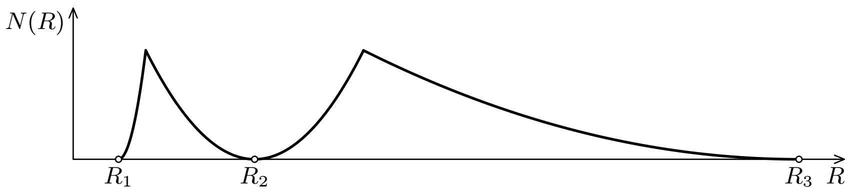
20. ročník, úloha V . 3 ... odporová řada *(4 body; průměr 1,43; řešilo 14 studentů)*

Vžijte se do role ředitele firmy, která chce jako první na světě začít vyrábět rezistory pro všeobecné použití. Na základě průzkumu trhu bylo zjištěno, že poptávka po rezistorech je rovnoměrně rozdělena v rozmezí 1 Ω–10 MΩ. Z technických důvodů však můžete vyrábět pouze konečné množství, řekněme 169, různých rezistorů.

Pokud zákazník požaduje rezistor s hodnotou R_p a vy mu nabídnete rezistor s hodnotou R_n, bude „míra jeho nespokojenosti“ dána vztahem $(1 - R_p/R_n)^2$. Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla střední nespokojenost všech zákazníků minimální. Pro jednoduchost řekněme, že první a poslední rezistor z vaší nabídky musí mít hodnoty 1 Ω a 10 MΩ. *Úlohu zformuloval Pavel Augustinský.*

Je smutné, že se nám úlohu nepodařilo zadat tak, aby její výsledek odpovídal naší představě. Správné zadání mělo znít: „Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla maximální nespokojenost zákazníka minimální.“ Vyřešíme obě úlohy paralelně.

Začneme sestrojením funkce nespokojenosti $N(R)$ zákazníka, který požaduje odpor R. Její hodnota pro odpor R bude (v zájmu ředitele firmy) minimum z čísel $\{(1-R/R_n)^2\}_{n=1}^{169}$, kde R_n jsou hodnoty 169 vyráběných rezistorů. V bodech R_n bude její hodnota nulová. Načrtněme graf této funkce v intervalu (R_1, R_3) do obrázku 1. Graf sestává z kusů parabol majících minimum



Obr. 1. Graf funkce nespokojenosti zákazníka.

v bodech R_n. Dvě sousední paraboly na sebe navazují v bodě, kde mají stejnou hodnotu. Mezi body R_1 a R_2 to bude v bodě $\Re_1$

$$\left(1 - \frac{\Re_1}{R_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{\Re_1}{R_2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \Re_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}},$$

jinými slovy se jedná o harmonický průměr obou hodnot.

Úspěšně jsme vyhodnotili, jaký rezistor z naší sady nabídnout zákazníkovi požadujícímu rezistor R a jaká bude jeho nespokojenost. To všechno udává funkce $N(R)$. Minimalizace střední nespokojenosti zákazníků odpovídá minimalizaci plochy pod grafem funkce $N(R)$; minimalizace maximální nespokojenosti odpovídá minimalizaci maxima funkce $N(R)$. Nechť odpory R_1 a R_3 jsou pevně dané. Pojďme hledat hodnotu odporu R_2, abychom splnili vyřčené požadavky.

Plocha pod grafem na intervalu (R_1, R_3) je

$$S = \frac{1}{3}\frac{(R_2 - R_1)^3}{(R_2 + R_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{(R_3 - R_2)^3}{(R_3 + R_2)^2}\,.$$

Při změně prostředního odporu o malé dR_2 se plocha změní o (ověřte)

$$dS = \left\{ \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2 - \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left[\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^3 + \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2}\right)^3\right] \right\} dR_2\,.$$

Plocha bude minimální, pokud při malé změně $\mathrm{d}R_2$ se plocha téměř nezmění. Výraz ve složené závorce se musí rovnat nule. Rovnici vyřešíme a vyjádříme R_3 pomocí R_1 a R_2. Výsledný výraz zde nebudeme uvádět, neb je moc dlouhý. Dále budeme raději postupovat numericky. Jde o to najít hodnotu R_2 tak, aby pro $R_1 = 1\,\Omega$ bylo $R_{169} = 10\,\mathrm{M}\Omega$. Máme vlastně rekurentní relaci $R_n(R_{n-1}, R_{n-2})$; s její pomocí pro vybrané R_2 kontrolujeme správnost R_{169}. Budeme-li zkoušet dostatečně dlouho, dojdeme k číslu $R_2 \doteq 32{,}64\,\Omega$ (odpory dalších rezistorů jsou uvedeny v tabulce). Zajímavé může být podívat se na závislost R_n na n. Numerickým fitem i analyticky[1] lze ukázat, že závislost je kubická

$$R_n \approx 2{,}04 \cdot (n - 0{,}84)^3\,\Omega\,.$$

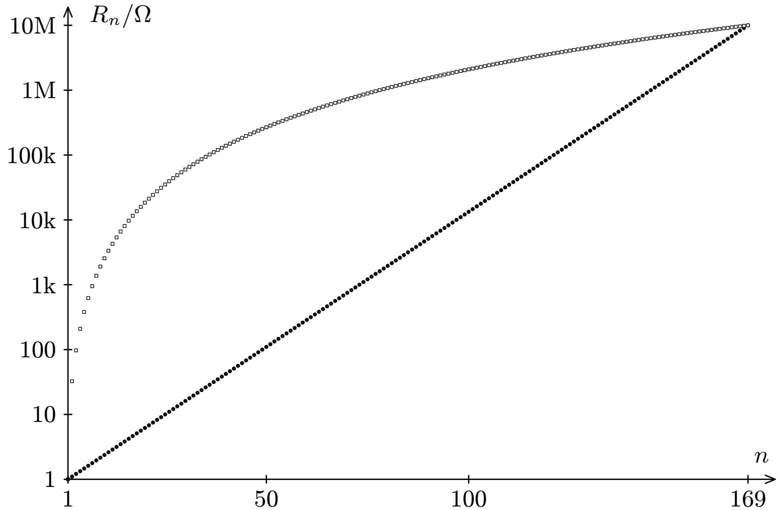
Funkce nespokojenosti má lokální maxima v bodech $\Re_n$; zde nabývá hodnot

$$N(\Re_n) = \left(1 - \frac{\Re_n}{R_n}\right)^2 = \left(\frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+1} + R_n}\right)^2 .$$

Hodnotu nejvyššího maxima můžeme snižovat do té doby, než mají všechna maxima stejnou hodnotu. Tato úvaha nás dovádí k rovnici

$$\left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2}\right)^2 = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R_3 = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_2\,.$$

Odpory rezistorů tedy tvoří geometrickou posloupnost $R_n = kR_{n-1} = k^{n-1}R_1$. Hodnota odporu roste exponenciálně s n. Zbývá vypočítat k, aby pro $R_1 = 1\,\Omega$ bylo $R_{169} = 10\,\mathrm{M}\Omega$. Tento úkon zvládne každý s pomocí kalkulačky $k = \sqrt[168]{10 \cdot 10^6} \doteq 1{,}10$. Hodnoty odporů všech rezistorů uvádíme v tabulce.



Obr. 2. Grafické znázornění vypočtených hodnot odporů (puntíky – pro minimalizaci maximální nespokojenosti, čtverečky – pro minimalizaci střední nespokojenosti).

[1] Zájemce odkazuji na *Martina Výšku*, `martin.vyska@centrum.cz`, kterého tímto zdravím doufaje, že se mu bude řešení líbit.

Vypočtené hodnoty odporu prvních 47 rezistorů. V prvním řádku jsou vždy odpory pro minimální střední nespokojenost, v druhém pro minimální maximální nespokojenost.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R [Ω]	1,0	33	97	210	380	620	950	1,4k	1,9k	2,6k	3,3k	4,3k
R [Ω]	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,9

n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
R [Ω]	5,4k	6,6k	8,1k	9,7k	12k	14k	16k	18k	21k	24k	28k	31k
R [Ω]	3,2	3,5	3,8	4,2	4,6	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,3	9,1

n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
R [Ω]	35k	39k	44k	49k	54k	60k	66k	72k	79k	86k	94k	102k
R [Ω]	10	11	12	13	15	16	18	20	22	24	26	29

n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
R [Ω]	111k	120k	129k	139k	149k	160k	172k	184k	197k	210k	220k	...
R [Ω]	32	35	38	42	46	51	56	62	68	75	83	

Na závěr si neodpustíme zamýšlenou poznámku k části řešení týkající se opraveného zadání. Elektrotechničtí nadšenci jistě nenechali bez povšimnutí, že námi vypočtené hodnoty odporů přesně odpovídají jmenovitým hodnotám (tj. průmyslově vyráběných) odporů. Není to náhoda. Technologie výroby rezistorů samozřejmě nemůže zaručit neomezeně přesné hodnoty odporů. Odpory vyráběných rezistorů mají toleranci (např. 20 %, 10 %, 5 % atd.), tzn. když si koupíte rezistor s odporem 10 Ω a tolerancí 5 %, je jeho odpor nejpravděpodobněji v intervalu (9,5 Ω; 10,5 Ω). Pro vyráběné rezistory byly zvoleny hodnoty odporů tak, aby relativní rozdíl hodnoty libovolného požadovaného odporu a hodnoty odporu vyráběného rezistoru byl menší než uváděná tolerance. Tak totiž budeme mít jistotu, že v hromádce vyrobených rezistorů najdeme ten, který má požadovaný odpor. Kýženou vlastnost má právě geometrická řada, neb relativní rozdíl po sobě následujících odporů $(R_{n+1} - R_n)/R_n = k - 1$ je konstanta (pro libovolné n). Řady odporů se značí podle toho, kolik odporů připadá na dekádu, E6, E12, E24 atd. (jejich tolerance jsou po řadě 20 %, 10 %, 5 % atd.). Hledáním řady odporů, pro kterou bychom dosáhli minimální maximální nespokojenosti, je v elektrotechnické terminologii hledání řady s minimální maximální tolerancí. Není tedy divu, že výsledky se shodují. Podivné číslo 169 bylo zvoleno, aby na dekádu připadlo 24 odporů, což odpovídá řadě E24.

Ke správnému řešení došel pouze *Martin Výška*, ostatní udělali v komplikovaných úpravách chybu nebo se zalekli složitosti vztahů, které jim vycházely. Několik řešitelů přišlo s nápadem, že řešením by mohly být jmenovité hodnoty odporů (ano, to byla naše představa!). Nemalý počet řešitelů navrhl řadu s konstantním rozestupem odporů, takto by ovšem v ředitelském křesle dlouho nevydrželi, neb zákazník požadující odpor 10 kΩ by byl obsloužen rezistorem s odporem 1 Ω.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.