

20. ročník, úloha I. P ... výška stromů (5 bodů; průměr 2,53; řešilo 38 studentů)

Odhadněte výšku stromů na planetě. Uvažte všechna možná hlediska, která mohou výšku stromů ovlivnit. *Problém se zalíbil Zuzce Safermové při čtení knížky Svět očima fyziky.*

Maximální výšku stromů limituje několik hlavních faktorů. Vyšetřeme nejprve trochu podrobněji, jak může být strom vysoký, aby byl schopen čerpat vodu až k svému vrcholu.

Předpokládejme nejprve, že strom transportuje vodu živou tkání. Céva by tak byla realizována sloupečkem nad sebou postavených buněk vzájemně oddělených porézní buněčnou stěnou a polopropustnou membránou (propouští pouze vodu, nikoli rozpuštěné látky). Transport vody směrem vzhůru je zprostředkován osmózou. Osmotický tlak je přímo úměrný rozdílu koncentrací roztoků mezi sousedními buňkami a každá vrchnější buňka musí tedy obsahovat koncentrovanější roztok. Pokud osmotický tlak mezi každými dvěma sousedními buňkami bude roven rozdílu tlaku způsobeného tíhou vody v buňkách, céva bude schopna udržet sloupec vody. Můžeme si rozmyslet, že tato rovnováha nastane tehdy, když osmotický tlak způsobený rozdílem koncentrací mezi nejvrchnější a nejspodnější buňkou cévy je roven hydrostatickému tlaku vodního sloupce

$$p_{\text{osm}} = RT\Delta C = h\rho g,$$

kde ΔC je rozdíl molárních koncentrací roztoků, h výška vodního sloupce, ρ hustota vody. Předpokládejme na chvíli, že nejvrchnější buňka cévy „snese“ koncentraci nasyceného roztoku¹ NaCl a nejspodnější buňka obsahuje čistou vodu. V tom případě $p_{\text{osm}} = 3 \text{ MPa}$. To je samozřejmě velmi nadnesené číslo. Osmotický tlak v rostlinách dosahuje maximálně 1,5 MPa. Dosazením této hodnoty do rovnosti a vyjádřením výšky h dostaneme maximální výšku v podmínkách na Zemi

$$h_{\text{max}} = \frac{p_{\text{osm}}}{\rho g} = 150 \text{ m}.$$

Výška je podle tohoto vztahu nepřímo úměrná gravitačnímu zrychlení, na planetě s polovičním zrychlením by limitující výška byla tedy zhruba 300 m.

Ve skutečnosti však transport vody probíhá kombinovaně živou tkání a specializovanými pletivými, která jsou tvořena odumřelými buňkami, ze kterých se zachovaly pouze části buněčných stěn. Céva je tedy v podstatě dutá trubička, ve které voda nemusí překonávat žádné membrány. Rychlost přenosu vody dutými cévami je o mnoho řádů vyšší než rychlost přenosu živou tkání. Céva se dá přirovnat ke kapiláře. V kapiláře voda v důsledku kapilární elevace vystoupá do výšky

$$h = \frac{2T \cos \alpha}{r\rho g},$$

kde T je povrchové napětí vody, α úhel smáčení stěny kapiláry (tyto hodnoty lze najít v tabulkách) a r poloměr kapiláry. Při běžné tloušťce cévy 40 μm stoupne voda do výšky zhruba 37 cm. To není mnoho, řeknete si možná. Hlavní čerpací silou je totiž zmíněná osmóza a kořenový vztlak. Ovšem při tloušťce kapiláry 5 nm, což je šířka pórů v buněčné stěně, dostaneme výšku sloupce téměř 3000 m. Takto tenké cévy by však bylo velmi obtížné realizovat a navíc přenos vody by byl velmi pomalý. Koloběh vody stromem zajišťuje kontinuální odpařování z listů, což vynucuje nasávání vody kořeny. Rychlost odpařování a tedy i rychlost cirkulace vody je ovlivněna tlakem atmosféry na planetě. Ten lze těžko odhadnout, např. na Marsu je gravitace přibližně třetinová, ale tlak atmosféry při povrchu stokrát menší. Pokud by celková hmotnost

¹⁾ Nasycený roztok NaCl má koncentraci 0,6 M, disociuje na dva ionty, celková koncentrace solutů je tedy 1,2 M.

svislého sloupce atmosféry na planetě byla stejná jako hmotnost sloupce atmosféry Země, tlak při povrchu by byl poloviční. Tlak při povrchu je totiž přibližně dán tíhou sloupce vzduchu. Z tohoto hlediska by odpařování bylo rychlejší a pro přenos vody by mohly sloužit užší kapiláry, což by nepatrně zvýšilo limitující výšku stromu. Je však otázkou diskuse, jak nižší tlak celkově ovlivní vzrůst stromů.

Druhým hlediskem je otázka lámání stromů. To si probereme trochu obecněji. Vítr působí momentem síly M_1 vůči patě stromu a vychýlí strom ze svislé polohy. Ohnutý strom v důsledku vlastní tíhy působí momentem síly M_2 vůči patě stromu a tento moment je tedy funkcí velikosti prohnutí – čím je strom prohnutější, tím větší je rameno síly. Pro každé prohnutí je pro strom charakteristická síla pružnosti, která se snaží strom vrátit do svislé polohy a působí proti silám větru a tíhy. Síle pružnosti můžeme tedy také přisoudit moment síly M_3 vůči patě stromu. Pokud při daném prohnutí jsou vychylující momenty větší než moment síly pružnosti, bude docházet k dalšímu prohýbání. Existuje kritické prohnutí ε_{\max} , při kterém se strom láme. Velikost prohnutí ε můžeme definovat jako relativní prodloužení dřevního vlákna na vnějším oblouku prohnutí. Jakožto velké zjednodušení přijmeme předpoklad, že velikost M_2 je přímo úměrná ε . Velikost M_2 je dále úměrná tíze stromu a ramenu síly

$$M_2 = Ah\rho gS \cdot h\varepsilon = Ah^2gS\varepsilon,$$

kde S je obsah průřezu stromu, ρ hustota dřeva, A nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu. Velikost M_3 je úměrná prohnutí a průřezu stromu

$$M_3 = BS\varepsilon,$$

kde B je opět nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu.

Jednoduchým přibližným výpočtem zjistíme, že při prohnutí blízkém ε_{\max} je M_2 mnohem větší než M_1 . Zároveň se však při silnějším větru stromy často lámají, z čehož lze usoudit, že např. smrky by při stejné tloušťce už o mnoho vyšší být nemohly, protože by se lámaly i bez přispění větru.

Strom se nezlomí, pokud při prohnutí ε_{\max} je $M_2 < M_3$, a tedy

$$Ah^2gS\varepsilon_{\max} < BS\varepsilon_{\max} \Rightarrow h < \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Při polovičním g bude výška stromů na planetě $\sqrt{2}$ -krát větší než na Zemi. Při slabším vlivu větru bude výška stromů přirozeně o něco větší, při silnějším větru o něco menší. Můžeme si všimnout, že velmi tlustý strom by se ani při velkých výškách nezlomil. V tom případě by výška byla limitována „vodním kritériem“ a hlavně – uživit a vybudovat tlustý kmen stojí mnoho energie.

To už se ale dostáváme k evolučnímu hledisku. Růst stromu do výšky je hlavně výsledkem konkurenčního boje a tzv. „závodů ve zbrojení“. Evoluční pohled nám říká, že planetu obývají ty druhy, které jsou schopné se úspěšně rozmnožovat, a to mimo jiné znamená úspěšně soupeřit o živiny. Vysoký strom má dostatek světla, avšak jeho výška s sebou nese mnoho nevýhod a strom na růst spotřebuje mnoho energie, kterou jiné druhy věnují například tvorbě semen. Zemi obývá mnoho druhů rostlin, které se řídí různými strategiemi, a strategie růstu do výšky se ukázala jako jedna z mnoha úspěšných. Debata na toto téma by byla jistě velmi zajímavá a zároveň dlouhá, necháme si ji tedy na jindy.

Konečně, někdo by mohl namítnout, že Bůh stvořil život pouze na Zemi a nikde jinde.

Marek Scholz
mara@fykos.mff.cuni.cz