20. ročník, úloha I . 1 ... *tajemná hmota* *(4 body; průměr 1,88; řešilo 25 studentů)*

Tajemná hmota je homogenní a izotropní oblak plynu na počátku v naprostém klidu. Tento oblak o celkové hmotnosti M má přesně tvar koule. Zjistěte, jak se (lokálně) v objemu oblaku bude měnit hustota při gravitačním kolapsu. Okomentujte rychlost hroucení v okamžiku, kdy bude všechna hmota těsně před zhroucením do jednoho bodu. *Úlohu zadal Pavel Brom.*

Pro začátek si všimněme, že rozložení hmoty na počátku kolapsu je sféricky symetrické. Protože neuvažujeme žádné vnější působení na oblak, který je navíc zpočátku v klidu, snadno nahlédneme, že kulová symetrie se v průběhu kolapsu zachová a že rychlost hmoty v každém bodě oblaku bude mít pouze radiální složku.

Body, které na počátku kolapsu ležely na téže kulové ploše (rozumí se se středem v centru oblaku), tedy budou mít i nadále všechny stejnou vzdálenost od centra. Proto vzdálenost bodů, které ležely na počátku ve vzdálenosti r_0, je v čase t dána hodnotou nějaké funkce $R(r_0, t)$, kterou se snažíme najít. Funkce R pak plně popisuje průběh kolapsu oblaku.

Tato hledaná funkce R musí splňovat pohybovou rovnici, kterou nyní odvodíme (a posléze vyřešíme).

Zrychlení bodů, které na počátku ležely ve vzdálenosti r_0 od středu, je dáno druhou parciální derivací R podle času (přitom kladné hodnoty odpovídají zrychlení směřujícímu od středu oblaku). Jak ale víme, je zrychlení udělované hmotnému bodu gravitační silou rovno intenzitě gravitačního pole v daném bodě.

Tok intenzity pole hranicí uzavřené oblasti je roven $4\pi GM$, kde M je celková hmotnost obsažená v této oblasti (obdoba Gaussova zákona známého z elektromagnetismu, která však platí pro každé pole, jehož potenciál závisí na vzdálenosti od bodového zdroje jako $1/r$). Máme-li tedy kulově symetrický zdroj, bude i intenzita jím buzeného gravitačního pole kulově symetrická (tj. závislá pouze na vzdálenosti od středu a mající jen radiální složku) – označme její velikost ve vzdálenosti r od středu jako $K(r)$. Uvažovaný tok je pak roven $4\pi r^2 K(r)$, což má být, jak jsme řekli, rovno $4\pi GM$, odtud $K(r) = GM/r^2$.[1]

Tak konečně dospíváme ke kýžené pohybové rovnici, která zní

$$\ddot{R}\,(r_0, t) = -\frac{G}{R^2(r_0, t)}\,M(r_0, t)\,.$$

Zde $M(r_0, t)$ označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru $R(r_0, t)$ (pozor, ne r_0) v čase t. Tento poměrně nevinný člen v naší rovnici nám ovšem způsobí značné problémy. Závisí totiž na průběhu $R(r_0, t)$ pro všechna r_0 (jinak řečeno, jednotlivé „slupky“, na které si můžeme oblak rozložit, se teoreticky mohou v průběhu kolapsu navzájem „předbíhat“; ve skutečnosti to sice nedělají, ale to zatím nevíme). V důsledku toho se z naší pohybové rovnice stane nepěkný hybrid mezi diferenciální a integrální rovnicí.[2]

Máme tedy řešit něco, na co nemáme žádný rozumný aparát. V takovém případě většinou zbývá jen jediná použitelná možnost – doufat, že řešení bude v nějakém pěkném tvaru, a pokusit

[1] Toto je známý výsledek, který říká, že gravitační pole buzené sféricky symetrickým zdrojem je v určitém bodě ve vzdálenosti r od středu závislé pouze na celkové hmotnosti uzavřené v kouli o poloměru r a je stejné, jako kdyby byla celá tato hmotnost soustředěna ve středu. „Vnější“ hmota gravitační pole v daném bodě neovlivňuje.

[2] Pro zvědavce, kteří chtějí vědět, kde že tam je ten integrál, řekněme, že je schovaný ve výrazu $M(r_0, t)$. Můžete si ověřit, že platí $M(r_0, t) = \int_A 4\pi r^2 \varrho_0 \,\mathrm{d}r$, kde ϱ_0 je počáteční hustota oblaku a integrujeme přes množinu A, která je dána jako $A = \{r \in \mathbb{R}^+ : R(r, t) < R(r_0, t)\}$. Tato množina může vypadat velmi divoce, pokud funkce $R(r, t)$ nebude prostá v r.

se jej uhodnout (samozřejmě nebudeme hádat jen tak nazdařbůh, ale pokusíme se své odhady podepřít nějakými rozumnými argumenty).

Někteří z vás správně uhodli, že oblak se bude hroutit rovnoměrně (v tom smyslu, že vzdálenosti jednotlivých bodů od středu jsou v každém okamžiku přímo úměrné jejich původním vzdálenostem v čase $t = 0$). K nalezení správného řešení stačil také slabší předpoklad, že je-li bod A na počátku dále od středu než bod B, pak tomu tak bude i po celou dobu kolapsu. Ukážeme jednu z úvah, které nás mohly přivést k určité hypotéze o bližší podobě průběhu hroucení.

Na počátku zřejmě platí, že hmotnost obsažená v kouli o poloměru r_0 je úměrná r_0^3, intenzita gravitačního pole tedy roste úměrně r_0, stejně tak velikost zrychlení hmoty ve vzdálenosti r_0 od středu. Selský rozum nám říká, že velikost rychlosti, kterou hmota nabere za nějaký malý čas Δt, bude také úměrná r_0 a vzdálenost, o kterou spadne hmotný bod, jenž byl původně ve vzdálenosti r_0, jakbysmet. Co jsme tím ale dostali? Že nová vzdálenost každého bodu oblaku od středu je přímo úměrná jeho původní vzdálenosti. Celý oblak se tedy pouze „stejnoměrně“ zmenšil a zůstal nám homogenní. Máme stejnou situaci jako na počátku[3] (až na to, že nyní není oblak v klidu – rychlost hmoty v něm je však stále úměrná vzdálenosti od středu a to nám umožní úvahu aplikovat znovu). Zdá se, že homogenita oblaku by se mohla během kolapsu zachovávat. Potom by tedy funkce R měla být tvaru $R(r_0, t) = r_0 f(t)$, kde $f(t)$ je nějaká funkce času (která v podstatě charakterizuje míru smrštění oblaku; hodnota $f(t) = 1$ je počáteční stav, $f(t) = 1/2$ znamená, že oblak se smrštil na poloviční poloměr, atd.), a $M(r_0, t)$ by bylo rovno $4\pi\varrho_0 r_0^3/3$ (nezávisle na čase – každý bod má „pod sebou“ stále stejnou hmotnost jako na začátku). Zkusíme dosadit do pohybové rovnice a uvidíme, jestli najdeme nějaké řešení v námi očekávaném tvaru. Po dosazení a pár elementárních úpravách dostaneme

$$\ddot{f} = -\frac{4\pi G\varrho_0}{3f^2}\,.$$

Vida! Dobré znamení, z rovnic nám úplně vypadlo r_0. Pokud si tedy poradíme s touto obyčejnou diferenciální rovnicí, máme vyhráno.

Podobné rovnice, ve kterých je druhá derivace hledané funkce závislá pouze na hodnotě této funkce, se řeší následujícím trikem. Vynásobme celou rovnici $2\dot{f}$. Na levé straně tak dostaneme derivaci $\dot{f}^2$ podle času, na pravé pak výraz $-\alpha\dot{f}/f^2$ (α je označení pro konstantu $8\pi G\varrho_0/3$). Integrováním takto upravené rovnice podle času na levé straně dostaneme

$$\dot{f}^2 + C_1 = \int -\frac{\alpha\dot{f}}{f^2}\,\mathrm{d}t = \int -\frac{\alpha}{f^2}\,\mathrm{d}f = \frac{\alpha}{f} + C_2\,.$$

Obě aditivní konstanty si můžeme shrnout do jedné a $\dot{f}$ si vyjádříme jako $\dot{f} = -\sqrt{\alpha/f + C}$ (znaménko minus volíme, protože nás zajímá kolaps, tedy proces, při němž se f zmenšuje s časem).

Neznámá konstanta C řešení komplikuje, tak se jí hned zbavíme. Z toho, jak jsme si zavedli funkci f, plyne, že v čase $t = 0$ je $f(0) = 1$ a $\dot{f}(0) = 0$. Aby tedy platila výše uvedená rovnost, musí zřejmě být $C = -\alpha$, máme tedy

$$\dot{f} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\alpha\left(\frac{1}{f} - 1\right)}\,.$$

[3]) Tato úvaha *vypadá* trochu jako matematická indukce, ale *není*! Indukci rozhodně nemůžeme použít v oboru reálných čísel. Zde jde spíše o takovou „berličku“, která nám ukáže další směr našich úvah.

Tuto rovnici můžeme vyřešit takzvanou separací proměnných. Než to ale uděláme, pozastavme se u ní na chvíli, protože nám dá odpověď na to, jak se chová rychlost kolapsu, když se poloměr oblaku blíží nule. Jestliže uvažujeme stále menší velikost oblaku, jinými slovy stále menší f, jde pravá strana rovnice do minus nekonečna, tedy rychlost hroucení roste nade všechny meze (asymptoticky jako $1/\sqrt{r}$). Musíme si ale uvědomit, že toto platí pouze v klasické fyzice. Ve skutečnosti by se na malých vzdálenostech začaly uplatňovat jednak efekty speciální teorie relativity, které by nedovolily, aby rychlost kolapsu překročila rychlost světla, a pak také efekty obecné relativity – horizont událostí, dilatace času, změny délek v radiálním směru.

Vraťme se teď k naší rovnici. Upravíme si ji na tvar

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}f}{\sqrt{\alpha(1/f-1)}}\,.$$

Nyní můžeme na obě strany vložit znak integrálu a integrovat od času $t = 0$ do t

$$t = -\int_{f(0)=1}^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{\alpha(1/f-1)}}\,\mathrm{d}f\,.$$

Substitucí $u \equiv \sqrt{1/f-1}$, $\mathrm{d}f = -2u/(u^2+1)^2\,\mathrm{d}u$ si upravíme integrál na pravé straně a dostaneme

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Integrál vypočítáme trikem. Pokusme se vypočítat metodou per partes integrál $\int 1/(u^2+1)\,\mathrm{d}u$. Derivovat budeme funkci $1/(u^2+1)$ a integrovat funkci 1. Pak dostaneme

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{u^2+1} - \int \frac{-2u}{(u^2+1)^2}\,u\,\mathrm{d}u = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{(u^2+1)-1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Upravíme-li si ještě trochu pravou stranu, máme

$$\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u\,,$$

odtud si už snadno vyjádříme hledaný integrál jako

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2+1)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{u(t)}{2(u^2(t)+1)} + \frac{1}{2}\int_0^{u(t)} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{u(t)}{2(u^2(t)+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u(t)\,.$$

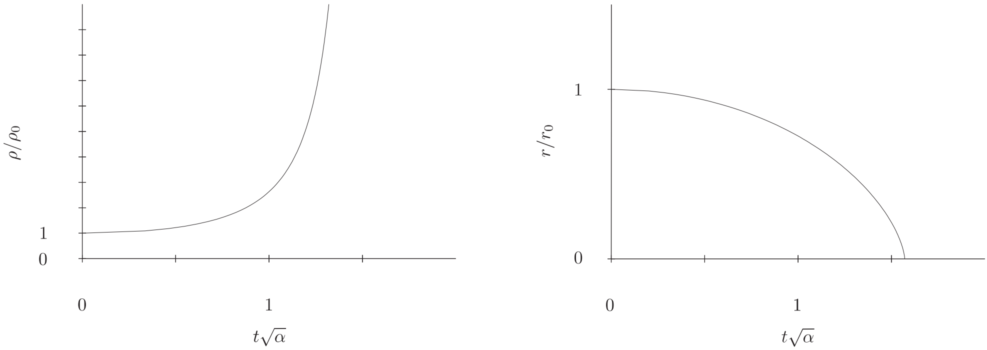
Dosadíme-li za u výraz $\sqrt{1/f-1}$, získáváme

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\sqrt{f(1-f)} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{f}-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\sqrt{f(1-f)} + \arccos\sqrt{f}\right)\,.$$

Můžete si ověřit, že funkce $t(f)$ je pro $0 < f \leq 1$ prostá, existuje k ní tedy inverzní funkce $f(t)$, která by po vynásobení r_0 dala hledanou funkci $R(r_0, t)$. Ať se ale budeme snažit sebevíc, ze získané závislosti t na f se nám nikdy nepodaří vyjádřit f v závislosti na t pomocí „jednoduchých“ funkcí.

To nám ovšem nebrání v tom, abychom si například vykreslili graf t v závislosti na f a z něj překlopením podle diagonály dostali graf $f(t)$.

Můžeme také využít toho, že objem oblaku je v čase t roven $V_0 f^3(t)$ a hustota tajemné hmoty (v každém bodě oblaku stejná, jak jsme zjistili) je $\varrho_0/f^3(t)$, tedy $f(t) = (\varrho_0/\varrho(t))^{1/3}$, a stejným způsobem vykreslit graf $\varrho(t)$ – viz obr. 1.



Obr. 1

Z nalezeného vztahu můžeme také docela snadno zjistit, jak dlouho bude celý kolaps trvat. Stačí najít limitu t pro $f \to 0$. Tak dostaneme pro dobu trvání kolapsu

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}\,.$$

K tomuto údaji lze dospět také elegantní úvahou využívající třetí Keplerův zákon o době oběhu tělesa. Ta totiž závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa a délce poloosy oběžné dráhy. Na radiální pád hmoty se přitom můžeme dívat jako na polovinu oběhu po „nekonečně excentrické“ eliptické dráze. Nevýhodou tohoto přístupu je, že nám nic neřekne o průběhu kolapsu.

Marek Pechal
marek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.