

20. ročník, úloha II. 1 ... Čeňkova pila (3 body; průměr 3,06; řešilo 35 studentů)

Čeňkova pila se nachází na soutoku řek Vydry a Křemelné na Šumavě. Pojmenovaná je podle obchodníka s dřevem Čeňka Bubeníčka, který zde pilu v 19. století postavil. Na jejím místě nyní stojí vodní elektrárna, která je stále v provozu a patří mezi technické památky.

Vodní elektrárna využívá výškový rozdíl hladin nad a pod turbínou 10 m, výkon elektrárny je 96 kW. Voda je na turbínu přiváděna vantroky¹, které jsou široké 1 m, a voda v nich sahá do výšky 1,5 m. Při pozorování proudící vody jsme odhadli, že uprostřed vantroky má proud vody rychlost $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Odhadněte, jaká je účinnost elektrárny.

Vymyslel Honza Prachař, když byl na výletě na Šumavě.

Označme rozdíl hladin $h = 10 \text{ m}$, rozměry vantroky: šířku $a = 1 \text{ m}$, hloubku $b = 1,5 \text{ m}$, rychlost toku uprostřed koryta $v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

K určení účinnosti elektrárny je třeba znát celkovou energetickou bilanci, proto musíme stanovit maximální využitelnou energii, která turbínou projde za jednotku času. Celková energie je samozřejmě rovna součtu kinetické energie vody proudící vantroky a rozdílu potenciální energie vody nad a pod turbínou. Proto platí

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \left(h - \frac{b}{2} \right) \right).$$

Jelikož $\langle v^2 \rangle/2 \ll g(h - b/2)$, můžeme člen odpovídající kinetické energii zanedbat. Zbývá určit hmotnostní průtok $Q = \Delta m/\Delta t = \rho ab \langle v \rangle$.

Pokud budeme vodu považovat za ideální tekutinu² (což ve skutečnosti není vůbec pravda!), dostaneme pro průtok $Q = \rho abv$. Tomuto odpovídá příkon přibližně 150 kW a účinnost (podíl výkonu a příkonu) elektrárny pak je 65 %.

Pro proud vody je ve skutečnosti nutné použít model reálné tekutiny, u které dochází vlivem vazkosti k různému rozložení pole rychlostí. Takové proudění může být dále laminární, nebo turbulentní (při vyšších rychlostech). Pro střední rychlost proudění při přechodu mezi těmito druhy proudění platí $u = \nu Re/d$, kde Re je kritická hodnota Reynoldsova čísla (pohybuje se v rozmezí 1000 až 20 000, pro náš případ předpokládejme jeho hodnotu 2000), d je rozměr potrubí (v našem případě hodnota v rozmezí a a b), a ν je tzv. kinematická viskozita, pro vodu je to hodnota přibližně $10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Snadno se tak můžeme přesvědčit, že proud vody ve vantrocích je turbulentní, neb $v > u$.

Střední hodnotu rychlosti toku $\langle v \rangle$ pro turbulentní proudění je velmi obtížné určit (proto se používá numerické modelování). Pokud budeme předpokládat laminární proudění, dojdeme k účinnosti nad 100 %, což je nesmysl.

Pokusíme se spolehnout na údaj z technických tabulek, dle kterých přibližně platí $v = 1,2 \langle v \rangle$. Po dosazení za $\langle v \rangle$ vychází účinnost kolem 80 %, což odpovídá účinnosti dnešních vodních elektráren.

Miroslav Hrubý

mirek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

¹) Vantroky jsou dřevěná stavba – koryto obdélníkového průřezu, kterým je přiváděna voda na mlýnské kolo.

²) Ideální tekutina je nestlačitelná a bez vnitřního tření – viskozity.