20. ročník, úloha V . 1 ... *smrt klavíristy* *(3 body; průměr 2,74; řešilo 31 studentů)*

Z okna výškové budovy vypadl klavír i s klavíristou, který po celou dobu pádu hrál zděšené A. O k pater pod tímto oknem odpočíval nebohý umývač oken. Jak velké je k, jestliže poslední, co umývač slyšel, bylo Ais, tedy tón o půltón vyšší? Rychlost zvuku v daném vzduchu je 347 m·s^{-1}, výška jednoho patra je 3,1 m. *Morbidní úlohu navrhl Petr Sýkora.*

Tato příhoda jest klasickým příkladem Dopplerova jevu.

Jelikož to poslední, co nebohý umývač oken slyšel, byl zvuk o frekvenci vyšší, než vysílal klavírista svým nástrojem, je zřejmé, že se v ten okamžik klavírista k umývači přibližoval. Fyzikální interpretace této situace je vcelku jednoduchá. Klavírista s klavírem prostě a jednoduše trefí umývače a tím ho zabije.

Ačkoliv existuje spousta různých ladění, budeme uvažovat temperované ladění. V temperovaném ladění zvýšení tónu o půltón odpovídá zvýšení frekvence $\sqrt[12]{2}$-krát.

Nemalá část řešitelů použila špatný vzorec pro tento případ Dopplerova jevu, ve zkratce si jej proto odvodíme v aproximaci pro rovnoměrný přímočarý pohyb zdroje směrem ke statickému přijímači. Frekvenci, na které zdroj vysílá, označíme f, vzdálenost, jež je mezi zdrojem a přijímačem v čase t, označíme jako $l(t) = l_0 - vt$, kde l_0 je počáteční vzdálenost a v je rychlost zdroje směrem k přijímači. Nyní zavedeme veličinu $T(t)$, která bude vyjadřovat, jak dlouho potrvá cesta signálu vyslaného v čase t od zdroje k přijímači. Zvukový signál se šíří prostředím rychlostí c.

$$T(t) = \frac{l(t)}{c} = \frac{l_0 - vt}{c} \,. \tag{1}$$

Budeme uvažovat, že signál je harmonický, a tedy vysílaný signál lze popsat jakousi veličinou

$$A(t) = A_0 \cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

kde A_0 a φ_0 jsou nějaké konstanty a $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence. Tento signál dorazí k přijímači v čase $t + T(t)$, a tedy, pokud zavedeme označení A' pro signál vnímaný přijímačem, znamená to

$$A'(t + T(t)) = A(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)\,. \tag{2}$$

Jenže to nám příliš neříká o frekvenci, jakou bude přijímač vnímat. Pro čas přijímače $t' = t + T(t)$ z (1) vyjádříme

$$t = \frac{c}{c - v}\left(t' - \frac{l_0}{c}\right) .$$

Nyní dosadíme do rovnice (2)

$$A'(t') = A_0 \cos\left(\frac{c}{c - v}\,\omega t' - \frac{\omega l_0}{c - v} + \varphi_0\right) = A_0 \cos\left(\omega' t' + \varphi_0'\right) .$$

Je tedy vidět, že přijímač bude vnímat harmonický signál o úhlové frekvenci

$$\omega' = \frac{c}{c - v}\,\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{f} = \frac{c}{c - v}\,.$$

Tímto jsme odvodili vztah pro Dopplerův jev, kde zdrojem je klavír a přijímačem umývač. Drobné chyby se dopouštíme přiblížením pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Nicméně, jelikož $v \ll c$ a zároveň velikost zrychlení není nijak závrátná, můžeme si aproximaci dovolit.

Ze vztahu pro Dopplerův jev a znalosti temperovaného ladění víme, že těsně před nárazem klavíru do hlavy umývače platilo pro rychlost klavíru v

$$\sqrt[12]{2} = \frac{c}{c - v} \,.$$

Dále také víme, že padal-li klavírista s klavírem z výšky h nad umývačem volným pádem, dopadal na umývače rychlostí $v = \sqrt{2hg}$. Výšku h vyjádříme pomocí počtu pater $h = kp$, kde p je výška patra. Docházíme tak k finální rovnici

$$k = \frac{c^2}{2gp} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \right)^2 \,.$$

Po dosazení zadaných hodnot a $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ vychází

$$k \doteq 6{,}24 \,,$$

ta čtvrtina patra navíc odpovídá tomu, že klavír vypadl z okna a okna mívají spodní okraj o něco výš, než je podlaha.

To, že příhoda skončila dvojnásob smutně (zemřel i umývač), si uvědomila většina řešitelů. Pokud jste uvažovali jiné (běžné) ladění, nebylo to považováno za chybu.

Petr Sýkora
`petr@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.