedeme termín *úhlová rychlost* následujícím vztahem

$$\nu = \frac{v}{d}, \quad (42)$$

kde v je skutečná rychlost objektu ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem a d je vzdálenost mezi ním a pozorovatelem. Pozorný čtenář si jistě všimne, že stejným způsobem je definována úhlová rychlost rovnoměrného pohybu po kružnici; je tedy na místě dovysvětlit, že zmiňovaný zlomek má velmi malou hodnotu²². V zadaném experimentu jde totiž o změření nejmenší takové rychlosti, kterou je člověk schopen zjistit, a proto si uvedenou aproximaci přímočarého pohybu na kruhový můžeme dovolit.

Nyní, majíce slovníček pojmů, jsme připraveni na teoretické výpočty. Literatura obvykle uvádí, že minimální úhel, pod kterým je člověk s to rozlišit dva objekty, je $\varphi_0 = 60'' = \pi/10\,800$. (Například pozorujte tečku za touto větou z různých vzdáleností.) Je však třeba podotknout, že tato hodnota se týká dvou ve stejnou dobu existujících bodů, nikoliv jednoho se pohybujícího. Nicméně můžeme předpokládat, že v první moment si zapamatujeme polohu objektu a na pět

²²⁾ Poznamenejme, že $\text{tg } \alpha \approx \alpha$ platí pro malé hodnoty α .

sekund (dle zadání) zavřeme oči. Jestliže se úhlová vzdálenost mezi polohami před zavřením a po otevření očí bude lišit alespoň o φ_0 , pozorujeme pohyb (či v tomto případě spíše jeho „diskrétní model“). Není těžké vypočítat, že úhlová rychlost pozorovaného tělesa musí být alespoň

$$\nu_0 = \frac{\varphi_0}{5} \text{ s}^{-1} = \frac{\pi}{54\,000} \text{ s}^{-1} \approx 5,82 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

A to je poměrně málo, o čemž se ostatně můžeme přesvědčit dosazením do vztahu (42). Berme proto tuto hodnotu jen jako jakýsi dolní odhad. Pro pozorování skutečného (spojitého) pohybu je navíc dobré mít vhodné referenční pozadí. Jistě ze zkušenosti víme, že je mnohem náročnější všimnout si pohybu modrého čtverečku 1×1 cm nad bílým papírem než téhož nad papírem milimetrovým, kde máme dostatečně hustou souřadnicovou síť.

Příprava a provedení experimentu

Vzhledem k vzorci (42) uvažme následující běžné pohyby jako vhodné pro naše měření: pohyb hvězd a planet po obloze, jízda vlakem a sledování vzdálených domů (na lokálce i blízkých; viz úloha I.1), plazení hlemýždě, plynulé otáčení ručiček hodin apod. Kromě těchto si můžeme sami nějaký „pomalý“ (ve smyslu malé úhlové rychlosti) pohyb vytvořit. Tuto funkci splní i obyčejný program simulující pohyb na monitoru počítače. Nastavíme tedy vhodnou rychlost pohybu ($0,29 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$) nějakého výrazného obrazce a zbytek plochy necháme jednobarevný. Budeme se postupně přibližovat k monitoru, dokud v průběhu časového intervalu 5 sekund nepozorujeme pohyb. Optimálně provedeme několik měření s různými lidmi.

Tabulka výsledků měření

číslo měření i	vzdálenost d_i [m]	chyba $d_i - \bar{d}$ [m]	kvadrát chyby $(d_i - \bar{d})^2$ [m ²]
1	3,87	− 0,03	0,00
2	3,79	− 0,11	0,01
3	3,92	0,03	0,00
4	4,05	0,16	0,02
5	3,90	0,01	0,00
6	3,85	− 0,05	0,00
7	3,67	− 0,23	0,05
8	3,88	− 0,02	0,00
9	4,11	0,22	0,05
10	3,91	0,02	0,00
$\bar{d} =$	3,90	$\sum_i (d_i - \bar{d})^2 =$	0,14

Z osobní zkušenosti s tímto měřením musíme ovšem přiznat, že je velmi těžké zaměřit se pouze na pohybující se objekt a nesledovat „nehybné“ okolí. Navíc je úloha zatížena poměrně značnou a těžko odhadnutelnou chybou, která je způsobena velmi subjektivní metodou detekce pohybu. Z těchto důvodů je nutné brát

následující výsledky s rezervou a stejně tak i statistické odchylky, kterých jsme se dopočítali.

Pro naměřené hodnoty vychází směrodatná odchylka přibližně $\sigma = 0,05$ m. Maximální vzdálenost, ze které jsme ještě byli schopni rozeznat pohybující se čtveřec během doby 5 sekund, pak je $(3,9 \pm 0,1)$ m. Odtud již snadno vypočítáme úhlovou rychlost pomocí vzorce (42)

$$\nu = \frac{0,29}{3900 \pm 100} \text{ s}^{-1} \approx (7,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

což je jen nepatrně víc oproti úhlové rychlosti rotace Země ($7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$). A skutečně, při sledování západu naší životadárné hvězdy v blízkosti rovníku se ve dnech rovnodennosti každý může přesvědčit, jak Slunce doslova „mizí“ před očima. Dále je patrné, že náš teoretický dolní odhad nebyl až tak špatný, jak se na první pohled mohlo zdát.

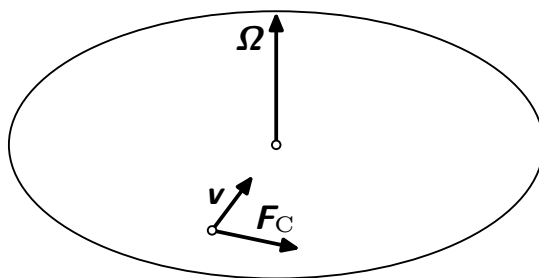
Úloha II. E ... bubo bubo

Experimentálně prověřte tvrzení, že vinnou rotace Země se na severní (jižní) polokouli vír vody vypouštěné otvorem otáčí doprava (doleva). Mají-li mít vaše závěry váhu, musíte provést dostatečný počet měření v různých podmínkách.

Teorie

Hned na začátku opravme zadání úlohy, které je špatně. Kvůli rotaci Země by se měl vír otáčet *doleva* na severní polokouli, tj. ve směru rotace Země! Proč tomu tak je? Nejdříve se podívejme, co by se s vodou dělo, kdyby nebyla rotace Země. Tehdy je to jednoduché – voda ze všech stran v blízkosti otvoru prostě směřuje do otvoru a propadá jím dolů. Protože žádný směr otáčení není lepší než ten opačný, voda by měla bez vírů prostě propadnout otvorem. Naproti tomu často vír při vytékání vidíme. Co když stačí jenom malý nepostřehnutelný vír, který rozhodne směr, a voda už si vyvine mohutnější vír v tomto směru? Při pozorování takového víru se často zdá, jako by se vír roztočil a získal na síle. Ale není to tak. Faktem je, že celkový moment hybnosti vody v nádobě musí *klesat* (třením o povrch nádoby a vytékáním rotující vody), a tak se malý vír utlumí dříve, než voda stihne vytéct. Proto není možné, aby z libovolně malého víru vznikl velký – voda nemá odkud získat moment hybnosti. Pokud ve vodě vidíme vír, už na začátku musel ve vodě být. Zdánlivé zesílení víru je způsobeno poklesem a přiblížením vody ke středu nádoby (efekt krasobruslařky).

Jak do hry vstoupí rotace Země? Pro zjednodušení si představme, že na severním pólu máme mísu s vodou a otvorem a my ji pozorujeme shora z inerciální



Obr. 26. Coriolisova síla

soustavy, která se neotáčí. Pokud je otvor uzavřen, voda je klidná a rotuje spolu se Zemí doleva rychlostí jedna otočka za 24 hodin. Když teď otevřeme otvor, voda začne vytékat dolů. Přitom voda proudí také směrem od obvodu ke středu nádoby a dochází k efektu krasobruslařky – rychlost proudící vody se zvyšuje, a voda tedy předbíhá normálně rotující vodu. Na Zemi se zdá, že se voda odklání od původního směru doprava, a tedy celý vír se otáčí *doleva* (viz obr. 27).

Z hlediska pozorovatele na Zemi vysvětlíme jev tak, že Země rotuje úhlovou rychlostí²³ Ω a na každé těleso, které se vzhledem k ní pohybuje rychlostí \mathbf{v} , působí v soustavě Země *Coriolisova síla*

$$\mathbf{F}_C = -2m\Omega \times \mathbf{v},$$

která ho odklání na severní polokouli doprava; vzhledem ke středu víru má tato síla moment roztáčející vodu proti směru hodinových ručiček, tj. *doleva*.

Zemská rotace má tendenci stáčet vír doleva, otázkou však je, zda je tato tendence dostatečně silná. Abychom získali aspoň nějakou představu o velikosti tohoto vlivu, odhadněme úhlovou rychlost, na jakou by Coriolisova síla roztočila vodu ve válcové míse poloměru R , výšky H a s otvorem poloměru a . Použijeme druhou impulsovou větu: časový účinek momentu Coriolisovy síly se rovná změně momentu hybnosti kapaliny. Z takové mísy bude voda vytékat rychlostí (Torricelliho vzorec)

$$v_{\downarrow} \sim \sqrt{Hg}$$

po dobu

$$t \sim \frac{V}{v_{\downarrow}S} \sim \frac{HR^2}{\sqrt{Hga^2}} \sim \frac{R^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

Během vytékání na vodu působí celkový moment Coriolisovy síly, který odhadneme jako

$$M_C \sim F_C R \sim mv_t \Omega R,$$

kde m je hmotnost vody a v_t typická dostředivá rychlost vody; na začátku je voda ve vzdálenosti R , na konci je všechna voda ve středu, tudíž platí

$$v_t \sim \frac{R}{t}.$$

Potřebujeme ještě určit změnu momentu hybnosti – ať se na konci vytékání kapalina na okraji nádoby otáčí úhlovou rychlostí ω – pak je moment hybnosti kapaliny

$$L \sim mR^2\omega.$$

Tyto odhady jsou jenom řádové, protože nedokážeme přesně vypočítat, kde má kapalina jakou rychlost. Postačí ale pro řádový odhad úhlové rychlosti, kterou získá voda²⁴.

²³⁾ V dalším textu budeme pracovat s úhlovou rychlostí jako se skalárem, a proto ji budeme značit pouze $\Omega = |\Omega|$.

²⁴⁾ Čtenář si může zkusit udělat přesnější model vytékání a pohybu kapaliny v nádobě a porovnat získané výsledky. Měli by vyjít řádově stejně bez ohledu na zvolený model – to je pěkné na řádových odhadech a rozměrové analýze.

Nyní použijeme druhou impulsovou větu a postupně dosadíme předchozí výsledky

$$\begin{aligned} M_C t &\sim L, \\ m \frac{R}{t} \Omega R t &\sim m R^2 \omega, \\ \omega &\sim \Omega. \end{aligned}$$

Dostáváme zajímavý výsledek, že Coriolisova síla dokáže roztočit vodu nanejvýš na úhlovou rychlost Země! Jde ale samozřejmě jen o řádový odhad. Aby bylo možné vír pozorovat, musí se voda otočit o nějaký znatelný úhel, např. 2π ; k tomu je zapotřebí čas

$$t = \frac{2\pi}{\Omega} = T.$$

Tedy zhruba jeden den. To je ohromně mnoho času pro náš vír v misce, ale ne až tak moc pro 100km vír vzduchu v atmosféře. Proto můžeme vidět na družicových snímcích víry roztočené Coriolisovou silou (a taky ty ostatní) – než vzduchové masy projdou k centru tlakové níže, uplyne hodně času a síla má čas působit. Abychom mohli pozorovat stočení víru i v naší misce, potřebujeme tedy prodloužit čas vytékání t – a to jedině zvětšením rozměrů naší misky. Pro námi uvažovanou válcovitou misku platí

$$T \sim \frac{R^2}{a^2} \sqrt{\frac{H}{g}}.$$

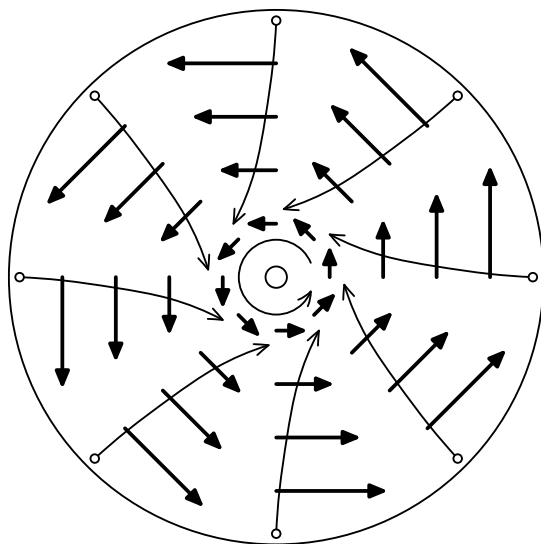
Pokud budeme chtít misku s proporcemi $H = R = 100a$, pak by její poloměr měl být

$$R \sim \frac{gT^2}{100^4} \sim 1 \text{ km.}$$

Ale to už berme s velkou rezervou.

Provedení experimentu

Každou teorii je třeba prověřit v praxi – experiment jsme dělali v koupelně s malou mističkou, lívkem a rotačním paraboloidem (zrcátko ze svítilny). Výtokový otvor jsme uzavírali a otevírali kouskem plastelíny. Na hladinu vody jsme nasypali trochu mouky na zviditelnění jejího pohybu, pak jsme ji nechali uklidnit a otevřeli otvor. *Ve všech případech* voda opakovaně vytekla bez jakékoliv rotace. Malé víry, které v ní třeba i zůstaly po nalití vody, byly nemilosrdně utlumeny viskozitou vody. Zkoušeli jsme také vodu roztočit v obou směrech a sledovat, jestli se bude točit v daném směru, nebo dojde k otočení do „správného“ směru. Voda si ale dostatečně silné



Obr. 27. Stáčení vodního víru

roztočení bez problémů udrží, žádné otočení víru se nekoná. To je jasné potvrzení našich pochybností – rotace Země má vskutku zanedbatelně malý vliv na směr víru. Na směr výsledného víru má vliv kdeco, třeba i způsob, jakým vytáhneme špunt, zbytkové víry, tvar nádoby, ...

Úloha III.E ... zkoumáme pohyb Slunce

Změřte co nejpřesněji výšku Slunce nad obzorem v pravé poledne a dobu od východu středu slunečního disku do jeho západu. Odvážlivci se mohou pokusit vypočítat teoretickou délku dne a hodnoty srovnat a okomentovat případný nesoulad.

Experimentální úloha se zabývá zdánlivým pohybem Slunce po obloze. Zkusme se nejprve zamyslet, jak by se teoreticky mělo Slunce pohybovat, a pak vypočítat časy jeho východu a západu. Budeme k tomu potřebovat zadefinovat několik základních astronomických pojmů.

Teorie

Ekvatoreální souřadnice jsou polární souřadný systém na nebeské sféře (podobně jako zeměpisná šířka a délka na zemském povrchu) tvořený souřadnicemi rektascenze α a deklinace δ . Množina bodů s nulovou deklinací tvoří tzv. nebeský rovník, což je v podstatě průmět zemského rovníku na nekonečně vzdálenou nebeskou sféru se středem v centru Země. Rektascenzi měříme podél nebeského rovníku proti směru otáčení Země od tzv. jarního bodu. Udáváme ji buď ve stupních, nebo v hodinách a minutách od 0 do 24 hodin. Deklinace je úhlová vzdálenost bodu na nebeské sféře od nebeského rovníku, měřená směrem k severnímu světovému pólu kladně a na jih záporně.

Ekliptika je velká kružnice na nebeské sféře tvořená množinou bodů do kterých se může v průběhu roku zdánlivě promítat Slunce v důsledku oběhu Země kolem Slunce. Jarní bod je jeden z průsečíků ekliptiky a nebeského rovníku. Slunce se promítá do jarního bodu každý rok na pravé poledne světového času v den jarní rovnodennosti. Podobně jako ekvatoreální souřadnice můžeme zavést i *ekliptikální souřadnice*: ekliptikální šířku a délku λ . Sklon roviny světového rovníku k rovině ekliptiky budeme značit ε .

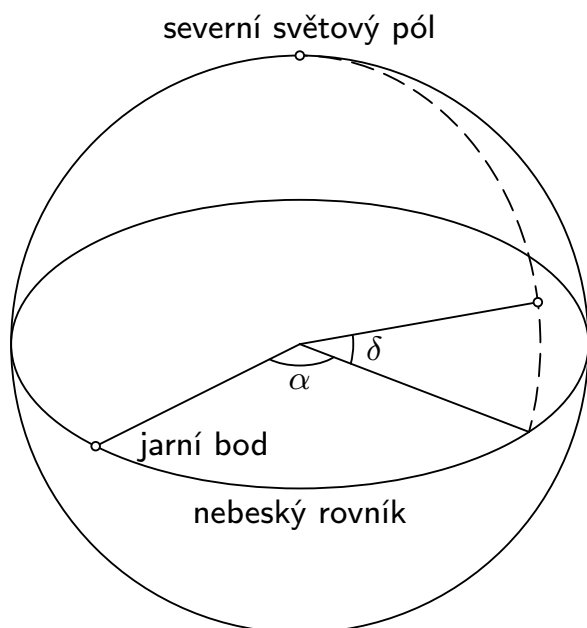
Místní hvězdný čas t_s je v podstatě rektascenze bodu daného průsečíkem průmětu místního poledníku na nebeskou sféru a nebeského rovníku měřená v hodinách a minutách. Můžeme jej vypočítat jako

$$t_s = \left(24 \cdot \frac{\text{čas uplynulý od 12:00 UT poslední jarní rovnodennosti}}{\text{doba otočení Země}} + \frac{\text{zeměpisná délka}}{15^\circ} \right) \text{ hodin.}$$

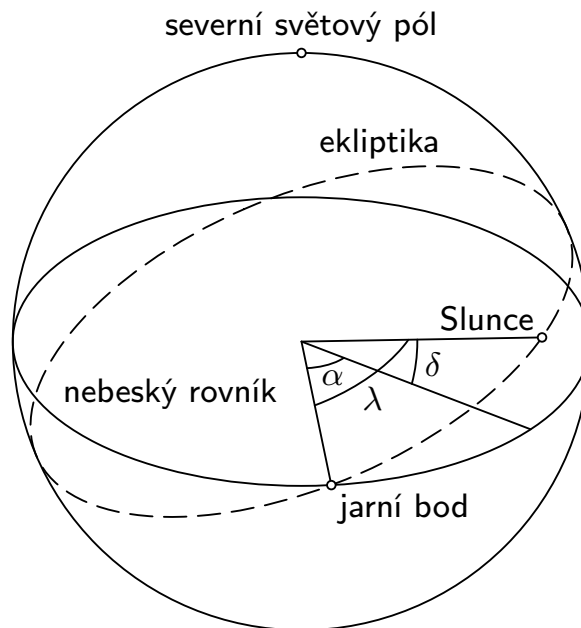
Rozdíl rektascenze nějakého bodu na nebeské sféře a místního hvězdného času

$$\vartheta = t_s - \alpha$$

se nazývá *hodinový úhel* toho bodu.



Obr. 28. Ekvatoreální souřadnice



Obr. 29. Ekliptikální souřadnice

Nakonec *azimutální souřadnice* jsou také polární souřadnice na nebeské sféře, které jsou však vztaheny na konkrétního pozorovatele, resp. pozorovací stanoviště. Azimut A se určuje podobně jako v zeměpisu, avšak směru s azimutem $A = 0^\circ$ odpovídá směr na jih (oproti zeměpisnému směru na sever). Druhou souřadnicí je pak výška nad místním matematickým horizontem h (horizont je přesně vodorovným směrem).

Na zdánlivý pohyb Slunce po obloze mají vliv především rotace Země kolem své osy jednou za 23 hodin 56 minut a 4,09 vteřiny a oběh Země kolem Slunce jednou za rok (365,2524 stř. slunečního dne).

Za jedno otočení Země kolem své osy se Země zároveň posune asi o $1/365$ své cesty po oběžné dráze stejným směrem, jako se sama točí, takže na obloze Slunce uteče přibližně o 1° . Země se proto musí mezi dvěma východy Slunce (anebo dvěma přechody místním poledníkem na pravé poledne) otočit asi o 361° a *sluneční den* tak trvá právě 24 hodin.

Země obíhá kolem Slunce po elipse s těžištěm soustavy v jejím ohnisku. Rychlost oběhu se v průběhu roku mění – čím blíže ke Slunci, tím rychlejší je oběh. Průměrnou úhlovou rychlost oběhu vypočítáme snadno jako $\omega = 360^\circ/\text{rok}$.

A dále můžeme vypočítat jakýsi přibližný směr ke Slunci, neboli jakousi jeho střední polohu na ekliptice (ekliptikální délku středního Slunce), ze vztahu

$$\lambda_s = \omega T_r + \lambda_0,$$

kde T_r je čas od posledního průchodu Země periheliem a λ_0 jeho ekliptikální délka v tomto čase (Země v periheliu 3. ledna řekněme o půlnoci, $\lambda_0 = 281,92^\circ$). Díky

nerovnoměrnému oběhu Země kolem Slunce skutečné Slunce na obloze střední Slunce někdy předbíhá a někdy za ním zaostává.

To má mimo jiné za následek také skutečnost, že pravé poledne nenastává přesně ve 12:00 místního středního slunečního času (pásmový čas s korekcí na zeměpisnou délku oproti poledníku, na kterém je pásmový čas počítaný). Rozdíl pravého slunečního času a středního slunečního času udává tzv. časová rovnice. Maximální časový rozdíl průchodu středního a skutečného Slunce rovinou místního poledníku je kolem 18 minut – to je také maximální chyba vhodně postavených slunečních hodin²⁵.

Střední a skutečné Slunce se setkávají v den jarní rovnodennosti o 12:00 UT ($\lambda = 0^\circ$). Vztah mezi ekliptikální délkou středního Slunce a skutečnou ekliptikální délkou λ je dán *Keplerovou rovnicí*

$$M = E - e \sin E,$$

kde $M = \lambda_s - \lambda_0 - \pi$ je tzv. střední anomálie, $E = \lambda - \lambda_0 - \pi$ tzv. pravá anomálie a e je excentricita zemské dráhy. Střední a pravá anomálie jsou směry od Slunce k tzv. střední Zemi (pohybující se rychlostí ω po kruhové dráze kolem Slunce) a skutečné Zemi.

Zajímavou vlastností této rovnice je, že ji nelze vyřešit analyticky. I přesto však existuje mnoho způsobů, jak najít E s dostatečnou přesností. Můžeme použít třeba iterativní metodu

$$E_0 = 0, \quad E_{i+1} = M + e \sin E_i.$$

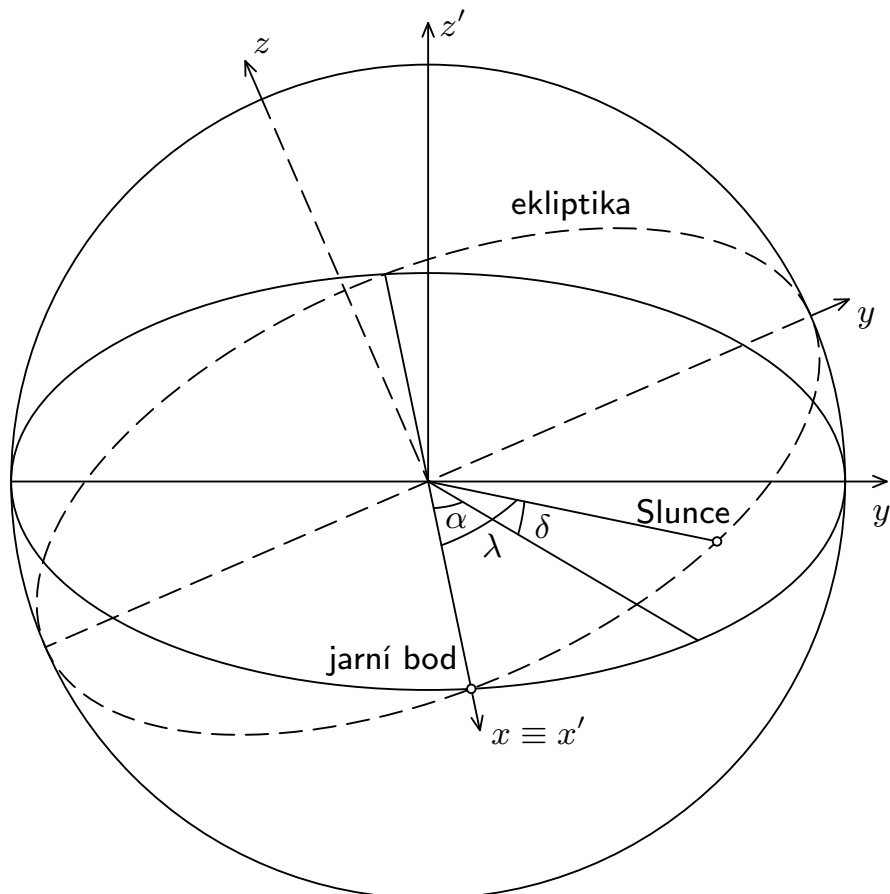
Pro $i = 10$ už dává tato metoda docela přesné výsledky (i přitom můžeme libovolně zvyšovat, dokud $E_{i-1} - E_i$ není menší než maximální požadovaná chyba).

S pomocí výše uvedených vztahů můžeme v každém okamžiku vypočítat souřadnice Slunce na nebeské sféře. Známe ekliptikální délku λ a ekliptikální šířka je vždy nulová. Zbytek výpočtu je už pouze o transformaci souřadnic z jedné souřadné soustavy do druhé. Nejdříve provedeme transformaci z ekliptikálních do ekvatoreálních souřadnic, pak vypočítáme místní hvězdný čas a hodinový úhel a nakonec dostaneme vztahy pro azimut a výšku Slunce pro místního pozorovatele. Známe-li, v jaké úhlové výšce h_o se nachází místní fyzický obzor v bodě, ve kterém Slunce vychází, resp. zapadá, můžeme z těchto vztahů zpětně vyjádřit časy východu a západu Slunce. Veličinu h_o už samozřejmě určíme měřením. Tím se vyhneme také všem zbytečným komplikacím se zakřivením Země, nadmořskou výškou atp. A můžeme také měřit třeba východ Slunce nad střechu sousedova domu o deváté ráno místo skutečného času.

Podrobně předvedeme pouze prvou transformaci souřadnic. Zbylé se provádějí zcela analogicky. Chceme transformovat úhly λ a 0° udávající směr na jiné dva

²⁵⁾ Z dob, kdy si mechanické hodiny mohli dovolit pouze bohatí profesori a chudí studenti byli odkázáni na sluneční hodiny na náměstí, pochází také společensky zavedená maximální doba čekání na schůzku známá též jako akademická čtvrt hodinka.

úhly α a δ . Všimneme si, že soustava ekvatoreálních souřadnic je oproti ekliptikálním souřadnicím pouze otočená o úhel ε kolem přímky dané spojnici jarního a podzimního bodu (druhý průsečík rovníku a ekliptiky).



Obr. 30. Pravá (E) a střední (M) anomálie

Ze směrů nejprve uděláme vektory v kartézském souřadném systému. Přidáme třetí souřadnici r a pro jednoduchost ji položíme rovnou 1. Vektor zadaný trojicí r , λ a ekliptikální šířkou v sobě obsahuje směr ke Slunci. Pak polární souřadnice převedeme na pravouhlé kartézské. Osa z bude směřovat od pozorovatele k severnímu pólu ekliptiky, z -ová složka vektoru tedy bude $r \sin \theta = 0$. Položíme-li osu x od pozorovatele směrem k jarnímu bodu a osu y kolmo na předchozí dvě, bude transformace zbylých souřadnic snadná: $x = \cos \lambda$ a $y = \sin \lambda$. Otočíme teď vektor daný kartézskými souřadnicemi x , y a z v rovině (y, z) o úhel ε

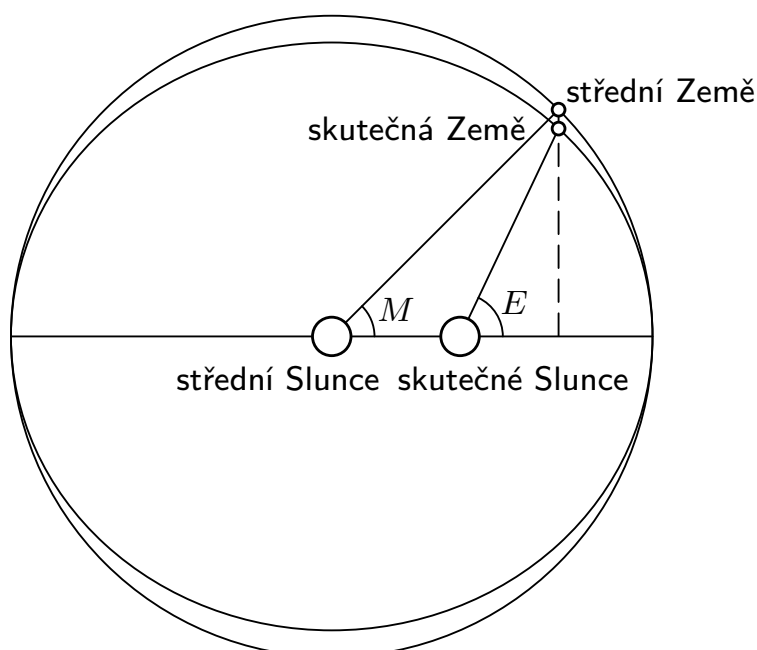
$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y \cos(-\varepsilon) - z \sin(-\varepsilon), \\ z' &= y \sin(-\varepsilon) + z \cos(-\varepsilon). \end{aligned}$$

Zbývá už jen převést vektor $[x', y', z']$ zpátky do polárních souřadnic

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y'}{x'},$$

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

Při konverzi z ekvatoreálních do azimutálních souřadnic budeme potřebovat znát hodinový úhel ϑ a zeměpisnou šířku φ pozorovacího stanoviště. Rovina nebeského rovníku je oproti rovině horizontu skloněná o $90^\circ - \varphi$ (anebo pro pozorovatele na některém zeměpisném pólu splývá rovina rovníku s horizontem). Otáčet budeme tentokrát kolem osy směřující od západního k východnímu bodu o zmíněný



Obr. 31. Konverze z ekvatoreálních do ekliptických souřadnic přes kartézské

úhel. Osa otáčení bude totožná s jednou z kartézských souřadnic. Zbylé dvě budou směřovat nejprve k světovému pólu a směrem s hodinovým úhlem 12 hodin v rovině rovníku a po otočení do zenitu a směrem k jižnímu bodu.

Po provedení výše zmíněných operací dostaneme následující vztah pro výšku Slunce nad obzorem

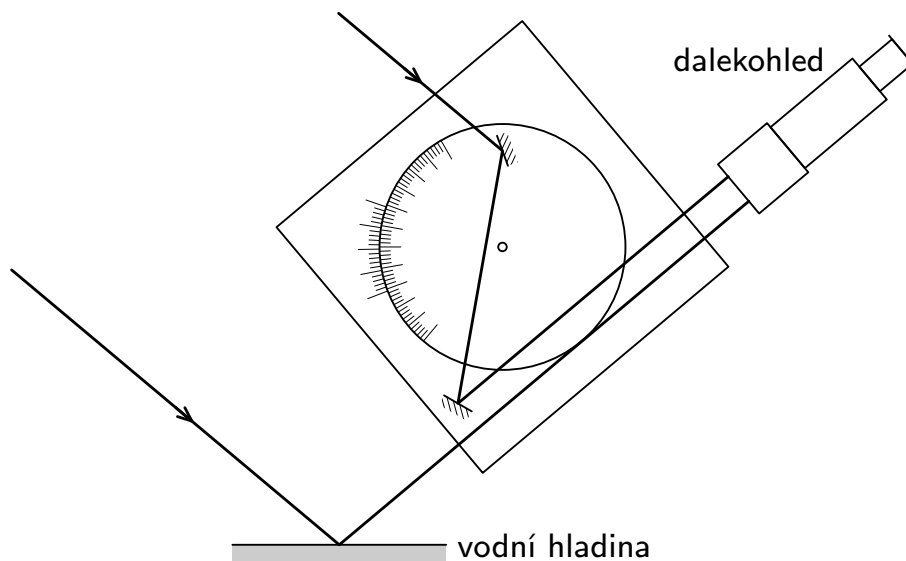
$$h = \operatorname{arctg} \frac{\cos \vartheta \sin(\varphi - 90^\circ) + \sin \delta \cos(\varphi - 90^\circ)}{\sqrt{\sin^2 \vartheta + (\cos \vartheta \cos(\varphi - 90^\circ) - \sin \delta \sin(\varphi - 90^\circ))^2}}.$$

Postup měření

S tímto teoretickým podkladem můžeme přejít k samotnému měření. Na měření výšky Slunce nad obzorem jsme ze dvou disků CD, jednoho obalu na CD, pár kapek vteřinového lepidla a malého binokuláru zhotovili jednoduchý přístroj známý už několik století všem námořníkům pod jménem *sextant*.

Popíšme stručně, jak jsme takové zařízení vyráběli. Ve vektorovém grafickém editoru jsme si nakreslili vlastní stupnici s poněkud realističtější rozlišením, namísto polopropustného zrcátka jsme použili pouze „zrcátko“ (vystřižené z druhého

CD) s poloviční šířkou a obě zrcátka byla přidělaná přímo k otočnému CD se stupnicí, resp. k obalu. Nejtěžší část byla nastavit zrcátka přesně paralelně tak, aby při výchylce stupnice 0° byl pohled dalekohledem umístěným vedle obalu rozdělený na dvě vzájemně neposunuté půlky (odraz v zrcátku a přímý pohled). Pohled do dalekohledu (s objektivovým slunečním filtrem samozřejmě) při správné výchylce na sextantu vypadal tak, že půlka Slunce byla vidět v zrcátku a druhá neposunutá půlka přímo.



Obr. 32. Měření výšky Slunce pomocí sextantu



Obr. 33. Konstrukce sextantu ze dvou CD

Normální použití sextantu počítá s využitím viditelné mořské hladiny. Moře v Praze bohužel není, takže jsme museli improvizovat. Vytvářeli jsme si klidnou vodní hladinu a pak jsme měřili úhlovou vzdálenost Slunce od jeho odrazu na ní. Výška nad obzorem byla polovina tohoto úhlu. Výchylku jsme mohli pak odečíst na stupnici s vernierem, kterou jsme si vytiskli na dobré laserové tiskárně

s přesností kolem $3'$. Skutečnou chybu měření odhadujeme asi na třetinu šířky slunečního disku, tj. asi na $10'$. Použití vodní hladiny jako reference vodorovného směru se příliš nehodilo pro měření výšky při východu, resp. západu Slunce. V těchto případech jsme proto měřili výšku Slunce přímo nad rovným horizontem.

Výsledky měření

Dne 8. 2. 2008 jsme z Kolejí 17. listopadu ($50^\circ 7'$ s.z.š, $14^\circ 26'$ v.z.d.) pozorovali východ Slunce nad místní horizont v 7:32 místního pásmového času a západ Slunce v 16:59. Pozorovaná délka dne tedy byla 9 h 27 m. Časy východu a západu Slunce vypočtené výše uvedeným postupem byly 7:26, resp. 17:07. Rozdíl teoretické a pozorované délky dne byl tudíž asi 14 minut, hlavně díky nerovnému horizontu. V čase, kdy jsme pozorovali východ Slunce, se už mělo nacházet ve výšce $h_o \doteq 0,9^\circ$. To nám dává první odhad na výšku východního horizontu.

Tento odhad pro tak malou výšku je však zkreslený. Chybu má na svědomí jev nazývaný atmosférická refrakce. Vypočtené hodnoty totiž nebraly v úvahu zemskou atmosféru. Světlo nebeských těles při své cestě k pozorovateli prochází vrstvou atmosféry s nenulovým a proměnným indexem lomu. Vrstva atmosféry je pro malé h velice tlustá, proto je i refrakce v této oblasti největší. Refrakci můžeme vypočítat např. pomocí tohoto přibližného empirického vzorce (dává výsledek v úhlových vteřinách)

$$R = \frac{1,02}{\operatorname{tg}\left(h + \frac{10,3}{h + 5,11}\right)} \cdot \frac{P}{1010 \text{ hPa}} \cdot \frac{283}{273 + T},$$

kde P je tlak, T teplota a h vypočtená výška nad obzorem. Objekt pak pozorujeme ve výšce o hodnotu R větší než vypočtená. V následující tabulce je orientačně uvedena hodnota refrakce pro různé pozorované h při normálních podmínkách.

h [$^\circ$]	0	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
R [$'$]	35	29	24	18	14	10	5	2,5	1,5	0,5

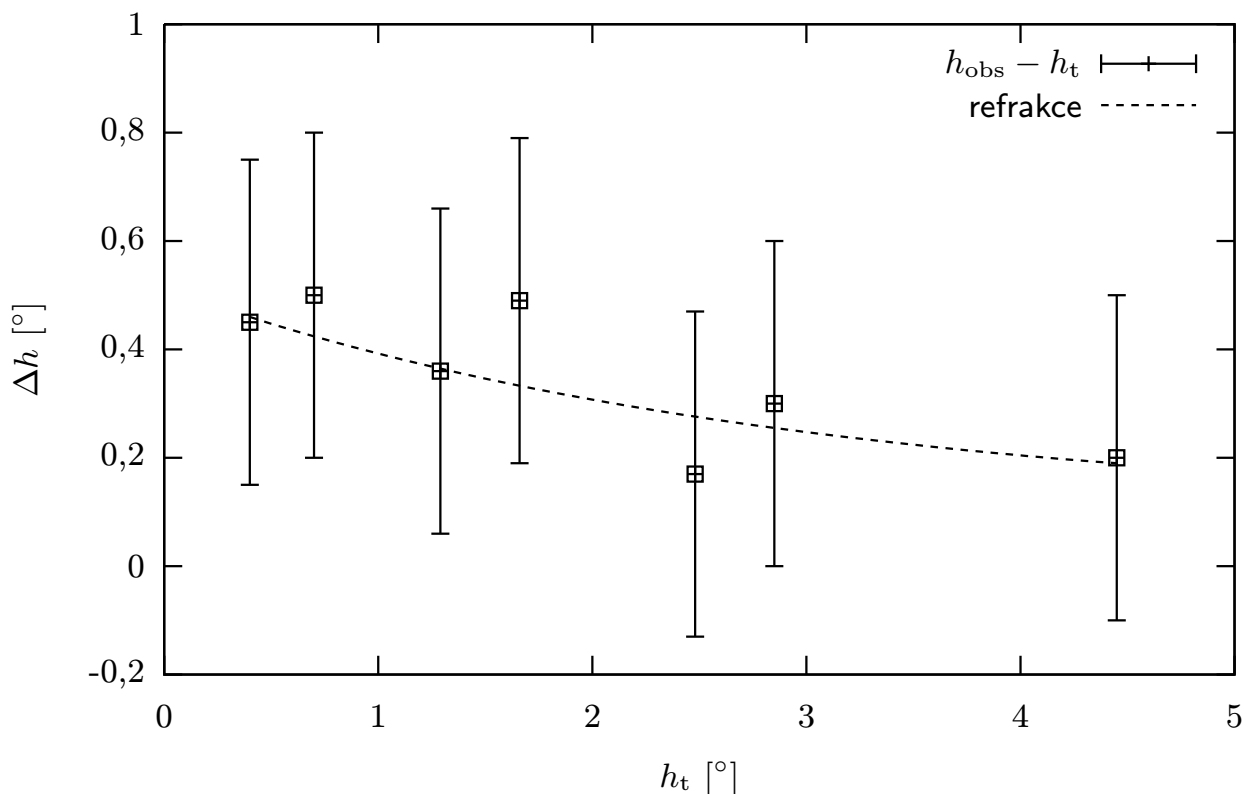
Průměr Slunce je asi $32'$. Jelikož velikost refrakce v nulové výšce nad obzorem je větší než tato hodnota, můžeme na velmi rovném horizontu pozorovat východ celého Slunce nad horizont dříve, než je jednoduše předpovězený čas. Sluneční den by takto měl trvat o pár minut déle. Jak je však vidět z pozorování, je tato odchylka prakticky zanedbatelná vůči ostatním vlivům.

Dne 15. 2. jsme ze stejného pozorovacího stanoviště provedli následující sérii měření výšky Slunce nad místním horizontem.

t	7:17	7:20	7:24	7:26	7:32	7:35	7:40	7:46
h [$^\circ$]	0	0,25	1	1,5	2	2,5	3	3,7

Použijeme-li první odhad výšky horizontu na určení skutečné výšky nad obzorem ($h_{\text{obs}} = h + h_o$) a porovnáme pozorovanou a vypočtenou výšku, najdeme závislost vynesenu v grafu 34.

Jelikož pozorované rozdíly jsou příliš malé v porovnání s chybou, nedají se z těchto pozorování vyvodit jednoznačné závěry. Avšak posloupnost hodnot dává tušit pokles rozdílu teoretické a pozorované výšky Slunce, který odpovídá průběhu refrakce.



Obr. 34. Porovnání rozdílu pozorované a vypočtené výšky Slunce s refrakcí

Měření výšky Slunce kolem poledne počasí v době psaní tohoto textu příliš nepřálo. Čas, kdy výška Slunce dosahuje maxima, teoreticky vypočítáme tak, že výšku $h(t)$ derivujeme podle času a položíme rovnou nule. Výšku Slunce nad obzorem ale můžeme jednodušeji určit podle přibližného vzorce

$$h_{\text{max}} = 90^\circ - \varphi + \delta, \quad (43)$$

kde δ je deklinace Slunce v daný den a φ zeměpisná šířka.

Uskutečnili jsme pouze jedno krátké měření dne 9. 2. 2008 ve 12:20. Vypočtený čas kulminace pro dané datum byl $t_{\text{max}} = 12:13$ SEČ. Naměřená výška $h = 25^\circ 20' \pm 10'$ byla ve výborné shodě s vypočtenou $h_t = 25^\circ 23'$. Refrakce ve výškách kolem 30° je už hluboko pod chybou měření a výška Slunce se kolem poledne mění velice pomalu, takže na těch pár minutách také nesešlo.

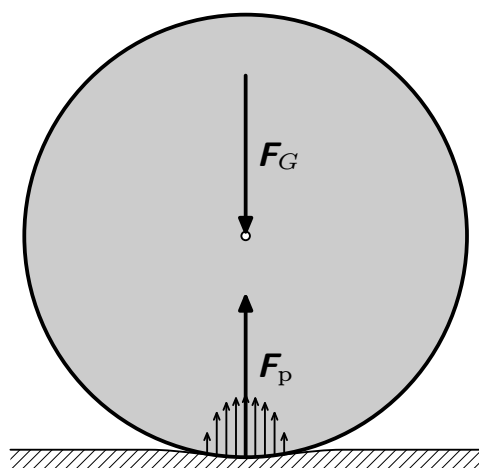
Úloha IV . E ... valivý odpor

Pečlivě experimentálně prověřte, zda valivý odpor válce závisí na jeho poloměru či nikoliv.

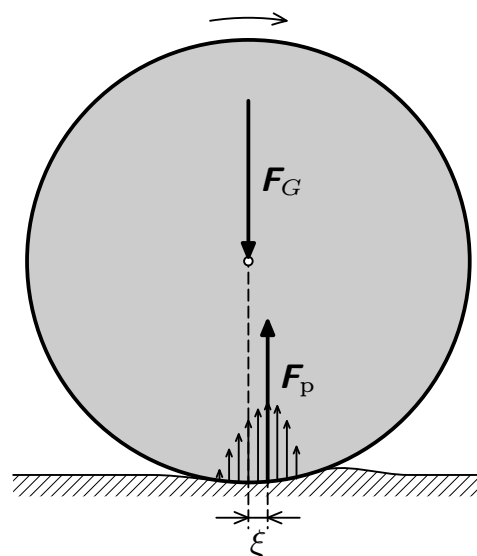
V následujícím vzorovém řešení se nebudeme pokoušet příliš o vlastní třesuté invence a raději shrneme a okomentujeme vaše nápady a přístupy k experimentální úloze.

Teorie

Když válec leží nehybně na vodorovné podložce, podložka i válec se trochu zdeformují a vznikne styčná plocha. Lze si představit, že na této ploše je nějakým způsobem rozložen tlak, kterým podložka působí na válec. Tento tlak se místo od místa mění, ale je rozložen symetricky a výsledná síla působící od podložky na válec je stejně velká a opačného směru než tíhová síla a míří do těžiště válce. Jedině v tom případě totiž jsou výslednice sil a momentů působící na válec nulové, a válec je tedy v klidu.



Obr. 35. Silové působení mezi podložkou a válcem v klidu



Obr. 36. Silové působení mezi podložkou a válcem v pohybu

Když se válec kutálí, tlak není ve styčné ploše rozložen symetricky a ani styčná plocha nemusí ležet přesně pod těžištěm válce. Jak válec na náběžné straně stlačuje podložku, rozložení tlaku se spíše posune ve směru pohybu a výsledná síla od podložky F_P již nemíří do těžiště válce, i když vektor F_P má stejnou velikost a směr jako tíhová síla F_G působící v těžišti. Vůči těžišti válce (tedy jeho středu) potom F_P působí momentem valivého odporu $M = \xi F_P$, kde ξ značí takzvané rameno valivého odporu. V literatuře se dočteme, že rameno valivého odporu ξ je dáno materiálem válce a podložky, nikoli však poloměrem válce. Často se valivý odpor vysvětluje také tak, že válec před sebou tlačí jakýsi hrbolek.

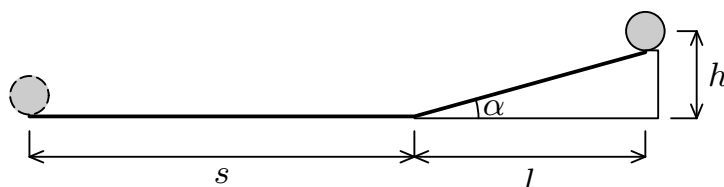
Moment M má na zpomalení valení stejné účinky, jako kdybychom působili silou $F_v = M/r$ ve středu válce proti směru pohybu. Jak vyplývá z předchozího výkladu, je síla valivého odporu F_v jistě závislá na tíze válce, a lze tedy psát

$$F_v = \mu(r)mg = \frac{\xi(r)}{r} mg. \quad (44)$$

Naším úkolem je nyní zjistit, zda a jak členy μ a ξ závisejí na poloměru válce.

Příprava a provedení měření

Budiž naší motivací pro vyřešení úkolu otázka, zda se vyplatí vlaky opatřit většími koly. Snažme se proto zajistit, aby zkoumané válce různých poloměrů měly shodnou hmotnost a podélný rozměr, hmotnost vlaku se také příliš nezmění, když bude mít trochu větší kola.



Obr. 37. Schéma experimentu

Pravděpodobně v domácích podmínkách nejsnáze a nejlépe proveditelný způsob měření, který také většina řešitelů použila, je následující.

Válec pouštíme z určité výšky h z nakloněné roviny. Válec na nakloněné rovině získá kinetickou energii a dále se valí již po vodorovné podložce pokryté nějakým měkkým materiálem. Vlivem valivého odporu se na vodorovné podložce v určité vzdálenosti zastaví. Potenciální energie válce se snížila o mgh a válec opět stojí, a tedy síla valivého odporu vykonala práci rovnou rozdílu potenciálních energií. Práce síly F_v tedy je

$$F_v s = mgh. \quad (45)$$

Nejlépe je měkkým materiálem pokrýt i nakloněnou rovinu. Vyhneme se tak přemýšlení nad tím, jak velký je valivý odpor pro materiál roviny a zda ho můžeme zanedbat. Jakou práci vykoná F_v při cestě válce po nakloněné rovině? Můžeme uvažovat i obecně zprohýbanou rozjezdovou dráhu. Předpokládejme, že síla $F_v = \mu N$, přičemž N je složka tíhové síly ve směru kolmém na podložku. Práce síly F_v na každém maličkém úseku dráhy dl je pak

$$dW = \mu mg \cos \alpha dl,$$

kde α je sklon elementu dráhy dl . Ovšem výraz $\cos \alpha dl$ je přesně roven průmětu úseku dráhy dl do vodorovné osy. Práce síly F_v vykonaná na rozjezdové dráze je tedy

$$W = \mu mgl,$$

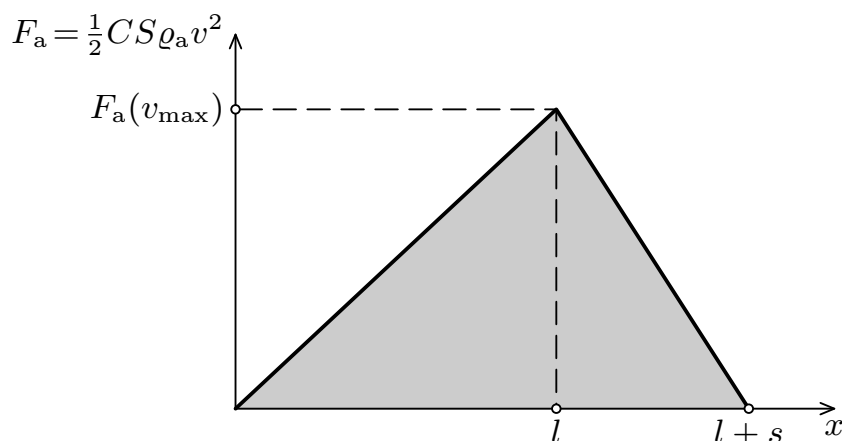
kde l je průmět rozjezdové dráhy do vodorovné roviny. Nedomýšleli jsme zvýšené přitlačení válce v důsledku odstředivé síly při zakřivení rozjezdové dráhy. Ale

v případě, že naše rozjezdová dráha má jen malý sklon a výšku a není moc divoká, nemusíme se předešlými úvahami vlastně vůbec zabírat a řekněme, že nám touto nejasností vznikne chyba maximálně 2 cm.

Můžeme zanedbat odpor vzduchu? Pro naše konkrétní uspořádání, jehož parametry jsou uvedeny dále, odpor změní výsledky o několik procent, a má tedy již cenu se jím zabývat a provést korekci na odpor vzduchu. Síla odporu vzduchu je přibližně dána

$$F_a = \frac{1}{2}CS\rho_a v^2,$$

kde $S = 2rb$ je průřez válce délky b , ρ_a hustota vzduchu, v rychlost válce a $C \approx 1$ je koeficient odporu vzduchu pro těleso tvaru válce. Kvadrát maximální rychlosti, kterou válec v ideálním případě dosáhne, je $v_{\max}^2 = 2gh/(1 + J/mr^2)$, kde J značí moment setrvačnosti válce.



Obr. 38. Závislost velikosti odporové síly vzduchu na ujeté vzdálenosti

Když válec zrychluje na rozjezdu, kvadrát rychlosti v podstatě lineárně roste s uraženou dráhou, a když válec naopak zpomaluje, v^2 lineárně klesá s uraženou dráhou. Práce vykonaná odporem vzduchu je rovna obsahu plochy pod křivkou závislosti F_a na poloze. Plocha pod touto křivkou je podle předešlé věty vlastně trojúhelník a práci W_a vykonanou odporem vzduchu na dráze $L = l + s$ lze odhadnout výrazem

$$W_a = \frac{1}{2}F_a(v_{\max})L.$$

Bohužel odpor vzduchu je ošemetná věc a kupříkladu koeficient C závisí na mnoha věcech, dále F_a působí ve skutečnosti na dráze $l/\cos\alpha + s$, a proto odhadujeme chybu určení W_a až na 30 %. Význam odporu vzduchu by bylo možno snížit zvýšením hmotnosti válců.

Můžeme si být jisti, že máme vodorovnou podlahu? Podlaha by neměla mít větší stoupání než 1 mm na metr, což je zhruba i sklon rozlišitelný lepší vodováhou. Přesto jsme radši provedli měření i pro opačný směr kutálení a měření vyšlo v podstatě stejně a sklonem podlahy se dále zabývat nebudeme.

Válec se tedy zastaví po uražení dráhy, která splňuje

$$mgh = F_v L + W_a = \left(\mu mg - \frac{F_a(v_{\max})}{2} \right) L.$$

Odtud

$$\mu = \frac{\xi}{r} = \frac{h}{L} - \frac{F_a(v_{\max})}{2mg}. \quad (46)$$

Pro vyhodnocení členu μ a ξ užijeme tento vztah.

Vidíme, že třeba ξ závisí na veličinách r , h , L atd., které mají však svoje vlastní chyby σ_r , σ_h, \dots . Jak na jejich základě rozumně odhadneme chybu ξ ? Dejme tomu, že bychom měli odhadnout chybu veličiny y , kterou vypočteme jako funkci $f(x_1, x_2)$ dvou jiných veličin, jejichž chyby jsou σ_{x_1} , σ_{x_2} . Potom kvadrát chyby veličiny y vypočteme

$$\sigma_y^2 = (f(x_1, x_2) - f(x_1 + \sigma_{x_1}, x_2))^2 + (f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2 + \sigma_{x_2}))^2.$$

Zcela stejně postupujeme, i když y závisí na větším počtu veličin, a to nám dává recept na odhad chyby ξ .

Rozjezdovou dráhu jsme zhotovili z mírně ohnutého plechu, aby přechod na vodorovné valení byl hladký. Rovněž startovní bod leží na prakticky vodorovném úseku rozjezdové dráhy, abychom se nemuseli bát, že těžiště různých velkých válců bude umístěno na počátku do různých výšek oproti konečné poloze těžiště.

Slepili jsme dvě stejné karimatky a celou dráhu válce jimi překryli. Karimatky je třeba dobře napnout a poté kupříkladu přitížit těžkými prkny. Jako válce jsme použili plastové vodovodní trubky různých průměrů. Kousky trubek délky $b = 10$ cm jsme doplnili betonem (přesněji směsí vody a cementu) tak, aby měly všechny válce hmotnost 80 g. Válce jsme vážili na kuchyňských vahách a jejich hmotnost se liší maximálně o 2 g. Při výpočtu odporu vzduchu potřebujeme znát hodnotu výrazu $J/m \cdot r^2$. Pro homogenní válec nabývá hodnoty 1/2, pro tenkostěnnou trubku téměř hodnoty 1. Naše válce jsou tvořeny trubkou a homogenním válečkem z betonu a moment setrvačnosti celého válce je dán součtem momentů těchto dvou částí. Ze znalosti hmotnosti samotné trubky, samotného válečku z betonu, vnějšího a vnitřního průměru trubky moment J snadno vypočteme.

Výsledky měření

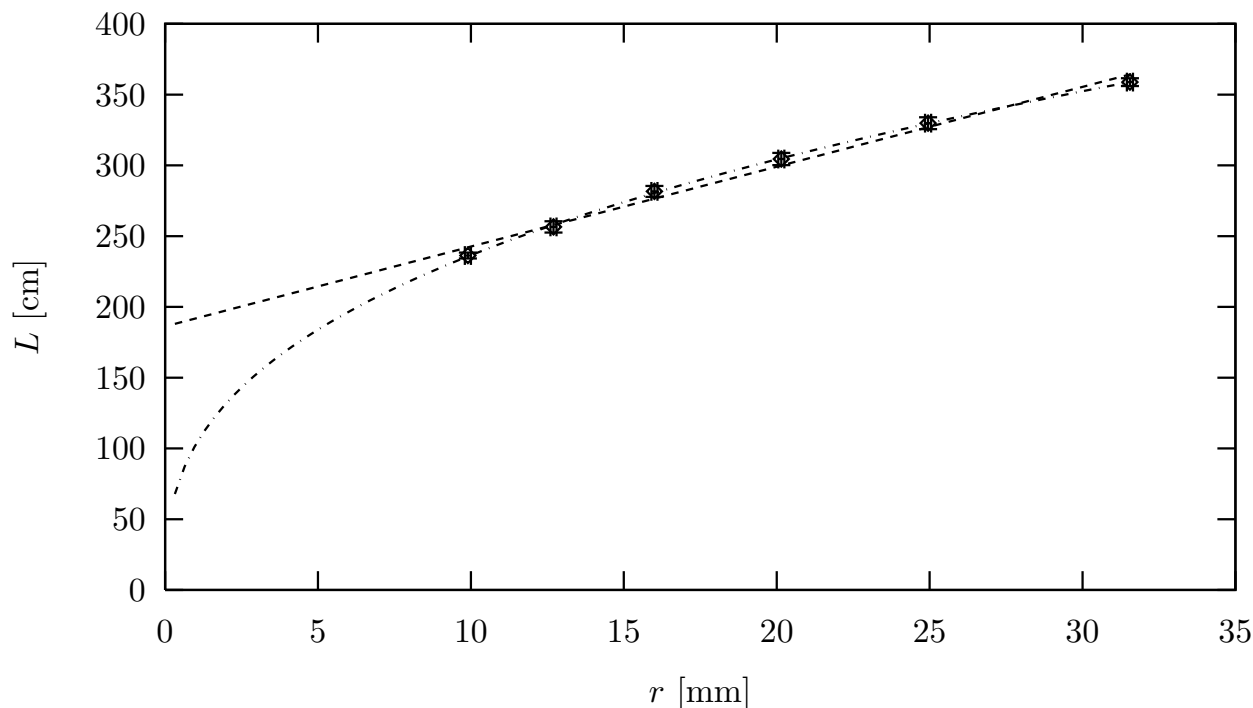
Valivý odpor jsme měřili celkem pro šest válců, každý válec jsme nechali valit desetkrát a pouštěli jsme je z výšky $h = (5,7 \pm 0,2)$ cm. Průměr válce jsme změřili posuvným měřidlem a chybu poloměru potom odhadujeme na 0,1 mm.

Pro přehlednost uvádíme jen průměrnou délku uražené dráhy L a její směrodatnou odchylku σ_L . Z uražené dráhy vypočteme dle (46) hodnotu koeficientu μ a rameno valivého odporu ξ .

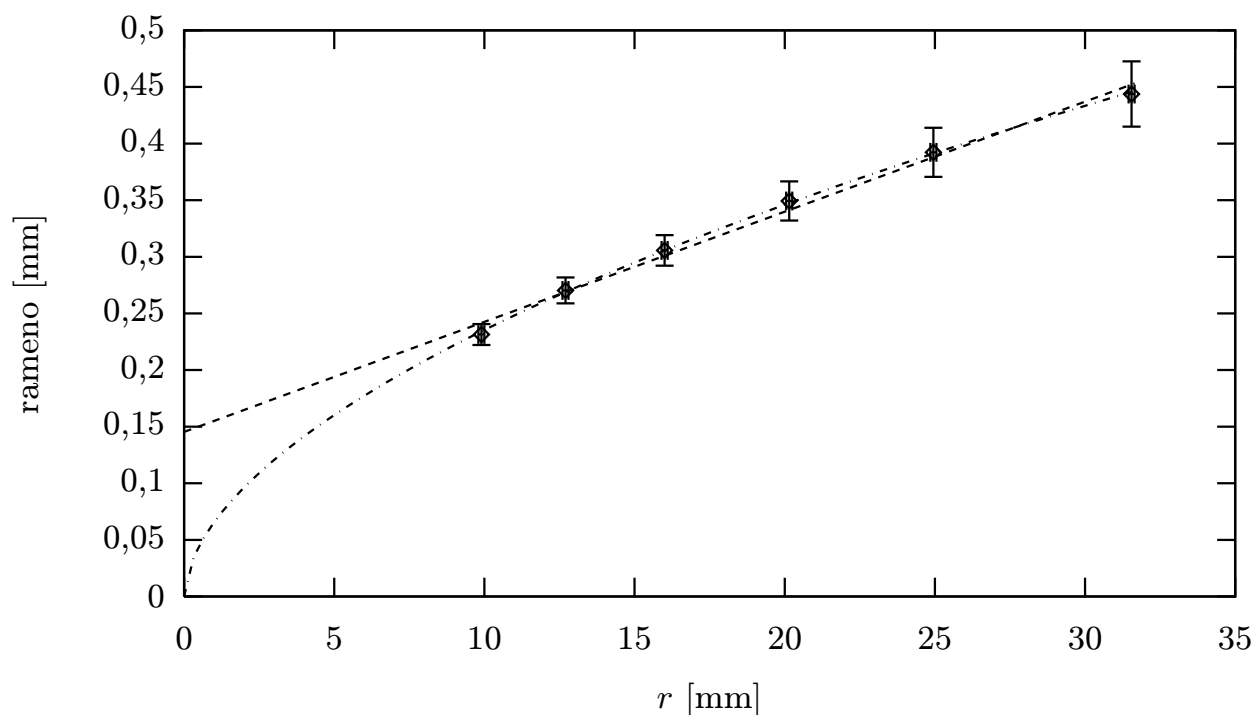
Tabulka výsledků měření

r [mm]	\bar{L} [cm]	σ_L [cm]	$\mu \cdot 10^2$	$\sigma_\mu \cdot 10^2$	ξ [mm]	σ_ξ [mm]
9,9	236	2	2,34	0,09	0,23	0,01
12,7	256	3	2,13	0,09	0,27	0,01
16,0	281	3	1,91	0,08	0,31	0,01
20,1	304	4	1,73	0,08	0,35	0,02
24,9	329	4	1,57	0,08	0,39	0,02
31,6	358	2	1,41	0,08	0,44	0,03

Pokud nás nezajímá ani tolik přesná hodnota μ či ξ jako spíše, zda se tyto hodnoty mění při změně poloměru válce, pak pro tento účel můžeme při počítání chyby vynechat vliv nepřesnosti h , protože se h pro jednotlivá měření vůbec neliší a nepřesnosti pak budou menší než uvedené.



Obr. 39. Závislost ujeté dráhy na poloměru válce



Obr. 40. Závislost ramena valivého odporu na poloměru válce

Větší válce se dokutálejí dál a μ s poloměrem klesá. Ovšem z naměřených hodnot je zřejmé, že rameno valivého odporu ξ v našem případě s poloměrem

r roste. Větší válce se nedokutálejí tak daleko, jak bychom podle teoretického předpokladu čekali.

V grafech je vynesena závislost ξ na poloměru válce r a závislost uražené dráhy L na r . Vidíme, že hodnotami ξ lze proložit přímku. Můžeme se ale pokusit hodnoty proložit jinou závislostí. Je rozumné, aby tato závislost šla k nule, když poloměr jde k nule, a aby rameno valivého odporu nebylo nikdy větší než poloměr válce. Naopak pro velká r očekáváme, že ξ bude v podstatě konstantní v souladu s teoretickým předpokladem. Potom naměřené hodnoty lze proložit nějakou konkávní křivkou, jak jsme se o to pokusili v grafu. Tato proložená závislost ale možná dává pro malé r až příliš malé hodnoty ξ .

Závěr

Domníváme se, že zjištěná nekonstantnost ramena valivého odporu ξ při změně r je dána nevyzpytatelností povrchu karimatky a podobných měkkých povrchů. Rameno ξ v našem případě pro větší válce vychází zhruba půl milimetru. V technicky významném případě valení železného kola po železe je ξ asi desetkrát menší a v případě kuličky v kuličkovém ložisku až stokrát menší. Je pravděpodobné, že pro velké poloměry válců, kdy již bude velikost deformace karimatky malá vůči r , bude ξ skutečně přibližně konstantní. Oproti teoretickým předpokladům navíc můžeme zjistit, že rameno ξ závisí třeba i na hmotnosti válce.

Abychom však mohli dělat významnější závěry, bylo by třeba měření provést na mnoha různých površích.

Další měření

Pokoušeli jsme se také změřit valivý odpor trochu jiným způsobem. Měřili jsme rozdíl doby, za kterou válec urazí 1 m po nakloněné rovině, když se v jednom případě valí po tabulce skla a v druhém případě po tabulce skla překryté karimatkou. (Nebo lze měřit jen dobu valení po nakloněné karimatce a ze znalosti sklonu poté vyhodnotit valivý odpor.) Měření byla ovšem zatížena příliš velkou chybou a touto metodou jsme nezískali žádné rozumné výsledky. (Rozmyslete si, v čem tento způsob může být horší než předešlý.)

Aby však naše snaha nevyšla úplně naprázdno, popišme aspoň, jak je možné si amatérsky sestrojít stopky, které automaticky změří dobu, za kterou válec ujede určitou vzdálenost.

Potřebujeme počítač s paralelním portem a operačním systémem Microsoft Windows 98 a starší nebo MS-DOS. (Linuxáři jistě vědí, jak něco podobného provést na Linuxu.) Potom si pořídíme Turbo Pascal a koupíme si samčí konektor k paralelnímu portu.

Paralelní port s 25 kolíky má pět vstupních kolíků. Na vstupní kolíky, jejichž čísla jsou 10, 11, 12, 13 a 15, lze přiložit logickou nulu nebo logickou jedničku a tuto hodnotu potom počítačem přečíst. Logická nula je napětí menší než cca 2 V oproti zemi a logická jednička napětí větší než cca 3 V oproti zemi. Na portu je zároveň několik kolíků značených GND s čísly 18 až 25, které jsou propojeny rovnou se zemí, a na těchto kolících je tedy vždy z definice 0 V.

Napětí na vstupních kolících je možno přečíst a uložit do proměnné příkazem `vstup := port[$379]`. V proměnné `vstup` najdeme číslo v rozmezí 0 až 255. Toto číslo je dekadickým zápisem osmibitového binárního čísla. Binární číslo složené z nul a jedniček říká, že na určitých kolících byla v momentě čtení logická jednička a jinde logická nula. Číslo \$379 je adresa portu a dolar říká, že to je číslo v hexadecimálním tvaru. Adresa může být pro různé počítače různá, ale obvykle paralelnímu portu patří adresa \$378 a několik následujících. V případě našeho počítače je při spuštění přečtená hodnota portu explicitně 255, tedy jakoby všechny kolíky byly připojeny ke kladnému napětí. Když tedy kolík připojíme na nulové napětí, lze tuto změnu zaznamenat.

Nyní si vyrobíme stykač z dvou plátek alobalu. Připájíme drát k některému ze vstupních kolíků paralelního portu (nepájíme samozřejmě přímo na port, ale na koncovku, kterou jsme si pořídili) a druhý drát ke kolíku GND. Izolepou připevníme každý drát k jednomu plátku alobalu. Nyní když váleček přejíždí stykač, plátky se dotknou a na přečteném portu zaznamenáme na určitém kolíku logickou nulu. Tím můžeme zahájit měření času, to znamená uložit si do proměnné aktuální čas, k čemuž slouží funkce `gettime`. Přechodem válce přes druhý stykač můžeme měření času ukončit, tzn. opět zjistíme aktuální čas, předešlý čas odečteme, a máme tudíž stopky.

Je potřeba si s tím maličko pohrát, ale při troše snahy to funguje a jsme schopni měřit s přesností na milisekundy.

Úloha V . E ... životní etapy Ramy

Bude mít Rama jiné fyzikální vlastnosti, poté co ji roztavíte a opět necháte ztuhnout? Doporučujeme měřit hustotu, viskozitu či barvu.

Rozpouštělo se všechno možné, většinou Rama, občas i máslo, Flóra, Perla, rostlinný tuk a na Slovensku došlo i na Veto. Určovali jste v první řadě změnu barvy, dále pak změnu hustoty, ti odváznější i změnu chuti a zápachu.

Teorie

Ramu můžeme rozpouštět v běžných kuchyňských nádobách, nejlépe však ve vodní lázni, abychom zůstali v mezích rozumných teplot. Po opětovném ztuhnutí přestane emulgátor působit a Rama se nám začne rozdělovat na dvě složky. Pokud bychom Ramu ohřívali ve vhodné nádobě, tak bychom obě složky od sebe rozdělili. Horní žlutá rychle tuhnoucí a pod ní naopak složka bílé barvy, která za běžné teploty netuhne.

K měření hustoty použijeme definičního vztahu

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Objem i hmotnost dokážeme měřit poměrně přesně i v podmínkách běžné domácnosti, pokud bychom však potřebovali pouze rychlé orientační porovnání s hustotou např. vody, můžeme dle Archimédova zákona porovnat ponořenou část Ramy s jejím celkovým objemem.

K měření barvy použijeme digitální fotoaparát. Abychom však mohli výsledky porovnávat, je nutné zaručit stálost osvětlení a zbavit se automatického vyvážení bílé. Na jakou hodnotu však bílou vyvážit? Pokud výstup neměříme absolutně, ale pouze relativně, nastavme ji tak, aby rozdíly vynikly a my je mohli porovnat. Vhodné je umístit si do záběru libovolný referenční barevně stálý objekt, který by měl mít na obou fotografiích stejnou barvu. Pokud se nám to vše povede, můžeme na počítači provést barevný rozklad. S výhodou použijeme tzv. HSV²⁶ model. Ještě podotkněme, že i měření subjektivní má svoji hodnotu a přímé porovnání může přinést své výsledky.

Ke změření viskozity lze s úspěchem použít Poiseuillovu rovnici pro průtok kapaliny kapilárou o poloměru r a délce l

$$Q_V = \frac{\pi r^4}{8\eta l} \Delta p,$$

kde Q_V je objemový průtok Ramy, neboli $Q_V = V/t$, Δp přetlak v kapiláře a η právě námi měřená viskozita. Nejlépe bychom měli provádět měření relativní. Mějme tedy kapalinu se známou viskozitou η_{ref} , pak

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{ref}}} = \frac{t}{t_{\text{ref}}} \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}},$$

kde t a t_{ref} jsou doby průtoku jistého objemu měřené a referenční kapaliny, ρ a ρ_{ref} pak hustoty kapalin, okamžitě můžeme použít předchozího měření.

Zápach, resp. chuť, měříme běžným přičichnutím, resp. ochutnáním. Pro lepší výsledky můžeme přizvat více pozorovatelů.

Výsledky měření

Použijme odměrného válce k měření hustoty a kuchyňských vah k určení hmotnosti jistého množství Ramy. K dispozici máme váhy s přesností ± 1 g. U válce máme rysky po 10 ml, jako chybu vezmeme půlku nejmenšího dílku, dostáváme se tak na ± 5 ml.

Po zvážení prvního kusu Ramy (103 ± 1) g o objemu (112 ± 5) ml vidíme, že relativní chyba hustoty je 5,4%. Hustota Ramy pak číselně vychází $\rho_0 = (920 \pm 50) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Změřením hodnot po opětovném ztuhnutí analogicky zjistíme, že $\rho_1 = (930 \pm 50) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Při dalších měření dojdeme ke stejným výsledkům. Můžeme tedy vysledovat jakési zvýšení hustoty, ale pouze v rámci chyby měření. Toto zvýšení lze připsat odpaření vody, která se z másla uvolní a má vyšší hustotu, nežli je průměrná hustota másla.

Zuzana Dočekalová měřila hustotu obou složek zvlášť, z jejich výsledků plyne nepatrně vyšší hustota žluté části v porovnání s Ramou v původním stavu a hustota bílé složky vyšší než hustota vody.

Při měření barvy uveďme jako výsledek pouze mírné ztmavnutí, které je pozorovatelné i lidským okem.

²⁶⁾ Hue – barevný tón, odstín. Saturation – sytost, množství šedi. Value – hodnota jasu, množství bílého světla.

Viskozita másla je běžně udávána mezi hodnotami 150 až 250 Pa·s; měřením viskozity Ramy po ztuhnutí zjistíme, že poklesla řádově na jednu desetinu.

Tepelnou úpravou dochází ke zvýraznění vůně Ramy. Chuťové vlastnosti se mění až při vyšších teplotách, dochází ke zhořknutí.

Závěr

Hustota přetavené Ramy ve vodní lázni je nepatrně vyšší, dojde však k oddělení dvou složek, každá o jiné hustotě. Přetavením dochází k drobnému ztmavnutí, výraznému snížení viskozity a také ke zvýraznění vůně. Chuťově se Rama mění až vlivem výrazně vyšších teplot.

Úloha VI.E ... magnetický zámek

Cela, ve které je pterodaktyl vězněn, je uzamčena pomocí magnetického zámku. Americké tajné služby vlastní prototyp tohoto zámku a kousek z jeho magnetu vám posíláme v obálce se sérií. K otevření zámku bez klíče je nutné znát, jak závisí síla mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Změřte co nejpřesněji tuto závislost!

Návod: Mezi oba magnety postupně vkládejte tenké listy papíru a měřte sílu nutnou na odtržení magnetků od sebe.

Teorie

Látka se skládá z atomů. Některé atomy mají nenulový celkový spin – moment hybnosti a tedy i magnetický moment. Můžeme si to představit tak, že elektron obíhající kolem jádra vytváří proudovou smyčku a ta má, jak známo, magnetický moment. Když se stane to, že všechny atomární magnetické momenty mají stejný směr (feromagnet), máme magnet. Každý magnetický dipól (proudová smyčka) kolem sebe vytváří magnetické pole, prostřednictvím kterého působí na okolní dipóly.

Skutečný magnet se sice skládá z malých atomárních dipólů, jako celek však dipólem není. Abychom byli schopni vyřknout alespoň nějakou teoretickou předpověď, jako nejjednodušší přiblížení předpokládejme, že magnet dipól je.

Jak se píše v učebnicích, magnetické pole dipólu klesá ve velkých vzdálenostech od něj jako $1/r^3$. Energie dipólu \mathbf{m} v poli \mathbf{B} je $-\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$, tudíž síla mezi dipóly klesá jako $1/r^4$. Na druhou stranu, pokud jsou dva magnety velice blízko, takže každá indukční čára vycházející z jednoho magnetu skončí ve druhém, je síla konstantní – nezávisí na vzdálenosti. Co bude platit v našem případě?

Vzdálenosti, na kterých budeme sílu mezi magnety měřit, budou srovnatelné s velikostí magnetů. Nemůžeme tedy mluvit o tom, že bychom byli v režimu velké vzdálenosti, kdy platí $F \sim 1/r^4$. Naopak síla není ani konstantní, neb měříme její pokles, dokud udrží dva magnety u sebe.

Zdá se, že jsme ve svízelné situaci. To nás však nesmí mrzet. Úlohu jsme proto zadali jako experimentální, abychom si onu závislost síly na vzdálenosti magnetů proměřili. Můžeme očekávat, že síla bude klesat pomaleji než $1/r^4$.

Na závěr teoretického úvodu uvedme, že v analogii s elektrostatikou bychom mohli sílu mezi dvěma kolineárními dipóly (dipóly leží na jedné přímce, dipólové momenty mají opačný směr) zapsat jako

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x + 2L)^2} - \frac{2}{(x + L)^2} \right), \quad (47)$$

kde Υ je konstanta závislá na materiálu a rozměrech magnetu a L je charakteristický rozměr magnetu. Pro $x \gg L$ se lze přesvědčit²⁷, že síla klesá podle vztahu $F = 6L^2\Upsilon/x^4$. V opačné limitě $x \ll L$ však síla diverguje, vztah tedy pro velice krátké vzdálenosti nedává správné předpovědi. Uvidíme, jak bude odpovídat naměřeným hodnotám.

Měření

Měřili jsme sílu mezi magnety, mezi těmi stejnými, jako každý řešitel obdržel v obálce se šestou sérií. Jak měřit jsme v zadání napověděli. Mezi magnety budeme vkládat listy papíru a budeme měřit sílu nutnou na odtržení magnetů od sebe. Je vhodné použít nějaký jemný papír, jednak kvůli malé hmotnosti a jednak kvůli malé tloušťce.

Vzdálenost magnetů můžeme určit jako počet listů papírů mezi magnety krát tloušťka papíru. Tloušťku papíru pak nejlépe zjistíme opakovaným měřením tloušťky několika desítek vrstev papíru, čímž podstatně snížíme chybu měření i chybu statistickou. Jinou možností je měřit vzdálenost mikrometrem pro každé měření zvlášť.

Sílu nutnou odtržení magnetů od sebe lze měřit siloměrem nebo vážením. Měření siloměrem bude zatíženo velkou chybou. Jednak proto, že siloměry nejsou většinou konstruovány k dostatečně přesnému měření. Podstatnější je však fakt, že k odtržení magnetů dojde náhle a neočekávaně a maximální výchylka siloměru půjde odečíst jen během krátkého okamžiku.

Lepší metoda je následující. Jeden magnet upevníme tak, že rozhraní mezi magnety bude vodorovné, a na ten druhý spodní budeme zavěšovat závaží, dokud nedojde k odtržení. Jako závaží lze použít cokoli, nejlepší je však něco, co lze přidávat po malých kouscích, jako například písek nebo voda. Po odtržení změříme hmotnost závaží včetně spodního magnetu a případné pomocné konstrukce připevněné k magnetu (tj. miska), do které umísťujeme závaží. K měření hmotnosti použijeme dostatečně přesné váhy. Síla, která způsobila odtržení magnetů od sebe je, jak tušíte, tíhová síla. Tu určíme snadno z hmotnosti vztahem $F = mg$. Jediné úskalí spočívá ve velikosti tíhového zrychlení, za které budeme dosazovat

²⁷⁾ Formulí pro sílu přepíšeme

$$F = \Upsilon \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{1}{(1 + 2L/x)^2} - \frac{2}{x^2} \frac{1}{(1 + L/x)^2} \right)$$

a využijeme Taylorův rozvoj $1/(1 + \xi)^2 = 1 - 2\xi + 3\xi^2 + O(\xi^4)$.

hodnotu $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Tím se dopustíme systematické chyby, ale zanedbatelné vůči ostatním chybám.

Výsledky

Dovolili jsme si převzít hodnoty naměřené Terezou Jeřábkovou, která která měřila sílu pro 30 různých vzdáleností (tedy až 29 vrstev papírů) a pro každou vzdálenost měřila sílu pětkrát. Tloušťka jednoho papíru byla $(0,100 \pm 0,002) \text{ mm}$. Naměřené hodnoty uvádíme v tabulce a v grafu na obrázku 41. Kromě hodnot zobrazujeme i chybu měření síly Δ_F pomocí chybových úseček. Chybu určení vzdálenosti magnetů považujeme za zanedbatelnou oproti chybě změřené síly, a proto ji do grafu nezakresluje.

Změřené hodnoty síly mezi magnety pro různé vzdálenosti

x [mm]	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
F [N]	2,12	1,90	1,65	1,49	1,34	1,20	1,11	0,99	0,88	0,82
Δ_F [N]	0,05	0,09	0,05	0,12	0,09	0,07	0,10	0,05	0,08	0,04
x [mm]	1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90
F [N]	0,79	0,72	0,67	0,61	0,57	0,54	0,49	0,44	0,42	0,36
Δ_F [N]	0,02	0,05	0,04	0,03	0,05	0,03	0,03	0,03	0,02	0,03
x [mm]	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40	2,50	2,60	2,70	2,80	2,90
F [N]	0,36	0,32	0,30	0,27	0,25	0,25	0,23	0,22	0,19	0,17
Δ_F [N]	0,02	0,03	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03

Změřením 30 bodů závislosti naše úsilí samozřejmě skončit nesmí. Naměřenými body proložíme křivku. Předpokládejme nejprve mocninnou závislost $F(x) = A(x/b - 1)^{-c}$ a hledejme hodnoty parametrů A , b a c . Výsledkem je

$$A = (2,1 \pm 1,5) \text{ N}, \quad b = (2,8 \pm 0,6) \text{ mm}, \quad c = (3,3 \pm 0,6).$$

Křivka této fitované závislosti je vynesena v grafu na obrázku 41.

Rovněž můžeme změřené body fitovat funkci ve tvaru (47), kterou jenom zkorrigujeme posunem počátku souřadnic o a . Námi zvolená nulová vzdálenost mezi magnety totiž nemusí odpovídat nulové vzdálenosti podle teoretického modelu. Parametry vyjdou

$$\Upsilon = (12 \pm 9) \text{ N}\cdot\text{mm}^2, \quad L = (2,7 \pm 1,7) \text{ mm}, \quad a = (2,0 \pm 0,4) \text{ mm}.$$

Výsledná funkce má téměř identický průběh jako předchozí mocninná závislost, v grafu jí tedy odpovídá stejná křivka (v daném zvětšení by mezi křivkami nebyl patrný rozdíl).

Diskuse a závěr

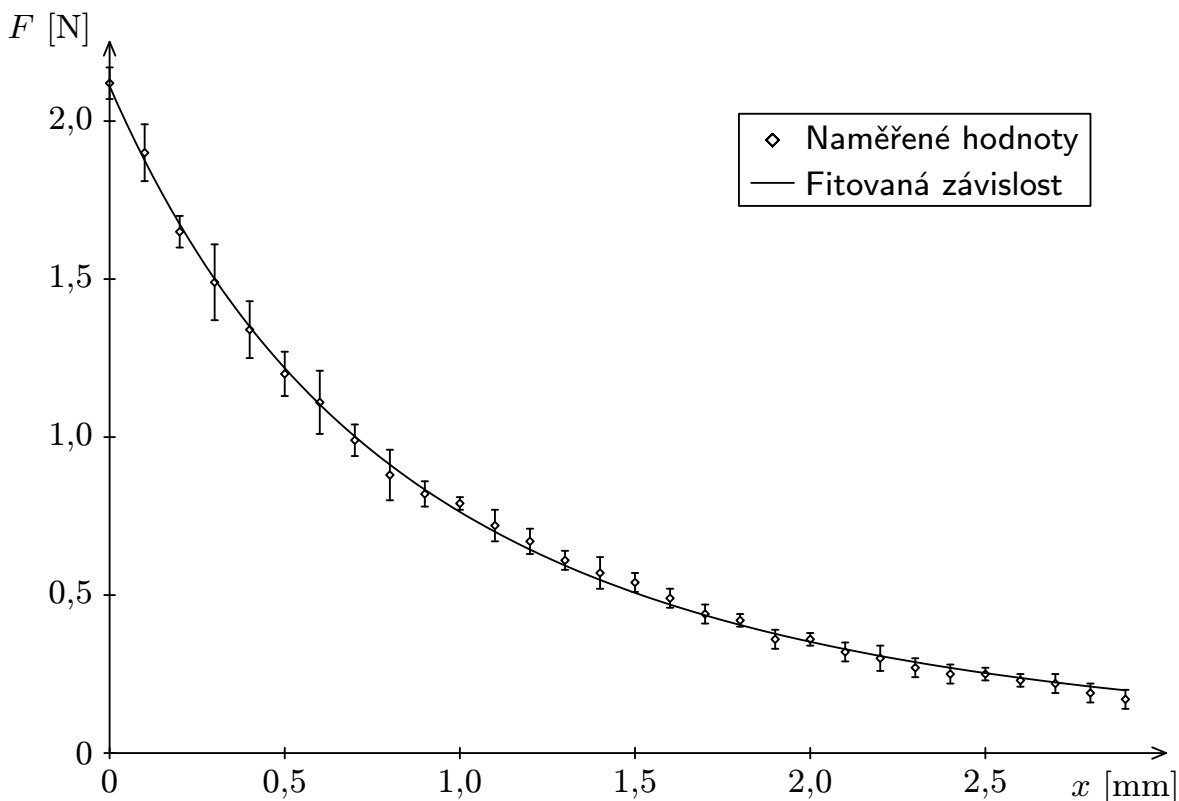
Sílu mezi magnety v závislosti na jejich vzdálenosti jsme měřili v rozmezí od nulové vzdálenosti, až dokud byla síla mezi magnety našimi možnostmi měřitelná, tj. v rozmezí 0–3 mm. Měření se dalo realizovat relativně přesně, což lze vidět i z grafu, protože body leží na hladké křivce a nejsou kolem ní „příliš rozházené“.

Hledali jsme mocninnou závislost, která nejvíce odpovídá změřeným bodům, a výsledkem byl pokles zhruba se třetí mocninou vzdálenosti $c = (3,3 \pm 0,6)$. To je očekávaný závěr (pokles je pomalejší než se čtvrtou mocninou).

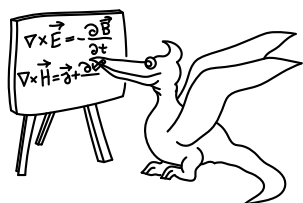
Při fitování teoretického vztahu (47) jsme dospěli k výsledku, který také výborně vystihuje závislost změřenou a navíc jsme získali odhad pro rozměr magnetu $L = (2,7 \pm 1,7)$ mm, což odpovídá realitě.

Sluší se ještě okomentovat výsledné chyby. Je patrné, že chyby fitovaných parametrů jsou poměrně velké. To je způsobeno tím, že parametrů je hodně, nemáme pro ně žádná omezení a změřené body postihují relativně krátký interval. Například pokud výrazně změníme hodnotu parametru Υ , můžeme to kompenzovat posunem funkce ve směru osy x , tedy změnou parametru a a dostaneme srovnatelně dobrou křivku. Pokud bychom znali b při prvním fitu či a ve druhém, výsledky by se výrazně zpřesnily.

Při měření bylo také nutné neopomenout fakt, že síla se může měnit i při vzájemném otáčení magnetů. To je způsobeno tím, že magnety byly uchyceny v kovových pouzdrech, do kterých mohly být vlepeny trochu nakřivo.



Obr. 41. Graf závislosti síly mezi magnety na jejich vzdálenosti



Seriál o počítačové fyzice

O čem to bude?

Začínáme se dnes zabývat pro vás nadmíru užitečným tématem – využitím počítače pro řešení nespočetného množství úloh, a to nejen fyzikálních problémů. Letošní seriál nás také naučí jinému pohledu na matematický aparát, který využijeme při výpočtech na počítači. To nám mimo jiné umožní snáze vypočítat derivace, integrály, řešit diferenciální rovnice. Zkrátka téměř cokoliv.

Sami jistě cítíte, že si budeme moci hrát s jakýmkoliv fyzikálním systémem, omezení budeme jen naší silou a rychlostí procesorů. A i kdyby si kvůli vašim budoucím zbesilým výpočtům vaše mašinky přály raději odejít do křemíkového nebe, můžeme jejich práci rozdělit mezi více procesorů a spustit je na superpočítači, který běží v našem univerzitním výpočetním středisku.

Prvním přírodním jevem, který si vezmeme na mušku, je gravitační působení a jeho účinky. Důvody jsou k tomu dva. Klasický popis je pro každého jednoduše pochopitelný. Avšak již úloha, kdy na sebe gravitačně působí tři volná tělesa, například tři hvězdy, které kolem sebe obíhají, není analyticky řešitelná. Co to znamená? Že například dráhy těchto těles, dobu oběhu apod. můžeme vypočítat pouze použitím nějaké přibližné numerické metody a zpravidla jen na počítači. Vývoj celého systému je třeba počítačově nasimulovat.

Takto modelovat se dá cokoliv. Bloudění opilého námořníka, požár v pralese, růst buněk, kvantová turbulence v supratekutém heliu (pokud byste to zvládli), časový vývoj naší Sluneční soustavy či crash test automobilu. Většinu času budeme věnovat simulacím čistě fyzikálním.

A v čem to budeme dělat? Málodko tuší, kolik se toho dá simulovat už v tom „obyčejném“ Excelu. Bez problémů nám v něm může rotovat celá hvězdokupa. Navíc díky FYKOSímu textu *Úvod do programování*, jež doporučujeme stáhnout z našeho webu, si během hodinky úplně každý, kdo umí na počítači alespoň nainstalovat nějaký program, nainstaluje překladač Pascalu a naučí se nejnужnějším základům vyššího programování.

Na úvod bychom rádi zmínili ještě pár dobrých doplňujících zdrojů. V knihovničce Fyzikální olympiády je k nalezení text Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Dále se numerickými metodami zabývá seriál osmého ročníku FYKOSu, který je ke stažení na našich webových stránkách. Dále můžeme doporučit „Houmpejdž Tomáše Ledvinky“²⁸, počítačového fyzika z Ústavu teoretické fyziky, jenž na Matematicko-fyzikální fakultě přednáší Programování pro fyziky. Naším tématem se zabývá i devátá kapitola prvního dílu Feynmanových přednášek z fyziky. Zabřednout do tajů programování vám může pomoci knížka Pavla Töpfera: *Algoritmy a programovací techniky*.

²⁸⁾ <http://utf.mff.cuni.cz/~ledvinka>

Kapitola 1: Gravitace

Pro simulování gravitačního působení nám postačí dvě věci. Newtonův druhý pohybový zákon, který říká, že síla je součinem hmotnosti a zrychlení

$$\mathbf{F} = M\mathbf{a}. \quad (48)$$

A Newtonův gravitační zákon. Ten praví, že velikost gravitační síly působící mezi dvěma hmotnými body je přímo úměrná součinu jejich hmotností a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdálenosti.

$$F = \varkappa \frac{M_1 M_2}{r^2},$$

kde M_1 a M_2 jsou hmotnosti hmotných bodů, r je jejich vzdálenost a \varkappa je gravitační konstanta. Její změřená hodnota je $(6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. Také po vás ve škole učitel křičel, abyste dodali, že tato gravitační síla je přitažlivá a působí ve směru spojnice hmotných bodů? Zapišme to vektorově

$$\mathbf{F} = -\varkappa \frac{M_1 M_2 \mathbf{r}}{r^3}. \quad (49)$$

V čitateli zlomku jsme \mathbf{r} označili tučně, abychom zdůraznili, že se jedná o vektor neboli o dvě souřadnice x a y určující velikost a směr spojnice hmotných bodů (třeba Měsíce a Země v rovině oběhu). Ve jmenovateli zlomku r značí pouze velikost vektoru \mathbf{r} , tzn. jeho délku, a proto zde zvýrazněno není. Reprezentuje-li například onu vzdálenost Měsíce od Země, bývá výhodné umístit těžší hmotný bod do počátku souřadnic. Z Pythagorovy věty pak získáme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, kde x a y jsou souřadnice polohy Měsíce.

Jak jste na střední škole definovali okamžitou (nikoliv průměrnou) rychlost? Jako změnu polohy (označíme $\Delta\mathbf{R}$) za velmi krátký časový úsek Δt , čili

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t},$$

kde $\Delta\mathbf{R}$ chápeme jako změnu polohového vektoru. A co je zrychlení? Nic jiného než změna rychlosti za velmi krátký časový úsek

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}.$$

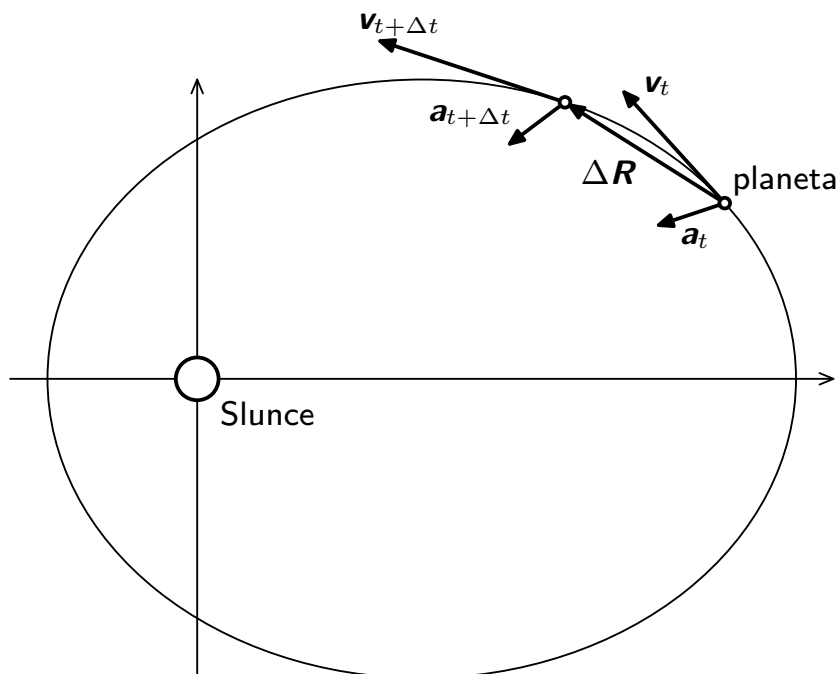
Pohyb planety kolem Slunce

Uvažme například planetu obíhající Slunce. Při numerickém modelování nejprve zvolíme počáteční podmínky systému v čase t_0 :

- počáteční polohu \mathbf{R}_{t_0} planety, například $[-0,6; 0]$ (první číslo $-0,6$ je x -ová souřadnice polohového vektoru a druhé je y -ová souřadnice), pro jednoduchost zatím neuvádíme jednotky,

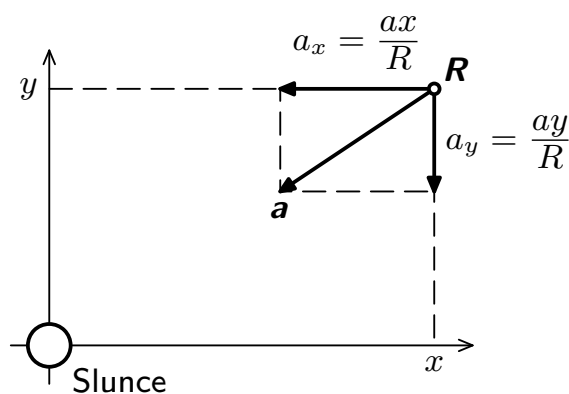
- dále počáteční rychlost \mathbf{v}_{t_0} planety, například $[0; 1]$ (čili $v_x = 0$ a $v_y = 1$).

A pak ještě musíme zvolit krátký časový interval třeba $\Delta t = 0,1$.



Obr. 42. Pohyb planety okolo Slunce

Jaká bude poloha planety v čase $t_1 = t_0 + \Delta t$? Užijme právě zavedených vztahů pro okamžitou rychlost a zrychlení, které platí tím přesněji, čím je Δt menší. Planeta tedy za dobu Δt změni svou polohu o $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{v}\Delta t$ a zrychlí o $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{a}\Delta t$. Proto poloha planety v čase $t_0 + \Delta t$ bude $\mathbf{R}_{t_0+\Delta t} = \mathbf{R}_{t_0} + \mathbf{v}_{t_0}\Delta t$, rychlost planety bude $\mathbf{v}_{t_0+\Delta t} = \mathbf{v}_{t_0} + \mathbf{a}\Delta t$. A čemu se rovná zrychlení \mathbf{a} ?



Obr. 43. Určení souřadnic zrychlení

Například na povrchu Země při volném pádu je zrychlení téměř všude stejné $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, což je přibližně v soustavě souřadné spojené se Zemí $a_x = 0$ N a $a_y \doteq -9,81$ N (minus, protože urychluje směrem dolů). A u planety obíhající Slunce? V každém bodě prostoru bude zrychlení jiné, je však snadné jej vypočítat. Jak už jsme zmínili, vystačíme s Newtonovým gravitačním a druhým pohybovým zákonem. Spojme je tedy dohromady.

$$M_p \mathbf{a} = -\kappa \frac{M_p M_S \mathbf{R}}{R^3},$$

kde M_p je zde hmotnost planety a M_S hmotnost Slunce. Na obou stranách rovnice se M_p vykrátí. Zjistili jsme tedy, že zrychlení \mathbf{a} planety na hmotnosti planety nezávisí.

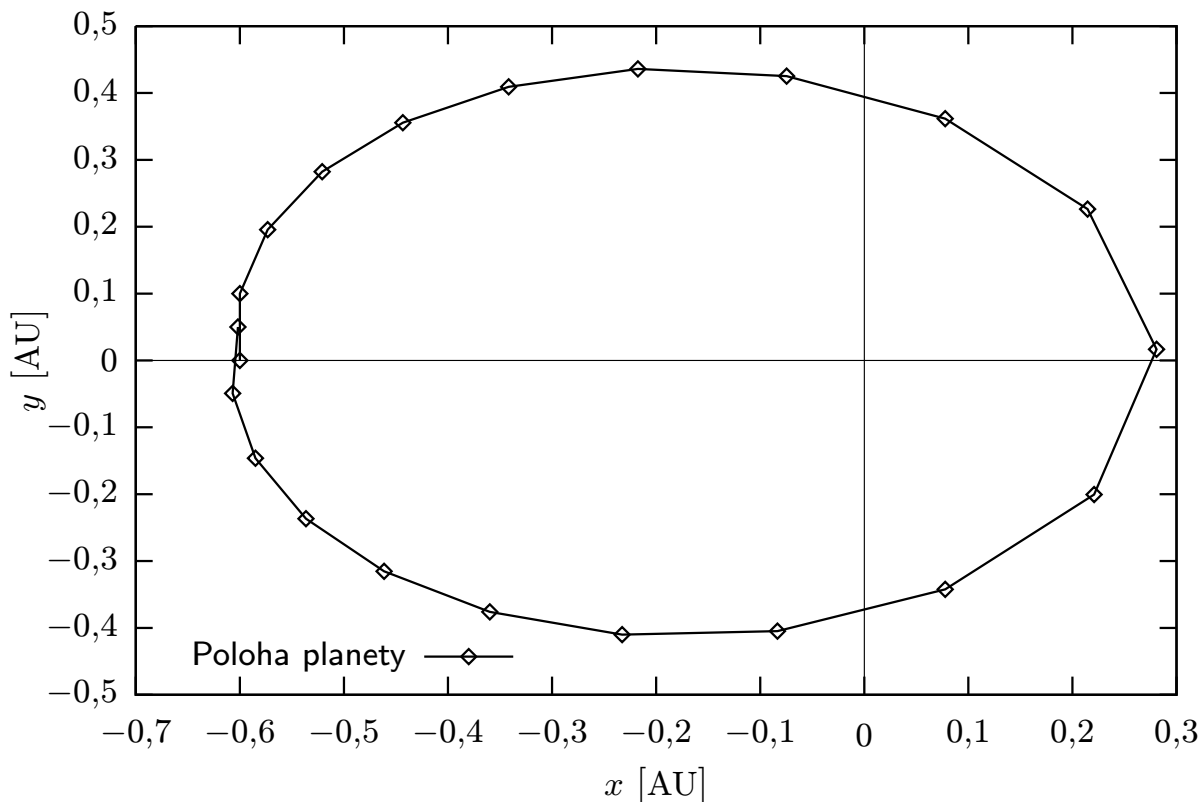
Za předpokladu, že hmotnost Slunce je mnohem větší než hmotnost planety, to jest $M_S \gg M_P$, můžeme gravitační působení planety na Slunce zanedbat. Slunce tedy zůstane nehybně ukotvené v počátku souřadné soustavy a \mathbf{R} je potom polohovým vektorem planety. Získáváme tak vztahy pro obě souřadnice zrychlení

$$a_x = -\varkappa \frac{M_S x}{R^3}, \quad a_y = -\varkappa \frac{M_S y}{R^3}. \quad (50)$$

Už víme, jak vypočítat polohu \mathbf{R} i rychlost \mathbf{v} planety v čase $t_1 = t_0 + \Delta t$ a jak počítat \mathbf{a} . Provedeme znovu tu samou rošádu s planetou pro další krátký časový úsek Δt a takto budeme dále odborně řečeno iterovat pomocí takzvaných rekurentních vzorců²⁹

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + \Delta t, \\ \mathbf{R}_{t_i+\Delta t} &= \mathbf{R}_{t_i} + \mathbf{v}_{t_i} \Delta t, \\ \mathbf{v}_{t_i+\Delta t} &= \mathbf{v}_{t_i} + \mathbf{a}_{t_i} \Delta t. \end{aligned} \quad (51)$$

Výsledky simulace



Obr. 44. Vypočtené polohy planety v jednotlivých časových okamžicích.

²⁹⁾ Rekurentní vzorec nebo předpis nám určuje posloupnost (zde posloupnost poloh a rychlostí planety v jednotlivých časových intervalech), jejíž následující člen se dá určit ze znalosti jednoho nebo více členů předcházejících. Proto je také nutné znát člen první, tj. počáteční podmínku.

Nyní již umíme úplně vše, abychom mohli provést například takovýto výpočet. Počáteční poloha planety je $x_0 = -0,6 \text{ AU}$ a $y_0 = 0 \text{ AU}$. AU je astronomická délková jednotka (Astronomical Unit). Její velikost je střední vzdálenost Země od Slunce, přibližně $150 \cdot 10^6 \text{ km}$. Počáteční rychlost planety je $v_{x0} = 0 \text{ AU} \cdot \text{rok}^{-1}$ a $v_{y0} = 1 \text{ AU} \cdot \text{rok}^{-1}$. A nechtě $\kappa \cdot M_S = 1 \text{ AU}^3 \cdot \text{rok}^{-2}$, což přibližně řádově platí pro hmotnost našeho Slunce³⁰, které váží asi $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Vyzkoušejte sami, že zvolíme-li časový krok 0,1 roku, vypočteme následující tabulku hodnot (viz též graf na obr. 44).

Planeta oběhla přibližně za 1,95 roku. Mohli bychom z vypočtených hodnot odečíst třeba ještě délku poloos, avšak vidíme, že poněkud nepřesně. Velice jednoduše lze dosáhnout velkého zpřesnění užitím jemnějšího časového kroku (třeba 0,01 roku) nebo přesnější numerickou metodou (o numerických metodách též v Úvodu do programování).

Vypočtené hodnoty polohy, rychlosti a zrychlení planety.

t [rok]	x [AU]	y [AU]	r [AU]	a_x [AU/rok ²]	a_y [AU/rok]	v_x [AU/rok]	v_y [AU/rok]
0	-0,6000	0,0000	0,6000	2,7778	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	-0,6000	0,1000	0,6083	2,6659	-0,4443	0,2666	0,9556
0,2	-0,5733	0,1956	0,6058	2,5792	-0,8797	0,5245	0,8676
0,3	-0,5209	0,2823	0,5925	2,5046	-1,3574	0,7750	0,7319
0,4	-0,4434	0,3555	0,5683	2,4156	-1,9368	1,0165	0,5382
0,5	-0,3417	0,4093	0,5332	2,2541	-2,6998	1,2419	0,2682
0,6	-0,2175	0,4361	0,4874	1,8791	-3,7671	1,4298	-0,1085
0,7	-0,0746	0,4253	0,4318	0,9263	-5,2834	1,5225	-0,6369
0,8	0,0777	0,3616	0,3699	-1,5355	-7,1474	1,3689	-1,3516
0,9	0,2146	0,2264	0,3120	-7,0679	-7,4587	0,6621	-2,0975
1	0,2808	0,0167	0,2813	-12,6166	-0,7501	-0,5995	-2,1725
1,1	0,2208	-0,2006	0,2983	-8,3187	7,5547	-1,4314	-1,4170
1,2	0,0777	-0,3423	0,3510	-1,7973	7,9170	-1,6111	-0,6253
1,3	-0,0834	-0,4048	0,4133	1,1816	5,7340	-1,4930	-0,0519
1,4	-0,2327	-0,4100	0,4714	2,2212	3,9133	-1,2708	0,3394
1,5	-0,3598	-0,3760	0,5204	2,5524	2,6676	-1,0156	0,6062
1,6	-0,4614	-0,3154	0,5589	2,6430	1,8070	-0,7513	0,7869
1,7	-0,5365	-0,2367	0,5864	2,6607	1,1741	-0,4852	0,9043
1,8	-0,5850	-0,1463	0,6030	2,6678	0,6672	-0,2184	0,9710
1,9	-0,6069	-0,0492	0,6088	2,6889	0,2180	0,0504	0,9928
2	-0,6018	0,0501	0,6039	2,7327	-0,2274	0,3237	0,9701

³⁰⁾ Nevěříte-li, můžete si to ověřit. Převedte gravitační konstantu z jednotek základních (m, kg a s) na jednotky použité (AU, kg a rok) nebo vypočtěte dostředivé zrychlení Země při rovnoměrném pohybu po kružnici. Tento pohyb Země kolem Slunce přibližně koná a platí zde vzorec $a = v^2/R$.

Úloha I. S ... gravitace

Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít. (řešení str. 148)

Kapitola 2: Parciální diferenciální rovnice

Jak jsou ty diferenciální rovnice lehké!

V minulé kapitole seriálu jsme užitím druhého Newtonova pohybového zákona a gravitačního zákona sestavili pohybové rovnice pro nebeská tělesa. Řešili jsme je numericky. Což znamená, že jsme pomocí většího množství jednoduchých aritmetických operací, jako je sčítání a násobení, mohli vypočítat, jak se budou vyvíjet dráhy tří obíhajících se hvězd.

Tento postup je aplikovatelný na libovolný systém konečného počtu hmotných bodů. Známe-li působící síly a počáteční podmínky, stačí sestavit rovnice dle pohybového zákona, napsat je do počítače, stisknout klávesu a světe div se.

Zkušenější si mohli všimnout, že přitom řešíme (integrujeme) diferenciální rovnice druhého řádu. Těm, kteří ještě nevědí, co je to derivace, doporučujeme nahlédnout do literatury³¹.

K řešení diferenciální rovnice jsme použili Eulerovy metody, jako metody velmi intuitivní a velmi jednoduché. Byly samozřejmě vyvinuty i jiné, rychlejší a přesnější. Jako velmi dobrá, silná a stále ještě jednoduchá, se ukázala metoda Rungeho-Kuttova³². Abychom ji mohli použít, nepotřebujeme nutně rozumět jejímu odvození. Velmi ji doporučujeme, neboť dává mnohem přesnější výsledky než metoda Eulerova.

Parciální diferenciální rovnice

Dosud jsme zmiňovali pouze obyčejné diferenciální rovnice. Budeme-li studovat jevy v látkách, jako šíření vln, proudění tepla nebo třeba intenzitu elektrického a magnetického pole, přivede nás fyzika k trochu jiným, tzv. parciálním diferenciálním rovnicím.

Diferenciální rovnice jsou matematické objekty se stejnými vlastnostmi, jaké mají algebraické rovnice. Narozdíl od nich zde však nevystupují jako proměnné čísla, ale funkce a jejich derivace. Nejznámější diferenciální rovnicí je druhý Newtonův pohybový zákon: hmotnost m krát zrychlení \mathbf{a} hmotného bodu, neboli druhá derivace polohového vektoru podle času $\ddot{\mathbf{r}}$, se rovná působící síle \mathbf{F} .

$$m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}. \quad (52)$$

³¹⁾ Derivace je podstatou diferenciálních rovnic. Jako literaturu uvádíme Feynmanovy přednášky z fyziky, článek Diferenciální počet ve fyzice z knihovničky Fyzikální olympiády, případně seriál o matematickém aparátu fyziky XVI. ročníku FYKOSu.

³²⁾ Podrobněji se jí věnujeme ve FYKOSím Úvodu do programování, který je k nalezení na našem webu.

Matematicky řečeno, \mathbf{r} je taková funkce času, kterou když dvakrát zderivujeme a přenásobíme konstantou m , získáme funkci \mathbf{F}^{33} . Tato diferenciální rovnice je obyčejná, neboť v ní vystupují pouze obyčejné derivace. My ovšem můžeme zavést i jiné derivace.

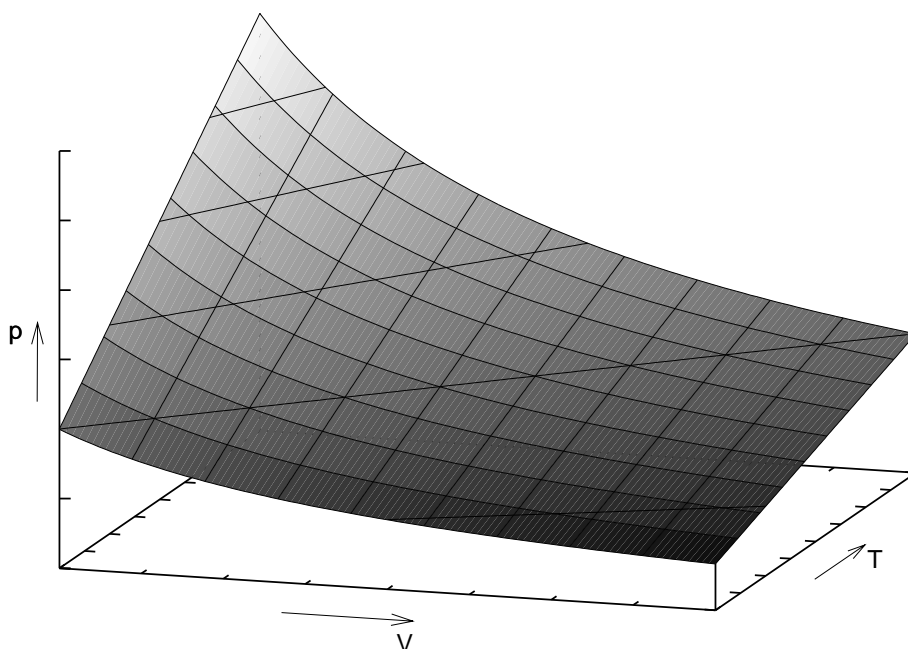
Mějme například ideální plyn. Jeho stavovou rovnici ze střední školy bezpečně znáte

$$pV = nRT,$$

kde p je tlak plynu, V je jeho objem, n je počet molů částic plynu, R je univerzální plynová konstanta a T je termodynamická teplota. Nás teď může zajímat, jak se mění za různých okolností tlak. Vyjádříme jej proto z předchozí rovnice

$$p(T, V) = nR \frac{T}{V}.$$

Tlak plynu je funkcí dvou proměnných, a to teploty a objemu. Pokud bychom připustili, že se počet částic plynu může měnit, pak dokonce tří, tuto možnost však nyní uvažovat nebudeme.



Obr. 45. PVT diagram pro ideální plyn

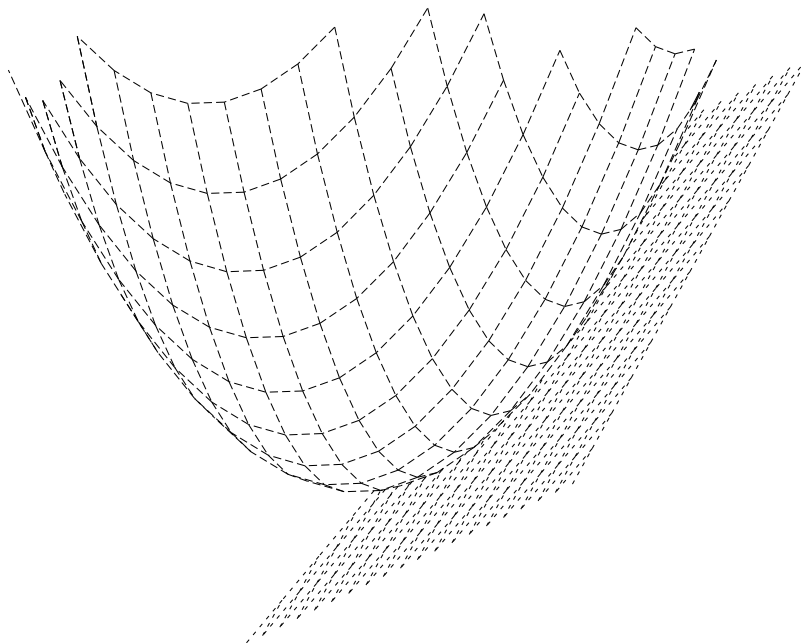
Ptáme se, jaká je malá změna tlaku dp při malé změně teploty dT a při konstantním objemu a počtu částic. Tato změna je při malém zvýšení teploty určitě

³³⁾ Fyzikálně odsud například plyne, že nepůsobí-li na hmotný bod žádné síly, pak setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. První pohybový zákon je tedy existenční! Tvrdí, že existuje alespoň jeden inerciální vztažný systém, ve kterém izolovaný hmotný bod setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu. To, že těchto systémů je nekonečně mnoho a jsou všechny stejně dobré, byla kdysi potíž, kvůli které musela vzniknout mechanika relativistická.

přímo úměrná velikosti dT a konstantou úměrnosti je derivace tlaku podle teploty. Protože derivujeme pouze podle jedné proměnné, nazveme tuto derivaci parciální a formálně ji zapíšeme pomocí symbolu ∂ , kterému můžeme říkat „parciátko“.

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{V,n=\text{konst}} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{nR}{V},$$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T,n=\text{konst}} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}.$$



Obr. 46. Tečná plocha ke grafu funkce více proměnných

Můžeme vypočítat i parciální derivaci podle V a tzv. úplnou derivaci (totální diferenciál) funkce, která je zobecněním obyčejné derivace pro funkce více proměnných. Geometrickým významem obyčejné derivace je směrnice tečny ke grafu (křivce) funkce. Úplná derivace určuje tečnou plochu, či dokonce nadplochu ve vícerozměrném případě, ke grafu (ploše či nadploše) funkce. Zní to velice učeně, ale z obrázku lze nahlédnout, že jde pouze o naprosto přirozené zobecnění derivace obyčejné.

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T} dT + \frac{\partial p}{\partial V} dV = \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV.$$

Existuje velice elegantní zápis vektorových parciálních diferenciálních rovnic lidově zvaný „nabliáda“. Rozhodli jsme se pojednat o něm ve zvláštním článku, který najdete na FYKOSím webu. Tento text, přirozeně pojmenovaný Nabliáda, občas překračuje nutnou znalost pro čtení seriálu.

Vedení tepla

Zůstaňme ještě chvíli u termodynamiky. Uvažujme kovovou tyčku o jednotkovém průřezu, kterou na jednom konci držíme mokrým hadrem na teplotě T_1 .

Druhý konec strčíme nad plamen, čímž jej zahříváme na teplotu T_2 . Co se bude dít?

Tyčkou začne proudit teplo Q . Všimněme si, že fyzikové značí teplo zpravidla stejným písmenem, jako se značí elektrický náboj. Tuto souvislost hned využijeme. Označme si definitivně

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{dt},$$

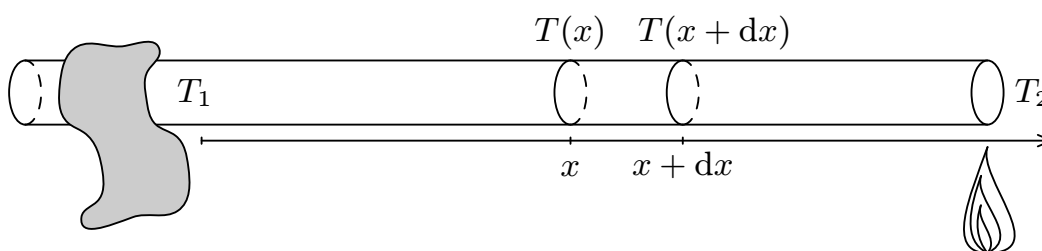
kde dQ je malé množství tepla, které za malý časový interval dt prošlo jednotkovou plochou. Nově zavedenou veličinu I pojmenujeme tepelný tok³⁴. Ta se ukazuje být přímo úměrná teplotnímu gradientu, není-li příliš velký. Této větě se říká Fourierův zákon. Gradient je rozdíl teplot v místech $x + dx$ a x dělený jejich vzdáleností dx .

$$I(x) \sim \frac{T(x + dx) - T(x)}{dx}.$$

Abychom tvrzení elegantně matematicky zapsali, zavedme si teplotu $T(x, t)$ jako funkci dvou proměnných, která říká, jaká je teplota tyčky v místě x v čase t . Teplotní gradient je potom $\partial T(x, t)/\partial x$. Gradient též značíme symbolem ∇T a můžeme jej zobecnit do více rozměrů. Je to vektor kolmý k hladinám (plochám) o stejné teplotě a má směr největšího vzrůstu. Rozmyslete si, zda je orientovaný ve směru, či proti směru proudění tepla.

$$I = -\lambda \nabla T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Materiálovou konstantou úměrnosti je tepelná vodivost λ . Samozřejmě se s teplotou mírně mění, my to však v našem modelu zanedbáme.



Obr. 47. Vedení tepla v kovové tyčce

Pokusme se odpovědět na otázku, co se stane, je-li ∇T v nějakém okamžiku t všude stejný. Například to znamená, že tyčkou proudí všude stejně velký tepelný tok. Matematicky to lze zapsat takto

$$\frac{\partial \nabla T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_t = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad I(x)_t = \text{konst}.$$

Na jednom konci ohříváme plamenem tyčku na konstantní teplotu T_2 a tyčka přijímá tepelný tok I , který ustáleně proudí na druhý konec. Zde tyčku chladíme

³⁴⁾ Tepelný tok má význam tepla, které projde jednotkovým průřezem za jednotku času.

na teplotu T_1 a odebíráme stejně veliký tok I . Teplota tyčky se s časem už nemění ($\partial T/\partial t = 0$). Byla tudíž dosažena termodynamická rovnováha.

Došli jsme k závěru, že teplotní rozdělení systému v rovnováze splňuje rovnici

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

Matematickým výsledkem je slavná Laplaceova rovnice. K zápisu lze užít „nabliády“, protože toto tvrzení neplatí jen v jednom rozměru, ale i obecně ve více rozměrech. Například v rovině má tvar

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Obecně Laplaceovu rovnici zapisujeme

$$\nabla^2 T = 0.$$

Systém však v rovnováze nebyl od začátku. Můžeme předpokládat, že tyčka byla docela rovnoměrně prohřátá, než jsme ji začali opékat. Pak se na jednom konci velice rychle zahřívala a nějakou dobu trvalo, než teplo doteklo až na druhý konec. Víme tedy, že $\partial^2 T/\partial x^2$ se nerovná vždy nule. Ale čemu? Zřejmě by matematicky mělo platit

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dQ}{dt} \right). \quad (53)$$

Jak však fyzikálně interpretovat pravou stranu rovnice? Nemohli bychom si pomoci nějakou analogií s elektrickým nábojem? Uvědomme si, že v každém místě elektrického obvodu prochází vždy stejný proud (nemění-li se vlastnosti obvodu, jako je například odpor potenciometru). Proč? Protože jinak by se v nějaké části obvodu kumuloval elektrický náboj a k tomu nedochází, neboť elektrické náboje stejného znaménka se silně odpuzují.

Teplo v tyčce se však shromažďovat může. Vynásobíme-li pravou stranu dx , pak se bude rovnat rozdílu tepla dQ' , které vteklo plochou o souřadnici x a vyteklo plochou v $x + dx$ v krátkém časovém intervalu dt . Dobře si rozmysleme znaménko.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dQ}{dt} \right) dx = - \frac{dQ'}{dt}.$$

Hromadění tepla se projeví zvětšením teploty T . Píchneme-li tedy teploměr do sice libovolného, avšak pevného bodu x , teplota se tam bude měnit. Zapišeme proto přírůstek teploty za malý časový interval pomocí parciální derivace

$$\frac{dQ'}{dt} \sim \frac{\partial T}{\partial t} dx.$$

Závisí to přímo úměrně na hmotnosti, která se zde rovná délkové hustotě tyče ρ vynásobené délkou dx , a na tepelné kapacitě C , čili

$$- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dQ}{dt} \right) dx = \frac{dQ'}{dt} = C \rho \frac{\partial T}{\partial t} dx.$$

Promyslíme-li si dobře zmíněné fyzikální argumenty, tak jsme de facto odvodili rovnici vedení tepla. Zbývá už jen formálně rovnici integrovat (vykrátit diferenciály dx) a vrátit se k rovnici (53). (Proveďte sami!) Výsledkem je rovnice vedení tepla

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = k \frac{\partial T}{\partial t},$$

kde $k = C\rho/\lambda$. Úloha o vedení tepla je v izotropním prostředí prostorově invariantní, čili je symetrická ve všech směrech, a proto platí

$$\nabla^2 T = k \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Tuto rovnici můžeme ještě trochu zobecnit pro případ, kdy se v objemu, v němž vedení tepla vyšetřujeme, vyskytují nějaké vnější zdroje tepla (v materiálu může například probíhat chemická reakce uvolňující teplo). Tyto zdroje můžeme charakterizovat hustotou výkonu na jednotkový objem p .

Ve výrazu pro dQ'/dt se pak objeví dodatečný člen $-p dx$ a rovnice vedení tepla pak bude mít tvar

$$\nabla^2 T = k \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} p.$$

Vyšetřujeme-li jen rovnovážné rozložení (tj. $\partial T/\partial t = 0$), pak dostaneme takzvanou Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 T = -\frac{1}{\lambda} p. \tag{54}$$

Elektrostatika

Další typickou úlohou vedoucí k řešení parciálních diferenciálních rovnic je hledání elektrostatického potenciálu při zadaném rozložení nábojů (nebo obecněji při zadaných okrajových podmínkách).

Jen pro připomenutí poznamenejme, že potenciál je veličina charakterizující elektrické pole³⁵, která v každém bodě prostoru vyjadřuje potenciální energii, jakou by měl zde umístěný jednotkový náboj. Potenciál obvykle značíme φ a mezi ním a intenzitou elektrického pole \mathbf{E} (ta vyjadřuje sílu, která by v daném bodě působila na jednotkový náboj) platí vztah³⁶

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

³⁵⁾ Pouze v jednodušších případech – například v elektrostatice. Obecně k popsání elektrického pole potřebujeme i tzv. vektorový potenciál.

³⁶⁾ Zkuste se pořádně zamyslet nad tím, že tepelný tok a elektrického pole \mathbf{E} je vlastně téměř úplně to samé. Jsou navíc v mnoha aspektech ekvivalentní s přirozeným prouděním vody. Jediným zásadním rozdílem zůstává, že zdrojem proudění vody je čerpadlo, zdrojem elektrického pole je elektrický náboj a zdrojem tepla je třeba mikroprocesor vašeho počítače. Pochopíte-li proudění vody, pochopíte elektrostatiku, stejně tak vedení tepla nebo například difúzi, kde částice „tečou“ proti koncentračnímu gradientu. Tato analogie se projevuje i tím, že výsledné rovnice budou mít úplně stejný matematický tvar. K pochopení vám pomůže význam divergence, o kterém píšeme v Nabliádě.

Abychom mohli napsat nějakou rovnici svazující potenciál φ s rozložením nábojů v prostoru, musíme se uchýlit ke známým Maxwellovým rovnicím, konkrétně pak k takzvanému Gaussovu zákonu. Ten zjednodušeně řečeno říká, že zdrojem elektrického pole je náboj. Tedy pokud je v určité oblasti prostoru obsažen celkový náboj Q , pak tok elektrického pole hranicí této oblasti je úměrný tomuto náboji. Matematicky lze toto tvrzení elegantně zapsat pomocí operátoru nabla jako

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Zde ρ značí objemovou hustotu náboje a $1/\varepsilon_0$ je konstanta úměrnosti (ε_0 je tzv. permitivita vakua). Dosadíme-li do Gaussova zákona vyjádření \mathbf{E} pomocí potenciálu, dostaneme

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (55)$$

Vyšla nám rovnice, podle níž má být Laplace z neznámé funkce roven dané funkci. S takovou rovnicí jsme se už setkali při řešení problému vedení tepla. Roli teploty nyní hraje potenciál a roli hustoty tepelných zdrojů hustota náboje.

K jejímu řešení můžeme samozřejmě použít stejné postupy jako pro řešení rovnice vedení tepla. Jediná novinka, kterou nám elektrostatika přinese, je jiný možný druh okrajových podmínek. Zatímco při vedení tepla jsou většinou dány hodnoty neznámé funkce (teploty) na hranici uvažované oblasti, nyní se můžeme setkat i s následujícím případem.

Do elektrostatického pole (generovaného například nějakými plochami udržovanými na daném potenciálu) vložíme dokonale vodivý předmět. Jak bude nyní vypadat průběh potenciálu? Zjevně musíme opět řešit Poissonovu rovnici s předepsanými hodnotami potenciálu na daných plochách, avšak navíc musíme zajistit, aby potenciál na povrchu vloženého vodiče byl konstantní. Proč? Kdyby náhodou nebyl, podle vztahu $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ by existovala nenulová složka elektrického pole tečná k povrchu vodiče, která by v něm samozřejmě způsobila vznik proudů, a nešlo by tedy o statický případ.

Numerické metody řešení PDR

Parciální diferenciální rovnice se řeší úplně stejně jako obyčejné diferenciální rovnice. Jenom je zapotřebí postup zobecnit do více rozměrů. Připomeňme, jakým kouzlem jsme získali numerický předpis pro derivaci funkce jedné proměnné

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

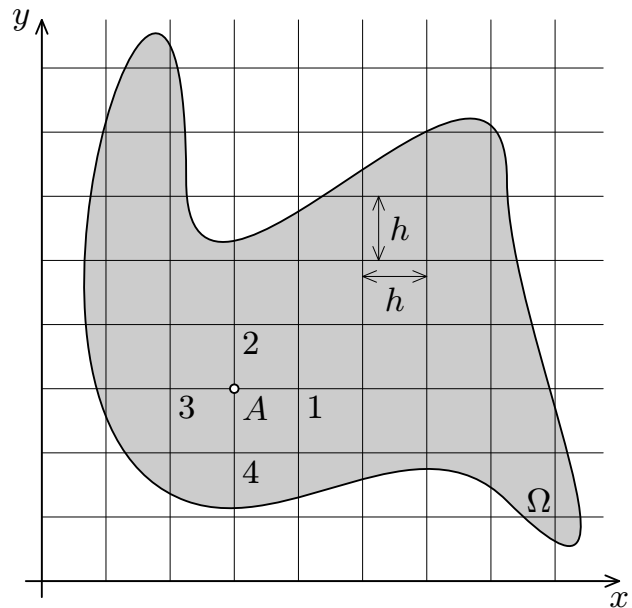
Funkce $f(x)$ zobrazuje x z nějaké oblasti Ω na obor funkčních hodnot, který se značí $f(\Omega)$. Oblast Ω je v jednorozměrném případě podmnožinou osy reálných čísel \mathbb{R} . Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že jde o interval. Pomyslně jsme si jej rozdělili na malinkaté úsečky délky h .

O něco výhodnější je numericky počítat derivaci pomocí symetrického vztahu, kdy získáme de facto hodnotu derivace uprostřed malých úseček

$$f'(x) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{h}.$$

Přesnost výpočtu závisí na velikosti h . Otázka na rozmyšlenou: Zvolíme-li si menší h , bude numerický výpočet derivace přesnější? Platí to obecně? Vaši odpověď můžete podrobit počítačovému experimentu nejlépe nezávislém na vyšetřované funkci.

Ve vícero rozměrech budeme mít kupříkladu funkci $g(x, y)$ pro jednoduše jen dvou proměnných x a y , $(x, y) \in \Omega$. Oblast Ω bude nyní část roviny, kterou si zase rozdělíme třeba na malé čtverečky (někdy se může hodit i jiné dělení). Nebo si můžete představit, že na Ω hodíme síť. Derivace si rozepíšeme pomocí diferencí mezi jednotlivými uzly sítě. Jde o triviální aplikaci poslední rovnice, ovšem nejen „horizontálně“ ale i „vertikálně“. Ukážeme si to na příkladu Poissonovy rovnice³⁷, se kterou jsme se již setkali (rovnice (54) a (55)).



Obr. 48. Rozdělení oblasti Ω na čtverečky

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \varrho,$$

kde ϱ je nějaká zadaná funkce také dvou proměnných $(x, y) \in \Omega$. Vyjádřeme si první a druhé derivace podle x a y v bodě $A = (a_x, a_y)$.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_A &= \frac{g(a_x + h/2, a_y) - g(a_x - h/2, a_y)}{h}, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right|_A &= \frac{g(a_x + h, a_y) - 2g(A) + g(a_x - h, a_y)}{h^2}, \\ \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_A &= \frac{g(a_x, a_y + h/2) - g(a_x, a_y - h/2)}{h}, \\ \left. \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right|_A &= \frac{g(a_x, a_y + h) - 2g(A) + g(a_x, a_y - h)}{h^2}. \end{aligned}$$

Označme si podle obrázku $g(a_x + h, a_y) = g(1)$, $g(a_x, a_y + h) = g(2)$, $g(a_x - h, a_y) = g(3)$, $g(a_x, a_y - h) = g(4)$ a zapišme výsledek

$$\left. \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right|_A + \left. \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right|_A = \frac{g(1) + g(2) + g(3) + g(4) - 4g(A)}{h^2} = \varrho(A). \quad (56)$$

³⁷⁾ Poissonova rovnice je parciální diferenciální rovnice ve tvaru Laplaceův operátor na neznámou funkci g se rovná nějaká jiná daná funkce ϱ . Laplaceova rovnice je speciální případ $\varrho = 0$.

Právě pro rovinné případy se velice hodí Excel, který už jen v principu tím, že je to tabulkový kalkulátor, udělá spoustu práce za nás. Možnosti užití Excelu jsou velice limitované (rozhodně však záleží na úhlu pohledu), na druhou stranu se pro několik věcí hodí velice dobře. Vytvořili jsme v něm programy `laplace.xls` a `poisson.xls` vyšetřující elektrický potenciál jednoduchého dvojrozměrného problému se zadanými okrajovými podmínkami (první z nich v nepřítomnosti nábojů, řeší tedy Laplaceovu rovnici; druhý pak pro zadané rozložení náboje řeší Poissonovu rovnici).

Máte-li pocit, že k numerickému vyřešení Poissonovy rovnice ještě něco postrádáme, máte pravdu. V jednorozměrném případě jsme se potřebovali „odpíchnout“ od počátečních podmínek. Z poslední rovnice jsme schopni vypočítat $g(A)$ jen tehdy, známe-li již $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ a $g(4)$. Co s tím?

Zřejmě musíme zadat okrajové podmínky na hranici oblasti Ω . Například teplotu na povrchu předmětu, jehož tepelné rozložení počítáme. Nebo zkoumáme-li elektrické pole, které budí v prostoru nabitý elektrický vodič, tak víme, jaký je potenciál na jeho povrchu a taky víme, že velmi daleko od něj již bude pole téměř nulové. Okrajové podmínky jsou tedy hodnoty hledané funkce na hranici oblasti $\partial\Omega$, uvnitř které funkci počítáme.

Postupuje se tak, že se „odrazíme“ od okrajových podmínek – hodnot funkce g v uzlech na hranici. Do všech ostatních uzlů dosadíme nulu.

$$g(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \setminus \partial\Omega.$$

Máme tedy nějak zadány hodnoty funkce ve všech uzlech sítě. Přepočítáváme je postupně pomocí odvozeného numerického předpisu (56) všechny (až na hraniční body, ty musejí být samozřejmě pevné) pořád dokola, čímž konvergujeme ke správnému řešení.

Jde o jednoduchý a přirozený postup, který názorně pochopíte, pohrajete-li si s tím trochu v Excelu. Někdy může být potřeba v Excelu povolit rekurentní počítání hodnot³⁸. On za odměnu provádí právě výše zmíněné mnohonásobné přepočítávání za nás, což je velice pohodlné.

Úloha II. S ... *porcování divokých rovin*

Skladování uranu

Palčivá otázka jaderné energetiky je skladování vyhořelého radioaktivního paliva. Většinou se skladuje ve válcových člancích ponořených ve vodní lázni, která drží jejich povrch na konstantní teplotě asi 20 °C. Na vás je nyní zjistit, jaké bude rozložení teploty v člancích tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm. Článek bude poměrně vysoký a proto nás zajímá rozložení tepla v příčném řezu. Uran bude zaujímat koncentrický kvádr se čtvercovou podstavou

³⁸⁾ V nabídce „Nástroje“ vyberte položku „Možnosti“. Otevře se okno, v němž musíte na záložce „Výpočty“ zaškrtnout možnost „Iterace“ (s nastavením si později můžete zkusit pohrát).

o hraně 5 cm. Ze zkušenosti s válcovými kapslemi víme, že bude mít konstantní teplotu okolo 200 °C.

Zahřívající se drát

Máme velmi dlouhý drát kruhového průřezu o poloměru r z materiálu o tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ . Přiložíme na něj konstantní elektrické napětí. Nechť je intenzita elektrického pole (tj. napěťový spád) uvnitř drátu konstantní, rovnoběžná s jeho osou a její velikost budiž E . Pak drátem bude procházet proud o plošné hustotě $j = \sigma E$ a bude se vytvářet Jouleovské teplo s objemovým výkonem $p = \sigma E^2$.

Protože materiál drátu má nenulovou tepelnou vodivost, vytvoří se v něm jisté rovnovážné rozložení teploty, které – jak víme – splňuje Poissonovu rovnici $\lambda \nabla^2 T = -p$. Předpokládáme, že okraj drátu udržujeme na dané teplotě T_0 . Tím máme danou okrajovou podmínku potřebnou k vyřešení rovnice. Vzhledem k symetrii problému se můžeme omezit na její řešení pouze ve dvou rozměrech – na průřezu vodiče (teplota jistě nebude záviset na posunutí podél osy vodiče). Nyní by již bylo jednoduché problém vyřešit popsányi metodami³⁹.

My si však situaci maličko zkomplikujeme a budeme předpokládat (zcela oprávněně), že měrná elektrická vodivost σ závisí na teplotě. Budeme tedy mít rovnici typu $\nabla^2 T = f(T)$.

Pokuste se tuto rovnici numericky vyřešit pro nějakou danou závislost vodivosti na teplotě (můžete si ji najít v literatuře, na internetu, nebo si klidně nějakou vymyslet) a najít tak rozložení teploty na průřezu drátu. Můžete se pokusit měnit intenzitu elektrického pole E a nakreslit voltampérovou charakteristiku drátu, vyzkoušet více druhů závislostí $\sigma(T)$ (třeba pro polovodič, jehož vodivost s rostoucí teplotou na rozdíl od obvyčejného kovu roste) atd.

Kapacita krychle

Vypočítejte kapacitu dokonale vodivé krychle o straně délky $2a$. Pokud se budete nudit, můžete zkusit kvádr (a třeba závislost kapacity na délkách jednotlivých stran), případně jiné geometrické objekty.

Nápověda: Kapacita je poměr náboje na krychli rozmístěného ku potenciálu povrchu krychle (za předpokladu, že potenciál v nekonečnu je nulový). Problém tedy lze řešit tak, že si zvolíme libovolně potenciál krychle, vyřešíme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 \varphi = 0$ vně krychle a vypočítáme celkový náboj na krychli užitím Gaussova zákona (tj. určením intenzity elektrického pole derivováním potenciálu a výpočtem jeho toku vhodně zvolenou plochou obklopující krychli).

(řešení str. 152)

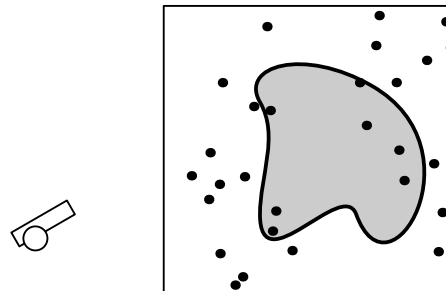
³⁹⁾ Jde o Poissonovu rovnici s konstantní pravou stranou, se kterou se můžeme setkat například v modelu proudění viskózní kapaliny potrubím a která je shodou okolností pro kruhový průřez jednoduše řešitelná analyticky.

Kapitola 3: Náhodné jevy

Po druhém, matematicky laděnějším díle, si odpočineme studiem náhody. Vezmeme si na mušku vzrušující biologii.

Metoda Monte Carlo

Monte Carlo je metoda počítačové fyziky založená na náhodě a počtu pravděpodobnosti. Ilustrujeme ji na jednoduchém příkladu. Chceme zjistit plochu rybníka. Jako numericky velmi vhodná metoda se jeví vzít dělo a střílet náhodně do čtverce, ve kterém se celý rybník nachází. Po každém výstřelu budeme poslouchat, zda uslyšíme šplouchnutí vody, nebo ne. Nechť má čtverec obsah kupříkladu 100 m^2 . Vystřelíme-li stokrát, bude počet šplouchnutí odpovídat metrům čtverečním rybníka. Ovšem jen s jistou „spolehlivostí“⁴⁰, neboť jde o náhodný proces.



Obr. 49. Měření plochy rybníka metodou Monte Carlo

Pravděpodobnost

Otázku, jaká je pravděpodobnost, že bude na Titanu či Europě život si položil asi každý z nás. Slovo pravděpodobnost používají lidé od nepaměti. Přijde nám samozřejmě tvrzení, že pravděpodobnost padnutí šestky na hrací kostce je jedna šestina. Tibetští mnichové se pokoušeli toto tvrzení ověřit, a tak celý život v klášteře házeli kostkou a sledovali, jaké jsou pravděpodobnosti padnutí jednotlivých čísel. Bohužel jim to samozřejmě nikdy přesně jedna šestina nevycházelo, neboť nikdy nevyrobili absolutně dokonalou kostku.

Poučme se však od nich v jedné věci. Mohlo by se zdát na první pohled zvláštní pravděpodobnost měřit. Ale stejně jako hmotnost určujeme vážením, hořlavost hořením, svítivost svícením, tak pravděpodobnosti měříme házením.

Pravděpodobností jsme se v Evropě začali matematicky zabývat až v 1. polovině 17. století ve Francii v souvislosti s hazardními hrami a náhodnými jevy. Zakladateli byli především Pascal, Fermat a Huygens. Hrávalo se tehdy v kostky a sázelo se například na to, jestli při n hodech kostkou padne šestka. Vyvstala tedy otázka: Jak mám vsadit, abych neprohloupil? Zvládnete odpovědět?

Kolikrát musím hodit kostkou, aby padla šestka s pravděpodobností větší než jedna polovina? Hodím-li n -krát kostkou, může padnout 6^n výsledků (6^n uspořádaných n -tic). Při každém hodu je pět možností nepříznivých – šestka nepadla. Celkem, při n hodech, je nepříznivých 5^n výsledků. Předpokládáme, že každý výsledek je stejně pravděpodobný. Potom je přirozené určit pravděpodobnost jako poměr počtu všech pozitivních výsledků ku počtu všech možných výsledků. Pravděpodobnost $P(n)$ padnutí šestky při n hodech je

$$P(n) = \frac{6^n - 5^n}{6^n}.$$

⁴⁰⁾ Pokuste se ji nějak odhadnout.

Položíme-li z podmínky $P(n) = 1/2$,

$$\frac{1}{2} = \frac{6^n - 5^n}{6^n} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n,$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Nevíš-li, jak dál, logaritmuji!

$$\ln \frac{1}{2} = n \ln \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln \frac{5}{6}} \doteq 3,8.$$

Teorie pravděpodobnosti je nyní opět jednou z nejmodernějších matematických disciplín. Velmi hezkým pojednáním o pravděpodobnosti je šestá kapitola Feynmanových přednášek. Na internetu je zdarma kniha od Grinsteada a Snella *Introduction to probability*.

Cvičení: Máme pytlík, ve kterém je buď bílý, nebo černý kamínek. Vhodíme do něj bílý. Protřeseme a jeden náhodně vytáhneme. Vytáhli jsme bílý, jaká bude pravděpodobnost, že další tažený kamínek bude také bílý?

*Náhodná proměnná*⁴¹

Ohniskem matematické analýzy je číslo. Derivace funkce v bodě je číslo, určitý integrál je číslo. Čísla také vstupují do funkcí. „Naopak“, hlavní pojem teorie pravděpodobnosti je *náhodná proměnná*, která vstupuje do funkcí, kterým se říká stochastické funkce. Náhodná proměnná však není číslo, je složitější než číslo. Náhodná proměnná je *množina stavů a jejich pravděpodobností*. U hrací kostky je množina stavů jednička, dvojka až šestka a jejich pravděpodobnosti jsou $1/6$. Neznáme-li plně množinu stavů a pravděpodobnost každého stavu, nemáme náhodnou proměnnou plně uchopenou.

Existují náhodné proměnné i se spojitě proměnnými stavy. Například poloha x a rychlost v molekuly plynu. Množinou stavů je interval, případně plocha i celá rovina \mathbb{R}^2 atd. Je-li $N(v) dv$ počet částic plynu s rychlostí v intervalku $[v, v + dv]$, potom podíl

$$df(v) = \frac{N(v) dv}{N_0},$$

kde N_0 je celkový počet molekul, představuje pravděpodobnost toho, že namátkou vybraná molekula bude mít rychlost v intervalu $[v, v + dv]$. Takovéto funkci $f(x)$ říkáme hustota pravděpodobnosti a $f(x) dx$ je pravděpodobnost, že nastane jev z intervalu $[x, x + dx]$.

Pojem *střední* nebo také *očekávané hodnoty* náhodné veličiny je zobecněním aritmetického průměru. Nechtě při n měřeních doby života mionu jsme získali hodnoty x_1, x_2, \dots, x_n . Aritmetickým průměrem \bar{x} těchto hodnot nazýváme číslo

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n). \tag{57}$$

⁴¹⁾ Tato sekce byla z velké části převzata od profesora Josefa Kvasnici z jeho knihy *Matematický aparát fyziky*.

Takovouto střední hodnotu lze interpretovat následovně: Nechť x je nějaká hodnota náhodné veličiny a $(x - x_i)$ jsou odchylky od této hodnoty. Funkce

$$g(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2$$

je součet druhých mocnin těchto odchylek od nějaké referenční hodnoty x . Hodnotu x zvolíme tak, aby tento součet čtverců byl minimální. Minimum nalezneme tím, že $g(x)$ zderivujeme a položíme rovno nule

$$g'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + \dots + 2(x - x_n) = 0.$$

Řešením je $x = \bar{x} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$. Aritmetický průměr je tak jednoduchým důsledkem metody nejmenších čtverců⁴².

Mezi hodnotami x_1, x_2, \dots, x_n mohou být některé stejné. Seřadíme je do skupin tak, že hodnota x_1 se vyskytuje m_1 -krát, hodnota x_2 se vyskytuje m_2 -krát atd., přičemž součet všech m_i se rovná celkovému počtu měření

$$m_1 + m_2 + \dots = \sum_i m_i = n.$$

Po takovémto seskupení stejných hodnot přepíšeme aritmetický průměr (57) ve tvaru tzv. váženého průměru

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i \binom{n}{v} m_i x_i.$$

Podíl m_i/n je relativní četnost hodnoty x_i , tj. podíl případů příznivých hodnotě x_i k celkovému počtu všech případů. Pro velká n můžeme tyto podíly ztotožnit s pravděpodobnostmi $p_i = m_i/n$ hodnot x_i .

Tímto jsme ospravedlnili velice důležitou definici střední hodnoty. Střední hodnotou náhodné proměnné $\langle x \rangle$ je *suma součinů stav krát jeho pravděpodobnost*, přičemž sčítáme přes všechny stavy náhodné proměnné

$$\mu = \sum_i x_i p_i. \quad (58)$$

Předpokládá se, že náhodná proměnná je normovaná, což znamená, že $\sum_i p_i = 1$. Nejedná-li se o diskrétní náhodnou proměnnou, ale o spojitou, přejde suma přirozeně v integrál.

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (59)$$

Hodnoty x_i náhodné veličiny se obecně liší od střední hodnoty $\langle x \rangle$. Dochází k odchylkám $\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$, neboli též k fluktuacím. Vypočítejme střední hodnotu těchto fluktuací.

$$\langle \Delta x \rangle = \sum_i p_i \Delta x_i = \sum_i p_i x_i - \langle x \rangle \sum_i p_i = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0.$$

⁴²⁾ Jedná se o jednu ze základních statistických metod využívaných při zpracování fyzikálních měření. Bližší informace naleznete v příslušné literatuře.

Střední hodnota fluktuace se rovná nule, odchylky od střední hodnoty se vyskytují stejným dílem na obě strany. Informaci o absolutní hodnotě těchto odchylek poskytuje kvadrát fluktuací

$$(\Delta x_i)^2 = (x_i - \langle x \rangle)^2 = x_i^2 - 2\langle x \rangle x_i + \langle x \rangle^2.$$

Střední hodnotu této veličiny, takzvanou *střední kvadratickou odchylku* neboli *disperzi* náhodné proměnné vypočítáme vztahem

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \sum_i p_i (\Delta x_i)^2.$$

Cvičení: Ukažte, že

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \tag{60}$$

kde

$$\langle x^2 \rangle = \sum_i x_i^2 p_i,$$

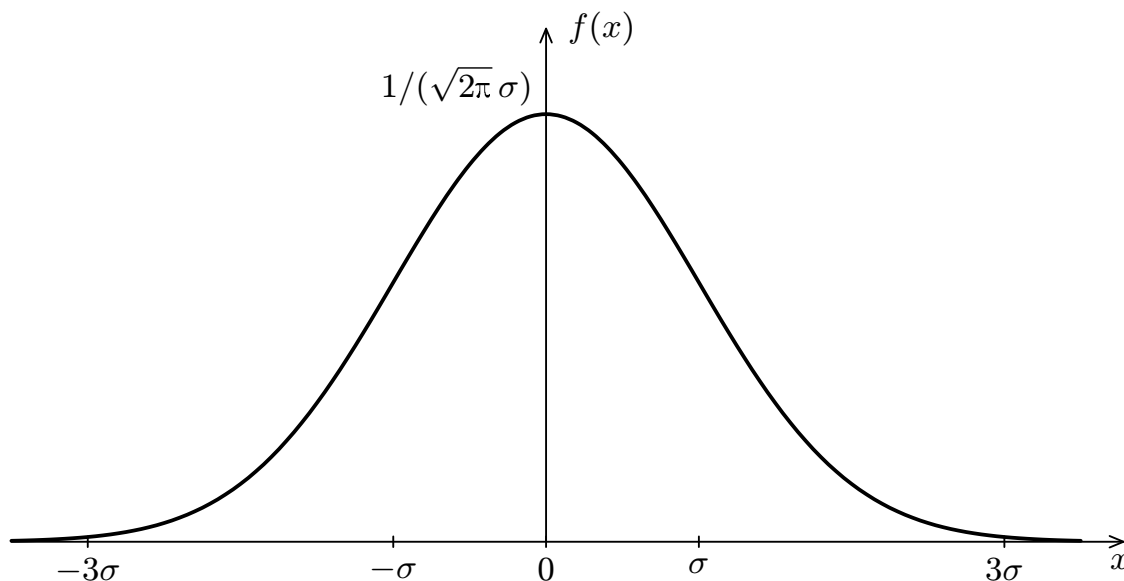
a zobecněte pojem disperze i pro spojité náhodné proměnné (zamění se jen suma za integrál).

Centrální limitní věta

Nejdůležitějším pravděpodobnostním rozdělením je normální neboli Gaussovo rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{61}$$

kde μ a σ jsou konstanty. Z právě zavedených definic můžeme vypočítat střední hodnotu a disperzi normálního rozdělení. Oba výpočty jsou užitečným cvičením na integrály. Výsledkem je střední hodnota μ a disperze σ^2 .



Obr. 50. Gaussovo rozdělení pro $\mu = 0$

Centrální limitní věta mluví matematicky o tom, co fyzik většinou ví, že náhodné jevy, na které má vliv mnoho faktorů (a žádný z nich není příliš dominující), se chovají podle normálního neboli Gaussova rozdělení pravděpodobnosti. Například Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí molekul ideálního plynu je Gaussovým rozdělením ve třech rozměrech.

Centrální limitní věta je důležitým tvrzením teorie pravděpodobnosti podobně jako Lagrangeova věta v analýze. Její důkaz je minimálně na několik stránek a vyžaduje navíc již nějakou znalost teorie. Fyzikovi se někdy velice hodí, má-li něco rigorózně (matematicky, naprosto precizně) dokázané, co může pro svou práci použít.

Pojďme se trochu blíže podívat, jak věta funguje. Mějme n (spojitých) náhodných proměnných s hustotami pravděpodobnosti $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$), každou s nějakou střední hodnotou μ_i a disperzí σ_i^2 . Když náhodné proměnné sčítáme, tak s n jdoucím do nekonečna dostaneme podle centrální limitní věty náhodnou proměnnou s normálním rozdělením, které má střední hodnotu $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ a disperzi $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

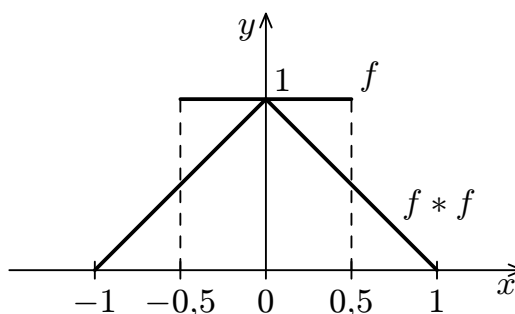
Jak se sčítají náhodné proměnné? Proces můžeme ilustrovat třeba i na klasických hracích kostkách, i když půjde jenom o jednoduchý příklad. Házíme dvakrát kostkou a ptáme se, s jakou pravděpodobností padnou jednotlivé součty (2 až 12). Tyto pravděpodobnosti dostaneme sčítáním dvou náhodných proměnných, odpovídajících jednotlivým hodům kostkou. Nyní postup zobecníme na spojité náhodné proměnné s hustotami pravděpodobnosti $f(x)$ a $g(x)$ definované na celé reálné ose. Jejich součet bude mít hustotu pravděpodobnosti $(f * g)(x)$, která bude rovna

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t) dt.$$

Tento výraz vypadá možná složitě, neboť platí obecně. Zkusíte-li však sečíst dvě stejné náhodné proměnné pro jednoduchost rovnoměrně rozdělené (každý stav má stejnou pravděpodobnost) na intervalu $[-0,5; 0,5]$. Zjistíte, jak elegantně formule funguje, aniž byste cokoliv integrovali.

Centrální limitní věta proto dává návod, jak Gaussovo rozdělení zkonstruovat na počítači. Generátor rovnoměrného rozdělení mívají programovací jazyky již zabudovaný. Necháme-li tímto generátorem vygenerovat několik náhodných čísel a uděláme z nich aritmetický průměr, bude tento aritmetický průměr také náhodný. Avšak jeho pravděpodobnostní rozdělení bude se zvyšujícím se počtem čísel konvergovat k rozdělení normálnímu.

Tento proces ilustruje program Celith, který visí na webu. Za minimální vhodný počet náhodných čísel pro konstrukci dostatečně přesného Gaussova rozdělení se považuje 12.



Obr. 51. Součet náhodných proměnných

Rybníček s Bernoullim

Nyní, když jsme prodiskutovali plochu, pravděpodobnost a náhodnou proměnnou, se můžeme opět vrátit k metodě Monte Carlo a rybníčku. V Monte Carlu jde o využití náhody – střílíme náhodně do čtverce. To, co náhodným procesem získáme, statisticky zpracujeme. Dejme tomu, že jsme vystřelili N koulí, třeba 10 000. Počet metrů čtverečních S získáme jako podíl počtu šplouchnutí $N_{\text{š}}$ a N , vynásobený velikostí čtverce $S_{\text{č}}$

$$S = \frac{N_{\text{š}}}{N} S_{\text{č}}.$$

Krom výsledné plochy je pro nás však také velice důležité, jak spolehlivý je výpočet po N výstřelech. Což je vlastně informace o tom, jak rychle výpočet konverguje ke správné hodnotě. Člověka můžeme označit za spolehlivého, přijde-li téměř vždy na schůzku, na které je očekáván. Podíváme se z tohoto pohledu i na náš rybník.

Nechť q je poměr plochy rybníčku a celkové plochy čtverce. Veličinu q můžeme ztotožnit s pravděpodobností, že koule do rybníčku při jednom výstřelu spadne. Pak s pravděpodobností $1 - q$ do rybníčku nespadne. Zamysleme se nad tím, jaká bude pravděpodobnost, že z n výstřelů nám do rybníčku spadne právě k koulí?

Pravděpodobnost, že k -krát koule v rybníce skončí a $(n - k)$ -krát ne (z celkem n výstřelů), by měla být $q^k(1 - q)^{n-k}$. Násobit můžeme proto, že jednotlivé výstřely jsou na sobě nezávislé. Je to stejný problém, jako když se ptáme na pravděpodobnost, že šestka na hrací kostce k -krát padne a $(n - k)$ -krát ne. Protože je nám jedno, v jakém pořadí šestky či nešestky nastaly nebo šplouchnutí či nešplouchnutí nastalo, je třeba součin $q^k(1 - q)^{n-k}$ vynásobit počtem všech možných kombinací, ve kterých jev k -krát nastal a n -krát nenastal, neboli počtem všech možných výběrů k prvků z n , jenž se značí $\binom{n}{k}$ a nazývá se binomické číslo, čili

$$p(k) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}. \quad (62)$$

Dostali jsme takzvané *binomické* nebo taky Bernoulliho rozdělení pravděpodobnosti. Zmíníme se raději v krátkosti o binomickém čísle, pokud už jej však znáte, tak si za cvičení alespoň dokažte, že pravděpodobnost $p(k)$ je normovaná, neboli $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} = 1$.

Jak jsme řekli, binomické číslo $\binom{n}{k}$ je počet všech kombinací, jak můžeme vybrat k prvků z n -prvkové množiny. Existuje $n!$ uspořádaných n -tic všech prvků, takzvaných permutací. První prvek totiž můžeme do všech n -tic vybrat n způsoby, druhý $n - 1$ způsoby atd. Nás však vůbec nezajímá, jak je v těchto n -ticích $(n - k)$ prvků uspořádaných, protože ty vybírat nebudeme. Nás však nezajímá ani to, jakým způsobem je uspořádáno těch k prvků vybraných. Proto $n!$ vydělíme $(n - k)!$ a $k!$ a dostaneme výsledek

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

Očekávali bychom, že střední hodnota binomického rozdělení $\langle k \rangle$ se rovná součinu pravděpodobnosti padnutí jedné koule do rybníčku krát počet všech výstře-

lených koulí. Výpočet střední hodnoty opravdu provedeme jako cvičení na to, jak se počítání binomických čísel vyhnout. Dle binomické věty

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Jako trik zderivujeme výraz podle a

$$n(a + b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} a^{k-1} b^{n-k}.$$

Ještě jej z estetických a sugestivních důvodů vynásobme a

$$an(a + b)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Bude-li nyní $a = q$ a $b = 1 - q$, získáme onen očekávaný výsledek

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k} = nq.$$

Dobře, nás však zajímá, jaká je spolehlivost, že počet padnutí dělových koulí do rybníčku se jen velmi málo liší od střední hodnoty. O tom nás informuje disperze. To pro nás již nebude žádný problém vypočítat. Využijeme tvrzení (60), čili

$$\langle (\Delta k)^2 \rangle = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2.$$

Postupujeme podobně jako výše, jen binomickou větu zderivujeme dvakrát podle a , a posléze získáme výsledek

$$\langle (\Delta k)^2 \rangle = nq(1 - q).$$

Vidíme, že disperze se zvyšujícím se n roste. Což je logické, neboť se nám celé pravděpodobnostní rozložení rozšiřuje. Na druhou stranu nám to neříká to, co bychom chtěli. Nás zajímá nějaká *relativní disperze*, vztažená k tomu, jak moc je střední hodnota velká. Proto se zavádí relativní disperze vztahem

$$(\delta k)^2 = \frac{\langle (\Delta k)^2 \rangle}{\langle k \rangle^2} = \frac{1 - q}{n}.$$

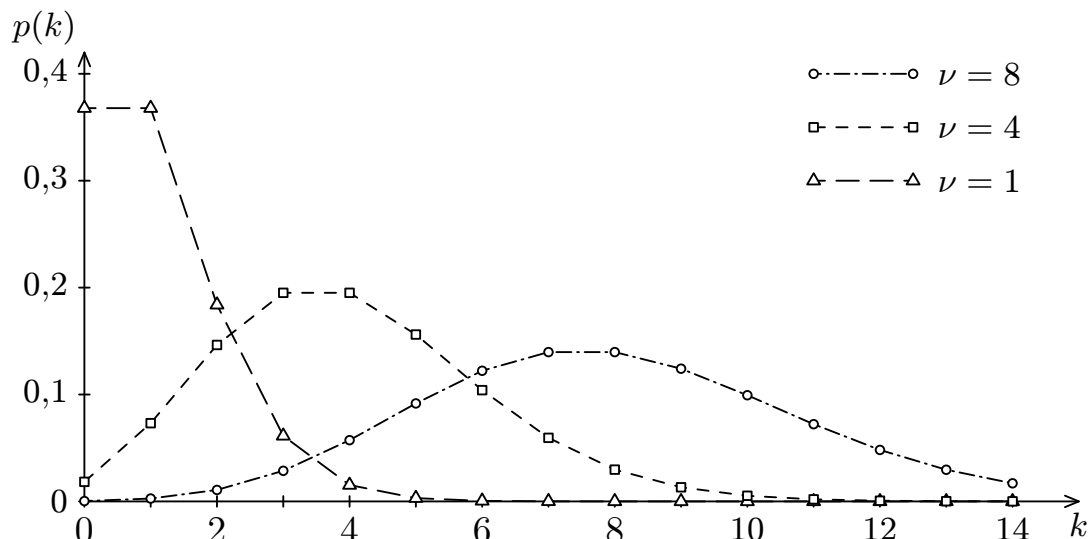
Tento výraz jde k nule jako $1/n$. Získali jsme tedy závislost, jak se zvyšujícím se počtem dělových koulí klesá relativní kvadratická odchylka od správné hodnoty. Toto je ekvivalentní s otázkou, jak rychle se ke správné hodnotě blížíme. Chceme-li odpovědět na otázku, jak spolehlivě jsme se po n krocích přiblížili ke správné hodnotě, musíme požadovanou spolehlivost nějak vyčíslit. Kupříkladu se zeptáme, jaká je pravděpodobnost, že jsme se nezmýlili o více než centimetr čtverečný. To je stejný výpočet jako pravděpodobnost, že jsme se o více než jeden centimetr čtverečný zmýlili. Výše uvedené vzorce již umožní takovéto pravděpodobnosti vypočítat.

Poissonovo a Gaussovo rozdělení

Nyní dáme do souvislosti binomické rozdělení, centrální limitní větu a Gaussovo rozdělení. Při té příležitosti odvodíme ještě jedno velice důležité rozdělení pravděpodobnosti, a to Poissonovo.

Poissonovo rozdělení je asymptotickým (limitním) případem binomického rozdělení pro takzvaně řídké nebo vzácné jevy, tj. je-li q malé a n hodně velké. Vezměme pravděpodobnost q jako klasický poměr příznivých případů ν k n . Přepíšeme-li podle toho binomické rozdělení, získáme

$$p(k) = \binom{n}{k} \left(\frac{\nu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{n-k}.$$



Obr. 52. Poissonovo rozdělení pro různé hodnoty parametru ν , pro větší názornost jsou body spojené lomenou čarou

Rozepíšeme-li binomické číslo a lehce přeskupíme členy, získáme

$$p(k) = \frac{\nu^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n.$$

Teď upravíme pouze druhý zlomek

$$p(k) = \frac{\nu^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n.$$

Provedeme limitu $n \rightarrow \infty$. S prvním zlomkem to nehne. Z dalších členů takováto limita udělá jedničku až na poslední zlomek, který $(1 - \nu/n)^n \rightarrow e^{-\nu}$ (lze to ukázat například Taylorovým rozvojem). Poissonovo rozdělení $P^\nu(k)$ s parametrem ν má tedy tvar

$$P^\nu(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}. \tag{63}$$

Je jednoduché ukázat, že Poissonovo rozdělení je normované. Stačí vzít Taylorův rozvoj

$$e^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!},$$

potom vidíme, že

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!} \right) \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^k}{k!}} = 1.$$

Jako cvičení se můžeme pokusit vypočítat střední hodnotu a rozptyl. Pro kontrolu využijme toho, že střední hodnota i kvadratická odchylka jsou stejné.

Jiným limitním případem binomického rozdělení je, když se náhodné hodnoty soustřeďují do úzké oblasti kolem střední hodnoty μ . Hledejme hustotu pravděpodobnosti ve tvaru

$$p(x) = e^{g(x)},$$

kde $g(x)$ je nějaká funkce. Rozvineme ji v Taylorovu řadu kolem bodu μ a členy třetího a vyššího řádu zanedbáme.

$$g(x) = g(\mu) + \frac{g'(\mu)}{1!} (x - \mu) + \frac{g''(\mu)}{2!} (x - \mu)^2 + \dots$$

Můžeme předpokládat, že $p(x)$ má v μ maximum. Potom má i $g(x)$ v μ extrém a derivace $g(\mu)' = 0$. Druhá derivace bude záporná, označme ji

$$g''(\mu) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

Přepíšeme-li $p(x)$ podle těchto úprav, získáme

$$p(x) = C \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right),$$

kde $C = g(\mu)$ je zatím neznámá konstanta z Taylorova rozvoje, která se určí normováním. Gaussovo rozdělení má tedy tvar

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Tvrzení, že binomické rozdělení konverguje ke Gaussovu rozdělení, je speciálním případem centrální limitní věty.

Distribuční funkce a generování náhodných čísel

Jeden návod na generování náhodných čísel jsme ukázali pro normální rozdělení. Ukážeme ještě jeden obecný postup, budeme k tomu potřebovat zavést distribuční funkci.

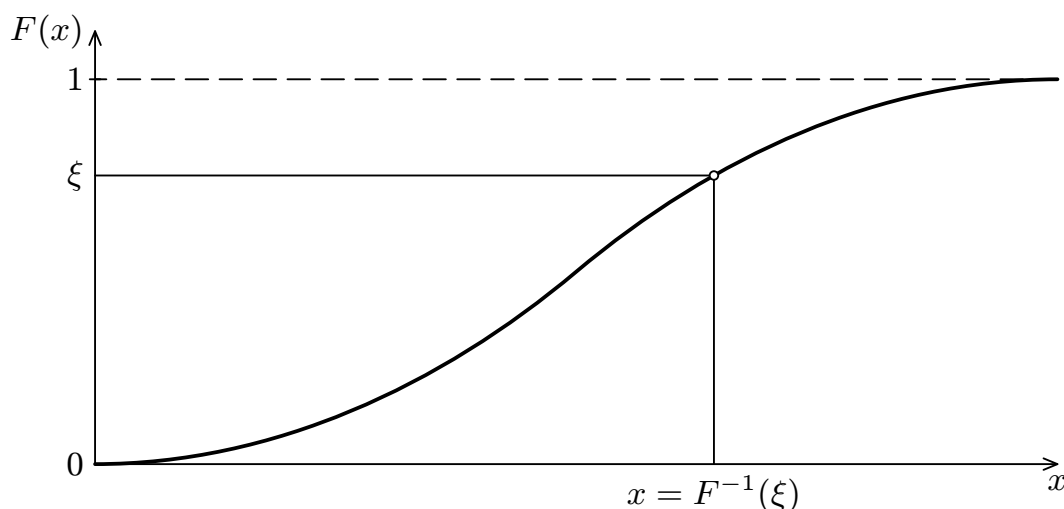
Distribuční funkce $F(x)$ je pravděpodobnost, že náhodná veličina X , s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ bude nabývat menší nebo stejné hodnoty jako x . Pro spojitě náhodné proměnné to bude integrál

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

a pro diskrétní náhodné proměnné suma

$$F(x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Při studiu distribučních funkcí se velice hodí, že jsme se zaobírali plochou. Distribuční funkce je vždy neklesající a nabývá hodnot od nuly do jedné (uvažujeme normované náhodné proměnné). Neklesající je mimo jiné proto, že hustota pravděpodobnosti $f(x)$ či diskrétní rozložení je vždy nezáporné. U spojitých náhodných proměnných nabývá hodnot od nuly do jedné, protože plocha pod grafem hustoty pravděpodobnosti je 1.



Obr. 53. Příklad distribuční funkce

Dále je jasné, že distribuční funkce je strmější tam, kde je $f(x)$ větší, například z toho důvodu, že $f(x)$ je u spojitých proměnných derivací distribuční funkce. Generujeme-li náhodná čísla ξ od 0 do 1, získáme z nich čísla x náhodně rozložená dle $f(x)$ přes distribuční funkci velice jednoduše.

$$\xi = F(x), \quad x = F^{-1}(\xi).$$

Například normální rozdělení bohužel nemá analyticky vyjádřitelnou distribuční funkci, protože neexistuje analytické vyjádření integrálu $\int e^{-x^2} dx$. Musíme ji tedy počítat numericky.

Jak to bude s Poissonovým rozdělením? Distribuční funkce je sumou

$$F(K) = \sum_{k=0}^K \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu}.$$

Takže vygenerujeme ξ a budeme počítat sumu, dokud nepřesáhne hodnotu ξ . Všimněme si však, jak na nás křičí ze jmenovatele vykřičník. Oprávněně, neboť roste pekelně rychle. To však znamená, že pravděpodobnost pro velká k velice rychle klesá. Není divu, vždyť jsme Poissonovo rozdělení odvodili pro vzácné jevy. Aby nám nevznikly na počítači problémy s velkými čísly, můžeme to vyřešit tak, že

sumu třeba pro $k > 10$ „uřízneme“, je-li parametr ν dostatečně malý. V opačném případě nelze použít klasické datové typy a je nutné naučit náš program pracovat s tzv. dlouhými čísly.

Epidemie

V tomto paragrafu budeme matematicky studovat nemoci s epidemickým průběhem jako u chřipky, kterou lidé léčí v řádu dnů nebo jednoho týdne. Nemoci se budeme bránit dvěma strategiemi vakcinace. Jednak začneme lidi vakcinovat, jakmile epidemie začne (omezujeme se v tomto případě na nemoci, kdy vakcína účinkuje ihned), potom srovnáme průběh epidemie s případem, kdy jsme naočkovali určité procento lidí již předem. Samozřejmě to srovnáme ještě i s tím, pokud jsme neočkovali vůbec.

Výhodou preventivního očkování je, že epidemie bude určitě mírnější. Otázkou zůstává, bude-li výrazně mírnější, než při vakcinaci až po vypuknutí epidemie. Nevýhodou je, že můžeme očkovat proti epidemii nemoci, která vůbec nenastane.

Pokusme se vytvořit co nejjvýstižnější, ale na druhou stranu co nejjednodušší model epidemie. Zajímáme se o nemoci jako chřipka, jejíž epidemie propukne v nějakém městě, pak zde žije svým životem a potom se přenese zase někam jinam. Nás bude zajímat právě průběh v jednom městě. Občany rozdělíme do tří skupin: zdraví, nemocní a lidé, co už nemoc prodělali a uzdravili se a nadále jsou během této epidemie imunní. Počet lidí v první skupině označíme x , počet lidí ve druhé skupině y a počet ve třetí z . Počet všech občanů je N . Jelikož nás nyní zajímají docela krátkodobé epidemie, nemá cenu do modelu zahrnovat úmrtí a rození, proto v každém okamžiku

$$N = x + y + z.$$

Nyní si rozmysleme vhodný model toho, jak se počty lidí v těchto skupinkách budou vyvíjet v čase. Časové kroky δt vezměme diskrétní, třeba hodinové. Za každou hodinu se ve středním slova smyslu nakazí nějaká část zdravých. Nakazí se jich tím víc, kolik je zdravých, ale také tím více, čím víc bude nemocných, kteří můžou nákazu předat, proto

$$x_{t+1} = x_t - \beta x_t y_t \delta t,$$

kde konstanta β je intenzita nákazy. Součin $x_t y_t$ můžeme chápat jako počet všech možných kontaktů mezi nakaženými a zdravými, konstanta β je tedy infekčnost nemoci – pravděpodobnost, s jakou se nemoc přenese z jednoho člověka na druhého za nějaký čas. U chřipky se ukazuje přibližně $0,4/N$ za den.

V případě, že začneme vakcinovat (předpokládejme lineárně v čase), musíme počet všech, kteří se mohou nakazit, snížit o počet vakcinovaných⁴³.

$$x_{t+1} = x_t - \beta(x_t - V_t) y_t \delta t,$$

⁴³⁾ Při programování potom nezapomeňme pohlídat, že od určitého momentu nebude koho vakcinovat.

kde V_t je počet vakcinovaných v čase t . V případě, že očkujeme lineárně v čase, je

$$V_t = \Lambda t,$$

kde konstanta Λ vyjadřuje rychlost očkování, uvažme asi dvě procenta obyvatel denně.

Nákaza je řídký náhodný jev. Za jednu hodinu se může nakazit jen malá část ze všech zdravých lidí. Proto položíme celý člen $\beta(x_t - V_t)y_t\delta t$ jako parametr ν Poissonova rozdělení pravděpodobnosti. Proč právě Poisson? Jde o diskrétní rozdělení, které vychází z binomického, v němž jsme se ptali na pravděpodobnost, že se k -krát něco stane a $(n - k)$ -krát nikoli. A to je náš případ.

$$x_{t+1} = x_t - \text{Poisson}(\beta(x_t - V_t)y_t\delta t).$$

Zbývá vyjádřit vývoj počtů lidí y a z v ostatních skupinkách. Hodnota y se zvýší o počet lidí, kteří se nakazili, minus lidi, kteří se uzdravili, což můžeme jednoduše zapsat jako

$$y_{t+1} = y_t + (\text{nakažení za dobu } \delta t) - \gamma y_t \delta t,$$

kde γ je přibližně $1/(\text{doba uzdravení})$. U chřipky je doba uzdravení asi čtyři dny, přičemž jak dlouho může nemocný někoho nakazit, je pro nás důležitější, než jak dlouho bude muset ležet v posteli a jak dlouho nebude muset do školy. Pro úplnost

$$z_{t+1} = z_t + \gamma y_t \delta t.$$

Entropie

Entropie S je nějaká neuspořádanost systému, například vašeho pokojíku. Definuje se jako

$$S = - \sum_i p_i \ln p_i. \quad (64)$$

Je ústředním pojmem statistické fyziky, která se dá dokonce i netradičně formulovat jako soubor energie s entropií. Mějme systém, který se vyskytuje ve stavech o energiích ε_i s pravděpodobnostmi p_i . Střední energie systému je $\sum_i \varepsilon_i p_i$. Jak víme, tak děje v přírodě mají takový spád, aby entropie systému narůstala (jako ve vašem pokojíku) a energie systému byla naopak co nejmenší. Faktorem, jenž rozhoduje o tom, který z trendů bude významnější, se ukazuje být termodynamická teplota T . Při vysokých teplotách je nejdůležitější entropie, při nízkých naopak energie. Například v ledu jsou molekuly uspořádány v pravidelné krystalové mřížce, zvýšíme-li teplotu, tak se toto uspořádání rozpadne a získáme kapalinu. Budeme-li dále zvyšovat teplotu, pak postupně získáme vodní páru, která nemá pevný objem, a plazmu, která ztrácí i iontové vazby.

Úkolem je nyní minimalizovat výraz

$$L = \sum_i p_i \varepsilon_i + k_B T \sum_i p_i \ln p_i,$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, jejíž hodnota je $1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$. Předpokládáme, že pravděpodobnost je normovaná na jedničku, tj. $\sum_i p_i = 1$. Chceme nalézt minimum L , zderivujeme jej tedy podle p_i a položíme rovno nule.

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = \varepsilon_i + k_B T (\ln p_i + 1) = 0,$$

odkud

$$p_i = \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_B T} - 1\right).$$

Normujeme-li p_i na jedničku, získáme slavné Boltzmannovo rozdělení statistické fyziky

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i}{k_B T}\right),$$

kde $Z = \sum_i \exp(-\varepsilon_i/k_B T)$ je partiční suma.

K entropii můžeme dojít i jiným způsobem. Matematik Claude Shannon v padesátých letech minulého století zavedl funkci určující minimální množství informace v bitech nutné k přenosu zprávy. Mějme osm krabiček (nebo bitů). V jedné krabičce je bonbón (nebo jednička). Jakou minimální informaci (počet bitů) potřebujeme k tomu, abychom znali umístění bonbónu? Rozmyslete si, že je to právě $\log_2 8 = 3$. Na radu fyzika von Neumanna Shannon svou funkci pojmenoval entropie, neboť je matematicky ekvivalentní s termodynamickou entropií. Posléze se ukázalo, že souvislost mezi nimi je hlubší. Při přenosu informace je nutné vykonat určitou práci, která má například za následek zvýšení teploty systému. Takový systém se pak může nacházet ve více různých energetických stavech. Jeho popis se tím stane složitějším.

Simulované žíhání

Arzenál numerických metod nabízí velké množství účinných algoritmů pro hledání extrémů zadaných funkcí. Vybrali jsme pro vás jeden, který je obzvláště zajímavý z fyzikálního pohledu. Jde o takzvané *simulované žíhání* (*simulated annealing*), metodu, která se hodí obzvláště v případech, kdy má minimalizovaná funkce diskrétní (a přitom velmi obsáhlý) definiční obor.

Princip této metody je inspirován statistickou fyzikou. Pokud kov zahřátý na vysokou teplotu ochlazujeme dostatečně zvolna, dostaneme na konci velmi pravidelnou strukturu krystalické mřížky, která minimalizuje její energii.

Můžeme si tedy představovat, že zadaná funkce, kterou máme minimalizovat, představuje energii nějakého systému.

Zavedeme si „teplotu“ T tohoto systému, která bude ovlivňovat intenzitu simulovaných tepelných fluktuací v něm, a tu budeme v průběhu výpočtu snižovat.

Na začátku výpočtu, kdy je teplota vysoká, se systém může dostat prakticky do všech přípustných stavů. Se snižující se teplotou však jeho ochota podnikat kroky do energeticky vyšších stavů klesá a začíná se zdržovat spíše v oblastech s nižší energií. Nakonec pro velmi nízké teploty systém „zamrzne“ v minimu energie.

Obecně je toto minimum pouze lokální, ale díky pomalému ochlazení máme docela dobrou šanci, že nalezneme globální minimum. To je výhoda simulovaného

žihání proti primitivnějším algoritmům, které pouze mechanicky sledují směr nejrychlejšího klesání uvažované funkce a jsou tak poměrně náchylné k uváznutí v mělkém lokálním minimu.

Tolik tedy k teorii a teď už konečně k tomu, jak simulované žihání prakticky realizovat. Vše si popíšeme na konkrétním případu, a sice na slavném *problému obchodního cestujícího* (*travelling salesman problem* – TSP). Ten má uskutečnit okružní pracovní cestu po N daných městech a otázkou je, jak zvolit jejich pořadí, aby nacestovaná vzdálenost byla co nejmenší. O tomto problému je známo, že při jeho řešení nemáme prakticky jinou možnost než vyzkoušet všechny možné trasy⁴⁴. Při větším počtu měst je tedy hledání přesného řešení nad síly dnešních počítačů.

Naštěstí se však ukazuje, že některé algoritmy dokáží tento problém řešit s poměrně dobrými výsledky přibližně a hlavně v rozumném čase. Jedním z takových algoritmů je právě simulované žihání.

Než začneme psát vlastní program, musíme si rozmyslet, co bude naším konfiguračním prostorem (tj. množinou možných stavů). V případě TSP to bude zřejmě množina všech okružních cest po N městech. Dále musíme zvolit „energii“, kterou budeme minimalizovat. Nejjednodušší volbou bude položit ji rovnu celkové délce cesty.

Ještě si musíme ujasnit, jak budeme provádět v našem systému „fluktuační“. Potřebujeme v každém kroku provádět malé změny konfigurace. Přírozenou volbou⁴⁵ je vybrat náhodně jistý úsek cesty a změnit směr, ve kterém jím cestující projde.

Když takovou změnu provedeme, vypočítáme novou energii (délku), zjistíme její změnu ΔE oproti energii v předchozím stavu a vypočítáme pravděpodobnost P , s jakou tuto fluktuaci přijmeme (jinak se vrátíme k předchozímu stavu), jako

$$P = \exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right).$$

Je-li $P \geq 1$, změnu ponecháme vždy. V tomto vztahu T značí naši uměle zavedenou „teplotu“.

Popsaný krok budeme provádět mnohokrát za sebou a přitom budeme postupně snižovat teplotu, dokud se nestanou další změny v hodnotě energie natolik malými či málo pravděpodobnými, že by další pokračování výpočtu již nemělo smysl.

V předešlé větě, ačkoliv se může zdát zcela zřejmá a jasná, se ve skutečnosti skrývá největší problém při používání simulovaného žihání. Určení optimálního průběhu snižování teploty (jejíž počáteční hodnota by měla být řádově rovna maximálním změnám energie, které lze v systému při jednom kroku očekávat) a celkového počtu kroků většinou vyžaduje jisté experimentování. Pokud totiž není průběh žihání volen vhodně, můžeme touto metodou dostat dokonce horší

⁴⁴⁾ Samozřejmě si můžeme pomoci nějakými chytrými úvahami, kterými předem vyloučíme zjevně nesmyslné možnosti, ale ani tak svou situaci moc nezlepšíme.

⁴⁵⁾ Použitou například v Press, W. H.: *Numerical Recipes in C – The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press 1992. <http://www.nr.com>

výsledky, než by nám poskytla primitivní strategie zvolit vždy krok snižující energii.

Detailnější popis použití simulovaného žihání pro řešení TSP včetně klíčových částí kódu je možno nalézt ve studijním textu na webu. Pro zájemce o další informace o této metodě, kteří se nezaleknou trochy teorie, doporučujeme články⁴⁶ na internetu.

Úloha III. S ... pí-obvod

a) Integrujte metodou Monte Carlo funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Zkuste také numericky určit hodnotu tohoto integrálu od $-\infty$ do $+\infty$.

Návod: Funkce je symetrická vůči počátku, čili ji stačí integrovat na intervalu $[0, +\infty)$. Provedením substituce $x = 1/t - 1$ změňte meze integrálu od 0 do 1.

b) Máme k dispozici 50 rezistorů o odporech 50Ω a chceme z nich sestavit obvod, jehož celkový odpor v ohmech bude co nejlépe číslu π . Pokuste se metodou simulovaného žihání najít obvod, který by tomuto požadavku vyhovoval co nejlépe.

Pro určování celkového odporu obvodu si můžete přizpůsobit program, který najdete na našich webových stránkách.

Pokud se na tento úkol necítíte, můžete zkusit zahrnout do problému obchodního cestujícího zakřivení zemského povrchu a pokusit se jej vyřešit pro nějakou konkrétní množinu měst na Zemi (například všechna hlavní města v Evropě, USA atd.).

(řešení str. 159)

Kapitola 4: Kvantová mechanika

V této kapitole zabrousíme do vod kvantové mechaniky a zopakujeme si řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tentokrát se však na rozdíl od druhého dílu neomezíme na stacionární problémy, ale budeme již modelovat časový vývoj.

Budeme řešit známou Schrödingerovu rovnici, která má pro jednorozměrný případ bezstrukturní částice pohybující se v potenciálu daném funkcí $V(x)$ tvar

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t),$$

kde \hbar je jedna ze dvou inkarnací slavné Planckovy konstanty, m je hmotnost uvažované částice, i je imaginární jednotka (tedy $\sqrt{-1}$) a ψ je vlnová funkce, popisující stav částice. Kvadrát její absolutní hodnoty (jde o komplexní funkci) určuje hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v čase t v bodě x .

Někteří možná nejsou úplně kovaní v počítání s komplexními čísly, a tak si dovolíme Schrödingerovu rovnici přepsat na soustavu dvou PDR pro reálnou a imaginární část vlnové funkce. Ty už jsou normálními reálnými funkcemi, tedy nic

⁴⁶⁾ Například Ingber, L.: *Simulated Annealing: Practice versus Theory*.

http://www.ingber.com/asa93_sapvt.ps.gz

nového pod sluncem. Jestliže tedy zapíšeme vlnovou funkci jako

$$\psi(x, t) = \psi_R(x, t) + i\psi_I(x, t),$$

můžeme Schrödingerovu rovnici zapsat jako soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_R(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi_I(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{\hbar} V(x) \psi_I(x, t), \\ \frac{\partial \psi_I(x, t)}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi_R(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar} V(x) \psi_R(x, t). \end{aligned}$$

Dále se blíže podíváme na částici v poli harmonického oscilátoru, tedy na potenciál $V(x) = kx^2/2$, kde k je „tuhost“ oscilátoru. Dosadíme tedy a zároveň přejdeme od souřadnice x a času t k bezrozměrné souřadnici X a času τ definovaným vztahy

$$x = X \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{4mk}}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Dostaneme tak po úpravě

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_R(X, \tau)}{\partial \tau} &= -\frac{\partial^2 \psi_I(X, \tau)}{\partial X^2} + \frac{1}{4} X^2 \psi_I(X, \tau), \\ \frac{\partial \psi_I(X, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \psi_R(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{1}{4} X^2 \psi_R(X, \tau). \end{aligned}$$

Snadno se můžete přesvědčit, že tuto soustavu řeší například funkce

$$\begin{aligned} \psi_R(X, \tau) &= \exp\left(-\frac{X^2}{4}\right) \cos\left(\frac{\tau}{2}\right), \\ \psi_I(X, \tau) &= -\exp\left(-\frac{X^2}{4}\right) \sin\left(\frac{\tau}{2}\right). \end{aligned}$$

Ty představují stacionární gaussovský vlnový balík se středem v počátku souřadnic (hustota pravděpodobnosti je $P(X, \tau) = |\psi_R(X, \tau)|^2 + |\psi_I(X, \tau)|^2 = \exp(-X^2/2)$).

Úloha IV.S ... kvantový harmonický oscilátor

Modelujte časový vývoj vlnové funkce částice, kterou umístíte do potenciálu $V(x) = kx^2/2$ a která je v čase $\tau = 0$ popsána vlnovou funkcí

$$\begin{aligned} \psi_R(X, 0) &= \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right), \\ \psi_I(X, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Jedná se tedy o vlnový balík se středem mimo počátek. Prozradíme vám, že jde o tzv. *koherentní stav harmonického oscilátoru* a vlnový balík by měl harmonicky kmitat kolem počátku s úhlovou frekvencí $\sqrt{k/m}$ stejně jako klasická částice.

Pokud se vám toto podaří namodelovat, můžete vyzkoušet, jak se budou chovat vlnové balíky o jiné šířce (tedy se jmenovatelem v exponenciále odlišným od čtyř), případně jak bude situace vypadat při jiném průběhu potenciálu.

(řešení str. 163)

Kapitola 5: Numerické integrování

Tento díl našeho seriálu věnujeme praktickému využití numerické integrace, řešení rovnic a ODR ve dvou problémech z oblasti statistické fyziky, termodynamiky a astrofyziky.

Popis příslušných numerických metod, které se nám nevešly sem ani nebyly popsány v některém z předchozích dílů seriálu (např. řešení rovnic), můžete najít v našem studijním textu *Úvod do programování* na internetu.

Integrační triky

Úvodem si povězte, jakým způsobem můžeme numericky počítat integrály, jejichž některá z mezí je nevlastní (tj. $\pm\infty$). Evidentně nelze užít žádnou z ekvivalentních formulí (obdélníková, lichoběžníková či Simpsonova metoda).

Velmi jednoduchým řešením tohoto problému je převést integrál vhodnou substitucí na integraci v konečných mezích. Například integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

můžeme substitucí $x = \operatorname{tg} \varphi$ převést na

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{f(\operatorname{tg} \varphi)}{\cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Podmínkou použitelnosti tohoto vztahu je, aby funkce $f(x)$ pro $x \rightarrow \infty$ klesala alespoň tak rychle jako $1/x^2$. Pro první úlohu této série by se nám mohla hodit substituce $t = 1/\sqrt{1+x^2}$, která převede integrál typu

$$\int_0^{+\infty} f(\sqrt{1+x^2}) dx$$

na jednodušeji numericky řešitelný integrál

$$\int_0^1 \frac{f(t^{-1})}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt.$$

Dalším užitečným nástrojem pro numerickou integraci je takzvaná *Rombergova metoda*, která umožňuje získat použitím jednoduchých integračních schémat (např. lichoběžníkové metody) mnohem vyšší přesnost než by mohla poskytnout příslušná metoda samotná. Princip tohoto důmyslného algoritmu spočívá v použití jednodušší metody pro několik různých hodnot integračního kroku h_i a následné extrapolaci získaných výsledků I_i do $h = 0$.

Obzvláště vhodným a zároveň jednoduchým způsobem jak toto provést, je nalezení polynomu $P(x)$, který pro jednotlivé hodnoty kroku h_i nabývá vypočítaných hodnot integrálu I_i . Při použití lichoběžníkové metody přitom tento polynom může být funkcí h^2 místo h . Požadujeme tedy $P(h_i^2) = I_i$. Jak takový polynom najít? Stačí si všimnout, že polynom

$$(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdot \dots \cdot (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (x - h_N^2)$$

je nulový ve všech bodech h_i^2 kromě h_k^2 . Proto polynom

$$I_k \frac{(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdot \dots \cdot (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (x - h_N^2)}{(h_k^2 - h_1^2)(h_k^2 - h_2^2) \cdot \dots \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2)(h_k^2 - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (h_k^2 - h_N^2)}$$

nabývá hodnoty I_k v h_k^2 a je nulový v ostatních h_i^2 . Polynom, který hledáme, je tedy dán součtem výše uvedených dílčích polynomů pro všechna k

$$P(x) = \sum_{k=1}^N I_k \frac{(x - h_1^2)(x - h_2^2) \cdot \dots \cdot (x - h_{k-1}^2)(x - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (x - h_N^2)}{(h_k^2 - h_1^2)(h_k^2 - h_2^2) \cdot \dots \cdot (h_k^2 - h_{k-1}^2)(h_k^2 - h_{k+1}^2) \cdot \dots \cdot (h_k^2 - h_N^2)}.$$

Extrapolovaná hodnota integrálu pro $h = 0$ je pak rovna $P(0)$. Algoritmus realizující Rombergovu integraci je pro vaši inspiraci k dispozici v demonstračním programu `romberg.pas`.

Statistika nuda je?

Abychom se mohli pustit do úloh, musíme si nejdříve projít nezbytným teoretickým úvodem do statistické fyziky⁴⁷.

V rámci statistické fyziky lze odvodit takzvané (Gibbsovo) kanonické rozdělení, podle něhož je pravděpodobnost nalezení systému, udržovaného na konstantní teplotě T kontaktem s tepelným rezervoárem, v mikrostavu o energii E úměrná výrazu

$$\exp\left(-\frac{E}{kT}\right).$$

Máme-li tedy systém mnoha neinteragujících částic, z nichž každá se může nacházet v některém ze stavů s energiemi E_1, E_2, \dots , bude střední počet částic v každém z těchto stavů úměrný $\exp(-\beta E_i)$, kde β je zkrácené označení pro $1/kT$. Tento závěr je třeba poněkud poopravit, pokud jsou uvažované částice principiálně nerozlišitelné (což je například případ elementárních částic). Pak je počet částic v mikrostavu s energií E roven

$$N(E) = \frac{1}{\exp(\beta(E - \mu)) \pm 1},$$

⁴⁷⁾ Ve skutečnosti je toto označení dosti nadsazené – zájemcům o bližší porozumění doporučujeme náš text o statistické fyzice, který najdete na webu FYKOSu, seriál FYKOSu z roku 2005/6 či knihu J. Kvasnica: *Statistická fyzika*.

kde μ je tzv. Fermiho energie (nebo též chemický potenciál) a znaménko ve jmenovateli závisí na tom, zda jsou uvažované částice bosony (částice s celočíselným spinem) nebo fermiony (částice s poločíselným spinem). V prvním případě je třeba volit znaménko $-$, ve druhém $+$. Celkový počet částic pak je

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) \pm 1}.$$

Tento výraz lze dále upravit v případě, že rozdíly mezi energiemi kvantovaných energetických hladin jsou mnohem menší než kT , a tedy diskrétní systém energetických stavů lze považovat za kontinuum (s hustotou $1/h^3$ stavů na jednotkový objem fázového prostoru, kde h je Planckova konstanta). Sumu pak lze nahradit integrálem

$$N = \frac{s}{h^3} \int \int \frac{1}{\exp(\beta(E(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu)) \pm 1} d^3x d^3p,$$

kde s značí počet možných kvantových stavů příslušných jedné hodnotě energie částice (např. pro částici se spinem $1/2$ je $s = 2$, neboť existují dvě možné projekce spinu). Předpokládáme-li dále, že energie částice nezávisí na poloze, ale jen na velikosti hybnosti, přejde integrace přes prostorovou souřadnici jednoduše na násobení celkovým objemem V , ve kterém jsou částice uzavřeny, a element d^3p můžeme díky sférické symetrii zapsat jako $4\pi p^2 dp$. Dostaneme tak

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(E(p) - \mu)) \pm 1} dp.$$

Pokud budeme částice považovat za volné, můžeme použít obecně platný speciálně relativistický vztah $E(p) = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}$, kde E_0 je klidová energie částice a c rychlost světla, čímž získáme vztah

$$\frac{N}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) \pm 1} dp.$$

Podobně jako jsme právě odvodili vztah pro celkový počet částic, můžeme vynásobením počtu částic v každém stavu jeho energií a analogickými úpravami dostat následující vzorec pro vnitřní energii

$$\frac{U}{V} = \frac{4\pi s}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)) \pm 1} dp.$$

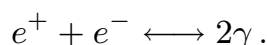
Tyto vztahy platné pro tzv. *fermionový*, resp. *bosonový plyn* nám nyní pomohou numericky řešit následující úlohu.

Horká dutina

Mějme prázdnou uzavřenou dutinu o teplotě T . Ta bude v termodynamické rovnováze obsahovat elektromagnetické záření o objemové hustotě energie $4\sigma T^4/c$, kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Představme si nyní, že dutina je

opravdu hodně horká, takže v ní může docházet ke kreaci párů elektron-pozitron. V rovnováze se vyrovná rychlost, s jakou páry vznikají, a rychlost, s jakou anihilují. Zajímalo by nás, jaká bude rovnovážná koncentrace elektronů a pozitronů při nějaké dané teplotě. Mohlo by se zdát, že pro rozřešení tohoto problému nemáme dostatek bližších informací o procesu kreace a anihilace. Zde se však ukazuje obrovská obecnost termodynamiky a jejích principů.

Ty nám říkají, že při libovolné (nejen) chemické reakci je v rovnováze součet chemických potenciálů μ jednotlivých zúčastněných složek vážených příslušnými stechiometrickými koeficienty (s patřičným znaménkem podle toho, zda jde o reaktant či produkt) nulový. Tedy v našem případě



Vzhledem k charakteristické vlastnosti fotonů, kterou je nulovost jejich chemického potenciálu (za každých podmínek), pak dostáváme podmínku rovnováhy

$$\mu_+ + \mu_- = 0.$$

Označíme-li si počet elektronů, resp. pozitronů na jednotkový objem jako n_- , resp. n_+ , pak získáme použitím výše odvozeného vztahu pro fermionový plyn (v němž položíme $s = 2$ a dosadíme vzájemně opačné hodnoty μ)

$$n_-(\mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - \mu)) + 1} dp,$$

$$n_+(\mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2c^2} + \mu)) + 1} dp.$$

Tyto integrály nelze počítat analyticky, ale numerické metody nám ochotně přispěchají na pomoc.

Hodnotu μ můžeme určit, je-li dán např. celkový náboj Q všech částic v dutině. Ten je evidentně roven $Q = e(n_+(\mu) - n_-(\mu))$. Tak dostáváme rovnici pro μ , kterou numericky vyřešíme, a dopočítáme koncentrace elektronů a pozitronů. Zvlášť můžeme řešit jednodušší případ $Q = 0$, kdy je zřejmě $\mu = \mu_+ = \mu_- = 0$.

Bílý trpaslík

V další úloze zůstaneme u fermionového (konkrétně elektronového) plynu, tentokrát v přiblížení nízkých teplot, kdy je elektronový plyn takzvaně degenerovaný. Závislost jeho tlaku na objemové koncentraci částic je dána stavovou rovnicí⁴⁸

$$P = \frac{3}{8} E_0 n_0 \left(\frac{1}{3} \nu^{1/3} \sqrt{\nu^{2/3} + 1} \left(2\nu^{2/3} - 3 \right) + \ln \left(\sqrt{\nu^{2/3} + 1} + \nu^{1/3} \right) \right),$$

⁴⁸⁾ Všimněme si zajímavé věci – tlak degenerovaného elektronového plynu nezávisí na teplotě (při nízkých teplotách).

kde ν je bezrozměrná koncentrace částic definovaná jako $\nu = n/n_0$, přičemž

$$n_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E_0}{hc} \right)^3.$$

Se znalostí této závislosti můžeme vytvořit jednoduchý model bílého trpaslíka – pozdního stádia vývoje méně hmotných hvězd (mimořádně i našeho Slunce). V rovnováze musí tlak uvnitř hvězdy splňovat hydrostatickou rovnici $\nabla P = \rho \mathbf{K}$, kde ρ je hustota plynu a \mathbf{K} intenzita gravitačního pole. V případě sféricky symetrické hvězdy je velikost \mathbf{K} rovna $GM(r)/r^2$, kde $M(r)$ je hmotnost hvězdné hmoty uvnitř koule o poloměru r . Funkce $M(r)$ je s hustotou $\rho(r)$ svázána vztahem $M'(r) = 4\pi\rho(r)r^2$ (tento vztah lze odvodit jednoduchou úvahou o hmotnosti kulové slupky o poloměru r a tloušťce dr). Hvězda je tedy popsána soustavou následujících diferenciálních rovnic

$$\frac{dP(r)}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (65)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (66)$$

pro neznámé funkce $\rho(r)$, $P(r)$ a $M(r)$. Přitom jsou $\rho(r)$ a $P(r)$ svázány právě výše uvedenou stavovou rovnicí $P = f(n)$. Pokud na jeden elektron připadá hmotnost⁴⁹ m , pak platí $\rho(r) = mn(r)$, tedy $P(r) = f(\rho(r)/m)$. První diferenciální rovnici tak ještě můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{1}{m} f' \left(\frac{\rho(r)}{m} \right) \frac{d\rho(r)}{dr} = -G \frac{M(r)\rho(r)}{r^2}.$$

Přitom vezme, že derivace $f'(n)$ poměrně děsivého výrazu pro tlak degenerovaného elektronového plynu se po všech úpravách zjednoduší na docela sympatický tvar

$$f'(n) = E_0 \frac{\nu^{2/3}}{3\sqrt{\nu^{2/3} + 1}},$$

který dosadíme do naší diferenciální rovnice (kde $\nu = n/n_0 = \rho(r)/mn_0$).

Zbývají tedy jen dvě neznámé funkce $M(r)$ a $\rho(r)$, pro něž máme dvě ODR. Přitom zřejmě musí být $M(0) = 0$ a $\rho(0)$ si můžeme libovolně zvolit. Nic nám proto nebrání začít řešit numericky (po případném vhodném zavedení bezrozměrných veličin).

⁴⁹⁾ Pozor! Nejde jednoduše o hmotnost elektronu. Při určitém rozložení elektronů ve hvězdě se v důsledku působení elektrických sil stejným způsobem rozloží i atomová jádra. Můžeme si tedy představit, že každý elektron v průměru doprovází část atomového jádra. Je-li tedy například hvězda tvořena héliem, je m rovno polovině hmotnosti atomu hélia. I když musíme do našich úvah zahrnout hmotnost jader, jejich příspěvek k celkovému tlaku můžeme zanedbat, neboť například héliová jádra tvoří bosonový plyn, jehož tlak při nízkých teplotách (na rozdíl od tlaku plynu fermionového) klesá k nule.

Na závěr snad ještě uspokojíme zvědavost čtenáře, kterého jistě napadla otázka, jak můžeme model elektronového plynu pro nízké teploty aplikovat na hvězdu. Nízké teploty, pro které platí model degenerovaného plynu, jsou nízké vzhledem k μ , tj. $kT \ll \mu$. Tato nerovnost je však pro elektrony a jejich typickou hustotu uvnitř bílého trpaslíka dobře splněna i při teplotách, které bychom normálně za nízké rozhodně nepovažovali.

Úloha V.S ... *horká dutina a bílý trpaslík*

- a) Určete závislost koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě při celkovém náboji $Q = 0$ v prázdné uzavřené horké dutině. (Bude-li se vám chtít, i při jiných vámi zvolených hodnotách Q). Dále určete závislost poměru vnitřní energie U_e elektronů a pozitronů ku celkové vnitřní energii systému U (tj. součtu energie elektromagnetického záření a částic) na teplotě a hodnoty teploty odpovídající některým význačným hodnotám tohoto poměru (např. $3/4$, $1/2$, $1/4, \dots$; může tento poměr nabývat všech těchto hodnot?).

Pokuste se své výsledky pěkně graficky zpracovat ve formě grafů (můžete zkusit i trojrozměrné).

Při vašem snažení vám může hodně pomoci, pokud si zavedete vhodné bezrozměrné jednotky (např. βE_0 místo β apod.).

- b) Řešte soustavu diferenciálních rovnic (65), (66) pro $M(r)$ a $\rho(r)$ v modelu bílého trpaslíka pro několik vhodně zvolených hodnot $\rho(0)$ a pro každou z nich sledujte hodnotu, ke které se blíží $M(r)$ při $r \rightarrow \infty$. Ta je zřejmě rovna hmotnosti celé hvězdy. Pokuste se prozkoumat závislost této celkové hmotnosti na $\rho(0)$ a odhadnout její horní mez. Srovnajte váš výsledek s horní mezí hmotnosti bílého trpaslíka, kterou najdete v literatuře nebo na internetu. Uvažujte, že je hvězda tvořena héliem.

(řešení str. 167)

Kapitola 6: *To nejlepší na konec*

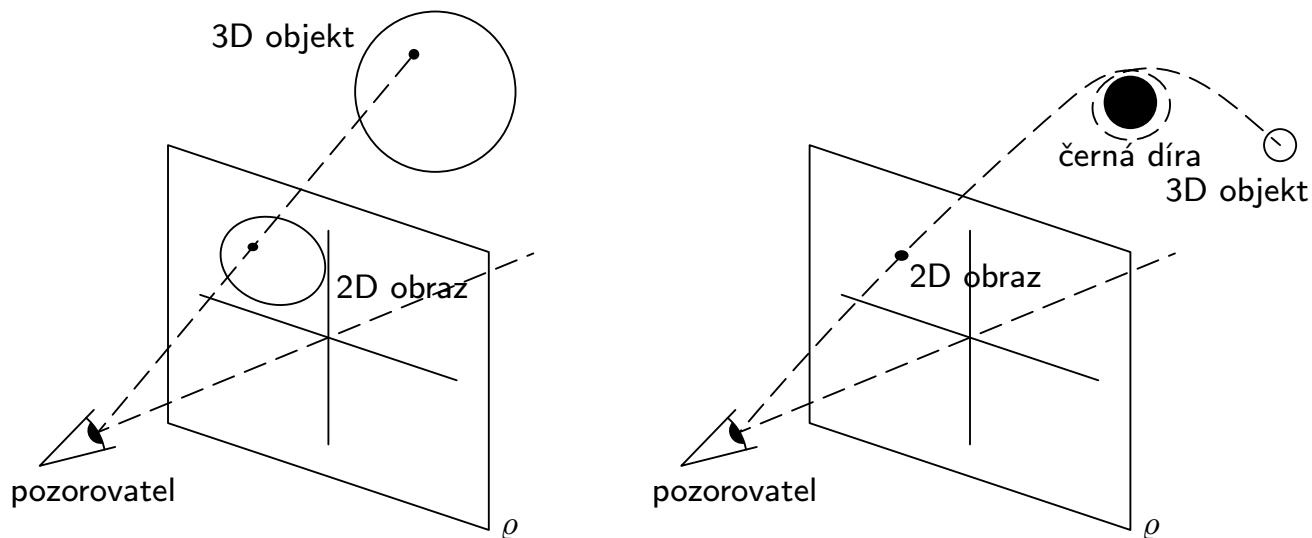
Raytracing

Jistě jste někdy slyšeli o efektu tzv. gravitační čočky, tj. odchylování světelných paprsků v okolí velmi hmotných těles. Lze očekávat, že tento fyzikální jev bude mít například v blízkosti černé díry⁵⁰ za následek spektakulární vizuální efekty – světlo může oběhnout kolem díry (i vícekrát) a vrátit se k pozorovateli – ten pak uvidí obraz sebe sama. Efektní obrázky typu, *jak to vypadá poblíž černé díry*, se dají vytvořit užitím metody zvané *raytracing* (sledování paprsku), jejíž základní princip zde popíšeme.

Nejdříve si ujasněme, jakým způsobem se vytváří například na obrazovce počítače dvourozměrný obraz trojrozměrné situace. Mezi pozorovatelem a pozorovaným objektem se umístí myšlená rovina ρ . Sledujeme-li pak paprsek směřující

⁵⁰⁾ Černá díra je extrémně masivní objekt, který ve svém gravitačním poli může uvěznit i světlo.

z určitého bodu objektu do oka (kamery, fotoaparátu atd.) pozorovatele, zaznamenejme průsečík tohoto paprsku s rovinou ϱ (viz obrázek 54) a toto provedeme pro všechny⁵¹ body objektu, pak takto vzniklý obraz ve dvourozměrné rovině je z hlediska pozorovatele ekvivalentní s původní trojrozměrnou scénou. Samozřejmě je přirozené zobrazovat pouze ty body, jejichž obraz padne do určité omezené oblasti roviny ϱ , která odpovídá zornému poli lidského oka.



Obr. 54. Princip raytracingu. Vlevo jednoduchá situace s rovnoměrným šířením paprsků. Vpravo složitější situace – je třeba použít sledování paprsku „pozpátku“

V principu můžeme při vykreslování trojrozměrné scény na počítači metodou raytracingu postupovat dvěma způsoby. Buď procházíme všechny body zobrazovaného objektu a pro každý zkonstruujeme a vykreslíme příslušný bod v rovině ϱ , nebo procházíme všechny body (pixely) roviny ϱ , pro každý zjistíme, zda odpovídající paprsek protne zobrazovaný objekt, a podle toho jej vykreslíme, resp. nevykreslíme.

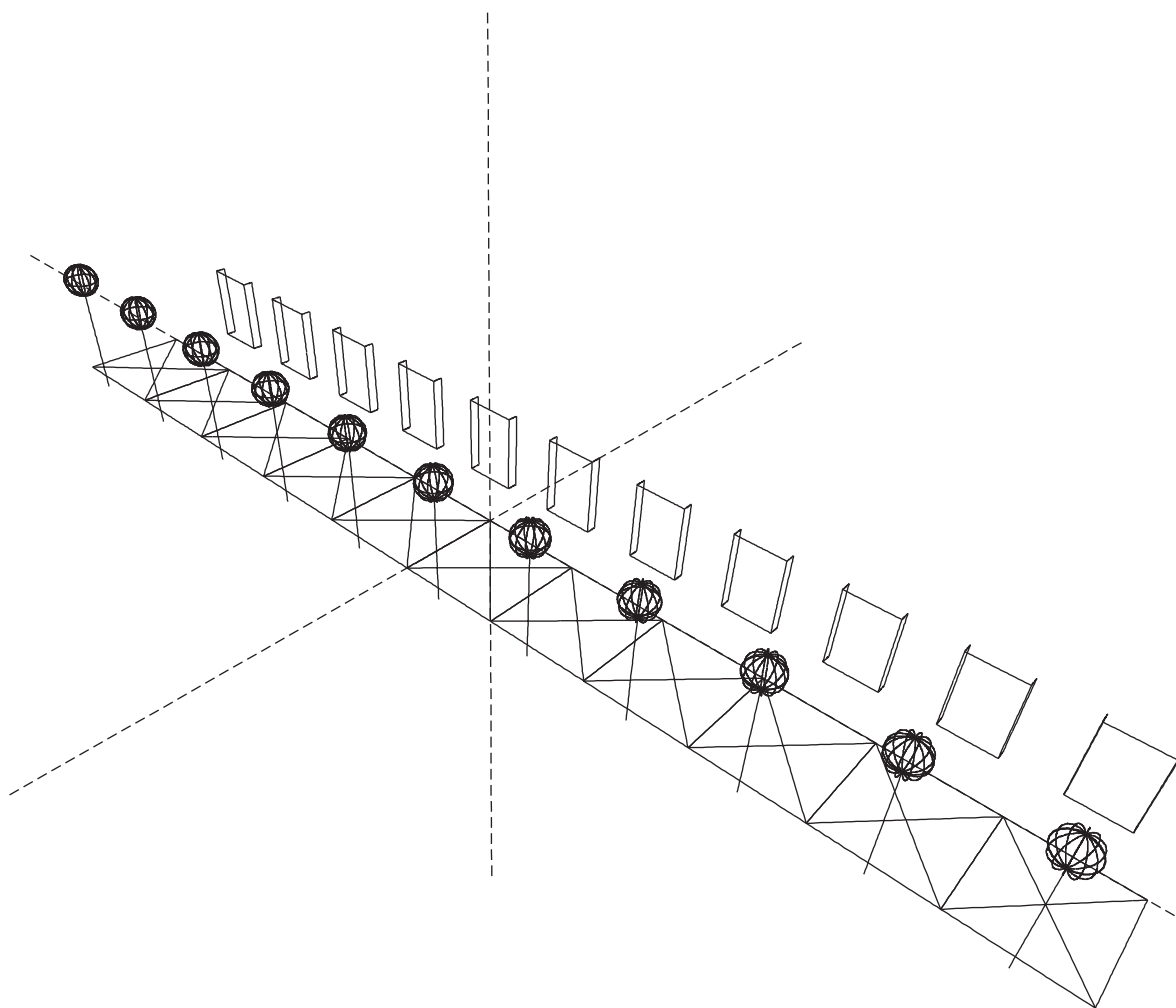
Nevýhodou prvního přístupu je, že ne vždy můžeme jednoduše určit dráhu světelného paprsku, který prochází dvěma danými body. Jednou z takových situací je právě vyšetřování zmíněného odchylování světla v gravitačním poli (viz obrázek 54 vpravo).

V tomto ohledu je výhodnější druhý přístup – je dán bod, kterým má paprsek procházet (oko pozorovatele), a směr paprsku v tomto bodě (ten je určen průsečíkem s rovinou ϱ – přitom předpokládáme přímý chod paprsku mezi okem a touto rovinou). Jelikož je dráha paprsku většinou dána nějakou diferenciální rovnicí, ocitáme se zde na známé půdě. Je třeba řešit ODR s danými počátečními podmínkami. Nevýhodou tohoto přístupu ovšem je, že musíme umět najít průsečík známého paprsku s pozorovaným objektem. To však může být zejména v případě komplikovaných tvarů velmi obtížné.

⁵¹⁾ V praxi samozřejmě vybereme jen konečně mnoho bodů objektu, které pak zobrazíme. Je-li objektem například křivka, pokryjeme ji rozumným množstvím pokud možno rovnoměrně rozmístěných bodů a ty nakonec opět pospojujeme.

První přístup můžeme použít například tehdy, když se paprsky šíří přímočaře. Ač to může na první pohled vypadat jako poměrně nudný případ, pokusíme se vás přesvědčit o opaku. Uvažujme nějakou statickou trojrozměrnou scénu a představme si, že skrz ni prolétáme velmi vysokou (tj. relativistickou) rychlostí. Co uvidíme? Zajímá nás vzhled scény, jak ji vidí pohybující se pozorovatel v nějakém pevně daném bodě P své dráhy.

Bodem P v každém okamžiku (bez ohledu na to, zda tam pozorovatel je, nebo není) procházejí paprsky ze všech odtud viditelných bodů scény. Tyto paprsky jsou přímé, a nedělá nám tedy problém určit směr jejich šíření. Takto ovšem zjistíme směr šíření paprsku vzhledem ke statické scéně. Abychom zjistili jeho směr vzhledem k pozorovateli (a následně provedli známou proceduru s rovinou ϱ), stačí provést Lorentzovu transformaci, která ve speciální teorii relativity popisuje vztah mezi dvěma vůči sobě se pohybujícími inerciálními vztažnými systémy.



Obr. 55. Ukázková trojrozměrná scéna

Jsou-li n_x , n_y a n_z souřadnice jednotkového vektoru ve směru šíření paprsku a f jeho frekvence, pak čtveřice čísel $(f, n_x f, n_y f, n_z f)$ představuje tzv. vlnový čtyřvektor. Je-li souřadná soustava zvolena tak, že pohyb pozorovatele se děje rychlostí v ve směru osy z (takovou volbu můžeme provést bez újmy na obecnosti), pak vlnový čtyřvektor transformovaný do vztažné soustavy spojené s pozorovate-

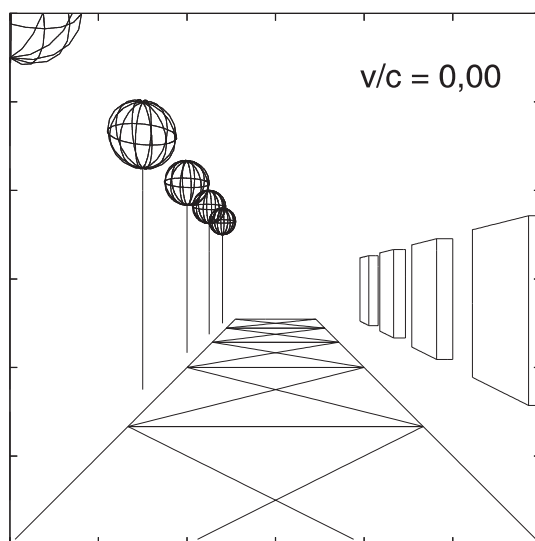
lem je

$$(f', f'n'_x, f'n'_y, f'n'_z) = (f(1 - \beta n_z)\gamma, fn_x, fn_y, f(n_z - \beta)\gamma),$$

kde β je zkrácené označení pro výraz v/c a γ pro $1/(\sqrt{1 - \beta^2})$.

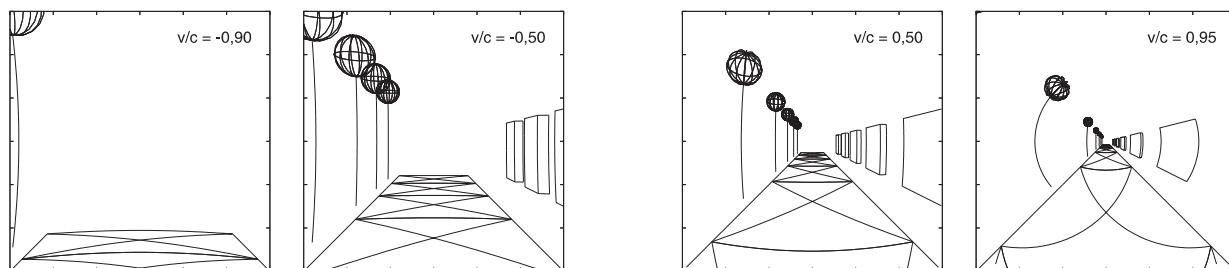
Odtud snadno vypočítáme transformované složky n'_x , n'_y a n'_z směrového vektoru paprsku (a frekvenci f' , zajímá-li nás i vliv Dopplerova jevu). Pak již jistě dokážeme určit průsečík takto definovaného paprsku s rovinou ρ a tím je konstrukce obrazu viděného pozorovatelem dokončena.

Naše teoretické povídání ukončíme ukázkou několika obrázků získaných právě popsanou metodou⁵². Pro demonstraci jsme použili scénu znázorněnou na obrázku 55. Pozorovatel je v okamžiku zachycení obrázku v počátku, dívá se v „podélném směru“, který je také směrem jeho rychlosti. Obraz, který vidí při nulové rychlosti, ukazuje obrázek 56.



Obr. 56. Scéna z obrázku 55, jak ji vidí nehybný pozorovatel

Obrazy, které náš pozorovatel vidí při pohybu relativistickými rychlostmi, jsou pro několik hodnot v (kladných při pohybu ve směru pohledu) znázorněny na obrázku 57.



Obr. 57. Scéna z obrázku 55 z pohledu relativistického pozorovatele při různých rychlostech

⁵²⁾ Na FYKOSích stránkách je umístěno i několik krátkých animovaných sekvencí.

Chaos

Některé poměrně jednoduché mechanické systémy se chovají až překvapivě komplikovaným způsobem. Typickým příkladem je proslulý problém tří těles působících na sebe gravitační silou, který přes svou zdánlivou jednoduchost není analyticky řešitelný. Dalším systémem z podobného soudku je takzvané dvojkyvadlo. Jde o dvě kyvadla, z nichž jedno je upevněné na konec druhého (viz obrázek 58). Tento systém, jakož i široká škála jiných (kulička v pinballu, turbulentně proudící kapalina atd.) se vyznačuje tzv. chaotickým chováním. Chování takových systémů je extrémně citlivé na nastavení počátečních podmínek.

Ilustrujme to na již zmíněném dvojkyvadle. Na obrázku 59 jsou znázorněny polohy dvou dvoukyvadla v několika různých časech po vypuštění z klidu v čase $t = 0$ s. Počáteční úhly natočení jejich ramen se liší o pouhou desetitisícinu úhlového stupně. Tento rozdíl je natolik malý, že se na pohybu obou kyvadel prakticky neprojeví až do času cca $t = 10$ s. Potom se ovšem rozdíly v jejich pohybech dramaticky zvětšují a pro dostatečně velké časy již z okamžitého pozorování nemůžeme na první pohled (tj. bez zpětné integrace pohybových rovnic) usoudit, že obě kyvadla začínala svůj pohyb v téměř identickém počátečním stavu.

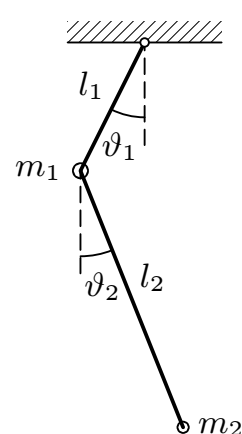
Ukazuje se, že pro chaotické systémy se typicky rozdíl Δ v jejich vývoji způsobený poněkud odlišnými počátečními podmínkami s časem zvětšuje přibližně exponenciálně. Tedy například rozdíl v natočení ramen dvou dvojkyvadla by měl alespoň pro malé časy růst úměrně $e^{\lambda t}$ (pro velké časy samozřejmě brání dalšímu růstu omezení úhlů na interval $(0, 2\pi)$), kde λ je tzv. Lyapunovův exponent. Ten je důležitou charakteristikou každého chaotického systému. Pro různé nastavení počátečních podmínek obou sledovaných systémů mohou vyjít různé hodnoty Lyapunovova exponentu, obvykle nás však zajímá ta nejvyšší, protože nám dává horní odhad „předvídatelnosti“ systému.

Pohybové rovnice pro dvojité kyvadlo jsou

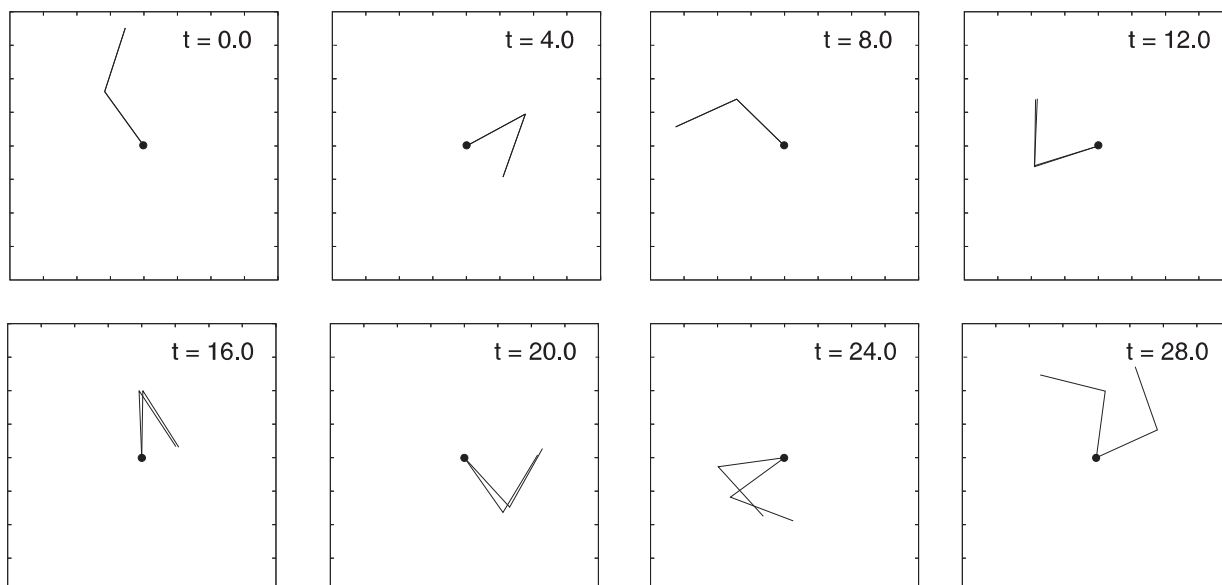
$$\begin{aligned} \varkappa \ddot{\vartheta}_1 - \mu \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \mu \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \omega^2 \sin \vartheta_1 &= 0, \\ \ddot{\vartheta}_2 - \varkappa \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \varkappa \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \omega^2 \sin \vartheta_2 &= 0, \end{aligned}$$

kde $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$, $\varkappa = l_1/l_2$ a $\omega^2 = g/l_2$.

Pokud byste si chtěli dvojkyvadlo blíže osahat hravou formou, vřele doporučujeme webovou stránku <http://www.mypysicslab.com/>.



Obr. 58.
Schéma dvojkyvadla a označení jeho parametrů



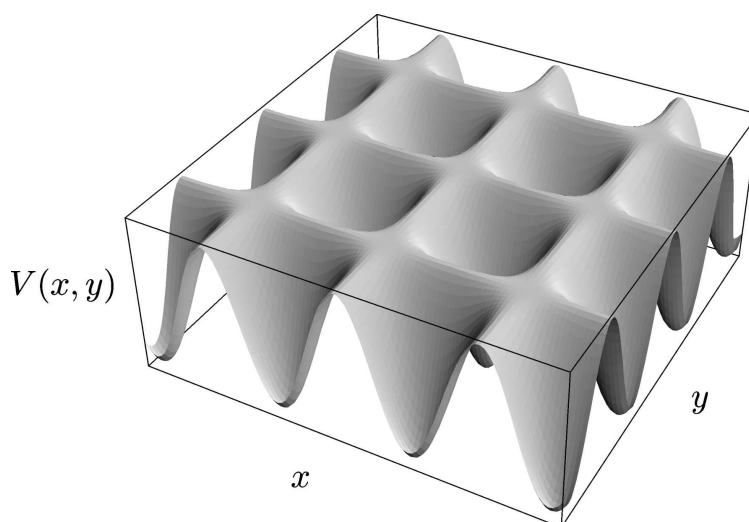
Obr. 59. Časový vývoj dvou dvojkvadel s mírně odlišnými počátečními podmínkami

Dalším chaotickým systémem, kterým se můžeme zabývat, je hmotný bod v dvourozměrném prostoru s periodickým potenciálem daném například vztahem

$$V(x, y) = -\sin^2 x \sin^2 y.$$

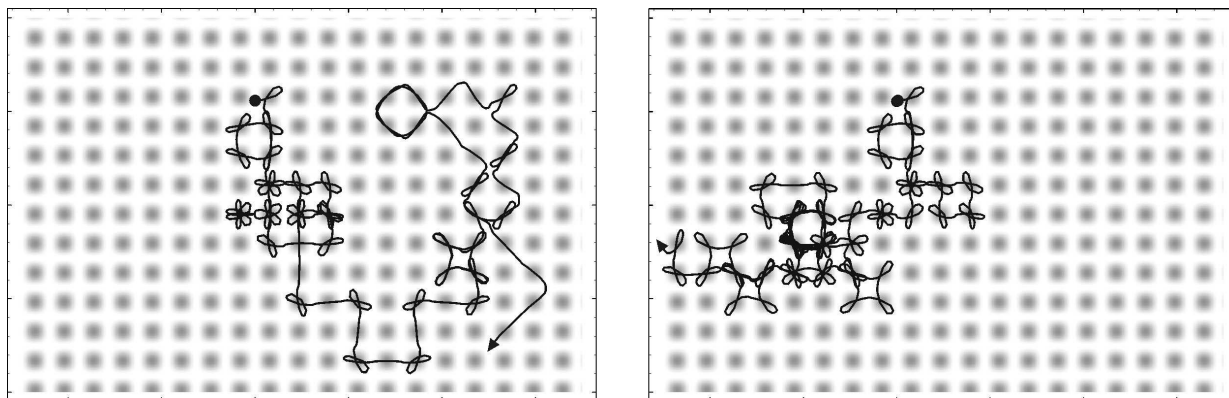
Průběh takového potenciálu je znázorněn v grafu na obrázku 60.

Pokud je celková energie hmotného bodu jen o málo větší než nula, bude se vždy poměrně dlouho pohybovat v jedné z „buněk“, časem ovšem přeskočí do některé sousední, přičemž je velmi obtížně předvídatelné do které. Celý proces je tedy extrémně citlivý na počáteční podmínky.



Obr. 60. Graf periodického potenciálu $V(x, y)$

Obrázek 61 ukazuje trajektorie dvou hmotných bodů pohybujících se v potenciálu V , jejichž počáteční rychlosti se liší na místě deváté platné číslice. Opět vidíme, že i zdánlivě zanedbatelný rozdíl se časem významně projeví.



Obr. 61. Pohyb dvou hmotných bodů s mírně odlišnými počátečními podmínkami v potenciálu $V(x, y)$

Úloha VI. S ... na přání

Vyberte si jeden z následujících problémů a numericky jej vyřešte.

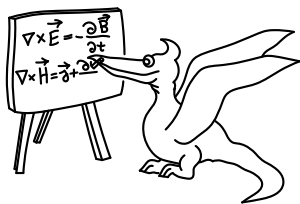
- a) Pokud vás povzbudil pohled na obrázky z raytracingu a chtěli byste si něco podobného vyzkoušet také, můžete se pokusit o vytvoření vlastního programu na vizualizaci vzhledu objektů z hlediska relativistického pozorovatele. Klidně se zkuste poprat i se zmíněnou černou dírou. K tomu je však vhodnější využít druhý popsáný přístup a sledovat paprsek pozpátku od oka pozorovatele až k jeho průsečíku se sledovaným objektem. Prozradíme, že světelný paprsek se v okolí sféricky symetrického objektu o hmotnosti⁵³ M v polárních souřadnicích r a φ (pohyb každého paprsku je rovinný, stačí tedy dvě souřadnice) pohybuje podle diferenciální rovnice

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}.$$

- b) Vyberte si nějaký chaotický systém a proveďte pro něj dostatečný počet numerických simulací, abyste z nich mohli statisticky vyhodnotit, zda skutečně platí zmíněná exponenciální závislost Δ na čase. Pokud ano, proveďte odhad hodnoty maximálního Lyapunovova exponentu. Podle uvážení můžete sledovat i jiné aspekty chování chaotických systémů.

(řešení str. 177)

⁵³⁾ Užíváme zde tzv. geometrizované jednotky, v nichž má hmotnost rozměr vzdálenosti a Schwarzschildův poloměr (poloměr sféry, z níž není návratu) je roven $2M$. Pro převod do klasického značení stačí všude namísto M psát výraz GM/c^2 .



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.5 ... gravitace

Uvažujte dvě stejně těžké hvězdy, které kolem sebe obíhají po kružnici. Po ose této kružnice se k nim začne náhle přibližovat hvězda třetí, která má na začátku stejnou rychlost, jakou se pohybují hvězdy obíhající, a rovněž sdílí i jejich hmotnost. Počítačově nasimulujte, co se bude dít.

Na první pohled se může zdát, že není-li konkrétně zadána hmotnost hvězd M ani poloměr R trajektorie obíhající dvojice, pak nejsme schopni o jejich pohybu nic kloudného říct. Naštěstí je však opak pravdou. Změnou hmotnosti se nezmění charakter pohybu, ale pouze škála jeho charakteristických rozměrů a časů (jako bychom např. zvětšili, resp. zmenšili obraz a pustili záznam zpomalně, resp. zrychleně). Pokud si zavedeme bezrozměrný čas τ a prostorové průvodiče $\boldsymbol{\rho}_i$ následujícím způsobem

$$t = \tau \sqrt{\frac{R^3}{\kappa M}}, \quad \boldsymbol{r}_i = R \boldsymbol{\rho}_i,$$

získají pohybové rovnice zvláště jednoduchý tvar

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_i}{d\tau^2} = \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i}{|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i|^3},$$

v němž už nefiguruje M ani R .

Domluvíme-li se, že obíhající hvězdy se budou na počátku pohybovat v rovině xy okolo počátku, pak počáteční podmínky budou⁵⁴

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1 &= (-1, 0, 0), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_1}{d\tau^2} &= (0, -\frac{1}{2}, 0), \\ \boldsymbol{\rho}_2 &= (1, 0, 0), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_2}{d\tau^2} &= (0, \frac{1}{2}, 0), \\ \boldsymbol{\rho}_3 &= (0, 0, -\infty), & \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_3}{d\tau^2} &= (0, 0, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Tyto rovnice už můžeme jednoduše řešit, máme-li k dispozici slušný program pro modelování gravitační interakce těles. Stačí položit hodnotu gravitační konstanty a hmotností všech tří hvězd za jednotkové, nastavit příslušné počáteční polohy a rychlosti a spustit simulaci.

⁵⁴⁾ Symbol ∞ zde pouze reprezentuje „hodně velké“ číslo.

Pascalovský program `gravitace.pas`, který příslušný výpočet provádí pomocí Runge-Kuttovy metody 4. řádu, si můžete stáhnout z webu FYKOSu. Jde o jednoduchý „simulátor gravitace“, do kterého můžeme snadno „nasázet“ libovolný (rozumný) počet těles a pak například pomocí gnuplotu kreslit jejich trajektorie.

„Vnější“ hvězdu jsme při simulaci na začátku umístili na osu z do vzdálenosti 1000 (bezrozměrných jednotek) od počátku. Tato vzdálenost je vzhledem k rozměrům soustavy obíhajících hvězd velmi velká, a tak můžeme přibližně říct, že vnější hvězda přiletěla „z nekonečna“.

Velikost kroku při řešení pohybových rovnic jsme nastavili na 0,02 (bezrozměrné jednotky času). Tento krok je snad dostatečně malý – za takovou dobu opíše obíhající hvězdy ve své rotaci úhel přibližně 0,01 radiánu. O chybě, která bude zvolené hodnotě kroku odpovídat, se však můžeme pouze dohadovat. Určitou kontrolu bychom nad ní měli, pokud bychom užili některou z metod s proměnnou délkou kroku. Pro tentokrát tedy jednoduše předpokládejme, že krok je skutečně dost malý.

Při simulaci jsme provedli 200 000 výpočetních kroků. To při zvolené délce kroku dává celkový časový úsek 4000 jednotek, která pohodlně obsáhne dobu potřebnou pro přiblížení vnější hvězdy i její opětovné vzdálení do „velké“ vzdálenosti.

Ještě než ukážeme, jak zkoumaný pohyb všech tří hvězd podle našeho výpočtu vypadá, by bylo dobré říct, které údaje z vypočtených dat vlastně potřebujeme. Rozhodně totiž nemusíme zpracovávat všech osmnáct souřadnic poloh a rychlostí. Díky počáteční osově symetrii situace se souřadnice poloh a rychlostí obou obíhajících hvězd navzájem liší maximálně znaménkem (z -ové souřadnice polohy a rychlosti jsou si dokonce rovny). Navíc se vnější hvězda zřejmě bude pohybovat pouze na ose z (opět díky symetrii). A dále díky zákonu zachování hybnosti vždy můžeme určit z -ové souřadnice polohy a rychlosti obíhajících hvězd, známe-li z -ovou souřadnici polohy a rychlosti vnější hvězdy. Pro specifikaci stavu soustavy tedy stačí pouze šest údajů⁵⁵.

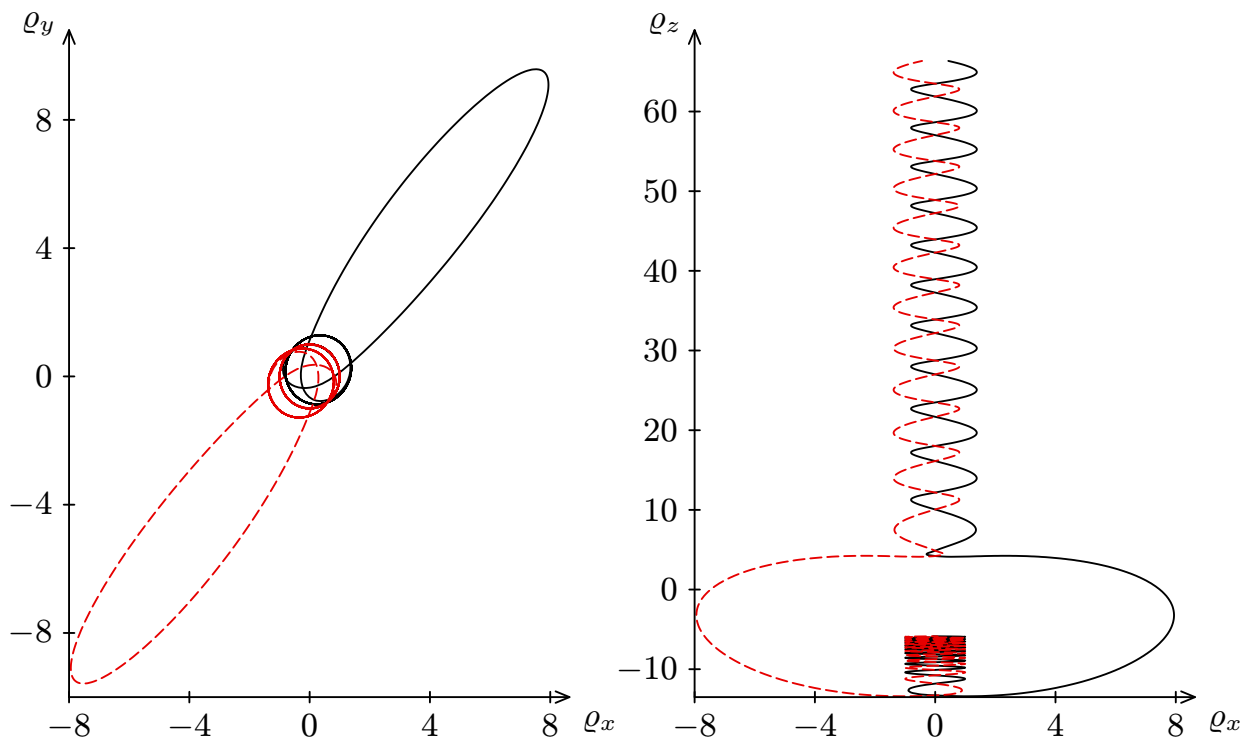
Závislosti x -ových a y -ových souřadnic poloh a rychlostí obíhajících hvězd na čase pro nás nejsou příliš zajímavé (a zvědavý čtenář si jejich grafy jistě dokáže vykreslit sám). Ukážeme tedy pouze grafy závislosti z -ových souřadnic poloh a rychlostí na čase a tvar průmětu trajektorie obíhajících hvězd do rovin xy a xz .

Na závěr ještě určíme, jakou rychlostí se bude pohybovat vnější hvězda po opětovném vzdálení „do nekonečna“. Mohli bychom to udělat například tak, že bychom jednoduše odečetli poslední vypočtenou hodnotu z -ové souřadnice její rychlosti. Lepší by ovšem bylo vzít v úvahu i fakt, že se rychlost bude i dále měnit (třebaže jen málo), a pokusit se extrapolovat její hodnotu v nekonečno.

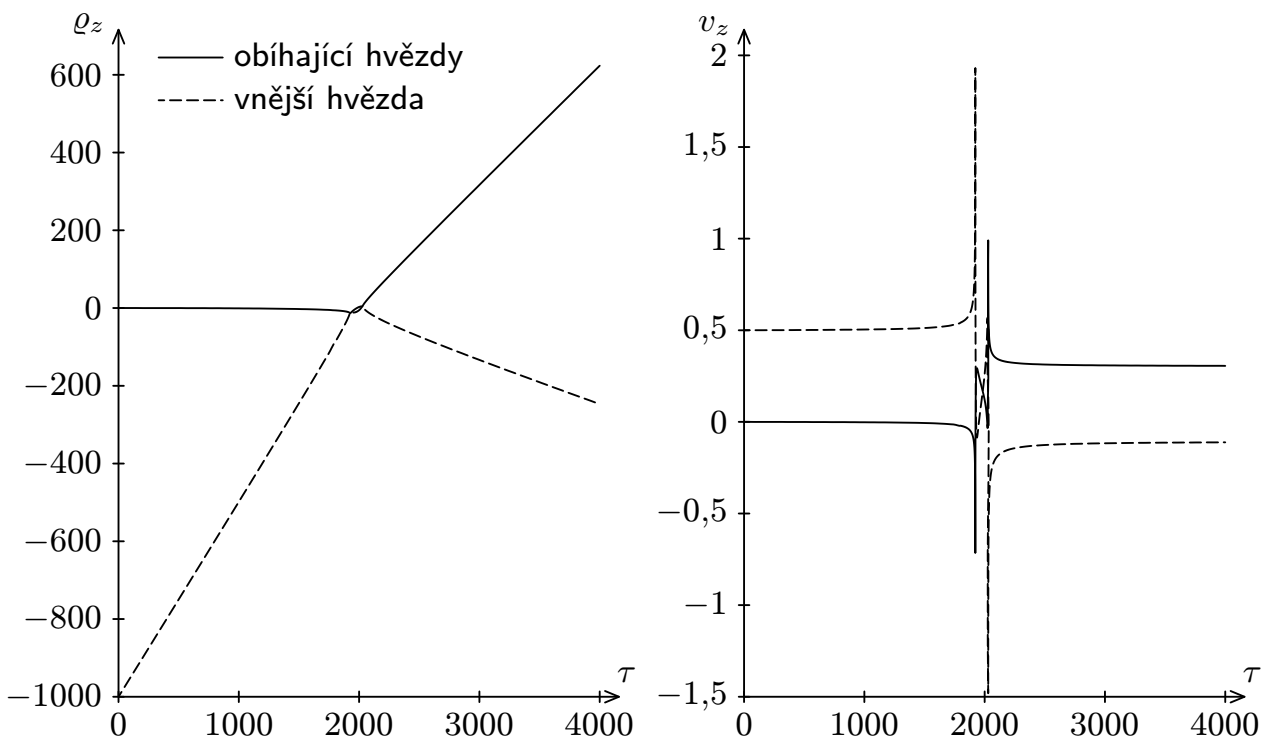
Všimneme-li si v grafu rychlosti, že její závislost ke konci sledovaného časového úseku vypadá téměř jako lineární lomená funkce, můžeme se pokusit část vypočtených dat touto funkcí fitovat (tj. najít takovou lineární lomenou funkci, která data co nejlépe aproximuje) a z jejích parametrů odhadnout rychlost hvězdy

⁵⁵⁾ Ve skutečnosti čtyři, protože jsme zapomněli na zákony zachování momentu hybnosti a energie. Jimi vyjádřené vztahy mezi souřadnicemi poloh a rychlostí jsou však již poněkud krkolomné, a tak se spokojíme s šesti parametry.

„v nekonečnu“. Tuto práci za nás může velmi rychle provést například program gnuplot.



Obr. 62. Průměty trajektorií obíhajících hvězd do rovin xy a xz

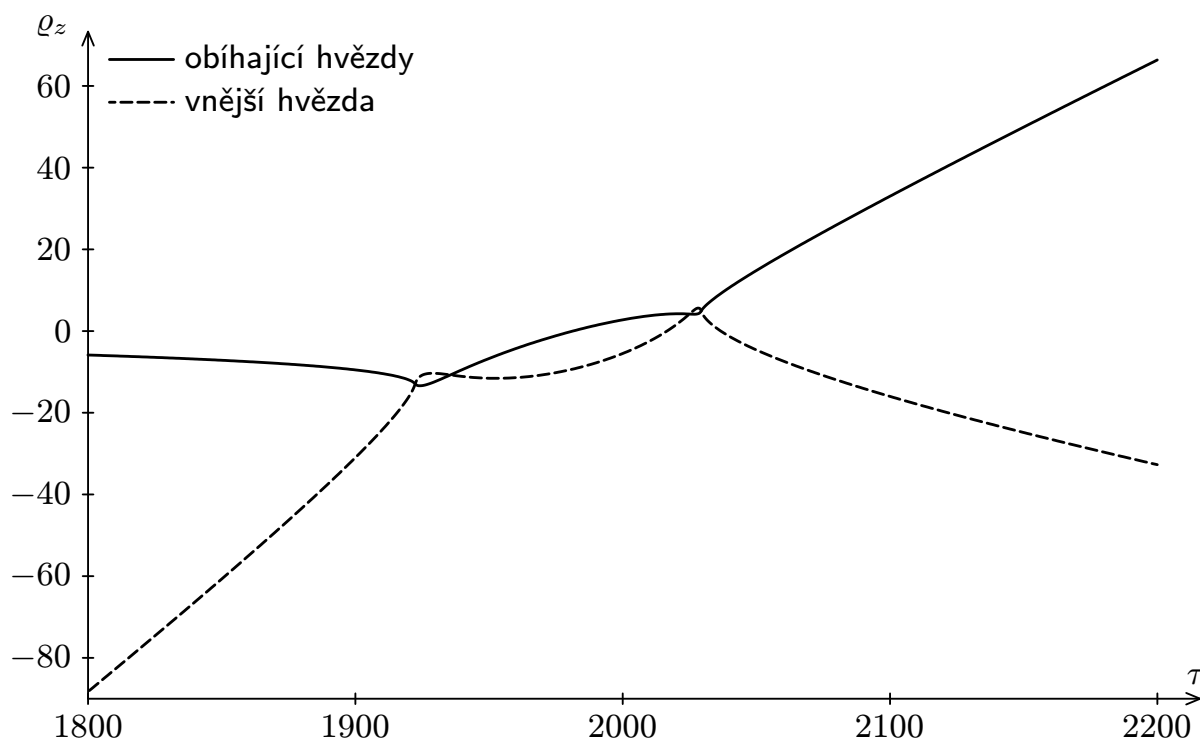


Obr. 63. z -ové souřadnice poloh a rychlostí v závislosti na čase

Ukazuje se, že časový vývoj rychlosti skutečně velmi dobře aproximuje lineární lomená funkce, hodnota rychlosti se limitně blíží (podle výpočtu gnuplotu) $-0,1069$.

Vnější hvězda se tedy po interakci s oběma dalšími „odrazí“ rychlostí přibližně pětinou oproti počáteční. Použitím zákona zachování hybnosti si snadno odvodíme, že obíhající hvězdy se budou pohybovat ve směru osy z rychlostí rovnou asi třem pětinám výchozí rychlosti vnější hvězdy.

Pokud se zaměříme na kinetickou energii odpovídající pouze pohybu zúčastněných těles v z -ovém směru, zjistíme, že se jí při interakci hvězd přibližně čtvrtina „někam ztratila“. Jistě uhadneme kam – do potenciální energie soustavy obíhajících hvězd a do kinetické energie jejich pohybu v rovině xy (což lze ostatně pozorovat i na průmětu trajektorií do této roviny – jejich tvar se změnil z kruhového na eliptický, což je nutně provázeno změnou energie oběhu). V jistém smyslu jde tedy o nepružný ráz. Považujeme-li obě obíhající hvězdy za jediné těleso, pak jejich potenciální energie a kinetická energie pohybu v rovině xy reprezentuje vnitřní energii tohoto tělesa.



Obr. 64. z -ové souřadnice polohy v závislosti na čase – detail

Úloha II. S ... porcování divokých rovin

Skladování uranu

Palčivá otázka jaderné energetiky je skladování vyhořelého radioaktivního paliva. Většinou se skladuje ve válcových člancích ponořených ve vodní lázni, která drží jejich povrch na konstantní teplotě asi 20°C . Na vás je nyní zjistit, jaké bude rozložení teploty v člancích tvaru kvádru se čtvercovou podstavou o hraně délky 20 cm. Článek bude poměrně vysoký, a proto nás zajímá rozložení teplot v příčném řezu. Uran bude zaujímat koncentrický kvádr se čtvercovou podstavou o hraně 5 cm. Ze zkušenosti s válcovými kapslemi víme, že bude mít konstantní teplotu okolo 200°C .

Zahřívající se drát

Máme velmi dlouhý drát kruhového průřezu o poloměru r z materiálu o tepelné vodivosti λ a měrné elektrické vodivosti σ . Přiložíme na něj konstantní elektrické napětí. Nechť je intenzita elektrického pole (tj. napěťový spád) uvnitř drátu konstantní, rovnoběžná s jeho osou a její velikost budiž E . Pak drátem bude procházet proud o plošné hustotě $j = \sigma E$ a bude se vytvářet jouleovské teplo s objemovým výkonem $p = \sigma E^2$.

Protože materiál drátu má nenulovou tepelnou vodivost, vytvoří se v něm jisté rovnovážné rozložení teploty, které – jak víme – splňuje Poissonovu rovnici $\lambda \nabla^2 T = -p$. Předpokládáme, že okraj drátu udržujeme na dané teplotě T_0 . Tím máme danu okrajovou podmínku potřebnou k vyřešení rovnice. Vzhledem k symetrii problému se můžeme omezit na její řešení pouze ve dvou rozměrech – na průřezu vodiče (teplota jistě nebude záviset na posunutí podél osy vodiče). Nyní by již bylo jednoduché problém vyřešit popsányi metodami.

My si však situaci maličko zkomplikujeme a budeme předpokládat (zcela oprávněně), že měrná elektrická vodivost σ závisí na teplotě. Budeme tedy mít rovnici typu $\nabla^2 T = f(T)$.

Pokuste se tuto rovnici numericky vyřešit pro nějakou danou závislost vodivosti na teplotě (můžete si ji najít v literatuře, na internetu nebo si klidně nějakou vymyslet) a najít tak rozložení teploty na průřezu drátu. Můžete se pokusit měnit intenzitu elektrického pole E a nakreslit voltampérovou charakteristiku drátu, vyzkoušet více druhů závislostí $\sigma(T)$ (třeba pro polovodič, jehož vodivost s rostoucí teplotou na rozdíl od obyčejného kovu roste) atd.

Kapacita krychle

Vypočítejte kapacitu dokonale vodivé krychle o straně délky $2a$. Pokud se budete nudit, můžete zkusit kvádr (a třeba závislost kapacity na délkách jednotlivých stran), případně jiné geometrické objekty.

Nápověda. Kapacita je poměr náboje na krychli rozmístěného ku potenciálu povrchu krychle (za předpokladu, že potenciál v nekonečnu je nulový). Problém tedy lze řešit tak, že si zvolíme libovolně potenciál krychle, vyřešíme Laplaceovu

rovnici $\nabla^2 \varphi = 0$ vně krychle a vypočítáme celkový náboj na krychli užitím Gaussova zákona (tj. určením intenzity elektrického pole derivováním potenciálu a výpočtem jeho toku vhodně zvolenou plochou obklopující krychli).

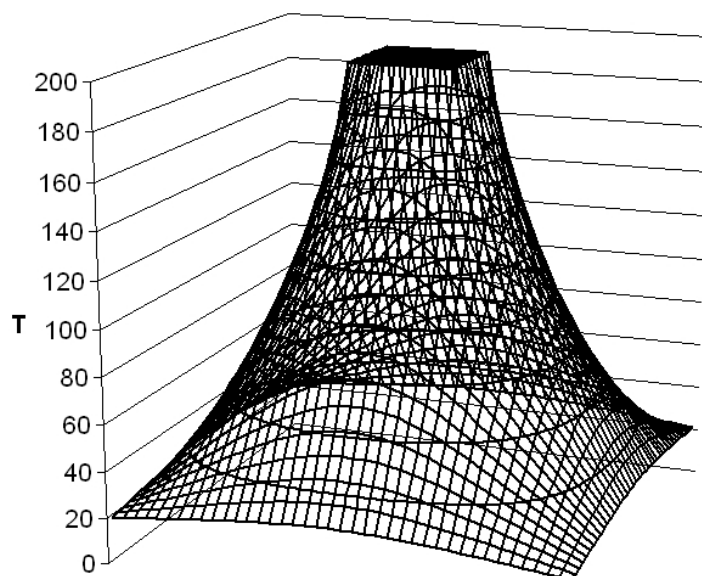
Skladování uranu

Rovnovážné rozložení teploty T určíme vyřešením statické rovnice vedení tepla bez objemových tepelných zdrojů, tedy Laplaceovy rovnice

$$\nabla^2 T = 0.$$

S tou se vypořádáme pomocí jednoduché iterační metody⁵⁶. Pro jednoduchost jsme i tentokrát k řešení použili programování v Pascalu si necháme na zbylé dvě úlohy.

Prostým zkonstruováním vhodné tabulky jsme tak téměř bez práce získali graf, který je zobrazen na obrázku 65.



Obr. 65. Rozložení teploty v článku

Zahřívající se drát

Rovnovážné rozložení teploty v materiálu o tepelné vodivosti⁵⁷ λ se opět řídí rovnicí vedení tepla, tentokrát však včetně členu představujícího objemové tepelné zdroje

$$\lambda \nabla^2 T = -p,$$

kde p značí objemovou hustotu tepelného výkonu. V našem případě můžeme využít translační symetrie problému podél osy drátu z , a stačí tedy řešit příslušný dvourozměrný problém v rovině xy (teplota vůbec nebude záviset na z).

⁵⁶⁾ Viz excelovský „program“ `uran.xls` na našich webových stránkách.

⁵⁷⁾ Budeme pro jednoduchost předpokládat, že tepelná vodivost se nemění s teplotou.

Pokud je napěťový spád v drátu roven E , je proudová hustota v každém jeho bodě rovna σE , přičemž konstanta úměrnosti σ je měrná elektrická vodivost materiálu drátu. Pro hustotu tepelného výkonu tedy platí vztah

$$p = \sigma E^2.$$

Dosažením tak dostáváme PDR, kterou musíme řešit,

$$\nabla^2 T = -\frac{E^2}{\lambda} \sigma(T).$$

Okrajová podmínka je dána udržováním teploty povrchu drátu na dané konstantní teplotě T_0 , tedy musí platit $T = T_0$ na okraji průřezu drátu.

Úloha se kromě translační symetrie vyznačuje také rotační symetrií kolem osy drátu. Toho bychom mohli využít a hledat T jako funkci pouze vzdálenosti od osy. Neuděláme to ze dvou důvodů. Jednak si chceme procvičit řešení PDR a také by se nám při přechodu k axiálním souřadnicím objevil místo laplaciánu výraz $T''(R) + T'(R)/R$, který by působil potíže při malých hodnotách R (které se vyskytuje ve jmenovateli).

Vytvoříme si tedy pole uzlových bodů pokrývajících celý kruhový průřez drátu. Rozmístíme je pro jednoduchost do pravoúhlé sítě. Souřadnice jednotlivých bodů budou $[iR/N, jR/N]$, kde $N \in \mathbb{N}$, $i, j \in \mathbb{Z}$ a $i^2 + j^2 < N^2$. Teplotu v uzlovém bodě o souřadnicích $[iR/N, jR/N]$ označme T_{ij} .

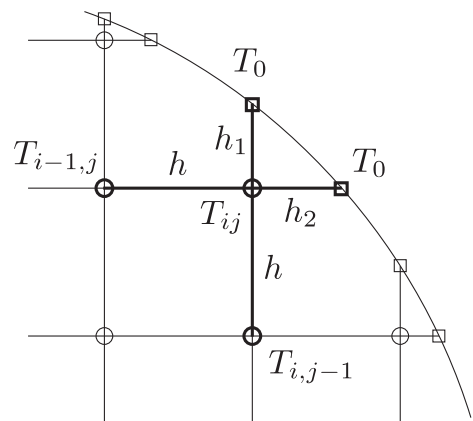
Laplacián teploty diskretizujeme obvyklým způsobem jako

$$\nabla^2 T_{ij} \sim \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij}}{h^2},$$

přičemž pro $i^2 + j^2 \geq N$ pokládáme $T_{ij} = T_0$ kvůli okrajovým podmínkám.

Možná vás napadá, že jsme okrajové podmínky poněkud odbyli, protože jsme vlastně kruhový okraj oblasti nahradili „něčím kostrbatým“. To je samozřejmě pravda. Pokud vás dosažená úroveň přesnosti neuspokojuje, můžete do svého programu implementovat algoritmus, který bude v okrajových bodech sítě (tj. v těch, které mají méně než čtyři sousedy) zohledňovat fakt, že vzdálenost jednotlivých uzlových bodů od okraje není vždy rovna h (viz obrázek 66).

Je ovšem třeba si trochu pohrát s diskretními aproximacemi příslušných druhých derivací a odvodit správný výraz pro laplacián, což zde nebudeme provádět. Pro inspiraci však můžete nahlédnout do hotového demonstračního programu⁵⁸.



Obr. 66. Odlišné kroky mezi uzlovými body na okraji sítě

⁵⁸⁾ Soubor `drat.pas` na našem webu.

Jestliže uvažujeme lineární závislost měrného odporu na teplotě, tedy pro vodivost platí

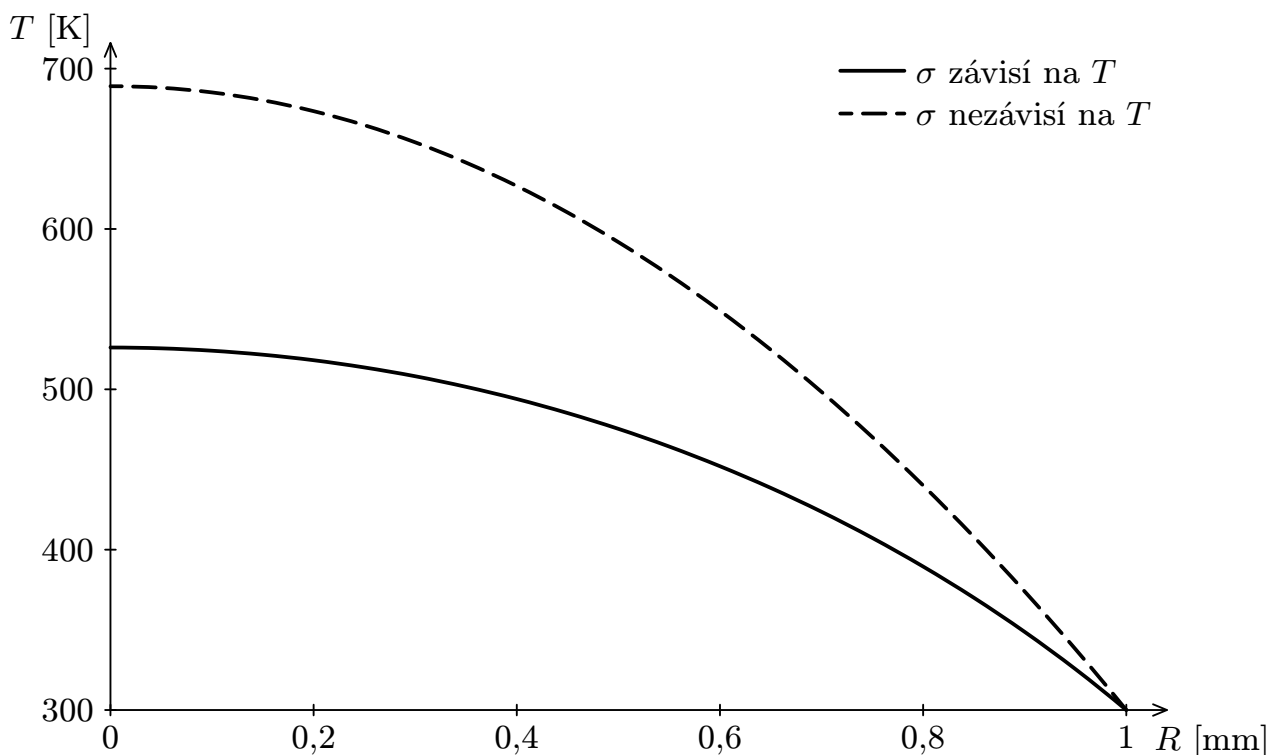
$$\sigma(T) = \frac{\sigma_0}{1 + \alpha(T - T_0)},$$

bude mít iterační vztah tvar

$$T_{ij} = \frac{1}{4} \left(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{h^2 E^2 \sigma_0}{\lambda(1 + \alpha(T_{ij} - T_0))} \right).$$

V demonstračním programu jsme položili $N = 20$ a počítali jsme s konstantami σ_0 , λ a α pro měď. Pro srovnání jsme do grafu vynesli teplotní rozložení v závislosti na vzdálenosti od osy drátu vypočítané pro $E = 1000 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ a $R = 1 \text{ mm}$ společně s týmž rozložením bez zohlednění závislosti vodivosti na teplotě (tedy vlastně pro $\alpha = 0$).

V grafu na obrázku 67 je na první pohled vidět, že závislost vodivosti na teplotě se skutečně při vyšších proudech nezanedbatelně projevuje (lépe by možná bylo mluvit o extrémně vysokých proudech – při pohledu na parametry výpočtu je vám nejspíš jasné, že vlastně zkratujeme napětí 1000 V drátem dlouhým jeden metr).



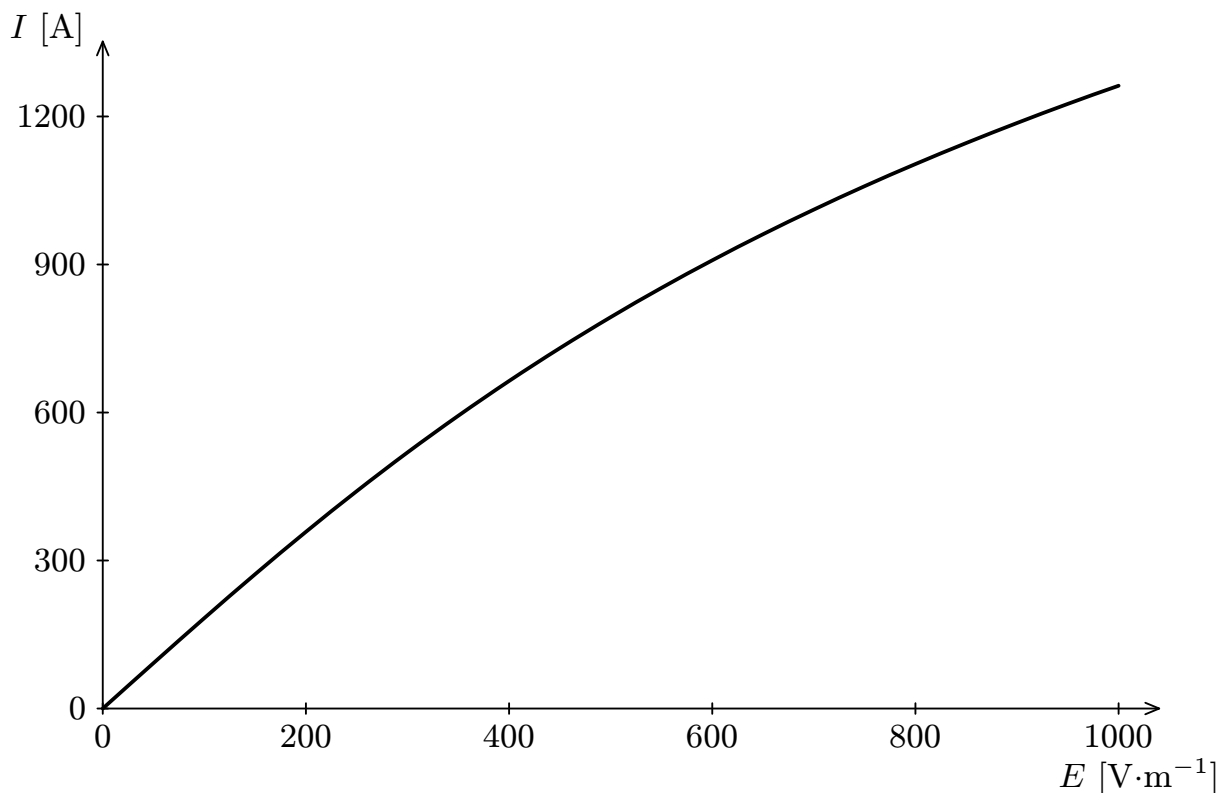
Obr. 67. Závislost teploty na vzdálenosti od osy drátu se započítáním závislosti vodivosti na teplotě a bez něj

Dále jsme do grafu na obrázku 68 vykreslili voltampérovou charakteristiku měděného drátu (opět pro $R = 1 \text{ mm}$), která ovšem není kvůli závislosti vodivosti na teplotě lineární.

Není snad však třeba zdůrazňovat, že vypočtená nelinearita se v praxi při „rozumných“ proudech neprojevuje.

Také je dobré si uvědomit, že jestliže se podle našeho výpočtu při připojení napětí 1000 V na metr dlouhý měděný drát o průřezu 1 mm teplota uvnitř drátu

zvýší o cca 250 °C, v žádném případě to neznamena, že tomu tak bude i v reálné situaci. Předně jsme předpokládali, že se povrch drátu udržuje na teplotě okolí. To ovšem při tak vysokém tepelném výkonu, s jakým bychom měli v uvedené situaci co do činění, určitě nelze provést bez vydatné pomoci nějakého chladícího zařízení. Odvádění tepla z drátu v praxi také dosti ztěžuje izolace, kvůli níž také nesmí teplota povrchu příliš stoupnout.



Obr. 68. Voltampérová charakteristika Cu drátu o poloměru 1 mm

Kapacita krychle

Určení kapacity krychle není v principu příliš obtížný problém. Stačí pouze vyřešit Laplaceovu rovnici

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

pro potenciál φ s příslušnými okrajovými podmínkami, vypočtením toku intenzity elektrického pole určit náboj a dopočítat kapacitu z definičního vztahu $C = Q/U$ (viz návod v zadání úlohy).

Na potíže však narazíme, jakmile se dostaneme k psaní vlastního algoritmu. Jelikož jde o třírozměrnou úlohu, roste počet uzlových bodů jako N^3 , kde N je počet bodů v jednom směru. Pokud tedy zjemníme dělení sítě desetkrát, zvýší se paměťová náročnost algoritmu tisíckrát stejně jako počet kroků potřebný k dosažení určité dané přesnosti (pro jednoduchou relaxační metodu popsanou např. ve studijním textu je potřebný počet iterací přibližně úměrný počtu uzlových bodů). Protože však každý krok vyžaduje zpracování hodnot potenciálu v každém z uzlových bodů, zvýší se počet elementárních operací dokonce milionkrát.

Zřejmě bychom si tedy s jednoduchou relaxační metodou mohli troufnout jen na N v řádu několika (málo) desítek. Musíme se proto uchýlit k několika užitečným trikům a trochu upravit použitou metodu.

Na začátek však trochu teorie. Je známo, že potenciál konečného nabitého tělesa se dá zapsat ve sférických souřadnicích r, ϑ, φ pomocí tzv. kulových funkcí $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, kde $l \in \mathbb{N}_0$ a $m \in \{-l, -l+1, \dots, l-1, l\}$, jako

$$\varphi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sum_{m=-l}^l q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

kde q_{lm} jsou vhodné komplexní konstanty. Přitom q_{00} je rovno celkovému náboji zdroje Q , koeficienty q_{1m} souvisejí s jeho tzv. dipólovým momentem, q_{2m} s kvadrupólovými momenty, q_{3m} s oktapólovými atd.

Vzhledem k symetrii krychle jsou první nenulové koeficienty q_{lm} po q_{00} až ty odpovídající oktapólovému momentu. Jejich příspěvek ovšem s rostoucím r klesá jako r^{-4} , další členy pak ještě rychleji. Můžeme tedy odhadnout, že ve vzdálenosti ka od středu krychle o straně $2a$ je příspěvek vyšších momentů asi k^4 -krát menší než člen $Q/4\pi\epsilon_0 r$.

Jestliže tedy oblast, v níž budeme řešit Laplaceovu rovnici, omezíme zvnějšku kulovou plochou o poloměru $r_0 = k_0 a$, na níž budeme předpokládat konstantní nulový potenciál, dopustíme se relativní chyby cca k_0^{-4} (v jistém vágním smyslu, který nebudeme blíže zkoumat). Zároveň ovšem musíme vzít v úvahu, že jsme takto posunuli hladinu nulového potenciálu z nekonečné do konečné vzdálenosti. Potenciál tedy bude mít asymptotický tvar

$$\varphi(r) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Po numerickém vyřešení Laplaceovy rovnice v popsané oblasti si můžeme dosažením určitého $r = r_1$ menšího než r_0 (ale ne příliš, abychom stále mohli využívat výše uvedený asymptotický tvar) vyjádřit

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \varphi(r_1) \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1}.$$

Nyní by ovšem bylo vhodnější odhadnout chybu takto získaného výsledku jako k_1^{-4} , kde $r_1 = k_1 a$. Přesnost by bylo možno poněkud zvýšit, pokud bychom místo hodnoty potenciálu v jednom konkrétním bodě ve vzdálenosti r_1 od počátku za $\varphi(r_1)$ vzali hodnotu zprůměrovanou přes celou kulovou plochu o poloměru r_1 . Není to však příliš nutné, pokud je k_1 dostatečně velké.

Kapacitu krychle pak získáme vydělením náboje Q napětím U mezi jejím povrchem a nekonečnem, které je rovno

$$U = \varphi_0 - \varphi(\infty) = \varphi_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \varphi_0 + \varphi(r_1) \frac{r_1}{r_0 - r_1},$$

kde φ_0 je potenciál na povrchu krychle. Tak dostaneme

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\varphi(r_1) r_0 r_1}{(r_0 - r_1) \varphi_0 + r_1 \varphi(r_1)}.$$

Při samotném numerickém řešení Laplaceovy rovnice můžeme s výhodou využít symetrie problému vzhledem k zrcadlení podle souřadnicových rovin (tj. vzhledem k záměně typu $x \rightarrow -x$) a vzhledem k libovolné permutaci souřadnic (tj. např. záměně $(x, y, z) \rightarrow (y, x, z)$). Stačí tedy při výpočtu v paměti držet pouze hodnoty $\varphi_{ijk} = \varphi(ih, jh, kh)$ pro $0 \leq i \leq j \leq k$. Těch je proti všem možným trojicím i, j, k pouze dvanáctina. Toto opatření tedy jednoduše sníží paměťovou náročnost dvanáctkrát (a časovou náročnost při použití jednoduché relaxační metody více než stokrát). V demonstračním programu⁵⁹ jej však využíváme jen částečně, a to pro urychlení výpočtu. Možnost ušetřit paměť oželíme, protože by to zdrojový kód zbytečně komplikovalo.

Dalším vylepšením, které zavedeme do našeho výpočtu, bude použití metody zvané *successive overrelaxation* (SOR). Ta odstraňuje nevýhodu obyčejné relaxační metody v podobě příliš pomalé konvergence. Místo nahrazení hodnot φ hodnotami $\tilde{\varphi}$ získanými vyjádřením z diskretizované verze laplaciánu nahradíme φ novou hodnotou $\varphi + (\tilde{\varphi} - \varphi)\omega$, kde ω je tzv. *overrelaxation parameter*. Jeho optimální hodnota je obvykle větší než 1, proto tato metoda mění hodnoty φ více než obyčejná relaxační metoda (odtud název).

Metoda SOR také někdy využívá rozdělení uzlové sítě na „černé“ a „bílé“ uzly (podobně jako políčka na šachovnici), přičemž iterace hodnot se provádí střídavě na těchto podsítích. Zároveň lze použít dalšího důmyslného triku zvaného *Chebyshev acceleration*, který spočívá v postupné změně parametru ω v průběhu výpočtu. Na začátku se položí $\omega = 1$, následně se při každé iteraci jedné z podsítí jeho hodnota změní na $1/(1 - \rho^2\omega/4)$ (s výjimkou prvního kroku, kdy se použije výraz $1/(1 - \rho^2\omega/2)$). Zde ρ je tzv. *spektrální poloměr* iterační matice a je charakteristický pro danou úlohu a uzlovou síť. Hodnotu ρ lze najít zkusmo, pro některé jednoduché tvary sítí ji lze odvodit analyticky.

Při výpočtu v demonstračním programu jsme použili síť o velikosti $N = 100$. Přitom samotná krychle o hraně délky dvou jednotek zabírala uzly (i, j, k) pro $i, j, k \leq M$, kde M jsme volili přibližně desetkrát menší než N . Po dosažení dostatečné přesnosti jsme z hodnoty potenciálu v bodě $(N - p, 0, 0)$ pro vhodné p (volili jsme přibližně $p = 20$) vypočítali podle výše odvozeného vztahu kapacitu krychle o hraně $2a$ (která je jednoduše a -násobkem kapacity krychle o hraně 2). Vyzkoušením několika různých nastavení parametrů výpočtu a srovnáním získaných výsledků jsme odhadli relativní chybu na řádově jedno procento.

Finální výsledek našeho snažení zní

$$\frac{C}{4\pi\epsilon_0 a} = 1,33 \pm 0,02.$$

⁵⁹⁾ Viz `krychle.pas` na našich internetových stránkách.

Úloha III.S ... pí-obvod

a) Integrujte metodou Monte Carlo funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Zkuste také numericky určit hodnotu tohoto integrálu od $-\infty$ do $+\infty$.

Návod: Funkce je symetrická vůči počátku, čili ji stačí integrovat na intervalu $[0, +\infty)$. Proveďte substituci $x = 1/t - 1$, čímž změňte meze integrálu od 0 do 1.

b) Máme k dispozici 50 rezistorů o odporech 50Ω a chceme z nich sestavit obvod, jehož celkový odpor v ohmech bude co nejbližší číslu π . Pokuste se metodou simulovaného žihání najít obvod, který by tomuto požadavku vyhovoval co nejlépe.

Pro určování celkového odporu obvodu si můžete přizpůsobit program, který najdete na našich webových stránkách.

Pokud se na tento úkol necítíte, můžete zkusit zahrnout do problému obchodního cestujícího zakřivení zemského povrchu a pokusit se jej vyřešit pro nějakou konkrétní množinu měst na Zemi (například všechna hlavní města v Evropě, USA atd.).

Integrál e^{-x^2}

Úkolem je numericky zintegrovat funkci e^{-x^2} na intervalu $[-100, 100]$. Jelikož x^2 je symetrická funkce vůči počátku, platí

$$\int_{-100}^{100} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{100} e^{-x^2} dx.$$

Čili stačí funkci integrovat na intervalu $[0, 100]$.

Rozmysleme se nyní, na kolik desetinných míst budeme chtít integrál vypočítat. Dejme tomu, že na deset. Podívejme se proto jen pro zajímavost, co vyplivne počítač, zeptáme-li se

```
WriteLn(exp(-100 * 100));
```

Odpověď zní $1,1354838653147362 \cdot 10^{-4343}$.

Pro naše numerické počítání tedy můžeme poslední členy zanedbat. Mohli bychom zanedbat ještě i nějaké jiné? Rozhodně již nepotřebujeme členy, které jsou menší než 10^{-12} . Zeptejme se proto jinak

```
For I := 0 to 100 do
```

```
  If exp(-I * I) < 1E-12 then Break;
```

```
  WriteLn(I);
```

Výsledek je 6.

Opravdu, již $e^{-6^2} = 2,3195228302435694 \cdot 10^{-16}$. Proto nám stačí integrovat pouze na intervalu $[0, 6]$, abychom mohli počítat na nějakých třináct čtrnáct desetinných míst. Dokonce již e^{-5^2} je číslo, které má napřed deset nul, než začnou nějaké jiné číslice.

Dále můžeme použít nejjednodušší postup, který nás napadne. Určitý integrál funkce na intervalu není nic jiného, než střední hodnota funkce krát délka (obecně

míra) intervalu. Takže stačí vypočítat střední hodnotu e^{-x^2} na $[0, 6]$, vynásobit dvanácti a máme výsledek přibližně $\sqrt{\pi}$.

Chceme-li počítat střední hodnotu funkce na intervalu metodou Monte-Carlo, můžeme náhodně generovat $x \in [0, 6]$, sčítat funkční hodnoty a nakonec sumu vydělit počtem vygenerovaných čísel.

```

For I := 1 to Repetitions do Begin
  RandNum := Random * 6;
  A := A + exp(-RandNum * RandNum);
End;
A := A * 12 / Repetitions;
    
```

Chceme-li integrovat funkci e^{-x^2} ještě i mimo interval $[-100, 100]$, tak je jasné, že už téměř nic nenasčítáme. Ovšem pozor, u jiných funkcí to platit nemusí! Dejme tomu, že chceme integrovat funkci $1/x$ na intervalu $[1, \infty]$ a že jsme ji již zintegrovali na intervalu $[1, 10^{10}]$. Víme, že funkční hodnoty se pro velké x blíží nule, a tedy usoudíme, že příspěvek k integrálu na intervalu $[10^{10}, \infty]$ je zanedbatelný. To je však chyba. Onen příspěvek nejen, že není zanedbatelný, ale je dokonce nekonečný, protože

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Proto si musíme při takových zanedbáních být jisti, že funkce ubývá dostatečně rychle. Jak to můžeme ukázat pro naši zkoumanou e^{-x^2} ? Jednak

$$e^{-x^2} \leq e^{-x},$$

takže

$$\int_{100}^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \int_{100}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-100},$$

čímž získáme nějaký horní odhad, který zaručí, že nám funkce neutěče jako $1/x$.

Velice krásný způsob, jak funkci e^{-x^2} numericky zintegrovat od nuly do nekonečna je substitucí, která nekonečný integrál převede na konečný. V návodu k úloze jsme nabídli substituci

$$x = \frac{1}{t} - 1.$$

Je-li $t = 0$, potom $x \rightarrow \infty$, a je-li $t = 1$, potom $x = 0$. Navíc

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}.$$

Dosadíme-li tuto substituci, dostaneme

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_1^0 e^{-(1/t-1)^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \int_0^1 \left(\frac{e^{-(1/t-1)^2}}{t^2}\right) dt,$$

kde nesmíme zapomenout, že při prohazování mezi integrály se mění znaménko.

Tímto jsme získali hezkou funkci na krásném (dokonce kompaktním) intervalu $[0, 1]$, kterou můžeme vystavit jakékoli numerické integrační metodě. Když to zkusíme, můžeme se zarazit v jednom místě – blíží-li se $t \rightarrow 0$, výraz $1/t^2$ potom diverguje (jeho hodnota se blíží k nekonečnu). Co s tím? Podívejme se, jak nová funkce pod integrálem vlastně pro t jdoucí k nule vypadá. Výraz $1/t^2$ sice diverguje, je však zároveň argumentem exponenciály, a celý integrand se tedy blíží k nule.

Opět se tedy zeptejme počítače

```
For I := 0 to 100 do Begin
```

```
  A := 1 - I/100;
```

```
  If exp(-(1 / A - 1) * (1 / A - 1)) / (A * A) < 1E-12 then Break;
```

```
End;
```

```
WriteLn(I);
```

který odpovídá 85.

Opravdu, hodnota funkce v $t = 0,15$ je $5,036619221322436 \cdot 10^{-13}$. Zanedbáme-li příspěvek na intervalu $[0, 0,15]$, dopustíme se chyby rozhodně menší než čtrnáctého řádu. Můžeme jásat, převedli jsme nekonečný integrál na konečný a ukázali jsme, že s obrovskou přesností je

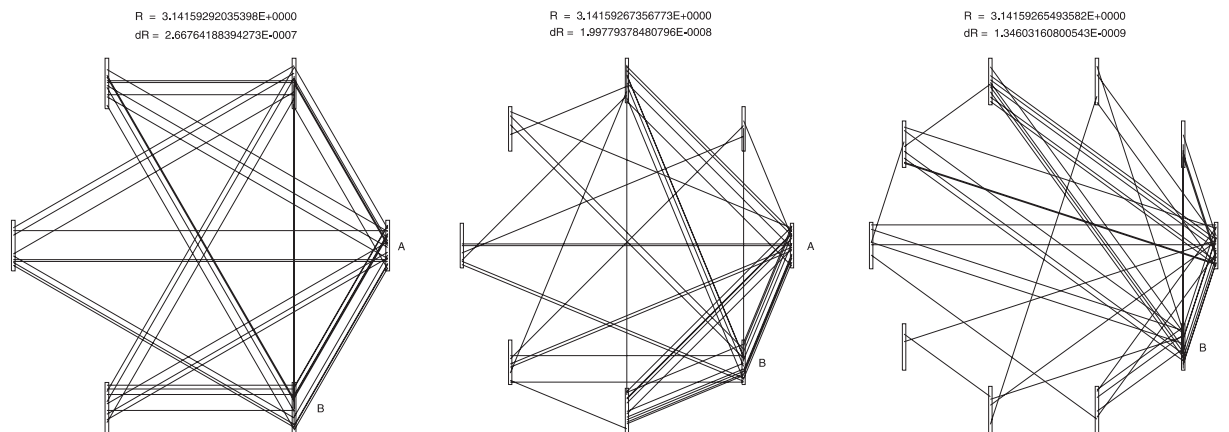
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_{0,15}^1 \left(\frac{e^{(1/t-1)^2}}{t^2} \right) dt.$$

Pí-obvod

Při řešení této úlohy jsme použili předpřipravenou knihovnu s funkcemi pro výpočet odporu rezistorové sítě, kterou jsme poskytli ke stažení na webu.

Výsledný program `zihani_odporu.pas` si můžete samozřejmě stáhnout také. Celý výpočet začíná náhodným rozmístěním všech padesáti odporů mezi jistý daný počet uzlů. Všimněte si, že se vůbec nestaráme o detaily, jako je například to, zda některé odpory nejsou zapojeny „na volno“ (tj. s jedním nebo dokonce oběma konci nepřipojenými k jinému odporu) nebo jestli některý odpor nemá oba vývody zapojeny do stejného uzlu. Takové rezistory totiž lze z obvodu s klidem vynechat, což nám zadání nezakazuje. Máme-li k dispozici padesát odporů, neznamená to, že bychom je nutně museli použít všechny. Musíme se však postarat o to, aby použitý obvod měl konečný odpor (tj. aby propojoval oba body, mezi nimiž měříme odpor).

Dále už pokračujeme se samotným žiháním, které provádíme v 500 000 krocích (výhody simulovaného žihání se plně projeví, pokud algoritmu dáme dostatek času na ustavení rovnováhy). Jako „energii“ systému použijeme absolutní hodnotu odchylky odporu v ohmech od π . Tepelné fluktuační realizujeme jednoduše vybráním náhodného odporu ze sady a jeho přepojením mezi náhodně vybrané uzly. Zde se opět nestaráme o to, jestli takto příslušný odpor náhodou zcela neodpojíme od obvodu či nezapojíme oběma vývody do téhož uzlu.



Obr. 69. Příklad tří obvodů získaných simulovaným žiháním

Klíčovým bodem celého algoritmu je výběr vhodného průběhu snižování teploty. Ten jsme zvolili lineární, což je jistý kompromis mezi rychlostí a robustností algoritmu (ten podle jistých teoretických studií dosahuje optimální efektivity při logaritmickém snižování teploty, které by však pro naše účely bylo příliš pomalé).

Rychlost snižování teploty a její počáteční hodnotu jsme volili zkusmo metodou pokusu a omylu.

Několik nalezených obvodů pro různé hodnoty maximálního počtu uzlů jsme znázornili na obrázku 69 spolu s hodnotami jejich celkových odporů R . Obdélníky uspořádané do kruhu zde představují jednotlivé uzly, každá čára pak jeden rezistor. Uzly označené A a B jsou ty, mezi nimiž měříme odpor.

Obvod znázorněný na obrázku zcela vpravo je zároveň nejlepší, který se nám podařilo během asi deseti pokusů nalézt. Číselná hodnota jeho odporu se od π liší až na devátém desetinném místě.

Pro srovnání uvádíme ještě jeden „typický“ obvod (viz obrázek 70) nalezený metodou pouhého snižování „energie“. Vidíme, že odchylka číselné hodnoty odporu od π je o tři řády vyšší než v případě nejlepšího obvodu nalezeného pomocí žihání. Získali jsme tedy poměrně zajímavou ukázkou účinnosti simulovaného žihání ve srovnání s „primitivnějšími“ algoritmy.

Nejlepší nalezený obvod jsme pro vás znázornili i ve formě klasického schématu na obrázku 71. Čísla uvnitř jednotlivých symbolů rezistorů označují počet paralelně zapojených odporů, které daný symbol reprezentuje (můžete si všimnout, že celkově je použito pouze 49 rezistorů).

Nejlepší nalezený obvod jsme pro vás znázornili i ve formě klasického schématu na obrázku 71. Čísla uvnitř jednotlivých symbolů rezistorů označují počet paralelně zapojených odporů, které daný symbol reprezentuje (můžete si všimnout, že celkově je použito pouze 49 rezistorů).

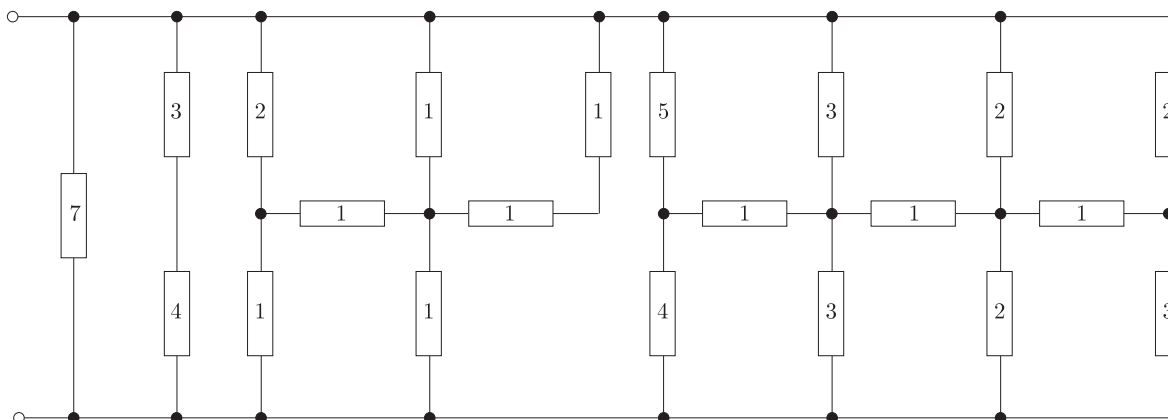
Přesná hodnota odporu tohoto obvodu je

$$R = \frac{24\,615\,500}{7\,835\,357} \Omega \doteq 3,1415926549 \Omega.$$

Jeho absolutní odchylka od π je $\Delta R = 1,3 \cdot 10^{-9} \Omega$ a relativní pak $\delta R = 4,3 \cdot 10^{-10}$.

Na závěr ještě poznamenejme, že tato úloha je spíše akademického rázu. Když někdy potřebujeme rezistor o odporu co nejbližším nějaké dané hodnotě, realizujeme jej spíše pomocí odporové dekády či kombinací odporů z poměrně bohaté sady volně prodejných součástek.

Navíc shoda výsledného odporu se zadanou hodnotou s přesností na miliardy je naprosto bezvýznamná, pokud nedokážeme se stejnou přesností zajistit i odpory všech použitých rezistorů, což je v praxi takřka nemožné.



Obr. 71. Schéma nejlepšího nalezeného obvodu

Úloha IV.5 ... kvantový harmonický oscilátor

Modelujte časový vývoj vlnové funkce částice, kterou umístíme do potenciálu $V(x) = kx^2/2$ a která je v čase $\tau = 0$ popsána vlnovou funkcí

$$\psi_R(X, 0) = \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right),$$

$$\psi_I(X, 0) = 0.$$

Jedná se tedy o vlnový balík se středem mimo počátek. Prozradíme vám, že jde o tzv. koherentní stav harmonického oscilátoru a vlnový balík by měl harmonicky kmitat kolem počátku s úhlovou frekvencí $\sqrt{k/m}$ stejně jako klasická částice.

Pokud se vám toto podaří namodelovat, můžete vyzkoušet, jak se budou chovat vlnové balíky o jiné šířce (tedy se jmenovatelem v exponenciále odlišným od čtyř), případně jak bude situace vypadat při jiném průběhu potenciálu.

Máme za úkol řešit soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial \psi_R(X, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial^2 \psi_I(X, \tau)}{\partial X^2} + \frac{1}{4}X^2 \psi_I(X, \tau),$$

$$\frac{\partial \psi_I(X, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \psi_R(X, \tau)}{\partial X^2} - \frac{1}{4}X^2 \psi_R(X, \tau)$$

pro reálnou a imaginární část vlnové funkce $\psi(X, \tau)$, která závisí na bezrozměrné souřadnici X a čase τ . Počáteční podmínky jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\psi_R(X, 0) &= \exp\left(-\frac{(X - X_0)^2}{4}\right), \\ \psi_I(X, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Nepřítomnost okrajových podmínek nás nemusí znepokojovat, protože ty jsou zastoupeny podmínkou normalizovatelnosti vlnové funkce – zjednodušeně řečeno musí vlnová funkce pro $X \rightarrow \pm\infty$ klesat k nule. Stačí tedy zvolit meze a a $-a$ dostatečně⁶⁰ vzdálené od počátku, ve kterých položíme umělou okrajovou podmínku $\psi(\pm a) = 0$.

Rovnici dále diskretizujeme v proměnné X , tj. rozdělíme interval $(-a, a)$ na $2N + 1$ uzlových bodů ekvidistantně rozmístěných ve vzdálenostech a/N . Hodnoty vlnové funkce v těchto bodech označíme $\psi^{(j)}(\tau) = \psi(a j/N, \tau)$, kde $j \in \{-N, -N + 1, \dots, N\}$. Z okrajových podmínek pak plyne $\psi^{(-N)}(\tau) = \psi^{(N)}(\tau) = 0$. Druhou parciální derivaci podle X v bodě $X = a j/N$ pak zapíšeme pomocí její diskrétní aproximace

$$\frac{\psi^{(j-1)}(\tau) - 2\psi^{(j)}(\tau) + \psi^{(j+1)}(\tau)}{(a/N)^2}.$$

Z naší soustavy dvou parciálních diferenciálních rovnic tak dostaneme soustavu $4N - 2$ obyčejných diferenciálních rovnic (ODR)

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_R^{(j)}(\tau)}{d\tau} &= -\left(\frac{N}{a}\right)^2 (\psi_I^{(j-1)}(\tau) - 2\psi_I^{(j)}(\tau) + \psi_I^{(j+1)}(\tau)) + \frac{1}{4}\left(\frac{a j}{N}\right)^2 \psi_I^{(j)}(\tau), \\ \frac{d\psi_I^{(j)}(\tau)}{d\tau} &= \left(\frac{N}{a}\right)^2 (\psi_R^{(j-1)}(\tau) - 2\psi_R^{(j)}(\tau) + \psi_R^{(j+1)}(\tau)) - \frac{1}{4}\left(\frac{a j}{N}\right)^2 \psi_R^{(j)}(\tau),\end{aligned}$$

kde $j \in \{-N + 1, \dots, N - 1\}$.

Tuto soustavu ODR prvního řádu bychom v principu mohli řešit například některou z Runge-Kuttových metod. My zde však popíšeme jednoduchou metodu⁶¹, která elegantně využívá speciálního tvaru této soustavy. Můžeme si totiž všimnout, že lze neznámé funkce rozdělit do dvou takových skupin (označme je A a B), že časové derivace funkcí ze skupiny A závisí jen na hodnotách funkcí ze skupiny B a naopak (v našem případě jsou těmito skupinami funkce $\psi_R^{(j)}(\tau)$ a $\psi_I^{(j)}(\tau)$).

Při integraci takové soustavy ODR je obzvláště výhodné počítat hodnoty funkcí ze skupiny A v časech $t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, \dots$, zatímco hodnoty funkcí ze skupiny B v mezilehlých časech $t_0 + h/2, t_0 + 3h/2, t_0 + 5h/2, \dots$. Potom totiž

⁶⁰⁾ To znamená takové, že hodnota vlnové funkce v bodech $\pm a$ je zanedbatelná proti hodnotám v okolí počátku.

⁶¹⁾ Tato metoda je pěkně popsána i v prvním dílu *Feynmanových přednášek z fyziky* nebo v chytré knize *Computational Physics* od R. H. Landaua a M. J. Páeze.

můžeme k počítání hodnot v každém dalším čase využít symetrickou aproximaci první derivace. Máme-li například soustavu dvou rovnic

$$\frac{df(t)}{dt} = F(g(t), t), \quad \frac{dg(t)}{dt} = G(f(t), t),$$

plynou z aproximací $df(t)/dt \approx (f(t+h/2) - f(t-h/2))/h$ a $dg(t)/dt \approx (g(t+h/2) - g(t-h/2))/h$ vztahy

$$f(t_0 + (j + \frac{1}{2})h) = f(t_0 + (j - \frac{1}{2})h) + hF(g(t_0 + jh), t_0 + jh),$$

$$g(t_0 + (j + 1)h) = g(t_0 + jh) + hG(f(t_0 + (j + \frac{1}{2})h), t_0 + (j + \frac{1}{2})h).$$

Pokud tedy na počátku známe hodnotu funkce f v bodě $t_0 + h/2$ a g v t_0 , můžeme ihned pomocí druhého z předchozích dvou vztahů vypočítat hodnotu g v $t_0 + h$, dále pomocí prvního vztahu f v $t_0 + 3h/2$ a tak dále až do hodnoty t , kterou potřebujeme.

Tento postup snadno zobecníme i na naši původní soustavu ODR. Jedinou komplikací, která nás dělí od napsání programu pro řešení Schrödingerovy rovnice, je to, že známe počáteční podmínky pro $\psi_R^{(j)}(\tau)$ i $\psi_I^{(j)}(\tau)$ ve stejném čase a ne v časech navzájem posunutých o $h/2$, jak vyžaduje výše popsaný algoritmus. To ovšem jednoduše vyřešíme jediným počátečním krokem o $h/2$ s použitím *asymetrické* aproximace první derivace.

Nakonec ještě využijeme další trik, podle kterého získáme přesnější hodnotu hustoty pravděpodobnosti, pokud místo $\psi_R^2(t) + \psi_I^2(t)$ budeme počítat $\psi_R^2(t) + \psi_I(t-h/2)\psi_I(t+h/2)$.

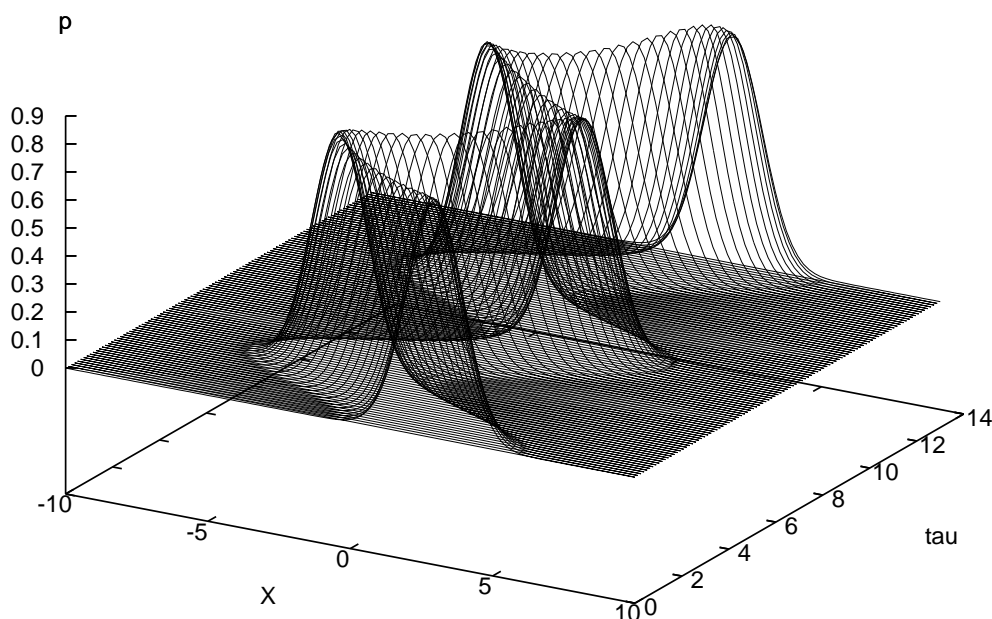
Klíčové části kódu pak mohou vypadat například takto

```
...
hx:= a/N;
// predvypocet pocatecni hodnoty pI - krok zpet o h/2
for j:= -N+1 to N-1 do
  pI[j][0] := pI[j][0] - h / 2 * ((pR[j - 1][0] +
    pR[j + 1][0] - 2 * pR[j][0])/sqr(hx) -
    pR[j][0] * sqr(hx * j) / 4);

// reseni rovnice
for k := 0 to maxk - 1 do
  // vypocet hodnot pR a pI v nasledujicim case
  for j := -N + 1 to N - 1 do begin
    pI[j][k + 1] := pI[j][k] + h * ((pR[j - 1][k] + pR[j + 1][k] -
      2 * pR[j][k]) / sqr(hx) - pR[j][k] *
      sqr(hx * j) / 4);
    pR[j][k + 1] := pR[j][k] - h*((pI[j - 1][k] + pI[j + 1][k] -
      2 * pI[j][k]) / sqr(hx) - pI[j][k] *
      sqr(hx * j) / 4);
  end;
end;
```

```
// vypocet hustoty pravdepodobnosti
for k:= 0 to maxk -1 do
  for j := -N + 1 to N - 1 do
    p[j][k] := sqr(pR[j][k]) + pR[j][k] * pR[j][k + 1];
  ...
```

V tomto programu obsahuje pole $pR[j][k]$ hodnoty $\psi_R^{(j)}(\tau_0 + kh)$, pole $pI[j][k]$ pak hodnoty $\psi_I^{(j)}(\tau_0 + (k - 1/2)h)$. Počáteční hodnoty v čase τ_0 jsou na začátku uloženy v $pR[j][0]$ a $pI[j][0]$. V poli $p[j][k]$ je na konci výpočtu uložena hustota pravděpodobnosti v bodech $X = aj/N$ a časech $\tau = \tau_0 + kh$.



Obr. 72. Závislost hustoty pravděpodobnosti na poloze a čase pro částice v koherentním stavu harmonického oscilátoru.

Pokud si výše popsaný program napíšete (nebo stáhnete z našich webových stránek) a budete s ním chvíli experimentovat, zjistíte, že použitý algoritmus bohužel není stabilní. K tomu, abychom mohli nasimulovat několik málo kmitů částice, je třeba použít poměrně dosti malý časový krok. Jinak se jakékoliv malé odchylky vlnové funkce (vzniklé například zaokrouhlováním) v průběhu výpočtu neúnosně zesílí a znehodnotí celý výsledek. Abychom tento efekt co nejvíce potlačili, je kromě volby dostatečně malého časového kroku nutné, aby počáteční vlnová funkce byla co nejhladší. Není proto příliš rozumné ji nastavit jednoduše jako $\exp(-(X - X_0)^2/4)$. Vzhledem k okrajové podmínce, která vyžaduje nulovost vlnové funkce v krajních bodech $X = \pm a$, by pak právě v krajních bodech

měla vlnová funkce skok. Ten by při výpočtu způsobil vznik a šíření stále silnějších oscilací ve vypočtených hodnotách. Tento problém lze částečně vyřešit například použitím počáteční vlnové funkce $(1 - (X/a)^2) \exp(-(X - X_0)^2/4)$. Faktor $(1 - (X/a)^2)$ vhodně utlumí gaussovský člen v okrajových bodech a přitom jej téměř neovlivní v oblasti, kde je jeho hodnota nezanedbatelná.

V grafu na obrázku 72 jsme hustoty pravděpodobnosti získali položením $h = 10^{-4}$, $N = 50$, $a = 10$, $\tau_1 - \tau_0 = 14$, $X_0 = 3$.

Úloha V. S ... horká dutina a bílý trpaslík

- a) Určete závislost koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě při celkovém náboji $Q = 0$ v prázdné uzavřené horké dutině. (Bude-li se vám chtít, i při jiných vámi zvolených hodnotách Q). Dále určete závislost poměru vnitřní energie U_e elektronů a pozitronů ku celkové vnitřní energii systému U (tj. součtu energie elektromagnetického záření a částic) na teplotě a určít hodnoty teploty odpovídající některým význačným hodnotám tohoto poměru (např. $3/4, 1/2, 1/4, \dots$; může tento poměr nabývat všech těchto hodnot?).

Pokuste se své výsledky pěkně graficky zpracovat ve formě grafů (můžete zkusit i trojrozměrné).

Při vašem snažení vám může hodně pomoci, pokud si zavedete vhodné bezrozměrné jednotky (např. βE_0 místo β apod.).

- b) Řešte soustavu diferenciálních rovnic pro $M(r)$ a $\rho(r)$ v modelu bílého trpaslíka pro několik vhodně zvolených hodnot $\rho(0)$ a pro každou z nich sledujte hodnotu, ke které se blíží $M(r)$ při $r \rightarrow \infty$. Ta je zřejmě rovna hmotnosti celé hvězdy. Pokuste se prozkoumat závislost této celkové hmotnosti na $\rho(0)$ a odhadnout její horní mez. Srovnajte váš výsledek s horní mezí hmotnosti bílého trpaslíka, kterou najdete v literatuře nebo na internetu. Uvažujte, že je hvězda tvořena héliem.

Horká dutina

Máme zadány vztahy pro hustotu elektronů a pozitronů v závislosti na teplotním parametru $\beta = (kT)^{-1}$ a chemickém potenciálu μ ,

$$n_-(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp\left(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)\right) + 1} dp,$$

$$n_+(\beta, \mu) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp\left(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)\right) + 1} dp.$$

Stejný tvar má i závislost koncentrace fotonů $n_f(\beta)$, pouze s tím rozdílem, že platí $\mu = 0$, $E_0 = 0$ a nejde o fermiony, ale o bosony. Je tedy navíc třeba obrátit znaménko ve jmenovateli.

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

Podobně výrazy pro hustotu energie elektronů, pozitronů, resp. fotonů nabývají tvaru

$$u_-(\beta, \mu) = \frac{U_-}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp\left(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} - \mu)\right) + 1} dp,$$

$$u_+(\beta, \mu) = \frac{U_+}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2}}{\exp\left(\beta(\sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} + \mu)\right) + 1} dp,$$

$$u_f(\beta) = \frac{U}{V} = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^3 c}{\exp(\beta pc) - 1} dp.$$

Integrály ve vztazích pro $n_f(\beta)$ a $u_f(\beta)$ lze zjednodušit substitucí $\beta pc = x$. Dostaneme tak

$$n_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp x - 1} dx,$$

$$u_f(\beta) = \frac{8\pi}{h^3 c^3 \beta^4} \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\exp x - 1} dx.$$

Zde vystupující integrály už nezávisí na žádných vnějších parametrech, jde tedy pouze o číselné konstanty. Snadno je můžeme vypočítat numericky. Jejich hodnoty je ovšem možno zapsat i v jednoduchém tvaru pomocí tzv. Riemannovy zeta funkce (výpočet zde nebudeme rozepisovat – provádí se pomocí rozvoje integrandu v nekonečnou řadu). Výsledné vztahy jsou

$$n_f(\beta) = \frac{16\pi \zeta(3)}{h^3 c^3 \beta^3},$$

$$u_f(\beta) = \frac{48\pi \zeta(4)}{h^3 c^3 \beta^4} = \frac{8\pi^5}{15h^3 c^3 \beta^4},$$

kde $\zeta(3) \doteq 1,20206$ a $\zeta(4) = \pi^4/90 \doteq 1,08232$. Získaný vztah pro u_f mimochodem představuje známý vyzařovací zákon, podle kterého je hustota energie záření černého tělesa o teplotě T úměrná T^4 (vzpomeňme si, že $\beta = (kT)^{-1}$).

Výrazy pro $n_{\pm}(\beta, \mu)$ a $u_{\pm}(\beta, \mu)$ takto jednoduše vypočítat nelze (jinak bychom tuto úlohu nezařadili do seriálu o numerických metodách). Můžeme si ovšem zavést bezrozměrné parametry $\gamma = \beta E_0$, $\nu = \beta \mu$ (ty nám bude od této chvíle sloužit jako parametry systému místo β a μ) a provést substituci $pc/E_0 = x$ a přepsat příslušné vztahy do tvaru

$$n_-(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma \sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx,$$

$$n_+(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma \sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx,$$

$$u_-(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} dx,$$

$$u_+(\gamma, \nu) = \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} dx.$$

Zavedeme-li jednotkovou hustotu částic $n_0 = 8\pi(E_0/hc)^3$, můžeme předchozí vztahy zapsat jednoduše jako

$$\frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx,$$

$$\frac{u_{\pm}(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} \pm \nu) + 1} dx.$$

Nábojová hustota ϱ uvažovaného plynu v jednotkách en_0 (kde e je elementární náboj) je pak zřejmě rovna $n_+(\gamma, \nu) - n_-(\gamma, \nu)/n_0$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\varrho(\gamma, \nu)}{en_0} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} - \frac{x^2}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx = \\ &= -2 \sinh \nu \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \exp(\gamma\sqrt{1+x^2})}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx. \end{aligned}$$

Podobně celková hustota energie $u_e(\gamma, \nu)$ elektronů a pozitronů je rovna $u_e(\gamma, \nu) = u_+(\gamma, \nu) + u_-(\gamma, \nu)$, tedy

$$\begin{aligned} \frac{u_e(\gamma, \nu)}{E_0 n_0} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} + \nu) + 1} + \frac{x^2 \sqrt{1+x^2}}{\exp(\gamma\sqrt{1+x^2} - \nu) + 1} \right) dx = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx. \end{aligned}$$

Jednoduchým dosazením pak dostaneme pro poměr $\Lambda(\gamma, \nu)$ energie elektronů a pozitronů k celkové energii soustavy vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 &= \frac{u_f(\gamma)}{u_+(\gamma, \nu) + u_-(\gamma, \nu)} = \\ &= \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{1+x^2} (\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) \cosh \nu + 1)}{(\exp(\gamma\sqrt{1+x^2}) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu} dx \right)^{-1}. \end{aligned}$$

V klíčových vztazích, které budeme nakonec integrovat numericky (tj. vztahy pro $n_{\pm}(\gamma, \nu)$, $\varrho(\gamma, \nu)$ a $\Lambda(\gamma, \nu)$), použijeme v seriálu doporučenou substituci $t = (1+x^2)^{-1/2}$ a dostaneme

$$\frac{n_{\pm}(\gamma, \nu)}{n_0} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^4 (\exp(\gamma/t \pm \nu) + 1)} dt,$$

$$\frac{\varrho(\gamma, \nu)}{en_0} = -2 \sinh \nu \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} \exp(\gamma/t)}{t^4((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt,$$

$$\frac{1}{\Lambda(\gamma, \nu)} - 1 = \frac{\pi^4}{30\gamma^4} \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2} (\exp(\gamma/t) \cosh \nu + 1)}{t^5((\exp(\gamma/t) + \cosh \nu)^2 - \sinh^2 \nu)} dt \right)^{-1}.$$

Ačkoliv tyto výrazy vypadají děsivě, nebude problém je zdolat numerickými metodami. Pro výpočty jsme zvolili v zadání popsanou Rombergovu metodu. K invertování vztahu $\varrho(\gamma, \nu)$ (tj. nalezení ν splňujícího $\varrho(\gamma, \nu) = \varrho$ pro dané γ a ϱ) jsme použili jednoduchou metodu regula falsi pro řešení obyčejných rovnic, vysvětlenou ve studijním textu *Úvod do programování*. Takto jsme pak získali závislosti n_{\pm} a Λ na γ a ϱ/en_0 místo γ a ν , což bylo naším cílem. Pro $\varrho = 0$ přitom speciálně platí $\nu = 0$, v tomto případě tedy vztah $\varrho(\gamma, \nu)$ invertovat nemusíme.

Stejným způsobem jsme zjišťovali i konkrétní hodnoty γ , při kterých nabývá poměr Λ určitých význačných hodnot.

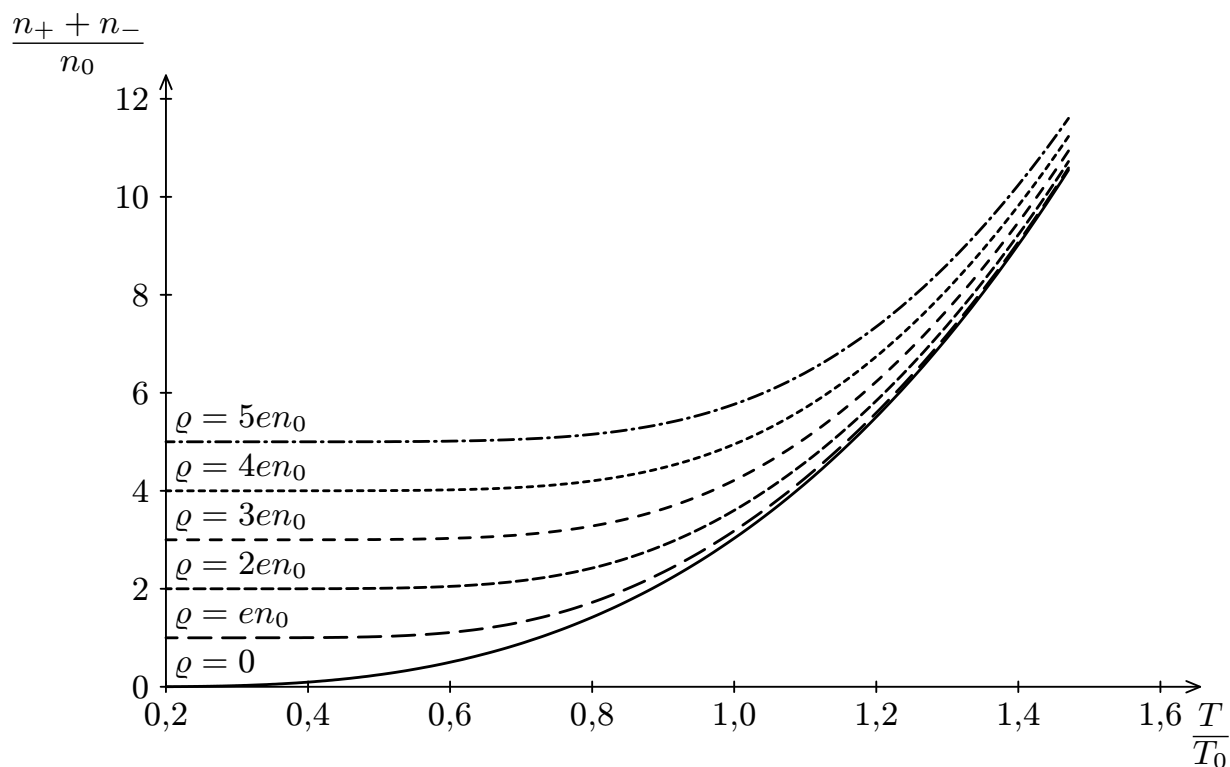
Když už máme napsaný program⁶², nic nám nebrání začít kreslit grafy. Kvůli jejich názornosti je ještě vhodné přejít od parametru γ k γ^{-1} . Ten je stejně jako $\beta^{-1} = kT$ úměrný teplotě. Konkrétně představuje hodnotu teploty v jednotkách $T_0 = E_0/k$.

V grafu 73 můžeme vidět závislost úhrnné koncentrace elektronů a pozitronů na teplotě pro několik daných hodnot nábojové hustoty. Pro malé teploty se samozřejmě hodnoty koncentrace blíží koncentraci dané nábojovou hustotou (v systému se prakticky nalézají buď pouze elektrony, nebo pouze pozitrony podle toho, jaké znaménko má hustota náboje).

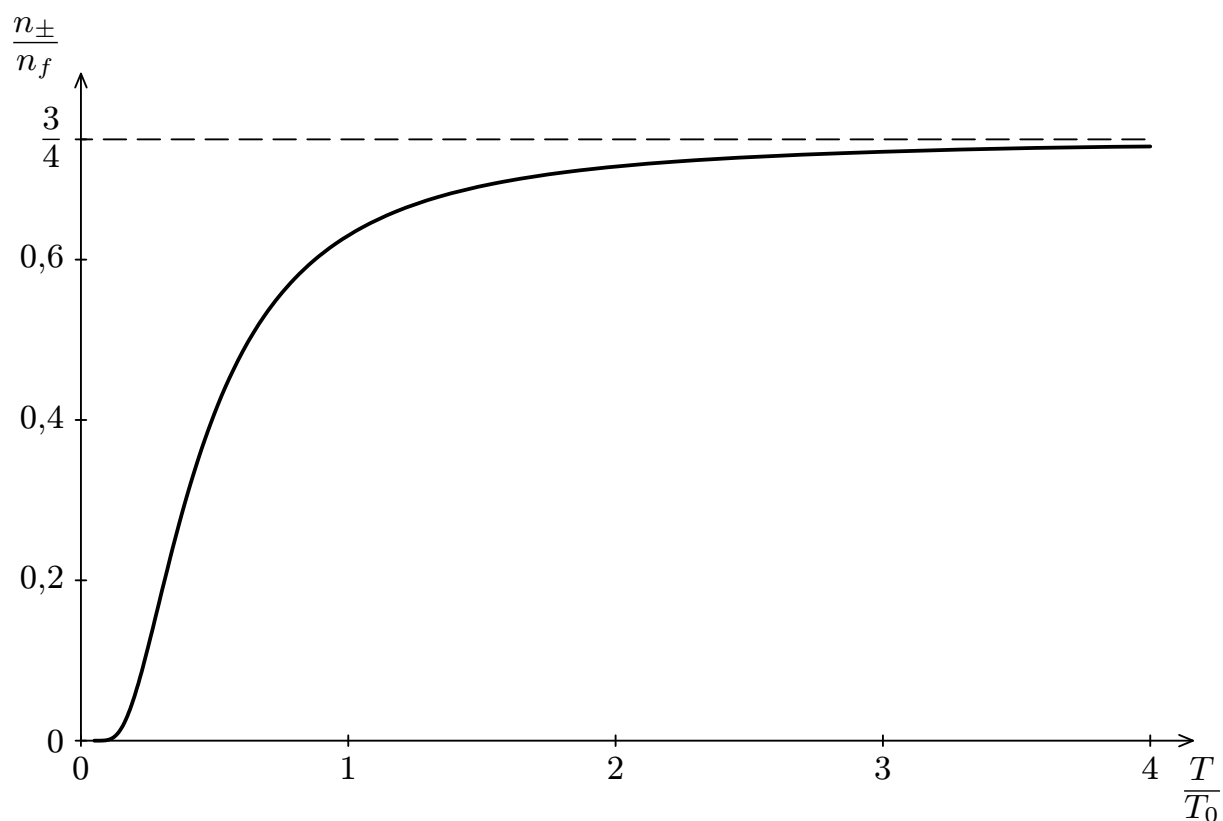
Graf na obrázku 74 ukazuje závislost poměru koncentrací elektronů, resp. pozitronů ke koncentraci fotonů v neutrálním systému (tj. při $\nu = 0$). Je poměrně pozoruhodné, že tento poměr se při vysokých teplotách blíží hodnotě $3/4$ (tento závěr zde nebudeme dokazovat – lze jej ovšem poměrně jednoduše odvodit limitním přechodem $\gamma \rightarrow 0$ v příslušných integrálech).

V grafu na obrázku 75 pak vidíme teplotní závislost poměru hustoty energie elektronů a pozitronů k celkové hustotě energie v systému. Opět je možno ukázat, že vysokoteplotní limita tohoto výrazu je $7/11$, což nám naznačuje i provedený numerický výpočet.

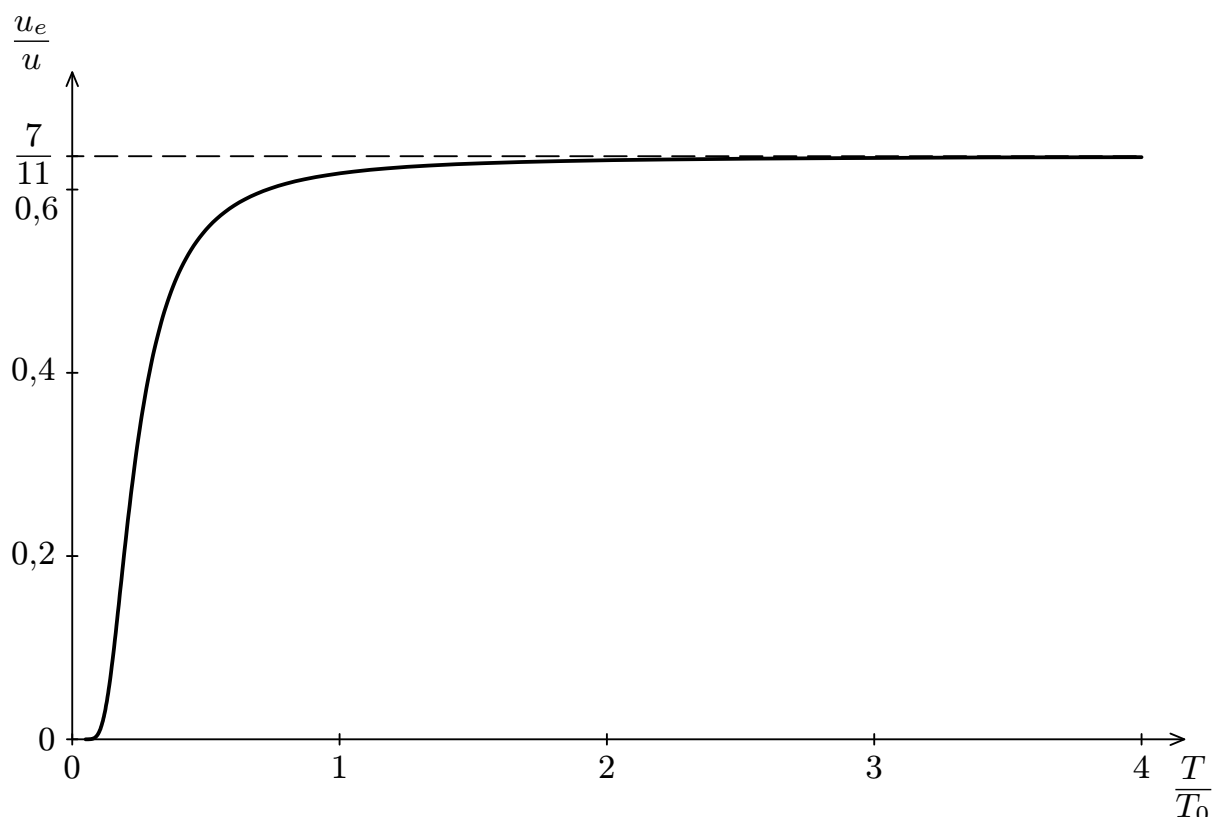
⁶²⁾ Viz program `elpoz.pas` na FYKOSím webu.



Obr. 73. Hustota elektronů a pozitronů v závislosti na teplotě pro několik hodnot nábojové hustoty



Obr. 74. Poměr hustoty elektronů (resp. pozitronů) k hustotě fotonů v závislosti na teplotě v neutrálním systému



Obr. 75. Poměr úhrnné energie elektronů a pozitronů k celkové energii neutrálního systému v závislosti na teplotě

Podíl elektronů a pozitronů na celkové energii systému se začne výrazně projevovat při teplotách, které řádově odpovídají jednotkové teplotě T_0 . Konkrétně jsme numerickým výpočtem (metodou regula falsi) zjistili, že

$$\begin{aligned} \Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{4} & \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2126, \\ \Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{3} & \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,2498, \\ \Lambda = \frac{u_e}{u} = \frac{1}{2} & \quad \text{při} \quad \frac{T}{T_0} \doteq 0,3853. \end{aligned}$$

Na závěr ještě uvedme číselné hodnoty jednotkových veličin T_0 , n_0 , $E_0 n_0$ a en_0 . Po dosazení zjistíme, že

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{E_0}{k} \doteq 5,93 \cdot 10^{10} \text{ K}, \\ n_0 &= \frac{8\pi E_0^3}{h^3 c^3} \doteq 1,76 \cdot 10^{39} \text{ m}^{-3}, \\ E_0 n_0 &= \frac{8\pi E_0^4}{h^3 c^3} \doteq 1,44 \cdot 10^{27} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3}, \\ en_0 &= \frac{8\pi E_0^3 e}{h^3 c^3} \doteq 2,81 \cdot 10^{20} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}. \end{aligned}$$

Oblasti, ve kterých se pohybují všechny studované veličiny, jsou tedy velmi extrémní. Například teploty, při nichž začíná být podíl elektronů a pozitronů v systému nezanedbatelný, jsou řádově desítky miliard kelvinů!

Jistě nepřekvapí, že pokud dosadíme do získaných vztahů pokojovou teplotu, vyjde nám koncentrace pozitronů, resp. elektronů v řádu 10^{-10^8} . Uvažovaný jev tedy v našich podmínkách nemůžeme pozorovat, ani kdybychom se snažili sebevíce.

Bílý trpaslík

V 5. kapitole seriálu jsme dospěli k tomu, že rozložení hmoty ve sféricky symetrické hvězdě tvořené degenerovaným fermionovým plynem je dáno diferenciálními rovnicemi

$$\frac{1}{m} f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) \frac{d\varrho(r)}{dr} = - \frac{GM(r) \varrho(r)}{r^2},$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \varrho(r),$$

kde $\varrho(r)$ je hustota hmoty ve vzdálenosti r od středu, $M(r)$ je hmotnost uzavřená ve sféře o poloměru r , G Newtonova gravitační konstanta, m hmotnost připadající na jeden fermion a konečně

$$f' \left(\frac{\varrho(r)}{m} \right) = \frac{E_0}{3} \frac{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3}}{\sqrt{\left(\frac{\varrho(r)}{mn_0} \right)^{2/3} + 1}},$$

přičemž n_0 je jednotková koncentrace definovaná jako (pozor, definiční vztah je jiný než v předchozí části úlohy!)

$$n_0 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{E_0}{hc} \right)^3.$$

Jako v předešlé části si i nyní zavedeme bezrozměrné veličiny, se kterými se nám pak bude lépe počítat. Jako jednotku hustoty je přirozené zvolit mn_0 . Budeme tedy dále používat bezrozměrnou hustotu $\tilde{\varrho} = \varrho/mn_0$.

Volba jednotky vzdálenosti už takto jednoznačná není. Chtěli bychom ovšem, aby nám při použití bezrozměrných veličin z rovnic zmizely veškeré fyzikální konstanty. Označme si zatím neznámou jednotku vzdálenosti jako α . Zavedeme pak bezrozměrnou vzdálenost $\tilde{r} = r/\alpha$.

Jednotka hmotnosti bude $mn_0\alpha^3$, tedy bezrozměrná hmotnost je definována jako $\tilde{M} = M/mn_0\alpha^3$. Nové neznámé funkce, které chceme najít jako řešení diferenciálních rovnic, jsou $\tilde{\varrho}(\tilde{r})$ a $\tilde{M}(\tilde{r})$. Dosadíme tedy do původních rovnic $\varrho(r) = mn_0\tilde{\varrho}(\tilde{r})$, $M(r) = mn_0\alpha^3\tilde{M}(\tilde{r})$ a $r = \alpha\tilde{r}$ a po úpravách dostaneme

$$\frac{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r})}{3\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r}) + 1}} \frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = - \frac{Gm^2n_0\alpha^2}{E_0} \frac{\tilde{M}(\tilde{r}) \tilde{\varrho}(\tilde{r})}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Zvolíme-li $\alpha = \sqrt{E_0/Gm^2n_0}$, multiplikatívni faktor na pravé straně první rovnice bude roven jedné, rovnice pro bezrozměrné veličiny tedy můžeme zapsat v konečném tvaru

$$\frac{d\tilde{\varrho}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = -\frac{3\tilde{M}(\tilde{r})\tilde{\varrho}^{1/3}(\tilde{r})\sqrt{\tilde{\varrho}^{2/3}(\tilde{r})+1}}{\tilde{r}^2},$$

$$\frac{d\tilde{M}(\tilde{r})}{d\tilde{r}} = 4\pi\tilde{r}^2\tilde{\varrho}(\tilde{r}).$$

Počáteční podmínka pro \tilde{M} je zřejmě $\tilde{M}(0) = 0$, hustotu $\tilde{\varrho}(0)$ ve středu hvězdy si budeme volit jako parametr.

Nyní můžeme rovnice řešit numericky. Musíme si ovšem dát pozor na dvě věci. Zaprvé nemůžeme začínat s řešením od $\tilde{r} = 0$, protože tam pravá strana první rovnice není definována. Tento problém však můžeme obejít malým trikem. Budeme předpokládat, že malá kulová oblast o poloměru ε kolem středu hvězdy je homogenní s hustotou $\tilde{\varrho}(0)$. Začneme tedy integraci na poloměru $\tilde{r} = \varepsilon$ a budeme předpokládat $\tilde{\varrho}(\varepsilon) = \tilde{\varrho}(0)$ a $\tilde{M}(\varepsilon) = 4\pi\varepsilon^3\tilde{\varrho}(0)/3$. Druhou komplikací, na kterou si musíme dávat pozor, je neceločíselná mocnina $\tilde{\varrho}$ na pravé straně první rovnice. Pokud ji program počítá pomocí logaritmu, nemůže být umocňované číslo záporné. Hustota materiálu ve hvězdě se přitom s rostoucím poloměrem rychle blíží k nule. Je-li $\tilde{\varrho}$ dostatečně malé, může při integračním kroku snadno přejít do záporných hodnot a algoritmus skončí chybou.

Abychom tomu předešli, můžeme testovat znaménko $\tilde{\varrho}$ a je-li záporné, výpočet ukončit. Dále pak předpokládáme, že pro vyšší \tilde{r} je již hustota nulová. Další možností je poslední integrační krok, při kterém se změnilo znaménko $\tilde{\varrho}$, opakovat s polovičním krokem.

V každém případě však nakonec dospějeme k poloměru \tilde{r} , nad kterým je již hustota $\tilde{\varrho}$ zanedbatelná a \tilde{M} se dále prakticky nemění. Takto získaná hodnota \tilde{M} (označme ji $\tilde{M}(\infty)$) pak odpovídá celkové hmotnosti hvězdy v jednotkách

$$M_0 = mn_0\alpha^3 = \sqrt{\frac{3h^3c^3}{8\pi G^3m^4}} \doteq 5,0815 \cdot 10^{30} \text{ kg} \doteq 2,552M_\odot,$$

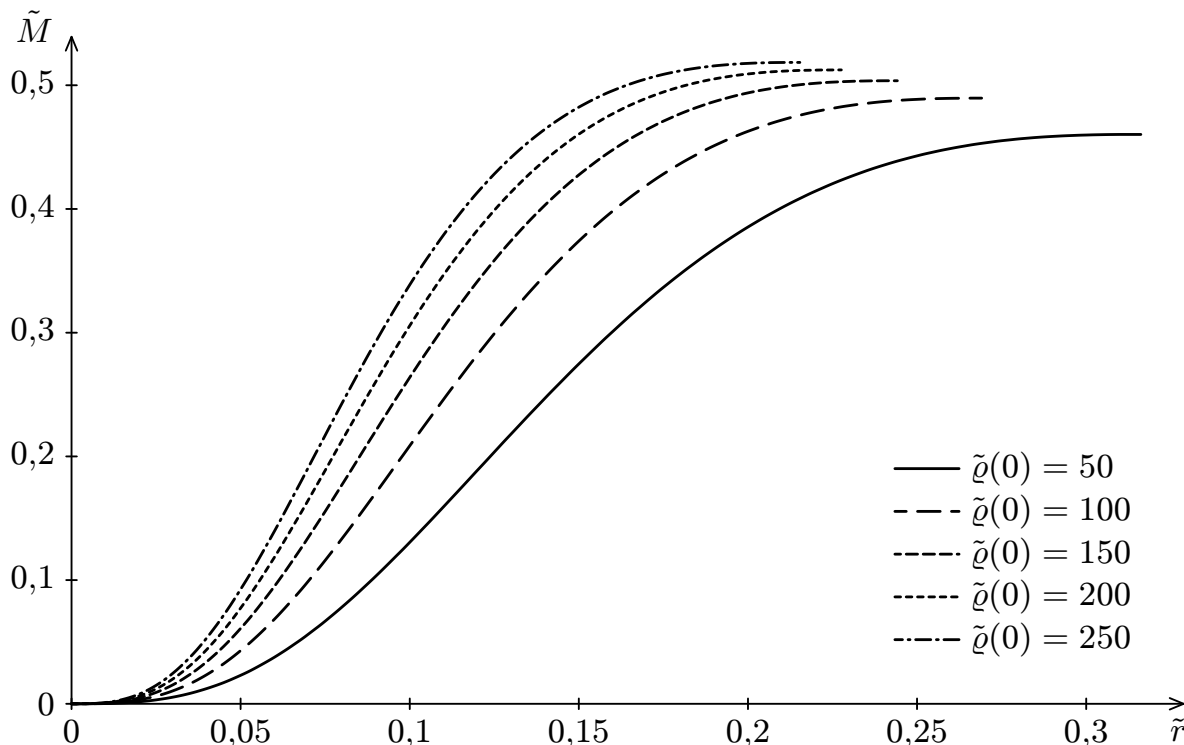
kde M_\odot je hmotnost Slunce. Za m jsme dosadili hmotnost připadající na jeden elektron v hvězdě složené pouze z hélia – tedy součet hmotnosti elektronu a poloviny hmotnosti heliového jádra.

Soustavu diferenciálních rovnic jsme řešili Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu⁶³. V použitém algoritmu jsme aplikovali výše zmíněné zmenšování integračního kroku, pokud hustota přejde do záporných hodnot. Počáteční krok jsme přitom nastavili na 10^{-5} , jeho minimální hodnotu jsme omezili na 10^{-9} (je-li krok nižší, výpočet považujeme za skončený). Podobně testujeme i velikost hustoty $\tilde{\varrho}$

⁶³⁾ Viz program `hvezda.pas` na FYKOSích internetových stránkách.

– pokud klesne pod 10^{-9} , výpočet skončí. Poloměr \tilde{r} , na kterém výpočet zastavíme, pokud se tak již nestalo kvůli výše uvedeným ukončujícím podmínkám, jsme stanovili na 2,0.

Pro několik různých hodnot hustoty ve středu hvězdy jsme tak dostali závislosti \tilde{M} na \tilde{r} . Jejich tvar znázorňuje graf na obrázku 76.



Obr. 76. Závislost hmotnosti na poloměru v bílém trpaslíku pro několik hodnot centrální hustoty

Je vidět, že s rostoucí centrální hustotou se zmenšuje poloměr hvězdy a zvětšuje její celková hmotnost. Zdá se ovšem, že tempo růstu celkové hmotnosti se postupně snižuje. To odpovídá skutečnosti, že existuje jistá kritická hmotnost hvězdy, která se ještě dokáže díky tlaku degenerovaného elektronového plynu ubránit dalšímu gravitačnímu kolapsu. Je-li hvězda hmotnější, čeká ji buď osud neutronové hvězdy, nebo dokonce černé díry.

Abychom mohli odhadnout tuto limitní hmotnost, provedli jsme výpočet pro přibližně sto různých hodnot centrální hustoty a zjišťovali, jak na ní závisí celková hmotnost hvězdy $\tilde{M}(\infty)$.

Získanou závislost uvádíme v grafu 77.

Vypočtenými body jsme proložili závislost typu

$$\tilde{M}(\infty) = A + \frac{B}{\tilde{\rho}(0)} + \frac{C}{\tilde{\rho}^2(0)} + \dots + \frac{F}{\tilde{\rho}^5(0)} .$$

Hodnota A získaná pomocí gnuplotu je $0,56570 \pm 0,00004$. Toto číslo je ovšem také limitní hodnotou, ke které se blíží $\tilde{M}(\infty)$ pro $\tilde{\rho}(0) \rightarrow \infty$. Získali jsme tedy odhad maximální možné hmotnosti bílého trpaslíka

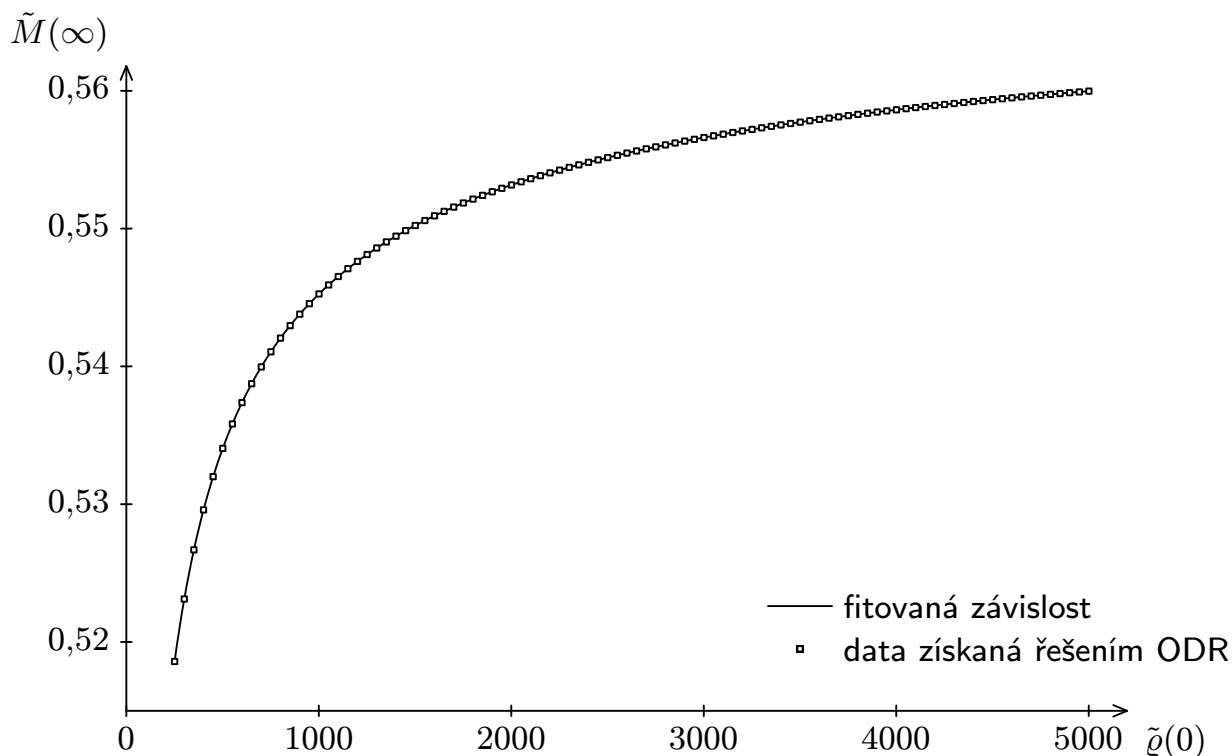
$$\tilde{M}_{\max} \doteq 0,5657 .$$

Po vynásobení tohoto bezrozměrného čísla použitou jednotkou hmotnosti M_0 dostáváme

$$M_{\max} \doteq 1,444M_{\odot}.$$

Wikipedia uvádí pro horní mez hmotnosti bílého trpaslíka tvořeného héliem podle S. Chandrasekhara (na jehož počest se nazývá *Chandrasekharovou mezí*) hodnotu cca $1,43M_{\odot}$. Ta se od námi vypočtené hodnoty liší pouze o cca 1 %, což je vzhledem k hrubosti použitého modelu jistě velmi uspokojivý výsledek.

Dodejme ještě, že jak naše, tak Chandrasekharova hodnota jsou založeny na řadě idealizací. Pro získání realističtějšího modelu by bylo nutno započítat efekty elektromagnetické interakce mezi elektrony a jádry hélia, obecně relativistické efekty atd.



Obr. 77. Závislost celkové hmotnosti hvězdy na hustotě v jejím středu

Úloha VI. S ... na přání

Vyberte si jeden z následujících problémů a numericky jej vyřešte.

- a) Pokud vás povzbudil pohled na obrázky z raytracingu a chtěli byste si něco podobného vyzkoušet také, můžete se pokusit o vytvoření vlastního programu na vizualizaci vzhledu objektů z hlediska relativistického pozorovatele. Klidně se zkuste poprat i se zmíněnou černou dírou. K tomu je však vhodnější využít druhý popsáný přístup a sledovat paprsek pozpátku od oka pozorovatele až k jeho průsečíku se sledovaným objektem. Prozradíme, že světelný paprsek se v okolí sféricky symetrického objektu o hmotnosti⁶⁴ M v polárních souřadnicích r a φ (pohyb každého paprsku je rovinný, stačí tedy dvě souřadnice) pohybuje podle diferenciální rovnice

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}.$$

- b) Vaším úkolem bude pro chaotické systémy dle vašeho výběru (při něm se můžete inspirovat třeba na internetu) provést dostatečný počet numerických simulací, abyste z nich mohli statisticky vyhodnotit, zda skutečně platí zmíněná exponenciální závislost Δ na čase. Pokud ano, proveďte odhad hodnoty maximálního Lyapunovova exponentu. Podle uvážení můžete sledovat i jiné aspekty chování chaotických systémů.

Vyhlídka na Zemi

Rovnici trajektorie světelného paprsku v okolí černé díry

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{3M}{r^2}$$

nejdříve převedeme do tvaru poněkud vhodnějšího pro numerické řešení. Všimneme si, že

$$\frac{dd}{d\varphi} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dx},$$

kde dx je element vzdálenosti ve směru úhlové souřadnice φ . Označíme-li α úhel, který s tímto směrem svírá směr paprsku v daném bodě (znaménko α volíme kladné, pokud paprsek obíhá v kladném smyslu a přitom se snižuje jeho vzdálenost od centra), pak platí

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{tg} \alpha.$$

Odtud pak opětovným derivováním dostaneme, že

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{d\varphi} \right) = \frac{1}{r \cos^2 \alpha} \frac{d(\alpha + \varphi)}{d\varphi} - \frac{1}{r}.$$

⁶⁴) Užíváme zde tzv. geometrizované jednotky, v nichž má hmotnost rozměr vzdálenosti a Schwarzschildův poloměr (poloměr sféry, z níž není návratu) je roven $2M$. Pro převod do klasického značení stačí všude namísto M psát výraz GM/c^2 .

Dále zřejmě úhel $\alpha + \varphi$ vyjadřuje směr světelného paprsku v daném bodě (tj. natočení vektoru k němu tečného vůči jistému pevně danému vektoru). Označme $\alpha + \varphi = \varphi$. Součin $r d\varphi$ je opět roven elementu dx a ten lze vyjádřit jako $\cos \alpha ds$, kde ds je element dráhy paprsku. Dosazením pak dostáváme

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{\cos^3 \alpha} \frac{d\varphi}{ds}.$$

Použijeme-li pak zadanou rovnici trajektorie, získáme jednoduchý výsledek

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{3M}{r^2} \cos^3 \alpha.$$

Protože však při numerickém výpočtu bude výhodnější pracovat spíše se samotným tečným vektorem než s úhlem popisujícím jeho směr, provedeme ještě další úpravy. Jako \mathbf{n} budeme označovat jednotkový vektor ve směru paprsku, jako \mathbf{r} vektor směřující z počátku souřadnic do příslušného bodu trajektorie a \mathbf{e}_z budiž vektor kolmý k rovině pohybu paprsku (zvolený tak, že vektory \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ a \mathbf{e}_z tvoří kladně orientovanou bázi). Jelikož vektor \mathbf{n} má konstantní jednotkovou velikost, platí $d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$, tedy $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} = 0$. Navíc $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z \sin(d\varphi) \approx \mathbf{e}_z d\varphi$, odkud plyne $\mathbf{n} \times d\mathbf{n} = \mathbf{e}_z d\varphi$. Vynásobením této rovnosti vektorově vektorem \mathbf{n} zleva a využitím známé identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ dostaneme $\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n}) - d\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$, neboli $d\mathbf{n} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z d\varphi$. Odtud pak ihned obdržíme

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{3M}{r^2} \mathbf{n} \times \mathbf{e}_z \cos^3 \alpha.$$

Využijeme-li dále zřejmé rovnosti $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = r \mathbf{e}_z \cos \alpha$, získáme dosazením

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{3M}{r^5} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{r}) |\mathbf{n} \times \mathbf{r}|^2.$$

Výhodou této vektorové rovnice je, že platí obecně a nejen pro pohyb v jediné zvolené rovině. Doplníme-li ji o druhou rovnici, která popisuje, jak se při pohybu mění vektor \mathbf{r} , tedy

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{n},$$

dostaneme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic pro neznámé vektorové funkce $\mathbf{n}(s)$ a $\mathbf{r}(s)$, které můžeme snadno řešit například některou z Rungeových-Kuttových metod. Získáme tak rovnou trajektorii paprsku parametrizovanou dráhou s .

Můžeme tedy přikročit k samotnému raytracingu, jehož princip byl popsán v zadání. Jednoduše začneme s polohovým vektorem $\mathbf{r}(0)$, který je roven polohovému vektoru pozorovatele, a směrovým vektorem $\mathbf{n}(0)$, který představuje směr pozorovatelova pohledu. Pak řešíme výše uvedenou soustavu ODR a sledujeme, jestli paprsek nezasáhl povrch některého z objektů, které jsme si do 3D scény umístili. Jestliže ano, vykreslíme na příslušné místo promítací roviny bod (jeho barva může být odvozena např. z barvy, struktury a osvětlení zasaženého bodu objektu). Jestliže paprsek nic nezasáhl ani po předem zvoleném maximálním počtu

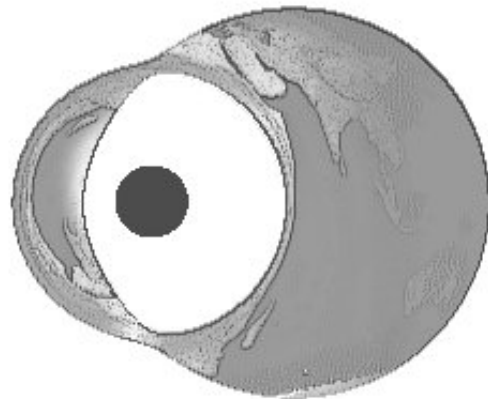
výpočetních kroků, bod nevykreslíme (nebo vykreslíme bod s barvou pozadí⁶⁵). Stejně tak, pokud paprsek zmizel pod horizontem černé díry (tj. jeho vzdálenost od ní se zmenšila pod hranici $2M$).

Princip algoritmu, který jsme použili my, je jednoduchý. Každý z objektů ve 3D scéně je reprezentován určitou reálnou funkcí f v třírozměrném prostoru. Kladná hodnota funkce znamená, že příslušný bod je vně objektu, záporná označuje vnitřní body objektu (pro kouli o poloměru 2 a středu v bodě $(1, 2, 3)$ by taková funkce mohla být např. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 4$). Při numerickém integrování soustavy ODR tedy opakovaně počítáme hodnotu funkce f v bodě \mathbf{r} . Pokud je kladná, pokračujeme ve výpočtu. Jakmile změní znaménko, víme, že paprsek narazil na objekt. Vrátime se tedy o krok nazpátek, zmenšíme krok (např. na polovinu) a postupujeme dále. Tuto proceduru opakuje, dokud není krok menší než požadovaná přesnost, s jakou chceme průsečík paprsku s povrchem objektu najít.

Náš program jsme obohatili o některé spíše kosmetické drobnosti, jako je možnost stínování objektu podle libovolně rozmístěných světelných zdrojů (nepočítáme však se stíny, které vrhají samotné objekty, s odrazy ani s ohybem světla ze zdrojů v gravitačním poli – řešení podobných detailů není pro náš účel nezbytné) či nanesení textury na objekt.

Vykreslovali jsme vzhled scény sestávající ze Země, v jejímž okolí se vznáší černá díra. Přitom jsme samozřejmě nebrali v potaz fakt, že by naše drahá planeta byla slápnými silami od takto masivního objektu v okamžiku roztrhána na kousky (naším cílem je pouze znázornit deformaci vzhledu objektů v okolí velmi masivního tělesa). Také jsme neuvažovali frekvenční posuv v gravitačním poli, který by způsobil změnu barvy přicházejícího světla.

V jedné ze simulací jsme pozorovatele posadili do počátku souřadnic a Zemi do bodu o souřadnicích $(0, 0, -3)$. Jednotka délky je zvolena tak, že poloměr Země je roven 0,4. Do bodu $(-0,2; 0; -1,5)$ jsme umístili černou díru o poloměru $2M = 0,02$ (to odpovídá cca stonásobku hmotnosti



Obr. 78. Vzhled scény složené ze Země se středem v bodě $(0, 0, -3)$ a poloměrem 0,4 a černé díry o středu $(-0,2; 0; -1,5)$ a poloměru 0,02 z hlediska pozorovatele v počátku

⁶⁵) Ta ovšem nemusí být konstantní. Můžeme předpokládat, že se paprsek dále pohybuje rovnoměrně (provedli jsme velký počet výpočetních kroků, předpokládáme tedy, že se paprsek nachází někde daleko od centra), a vypočítáme, kde protne námi zvolené vzdálené objekty. Těmi může být například krajina, hvězdné nebe apod.

Slunce – fatální důsledky pro Zemi i pozorovatele zřejmě netřeba zdůrazňovat). Pozorovatel se dívá proti směru osy z , tedy přímo k Zemi. Značně pokrivený obraz, který uvidí, je znázorněn⁶⁶ na obrázku 78.

Závěrem ještě drobné doznání. Zatajili jsme před vámi jednu nepřesnost našeho modelu. Sférické souřadnice, ve kterých popisujeme pohyb paprsku, jsou pouze matematicky zavedené objekty. Ve velké vzdálenosti od černé díry sice mají stejný význam jako „obyčejné“ sférické souřadnice, čím více se však přibližujeme k horizontu událostí, tím více se od nich liší. Sférické souřadnice, které jsou ze své definice souřadnicemi v plochem časoprostoru, nemůžeme v jejich původním významu přenést do časoprostoru zakřiveného. Jedním z důsledků této komplikace je, že při přechodu od námi použitých „sférických“ souřadnic do souřadné soustavy pozorovatele stojícího v určité vzdálenosti⁶⁷ R od černé díry musíme vzdálenosti v radiálním směru vydělit faktorem $1 - 2M/R$, zatímco vzdálenosti v tangenciálním směru zůstávají stejné. Striktně vzato tedy námi získané obrázky nejsou zcela přesné, protože směrový vektor paprsku je třeba před začátkem výpočtu netriviálně přetransformovat z pozorovatelových souřadnic do globálních (podobně jako v případě speciálněrelativistického raytracingu uvedeného jako příklad v posledním dílu seriálu). Oprava však naštěstí spočívá pouze v přeškálování obrázků právě zmíněným faktorem $\sqrt{1 - 2M/R}$. Ten se navíc pro naše obrázky liší od jedničky jen řádově o setiny.

Chaotické dvojkyvadlo

Z pohybových rovnic dvojkyvadla jsme si vyjádřili $\ddot{\vartheta}_1$ a $\ddot{\vartheta}_2$ jako funkce $\dot{\vartheta}_1$, $\dot{\vartheta}_2$, ϑ_1 a ϑ_2 . Přitom jsme zvolili $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ (tedy $\mu = 1/2$ a $\varkappa = 1$) a $\omega = 1$.

Soustavu ODR jsme řešili Rungeovou-Kuttovou metodou čtvrtého řádu. Tato metoda je pro většinu aplikací dostatečně přesná, v případě chaotických systémů však ani ona nedokáže poskytnout zcela spolehlivé výsledky. Pokud bychom chtěli skutečně precizně simulovat chování dvojkyvadla, bylo by třeba použít některý ze sofistikovaných algoritmů navržených speciálně pro řešení pohybových rovnic (např. tzv. *symplektické integrátory*). Nás ale spíše než konkrétní stav kyvadla po určité době zajímají statistické aspekty jeho časového vývoje. Můžeme se tedy spokojit i s „méně přesnou“ metodou.

Při každé simulaci jsme nejdříve náhodně nastavili polohu jednoho kyvadla (zvolili jsme náhodně ϑ_1 a ϑ_2 z intervalu $[0, 2\pi)$) a počáteční rychlosti jsme položili rovny nule. Úhly ϑ'_1 a ϑ'_2 pro druhé kyvadlo jsme pak nastavili na k_1 , resp. k_2 -násobek úhlů ϑ_1 , resp. ϑ_2 , kde

$$k_1 = 1 + \varepsilon \sin \alpha, \quad k_2 = 1 + \varepsilon \cos \alpha.$$

⁶⁶⁾ Další obrázky i program `raytracing_console.pas`, kterým byly vytvořeny, můžete najít na FYKOSích webových stránkách.

⁶⁷⁾ Dalším příkladem zvrhlého chování prostoru v obecněrelativistických situacích je to, že i samotný pojem vzdálenosti přestává být tím, čím se zdá. Pokud například změříme vzdálenost mezi dvěma body pomocí radiolokace, dostaneme jiný výsledek než při „fyzickém“ měření pomocí tuhých tyčí.

Tato procedura zajistí, aby relativní odchylka poloh obou dvojkyvadel byla přibližně rovna danému ε a přitom byla náhodně rozdělena mezi úhly ϑ_1 a ϑ_2 podle náhodného parametru α . Pro náš výpočet jsme zvolili $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ (jde tedy skutečně o velmi malou odchylku).

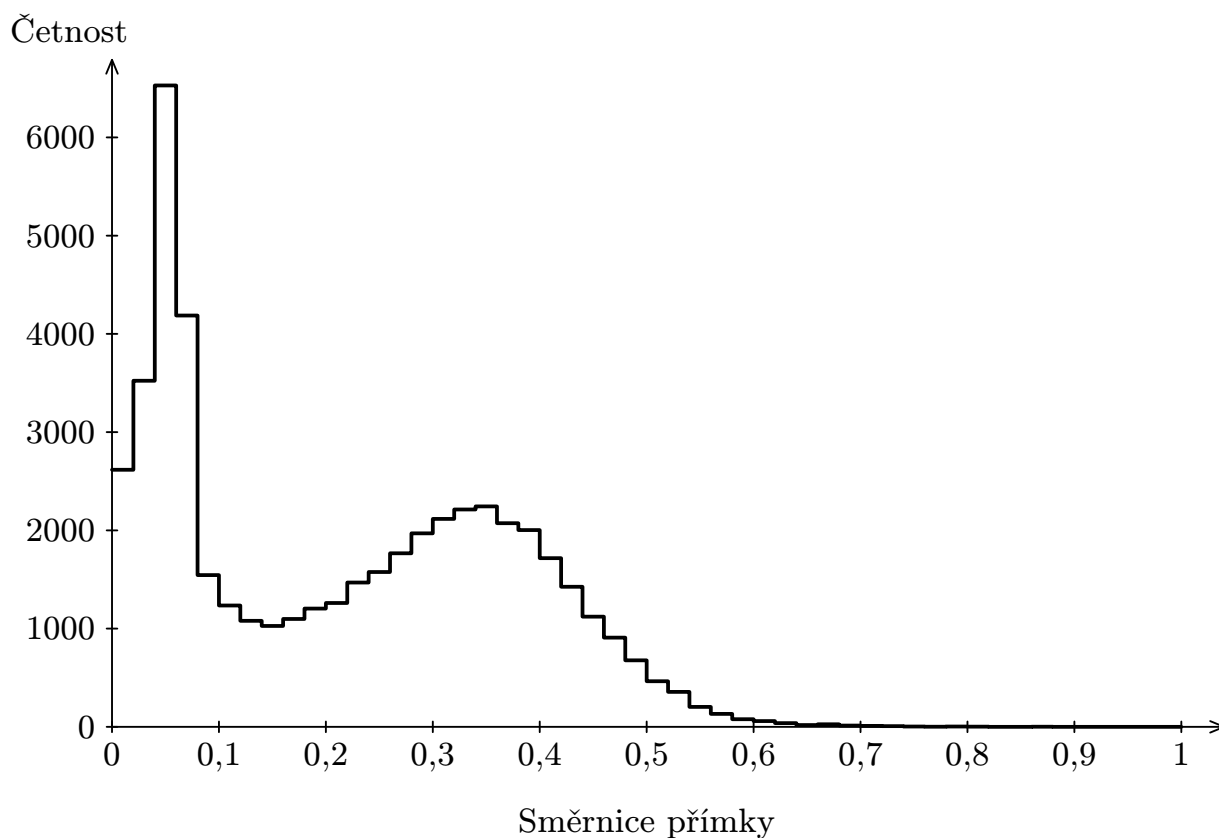
Po nastavení počátečních podmínek jsme prováděli simulaci obou kyvadel (použili jsme integrační krok $dt = 2 \cdot 10^{-4}$) a průběžně sledovali hodnotu odchylky

$$d = (\vartheta_1 - \vartheta'_1)^2 + (\vartheta_2 - \vartheta'_2)^2 + (\dot{\vartheta}_1 - \dot{\vartheta}'_1)^2 + (\dot{\vartheta}_2 - \dot{\vartheta}'_2)^2.$$

Simulaci⁶⁸ jsme zastavili po dosažení času $t = 36$, případně pokud d překročilo hodnotu 1.

Jestliže se vzdálenost obou kyvadel ve fázovém prostoru skutečně zvětšuje přibližně exponenciálně, pak hodnota veličiny $\log d$ roste zhruba lineárně. Závislostí $\log d(t)$ získanou výpočtem jsme tedy proložili přímkou použitím metody nejmenších čtverců a zaznamenali její směrnici (která souvisí s Lyapunovovým exponentem).

Celý výpočet jsme opakovali 50 000krát a vypočtené směrnice jsme znázornili ve formě histogramu (viz obrázek 79).



Obr. 79. Histogram směrníc přímek proložených závislostmi $\log d(t)$

Vidíme, že typicky se hodnota směrnice pohybuje v řádu desetin. Maximální hodnota je přibližně 0,6. V histogramu se sice vyskytují i vyšší hodnoty, ale jejich

⁶⁸) Program `chaos_dvojkyv.pas` naleznete na FYKOSích webových stránkách.

zastoupení je zanedbatelné. Uvědomme si také, že použitá metoda trpí několika těžko odstranitelnými neduhy – například závislost $\log d(t)$ je lineární jen v dlouhodobém průměru, pro přesnější určení směrnice by tedy bylo třeba provést mnohem delší simulaci (pokud možno v časovém úseku řádově větším, než je typická perioda pohybu dvojkyvadla). To ovšem není možné, právě protože je studovaný systém chaotický. Aby si obě dvojkyvadla zůstala po celou dobu výpočtu blízká, musíme jejich počáteční podmínky volit co nejbližší, tedy ε musí být co nejmenší. Zde ovšem narazíme na omezené možnosti počítačové aritmetiky. Jestliže ε příliš zmenšíme, nebude použitý reálný datový typ schopen zachytit takto malé rozdíly v polohách obou dvojkyvadel.

Získaný výsledek tedy je nutně zatížen chybou, kterou musíme určitým způsobem odhadnout. Provedeme jen velmi hrubý odhad podle charakteru získaného histogramu. Hodnoty směrnice okolo 0,5 jsou již zřejmě zastoupeny statisticky významně, zvolíme tedy chybu cca 0,1 a za maximální hodnotu směrnice vezmeme $0,6 \pm 0,1$.

Nyní již zbývá jen určit hodnotu maximálního Lyapunovova exponentu. Vzdálenost dvojkyvadel ve fázovém prostoru se, jak víme, mění s časem přibližně jako $A \exp(\lambda t)$. Veličina d je však druhou mocninou této vzdálenosti, a její logaritmus se tedy mění jako

$$\log d(t) \approx 2(\log A + \lambda t \log e).$$

Směrnice, které jsme počítali, jsou tedy rovny $2\lambda \log e$. Odtud již jednoduše zjistíme, že maximální Lyapunovův koeficient je

$$\lambda_{\max} = (0,7 \pm 0,1).$$

Podívejme se, co to znamená. Maximální Lyapunovův koeficient nám udává míru předvídatelnosti systému. Co když si sestrojíme dvojkyvadlo a chceme předvídat, jak se bude pohybovat, když jej vypustíme z dané polohy? Na jak dlouhý časový úsek budeme moci udělat spolehlivou předpověď?

Předpokládejme, že máme k dispozici zázračné experimentální vybavení, které nám umožní při určování počáteční polohy soupeřit s dosud nejpřesnějším měřením vůbec, kterým je určení frekvence hyperjemného přechodu v atomu rubidia na 15 platných číslic. Naše dvojkyvadlo se tedy stane nepředvídatelným přibližně po uplynutí času T , pro nějž

$$\exp(\lambda T) \approx 10^{15}.$$

Odtud dostaneme $T \approx 50$. Vzhledem k tomu, že jsme na počátku zvolili $\omega = 1$, odpovídá tento časový úsek asi osmi kmitům dvojkyvadla, což není nikterak oslnivý výsledek.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Chrasticích

Soustředění se konalo od 20. do 27. října 2007 v Chrasticích na Jesenicku. Legenda měla název „Other Side“.

Organizátoři

Jan Bednář, Pavel Brom, Peter Greškovič, Zdeněk Kučka, Ján Lalinský, Lukáš Malina, Aleš Podolník, Jan Prachař, Marek Scholz, Lukáš Stříteský, Petr Sýkora, Tomáš Tintěra.

Účastníci

Jana Baxová, Katarína Baxová, Ján Bogár, Petr Cagaš, Lukáš Cimpl, Michael Hakl, Jan Hermann, Zuzana Chlebounová, Tereza Jeřábková, Airidas Korolkovas, Simona Laňková, Lukáš Ledvina, Michal Maixner, Jakub Marian, Dalimil Mazáč, Jakub Michálek, Marek Nečada, Alžběta Pechová, Tereza Steinhartová, Peter Vanya, Martin Výška.

Fotky



Jarní soustředění v Zásce

Jarní soustředění FYKOSu proběhlo v týdnu od 4. do 11. května 2008 v rekreačním středisku Záska severně od Velkého Meziříčí.

Organizátoři

Jan Bednář, Pavel Brom, Martin Formánek, Tomáš Jirotko, Michael Komm, Zdeněk Kučka, Lukáš Malina, Aleš Podolník, Jan Prachař, Marek Scholz, Kryštof Touška.

Účastníci

Jana Baxová, Zuzana Bogárová, Zuzana Dočekalová, Stanislav Fořt, Jan Hermann, Kateřina Honzáková, Zuzana Chlebounová, Tereza Jeřábková, Miroslav Klimoš, Karel Kolář, Airidas Korolkovas, Michal Koutný, Pavel Malý, Ondřej Maslikiewicz, Marek Nečada, Veronika Paštyková, Alžběta Pechová, Lucie Pospíšilová, Petr Ryšavý, Tereza Steinhartová, Dana Suchomelová, Josef Tkadlec, Martin Výška.

Legenda

Se zrychlujícím technickým pokrokem v nejbližším tisíciletí lidstvo pokročilo už tak daleko, že dokáže člověka vyslat napříč mezihvězdným prostorem. Na soustředění se účastníci ocitli v roli posádky kolonizační lodi Vanguard 2, která měla za úkol osídlit vzdálenou planetu podobnou Zemi.

Let probíhal hladce až do dosažení cílové sluneční soustavy. Při přistání došlo ke kolizi s neznámým vesmírným tělesem a většina potřebného vybavení byla zničena, takže kolonisté museli začínat doslova z ničeho. Soustředění v několika etapách (jednotlivých dnech) sledovalo vývoj společnosti, jejímž cílem bylo dát vědět Zemi, že úspěšně přistáli.

V prvních letech po ztroskotání bylo hlavním problémem přežití expedice, osadníci se museli vypořádat nejen s extrémní počasí, ale i různými nemocemi. Po zvládnutí těchto problémů se počet lidí začal zvětšovat a bylo nutné nějak vyřešit obživu. Naštěstí se na planetě vyskytovala domestikovatelná zvířata, a tak byl dán základ fungující společnosti.

Zvládnutí prvotních obtíží zabralo nějakou dobu, což ale nesmělo ohrozit původní cíl výpravy. Zachovaly se některé úseky databází z vesmírné lodi a bylo je potřeba zajistit a zkompletovat. Člověk ale takovou psychickou zátěž nevydrží dlouho, a proto je mu potřeba zajistit i nějakou zábavu. Nestačí ale pouze archiovat, zkušenosti se musí i předávat, a proto si vůdcové kolonistů připravili nejednu těžkou zkoušku.

Kolonie se rychle rozrůstá a už jí pomalu přestává stačit původní oblast ztroskotání, a tak se do všech směrů vydávají objevné výpravy a zakládají se nové osady a města. A čím větší je osídlení, tím více potřebuje surovin a potravin. Zvláště co se týče minerálů a rud, je planeta poněkud chudá, a tak se objevují nejrůznější podvrtné živly, které se snaží vydělat pašováním.

Neshody nad přírodním bohatstvím od skryté podpory pašeráků přerůstají přes menší potyčky až k bojům o naleziště. Kolonie se rozdělila na dvě poloviny

s nejasnými hranicemi, zato jasnými cíly – odříznout tu druhou od zdrojů bohatství. Zatímco se na frontě bojuje, v zázemí vědci zkoumají pozůstatky databank z vesmírné lodi a snaží se získat nějakou výhodu nad soupeřem. A co nevymyslí vědci, ukradnou tajní agenti nepřátelské straně.

Po přemožení pašeráky podporujících organizací se ještě nedávno zneprátelené strany opět spojily ve hledání způsobu, jak kontaktovat Zemi. Válečná snažení postrčila výzkum o nějaký kus dopředu a nyní probíhají experimenty ze všech fyzikálních oborů. Poté, co astronomové odhalí neznámý přibližující se objekt, snahy eskalují.

Společnost vypsela do moderní podoby, a tak se vědci při snaze o zkoumání přilétajícího tělesa musejí zavděčit mocným korporacím a průmyslovým magnátům, aby na ně měli dostatek finančních prostředků. Nakonec je jejich snaha úspěšná a podaří se jim sestrojít výkonný vysílač a odvysílat zprávu. Zanedlouho také dostanou odpověď – neznámý objekt je průzkumná loď ze Země. Přivezla s sebou ještě výkonnější vysílač, kterým hned dala vědět domů. Až zpráva doletí, budou jistě oslavovat.

Fotky



Vodní bitva, soubor Terka vs. Zuzka



Odpočinek na hrázi nádrže Mostiště

Týden s aplikovanou fyzikou

Po loňské úspěšné akci jsme pořádali v týdnu 31. 3. – 4. 4. 2008 druhý ročník akce Týden s aplikovanou fyzikou, jejímž cílem je přivést exkurze na nejrůznější průmyslová a vědecko-výzkumná pracoviště v ČR. Akce se zúčastnilo 23 vybraných nejlepších řešitelů semináře.

Pondělí 31. března – Den s experimentální fyzikou

V pondělí 31. 3. se účastníci TSAF mohli setkat s dalšími kamarády a soupeři při tradiční a větší akci s názvem Den s experimentální fyzikou. Zúčastnilo se ho celkem 55 osob včetně pedagogického doprovodu a přátel řešitelů i organizátorů. Akci zahájil proslovem prof. Zdeněk Němeček, děkan MFF, a dr. Alena Havlíčková z OVVP. Náplní Dne potom byly dopolední exkurze do laboratoří MFF UK na Karlově (spinové echo a optický koherentní procesor v Praktiku III a IV, dále pikosekundová laserová laboratoř, elektronový mikroskop a pokusy z mechaniky naživo ve spolupráci s KVOF, kdy si účastníci přímo mohli osahat fyziku, mj. např. chování setrvačnicku. Odpolední program proběhl v Ústavu jaderného výzkumu a Ústavu jaderné fyziky AV ČR v Řeži u Prahy, kde jsme měli příležitost vidět otevřený reaktor (v odstávce) s Cherenkovovým zářením a další experimentální zařízení, jako např. urychlovače.

Úterý 1. dubna

Až v úterý 1. 4. (kvůli místním předpisům a omezení počtu) účastníci TSAF mohli zhlédnout reaktory a dozvědět se spoustu zajímavostí ohledně využití jaderného záření na obou typech reaktorů s odlišným výkonem. Po volném odpoledním programu v Praze následovala návštěva nového tokamaku COMPASS-D prakticky ihned po jeho slavnostní inauguraci na ÚFP AV ČR na Slovance. Využili jsme jedinečné příležitosti detailně si prohlédnout ještě rozestavěné zařízení, určené ke studiu chování plazmatu. Lektori nás zavedli do různých technických místností a zevrubně nás seznámili s aktuální problematikou jaderné fúze.

Středa 2. dubna

Ve středu 2. 4. proběhl výlet přímým rychlíkem do Turnova, kde jsme mohli navštívit společnost Crytur (výroba a opracování krystalů pro nejrůznější aplikace), následně Vývojové optické dílny ÚFP AV ČR (příprava precizní optiky pro potřeby ústavů AV ČR a historie dílen) a poté pro zájemce Muzeum Českého ráje, Lidovou hvězdárnu v Turnově či podniknout výlet do přírody.

Čtvrtek 3. dubna

Ve čtvrtek 3. 4. jsme si opět přivstali, abychom stihli ranní vlak z Prahy. Tentokrát jsme zamířili na severozápad, po tzv. buštěhradské dráze rychlíkem do chmelem oplývajícího Žatce. Jako po celý týden i dnes bylo zataženo, přáli jsme si tedy aspoň, aby nepršelo. Jenže toto naše přání nebylo zcela vyslyšeno, takže jsme se krásně omyli kyselými aprílovými dešťíky. Náš vlak dorazil do stanice Počeradý, kde jsme vystoupili. Vše podle plánu. Krátkou procházkou do elektrárny jsme poznali, že energetika zdejšímu regionu dobře prospívá – nové chodníky, rozvody

kabelové televize či vkusně opravené domky jsou zřejmým důkazem spokojeného života ve stínu uhelné elektrárny společnosti ČEZ.

V areálu již zhruba padesátileté, avšak stále čiperné počeradské elektrárny nás vřele uvítali zodpovědní pracovníci a výklad, kterého se nám dostalo, byl nadmíru zajímavý. V duchu hesla „netajíme nic“ jsme se na vlastní oči přesvědčili o hlučnosti práce turbogenerátorů i drtiček uhlí. Elektrárna s instalovaným výkonem 1000 MW spolyká denně zhruba tři stovky vagónů mosteckého uhlí. Jakkoliv toto číslo bere dech, elektřina z tohoto provozu je nezbytná pro udržení stability tolik náchylné elektrické rozvodné soustavy.

Po obědě v závodní jídelně jsme pokračovali prohlídkou odsiřovacích jednotek a technologického zázemí elektrárny. Pohled na obrovité kotle vyvolával dojem pekelného prostředí, i když jsme se pochopitelně nikam nepropadli. Celá prohlídka se odehrála ve velmi přátelském duchu, jakož i rozloučení, po němž již následoval pochod na nedalekou železniční zastávku. Během přestupu v Mostu jsme si všimli tamní zvláštnosti. Vlak do stanice Hrob odjíždí dle informačního panelu v 15:67.

Krajské město Ústí nad Labem nás opět přivítalo deštěm, namísto procházky centrem jsme však zamířili na jih, proti proudu řeky. Cesta průmyslovou čtvrtí nebyla zrovna příjemná, zřejmě proto jsme pro návrat volili druhý břeh.

Malá vodní elektrárna Střekov se nachází přímo pod stejnojmenným hradem, tvořícím nezaměnitelnou dominantu města. Pochází z roku 1935 a sestává ze tří Kaplanových turbín, které jsou však jedinými prvky z doby vzniku. Dnešní provoz je plně automatizovaný, vše řídí počítač a člověk vykonává pouze kontrolní a servisní činnost. Protože jde o „čistou“ elektřinu z obnovitelných zdrojů, jede střekovská elektrárna vždy na plný výkon. Přestože exkurze proběhla velice rychle, pokud bychom vzali v potaz velikost areálu, museli bychom úměrně tomuto strávit v Počeradech aspoň celý týden, ne-li víc. Třebaže jde o největší malou vodní elektrárnu, vejde se celá do poměrně malého domku nad řekou. Řekli bychom houseboat.

Bohužel nám zrovna neplula žádná loď na Prahu, takže jsme museli i zbytek cesty strávit ve vlaku, ale bylo to svezení překvapivě rychlé. Skoro se nám nechtělo věřit, že již vidíme Říp, posléze Mělník a konečně i Hradčany.

Závěr a poděkování

Na páteční program byl plánován výjezd do Plzně s prohlídkou Muzea plzeňské Škodovky a závěrečnou exkurzí do Plzeňského pivovaru. Bohužel na poslední chvíli ŠKODA Plzeň exkurzi zrušila, proto jsme akci ukončili předčasně, případně asi 10 zájemců mohlo ve skupině navštívit pražskou ZOO.

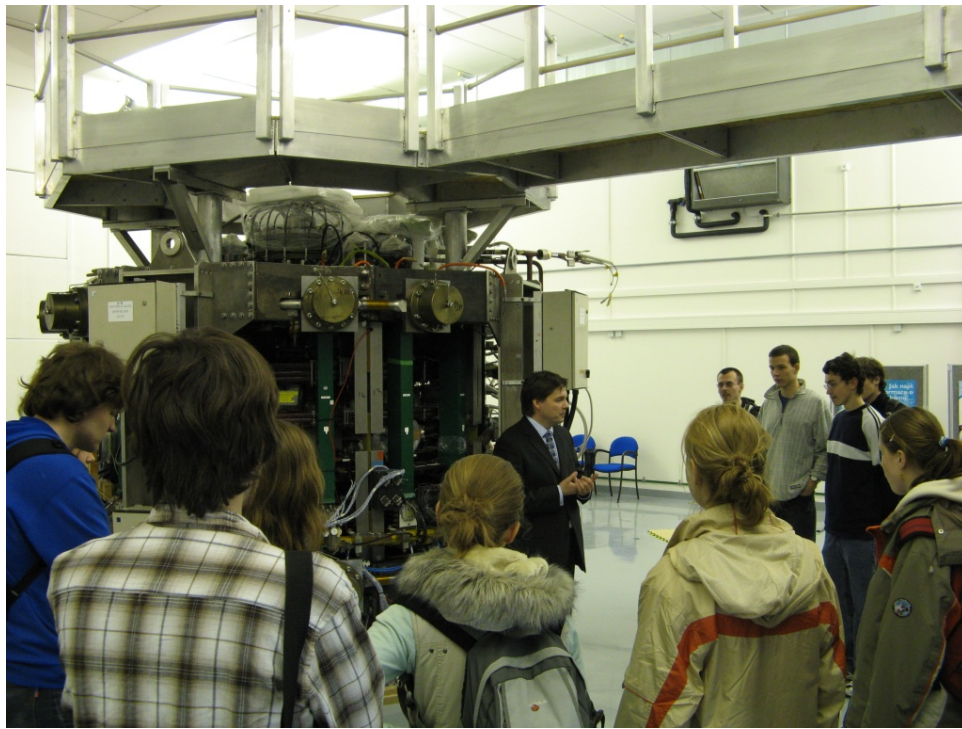
Rádi bychom poděkovali zaměstnancům MFF UK, jmenovitě dr. Petru Němcovi a dr. Jaroslavě Černé za úvodní přednášky a demonstrace, dále Ing. J. Mádlovi, prof. P. Malému, doc. F. Trojánkovi a dr. N. Žaludové za realizaci svých exkurzí. Velké poděkování patří též dr. Vladimíru Wagnerovi, hlavnímu koordinátorovi exkurzí v Řeži, a Michaelu Kommovi za zajištění exkurze k tokamaku.

Lektoři na všech pracovištích se nám velice ochotně věnovali a dokázali zodpovědět všechny naše dotazy, většinou i odbornějšího charakteru. Tak letošní TSAF

navázal na úspěch loňské první akce a předloňské exkurze do CERNu a předpokládáme jeho pokračování i v příštích letech.

Za finanční podporu děkujeme Skupině ČEZ.

Fotky



Exkurze u rozestavěného Tokamaku COMPASS-D



V optických dílnách

FYKOSí Fyziklání 2008

FYKOSí Fyziklání je soutěž v řešení příkladů z fyziky pro studenty středních škol, která se konala 30. ledna 2008 v budově Matematicko-fyzikální fakulty Ke Karlovu 3 v Praze.

Pravidla soutěže

Soutěže se zúčastňují družstva s nejvýše 5 členy. Samozřejmě družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane družstvo nový příklad. Za správně vyřešený příklad se považuje příklad se správným výsledkem. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů můžete používat kalkulačku a MFCH tabulky.

Výsledky

- | | | |
|--------|---|----------------|
| 1. | G Jana Keplera (Praha) | 94 bodů |
| | <i>Karel Pajskr, Jakub Michálek, Tomáš Zeman, Tomáš Nosek, Jakub Töpfer</i> | |
| 2. | PČG Karlovy Vary | 91 bodů |
| | <i>Jan Humplík, Michal Fečík, Martina Nováková, Martin Kos, Lukáš Ledvina</i> | |
| 3. | G J. K. Tyla (Hradec Králové) | 85 bodů |
| | <i>Jakub Zajíc, Pavel Vitvar, Martin Michálek, Tereza Steinhartová, Kateřina Záhořová</i> | |
| 4. | G Špitálská & Trutnov | 84 bodů |
| | <i>Karel Kolář, Vlastimil Dort, Jakub Červenka, Kryštof Hlinomaz, Hana Šustková</i> | |
| 5. | G Nad Alejí (Praha) | 63 bodů |
| | <i>Martin Výška, Jakub Marian, Matěj Peterka</i> | |
| 6. | G Christiana Dopplera (Praha) | 58 bodů |
| | <i>Helena Svobodová, Lukáš Drápal, Vladislav Sláma, Pavel Malý, Michael Hakl</i> | |
| 7. | Jiráskovo G v Náchodě | 57 bodů |
| | <i>Petr Polák, Karel Jára, Jan Dundálek, Vladimír Lambert, Jaroslav Stárek</i> | |
| 8. | G Matyáše Lercha (Brno) | 56 bodů |
| | <i>Lucie Pospíšilová, Jan Stříbrný, Ondřej Kruml, Veronika Klevarová, Kamil Vrbica</i> | |
| 9.–10. | G Mladá Boleslav A | 53 bodů |
| | <i>Richard Polma, Lenka Fořtová, Adéla Gajdová, Štěpánka Malypetrová, Jindřich Hes</i> | |
| 9.–10. | G Písnická (Praha) | 53 bodů |
| | <i>Marek Vandas, Tomáš Hřebejk, Michal Kliský, Tereza Havlenová, Jan Kudláček</i> | |
| 11. | G Jaroslava Vrchlického (Klatovy) | 51 bodů |
| | <i>Jakub Klemsa, Karel Kovářík, Jaroslav Mandík, Pavel Bárta, Jaroslav Zimmermann</i> | |
| 12. | G Brno-Řečkovice A | 47 bodů |
| | <i>Alexander Slávik, Zdeněk Faraka, Petr Švéda, Helena Paschkeová, Věra Pavlíčková</i> | |
| 13. | G Budějovická (Praha) | 40 bodů |
| | <i>Radek Doubrava, Karel Kalvoda, David Miler, Filip Foglar, Michael Svatoň</i> | |
| 14. | G Mladá Boleslav B | 39 bodů |
| | <i>Zuzana Jantošová, Miroslav Erben, Jan Vinárek, Jaromír Šimáně</i> | |
| 15. | G Dr. Václava Šmejkal A (Ústí n L.) | 38 bodů |
| | <i>Adam Michálek, Romana Pavlíková, Vojtěch Tůma, Jan Koreň, Matouš Novák</i> | |

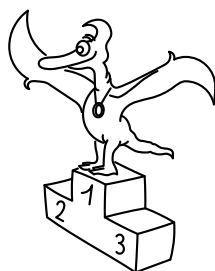
16.–17.	G Zábřeh	37 bodů
	<i>Jan Havlíček, Petr Vágner, Lukáš Krasula, Ivo Faltus, Martin Valný</i>	
16.–17.	G Jana Nerudy (Praha)	37 bodů
	<i>Matěj Kříž, Lukáš Horák, Martin Pospíšil, Vojtěch Kovařík, Ondřej Pelech</i>	
18.–20.	G Opatov A (Praha)	35 bodů
	<i>Jiří Lžičař, Antonín Hanuš, Anna Pergelová, Tomáš Chaloupka, Martin Jelínek</i>	
18.–20.	G Šternberk	35 bodů
18.–20.	G Jihlava	35 bodů
	<i>Marek Nečada</i>	
21.–22.	G Ivana Olbrachtova (Semily)	33 bodů
	<i>Tomáš Pošepný, Jan Soukup, Barbora Mátková, Petr Fejfar, Michal Vlach</i>	
21.–22.	G Říčany	33 bodů
	<i>Jan Beránek, Matouš Macháček, Jaroslav Petr, Zdeněk Houfek, Libor Laichman</i>	
23.–24.	G Brno-Řečkovice B	31 bodů
	<i>Jaromír Bačovský, Kateřina Klánová, Jakub Bárta, Radek Hrbáček</i>	
23.–24.	G Hlohovec	31 bodů
	<i>Matej Dzuro, Jakub Kmeť, Vladimír Krajčo, Veronika Drgoňová, Samuel Škoda</i>	
25.	G Pierra de Coubertina (Tábor)	30 bodů
	<i>Stanislav Fořt, Tomáš Volf, Josef Janoušek, Petr Hudeček, Lubomír Oulehle</i>	

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.

Fotky



Zcela zaplněná posluchárna M1



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	109
2. <i>Airidas Korolkovas</i>	KTU gymnasium, Kaunas, Litva	105
3. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	80
4. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	75
5. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	51
6. <i>Prabhat Rao Pinnaka</i>	Kv Picket	48
7. <i>Peter Ondáč</i>	G Humenné	42

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Pavel Malý</i>	G Ch. Dopplera, Praha	110
2. <i>Karel Kolář</i>	G Špitálská, Praha	105
3. <i>Michal Koutný</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	102
4. <i>Hana Šustková</i>	G Trutnov	102
5. <i>Peter Vanya</i>	G Jura Hronca, Bratislava	72
6. <i>Alžběta Kadlecová</i>	G Jana Keplera, Praha	56
7. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	51
8. <i>Jana Figulová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	47
9. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	44
10. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	44
11. <i>Jakub Töpfer</i>	G Jana Keplera, Praha	43
12. <i>Michal Maixner</i>	G Žilina - Vlčince	42
13. <i>Katarína Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	41
14. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠ strojnická Vsetín	40

Kategorie 2. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. <i>Zuzana Dočekalová</i>	G Ostrava - Hrabůvka	116
2. <i>Petr Ryšavý</i>	G J. Heyrovského, Praha	113
3. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	112
4. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	101
5. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	90
6. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	78
7. <i>Veronika Paštyková</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	69
8. <i>Jana Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	58
9. <i>Kateřina Honzáková</i>	G Jana Keplera, Praha	57
10. <i>Jakub Klemsa</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	48
11. <i>Michal Müller</i>	G Jevíčko	47
12. <i>Petra Kňážeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	36

Kategorie 1. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. <i>Stanislav Fořt</i>	G P. de Coubertina, Tábor	56
2. <i>Zuzana Bogárová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	48
3. <i>Ondřej Maslikiewicz</i>	SPŠ Hronov	45
4. <i>Barbora Drozdová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	41
5. <i>Tomáš Bartoněk</i>	G O. Havlové, Ostrava - Poruba	27

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

ALEŠ PODOLNÍK A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXI. ročník – 2007/08

Předmluva: Tomáš Jirotko

Náměty úloh:

Marek Pechal (I.4, I.S, II.S, III.S, IV.S, V.E, V.S, VI.S),
Jan Prachař (I.P, I.E, II.2, II.E, IV.1, VI.1, VI.P, VI.E),
Martin Formánek (V.1, V.2, V.3, V.P), Pavel Brom (I.3, III.E, IV.4),
Ján Lalinský (I.2, II.3, IV.E), Aleš Podolník (III.1, III.2, IV.P),
Jakub Benda (V.1, V.4), Pavel Motloch (III.3, IV.2),
Marek Scholz (III.4, IV.P), Lukáš Strítěcký (II.S, III.S),
Roman Fiala (II.1), Jan Hradil (III.P), pan Janata (IV.3),
Jan Jelínek (VI.4), Tomáš Jirotko (I.1), Martin Výška (II.4),
Lenka Zdeborová (II.P)

Autoři řešení úloh:

Marek Pechal (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S),
Jan Jelínek (III.3, IV.1, V.2, VI.1), Aleš Podolník (II.1, III.2, V.3, VI.P),
Marek Scholz (II.3, III.4, IV.E, VI.3), Jakub Benda (I.2, II.P, V.4),
Peter Greškovič (III.E, IV.3, VI.4), Jan Prachař (III.1, V.1, VI.E),
Martin Formánek (I.P, V.P), Tomáš Jirotko (I.E, IV.P),
Daniel Šimsa (II.2, IV.2), Kryštof Touška (I.3, V.E),
Pavel Brom (IV.4), Zdeněk Kučka (VI.2), Ján Lalinský (II.P),
Jiří Lipovský (III.P), Lukáš Malina (I.1), Pavel Motloch (II.4),
Pavol Pšeno (I.4), Lukáš Strítěcký (III.S)

Seriál o počítačové fyzice: Marek Pechal, Lukáš Strítěcký

Legenda jarního soustředění: Aleš Podolník

Týden s aplikovanou fyzikou: Pavel Brom, Tomáš Jirotko

Sazba: Tomáš Jirotko

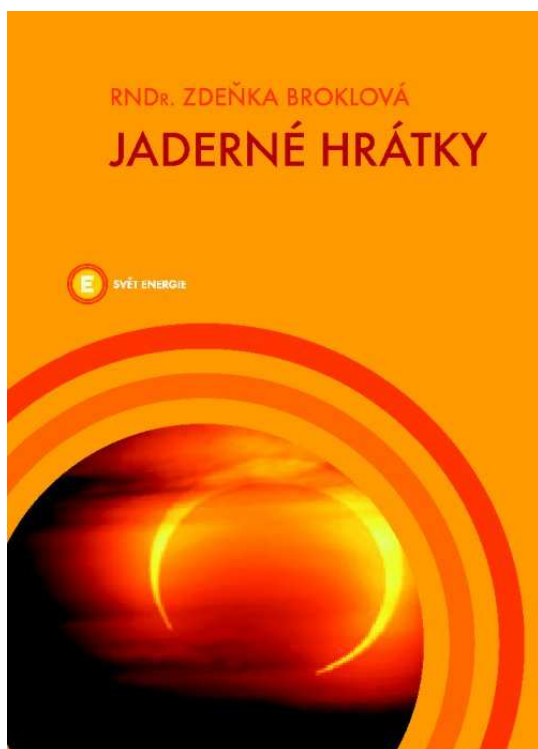
Obrázky a grafy: Jan Prachař, Marek Pechal, Tomáš Jirotko, Jakub Benda

Jazykové korektury: Pavel Brom

Jaderné hrátky

Návody na pokusy

Mnoho lidí si myslí, že jaderná fyzika je strašně obtížný a komplikovaný obor a že bez dlouhého a náročného studia se nedá pochopit. Tuto zdánlivou složitost a nepochopitelnost způsobuje fakt, že atom, a obzvláště jeho jádro, jsou nepředstavitelně maličké, a z tohoto důvodu se mohou chovat zcela jinak než věci, které jsou běžně kolem nás a které můžeme pozorovat. Atom i atomové jádro můžeme zkoumat nepřímo. V brožuře najdete návody na pokusy a modelování fyzikálních dějů. Veškeré pokusy i hry jsou proveditelné s pomůckami běžně dostupnými v každé domácnosti nebo škole.



Brožura je součástí vzdělávacího programu Svět energie a můžete si ji spolu s dalšími zajímavými materiály objednat na www.cez.cz/vzdelavaciprogram.



SKUPINA ČEZ

