

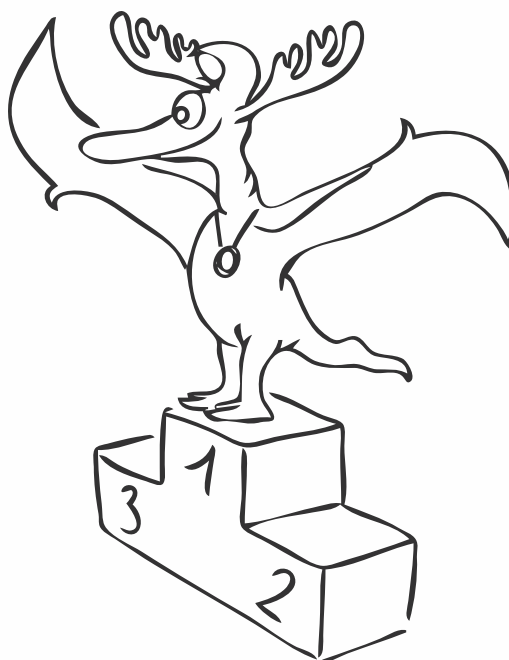
Milí řešitelé!

Dostáváte do rukou autorská řešení první série úloh společně se svými opravenými úlohami. Ve vzorových řešeních se nejen dozvíte, jak mělo vypadat řešení správné, ale i jaké jste dělali nejčastěji chyby apod. S jakýmkoliv dotazy či nesrovnalostmi se můžete obrátit na opravovatele úloh, jejichž e-maily jsou uvedeny pod příslušným vzorovým řešením.

Na konci brožury najdete výsledkovou listinu po jednotlivých ročnících. U Studenta Pilného je napsán plný počet bodů za příslušné úlohy. Pokud jste dostali bodů více než on, znamená to, že se vaše řešení opravovateli líbilo natolik, že vám udělil prémii. Ve sloupci označeném „I“ je uveden součet bodů za první sérii, ve sloupci „%“ procentuální zisk z úloh, které jste letos poslali. A ve sloupci posledním je uveden celkový počet bodů získaný za aktuální ročník.

Dále bychom chtěli požádat ty, kteří nám letos ještě **neposlali řešení žádné úlohy, a přesto chtějí dále dostávat nová zadání a vzorová řešení**, aby nám napsali dopis či mail. Pokud tak neučiní, další poštu již od nás letos dostávat nebudou.

Vaši organizátoři



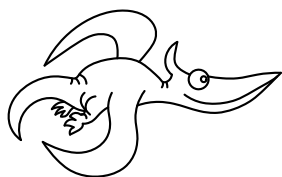
*Ano, mohli jsme pro Vás vymyslet normální fyzikální úlohu –
a KRÁSNOU!*

*Stačila by jednoduchá fyzikální myšlenka, rychle odvozený
elegantní vzorec. K tomu ještě nějaká ta vábnička pro nové řešitele.*

Jenomže my jsme řekli NE!

*Žádná nudná zadání či řešení, žádný med kolem huby;
když už FYKOSí úlohu, tak pěkně drsnou, a to pro všechny!
S netriviálním trikem, s rafinovanou úvahou,
s vypečeným integrálem nebo dífkou,
ať se nejen noví, ale i stávající řešitelé FYKOSu něco přiučí.*

Veselé Vánoce a šťastný nový rok!



Zadání III. série



Termín odeslání: 5. února 2007

Úloha III.1 ... obložený létající talíř

Na zámořském parníku připravuje pro posádku jídlo kuchař Thomas. Na podávání talířů má šikovné zařízení. Pružinový držák udržuje vrchní talíř pořád ve stejné výšce. Vzdálenost mezi talíři je 1 cm. A protože je moře bouřlivé, sloupec 25 talířů pěkně kmitá. Jaká je frekvence těch kmitů?

Úloha III.2 ... přistání na Titanu

V pátek 14. ledna 2005 na povrchu Titanu hladce přistála sonda Huygens, pojmenovaná po objeviteli Titanu. Mateřská sonda Cassini ji nesla k Saturnu 7 let. Jedná se dosud o nejvzdálenější přistání umělé sondy v dějinách.

Přistávací modul o čisté hmotnosti (bez paliva) m , vybavený reaktivním motorem, se vznášel v klidu nad povrchem měsíce (gravitační zrychlení je zde g). Měl k dispozici palivo o hmotnosti M a zásobu energie o velikosti E_0 , kterou využíval k urychlování paliva (rychlost a množství paliva vypuzovaného z motoru lze libovolně měnit). Jaká je maximální doba, po kterou se sonda mohla vznášet v konstantní výšce? Poradte řídicímu středisku, jakým způsobem by mělo naprogramovat rychlost a množství vypuzovaného paliva, aby této maximální doby dosáhli.

Úloha III.3 ... vzdálenost vizuální dvojhvězdy

Z redukovaných hvězdných spekter složek dvojhvězdy (podle přítomných spektrálních čar, z nichž žádná v tomto případě nemění svou polohu v čase) jsme určili spektrální třídy obou hvězd a následně odhadli jejich hmotnosti na 2 a 3 hmotnosti Slunce. Z pozorování dalekohledem s ohniskovou vzdáleností 3 m víme, že složky skutečně obíhají v neměnné vzdálenosti 5 úhlových minut od sebe jednou za 50 let.

Dokážete z těchto informací určit vzdálenost dvojhvězdy od Slunce? Pokud ano, uveďte, jak jste jednotlivé informace použili, anebo nepoužili, a výsledek vhodně zaokrouhlete. Také okomentujte, jaký vliv na něj má nepřesná znalost údajů, zejména hmotností.

Úloha III.4 ... topení Alberta Einsteina

Albert Einstein se v důchodovém věku (narodil od svých vrstevníků šťourajících se v zahrádce) zamýšlel nad různými paradoxními jevy. V zimě si všiml, že když ohřívá vodu v topení přímo ohněm, účinnost je velmi malá.

Napadlo ho vyzkoušet jiný postup. Vzít ideální tepelný stroj a použít kotel a venkovní vzduch jako teplou a studenou lázeň. Práci, kterou z tohoto stroje získá, pak vložit do jiného ideálního tepelného stroje, který bude odebírat teplo vzduchu a předávat jej vodě. Jestliže jsou teploty kotle, vody a vzduchu T_1 , T_2 a T_3 , jaká je účinnost ohřevu vody? Nedochozí náhodou k porušení druhého termodynamického zákona?

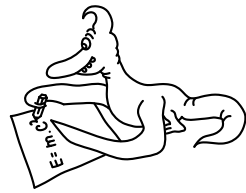
Úloha III. P ... akrobat na lyžích

Jistě znáte lyžařskou disciplínu akrobatické skoky. Lyžař po rozjezdu z kopce najíždí na můstek a skáče do vzduchu. Před dopadem zvládne skokan provést několik vrutů a salt. Vysvětlete, jak to lyžař dělá – co musí udělat, aby se začal otáčet tak, jak chce. Jak vyvrátíte tvrzení, že podle zákona zachování momentu hybnosti se musí skokan po celou dobu skoku otáčet kolem stejné osy a stejnou rychlostí?

Úloha III. E ... Planckova konstanta

Navrhněte a dostatečně teoreticky zdůvodněte metody k experimentálnímu určení Planckovy konstanty, které se dají realizovat doma, příp. s vybavením ve školní laboratoři, a alespoň jednu z nich proveďte. Všechny veličiny, které je možné experimentálně určit (zvažte užití statistiky), *co nejpřesněji změřte* a správně vyhodnoťte velikost této fundamentální konstanty s příslušnou experimentální chybou.

Nápověda: LED dioda s ochranným rezistorem stojí cca 5 Kč.



Řešení I. série

Úloha I.1 ... tajemná hmota (4 body; průměr 1,88; řešilo 25 studentů)

Tajemná hmota je homogenní a izotropní oblak plynu na počátku v naprostém klidu. Tento oblak o celkové hmotnosti M má přesně tvar koule. Zjistěte, jak se (lokálně) v objemu oblaku bude měnit hustota při gravitačním kolapsu. Okomentujte rychlost hroucení v okamžiku, kdy bude všechna hmota těsně před zhroucením do jednoho bodu. Úlohu zadal Pavel Brom.

Pro začátek si všimněme, že rozložení hmoty na počátku kolapsu je sféricky symetrické. Protože neuvažujeme žádné vnější působení na oblak, který je navíc zpočátku v klidu, snadno nahlédneme, že kulová symetrie se v průběhu kolapsu zachová a že rychlost hmoty v každém bodě oblaku bude mít pouze radiální složku.

Body, které na počátku kolapsu ležely na téže kulové ploše (rozumí se se středem v centru oblaku), tedy budou mít i nadále všechny stejnou vzdálenost od centra. Proto vzdálenost bodů, které ležely na počátku ve vzdálenosti r_0 , je v čase t dána hodnotou nějaké funkce $R(r_0, t)$, kterou se snažíme najít. Funkce R pak plně popisuje průběh kolapsu oblaku.

Tato hledaná funkce R musí splňovat pohybovou rovnici, kterou nyní odvodíme (a posléze vyřešíme).

Zrychlení bodů, které na počátku ležely ve vzdálenosti r_0 od středu, je dáno druhou partiální derivací R podle času (přitom kladné hodnoty odpovídají zrychlení směřujícímu od středu oblaku). Jak ale víme, je zrychlení udělované hmotnému bodu gravitační silou rovno intenzitě gravitačního pole v daném bodě.

Tok intenzity pole hranicí uzavřené oblasti je roven $4\pi GM$, kde M je celková hmotnost obsažená v této oblasti (obdoba Gaussova zákona známého z elektromagnetismu, která však platí pro každé pole, jehož potenciál závisí na vzdálenosti od bodového zdroje jako $1/r$). Máme-li tedy kulově symetrický zdroj, bude i intenzita jím buzeného gravitačního pole kulově symetrická (tj. závislá pouze na vzdálenosti od středu a mající jen radiální složku) – označme její velikost ve vzdálenosti r od středu jako $K(r)$. Uvažovaný tok je pak roven $4\pi r^2 K(r)$, což má být, jak jsme řekli, rovno $4\pi GM$, odtud $K(r) = GM/r^2$.¹

Tak konečně dospíváme ke kýžené pohybové rovnici, která zní

$$\ddot{R}(r_0, t) = -\frac{G}{R^2(r_0, t)} M(r_0, t).$$

Zde $M(r_0, t)$ označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru $R(r_0, t)$ (pozor, ne r_0) v čase t . Tento poměrně nevinný člen v naší rovnici nám ovšem způsobí značné problémy. Závisí totiž na průběhu $R(r_0, t)$ pro všechna r_0 (jinak řečeno, jednotlivé „slupky“, na které si můžeme oblak rozložit, se teoreticky mohou v průběhu kolapsu navzájem „předbíhat“; ve skutečnosti to sice

¹⁾ Toto je známý výsledek, který říká, že gravitační pole buzené sféricky symetrickým zdrojem je v určitém bodě ve vzdálenosti r od středu závislé pouze na celkové hmotnosti uzavřené v kouli o poloměru r a je stejné, jako kdyby byla celá tato hmotnost soustředěna ve středu. „Vnější“ hmota gravitační pole v daném bodě neovlivňuje.

nedělají, ale to zatím nevíme). V důsledku toho se z naší pohybové rovnice stane nepěkný hybrid mezi diferenciální a integrální rovnicí.²

Máme tedy řešit něco, na co nemáme žádný rozumný aparát. V takovém případě většinou zbývá jen jediná použitelná možnost – doufat, že řešení bude v nějakém pěkném tvaru, a pokusit se jej uhodnout (samozřejmě nebudeme hádat jen tak nazdařbůh, ale pokusíme se své odhady podepřít nějakými rozumnými argumenty).

Někteří z vás správně uhodli, že oblak se bude hroutit rovnoměrně (v tom smyslu, že vzdálenosti jednotlivých bodů od středu jsou v každém okamžiku přímo úměrné jejich původním vzdálenostem v čase $t = 0$). K nalezení správného řešení stačil také slabší předpoklad, že je-li bod A na počátku dále od středu než bod B , pak tomu tak bude i po celou dobu kolapsu. Ukážeme jednu z úvah, které nás mohly přivést k určité hypotéze o bližší podobě průběhu hroucení.

Na počátku zřejmě platí, že hmotnost obsažená v kouli o poloměru r_0 je úměrná r_0^3 , intenzita gravitačního pole tedy roste úměrně r_0 , stejně tak velikost zrychlení hmoty ve vzdálenosti r_0 od středu. Selský rozum nám říká, že velikost rychlosti, kterou hmota nabere za nějaký malý čas Δt , bude také úměrná r_0 a vzdálenost, o kterou spadne hmotný bod, jenž byl původně ve vzdálenosti r_0 , jakbysmet. Co jsme tím ale dostali? Že nová vzdálenost každého bodu oblaku od středu je přímo úměrná jeho původní vzdálenosti. Celý oblak se tedy pouze „stejněměrně“ zmenšil a zůstal nám homogenní. Máme stejnou situaci jako na počátku³ (až na to, že nyní není oblak v klidu – rychlost hmoty v něm je však stále úměrná vzdálenosti od středu a to nám umožní úvahu aplikovat znovu). Zdá se, že homogenita oblaku by se mohla během kolapsu zachovávat. Potom by tedy funkce R měla být tvaru $R(r_0, t) = r_0 f(t)$, kde $f(t)$ je nějaká funkce času (která v podstatě charakterizuje míru smrštění oblaku; hodnota $f(t) = 1$ je počáteční stav, $f(t) = 1/2$ znamená, že oblak se smrští na poloviční poloměr, atd.), a $M(r_0, t)$ by bylo rovno $4\pi\rho_0 r_0^3/3$ (nezávisle na čase – každý bod má „pod sebou“ stále stejnou hmotnost jako na začátku). Zkusíme dosadit do pohybové rovnice a uvidíme, jestli najdeme nějaké řešení v námi očekávaném tvaru. Po dosazení a pár elementárních úpravách dostaneme

$$\ddot{f} = -\frac{4\pi G\rho_0}{3f^2}.$$

Vida! Dobré znamení, z rovnic nám úplně vypadlo r_0 . Pokud si tedy poradíme s touto obyčejnou diferenciální rovnicí, máme vyhráno.

Podobné rovnice, ve kterých je druhá derivace hledané funkce závislá pouze na hodnotě této funkce, se řeší následujícím trikem. Vynásobme celou rovnici $2\dot{f}$. Na levé straně tak dostaneme derivaci \dot{f}^2 podle času, na pravé pak výraz $-\alpha\dot{f}/f^2$ (α je označení pro konstantu $8\pi G\rho_0/3$). Integrovaním takto upravené rovnice podle času na levé straně dostaneme

$$\dot{f}^2 + C_1 = \int -\frac{\alpha\dot{f}}{f^2} dt = \int -\frac{\alpha}{f^2} df = \frac{\alpha}{f} + C_2.$$

²⁾ Pro zvědavce, kteří chtějí vědět, kde je ten integrál, řekněme, že je schovaný ve výrazu $M(r_0, t)$. Můžete si ověřit, že platí $M(r_0, t) = \int_A 4\pi r^2 \rho_0 dr$, kde ρ_0 je počáteční hustota oblaku a integrujeme přes množinu A , která je dána jako $A = \{r \in \mathbb{R}^+ : R(r, t) < R(r_0, t)\}$. Tato množina může vypadat velmi divoce, pokud funkce $R(r, t)$ nebude prostá v r .

³⁾ Tato úvaha *vypadá* trochu jako matematická indukce, ale *není!* Indukci rozhodně nemůžeme použít v oboru reálných čísel. Zde jde spíše o takovou „berličku“, která nám ukáže další směr našich úvah.

Obě aditivní konstanty si můžeme shrnout do jedné a \dot{f} si vyjádříme jako $\dot{f} = -\sqrt{\alpha/f + C}$ (znaménko minus volíme, protože nás zajímá kolaps, tedy proces, při němž se f zmenšuje s časem).

Neznámá konstanta C řešení komplikuje, tak se jí hned zbavíme. Z toho, jak jsme si zavedli funkci f , plyne, že v čase $t = 0$ je $f(0) = 1$ a $\dot{f}(0) = 0$. Aby tedy platila výše uvedená rovnost, musí zřejmě být $C = -\alpha$, máme tedy

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = -\sqrt{\alpha \left(\frac{1}{f} - 1 \right)}.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit takzvanou separací proměnných. Než to ale uděláme, pozastavme se u ní na chvíli, protože nám dá odpověď na to, jak se chová rychlost kolapsu, když se poloměr oblaku blíží nule. Jestliže uvažujeme stále menší velikost oblaku, jinými slovy stále menší f , jde pravá strana rovnice do minus nekonečna, tedy rychlost hroucení roste nade všechny meze (asymptoticky jako $1/\sqrt{r}$). Musíme si ale uvědomit, že toto platí pouze v klasické fyzice. Ve skutečnosti by se na malých vzdálenostech začaly uplatňovat jednak efekty speciální teorie relativity, které by nedovolily, aby rychlost kolapsu překročila rychlost světla, a pak také efekty obecné relativity – horizont událostí, dilatace času, změny délek v radiálním směru.

Vraťme se teď k naší rovnici. Upravíme si ji na tvar

$$dt = -\frac{df}{\sqrt{\alpha(1/f - 1)}}.$$

Nyní můžeme na obě strany vložit znak integrálu a integrovat od času $t = 0$ do t

$$t = -\int_{f(0)=1}^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{\alpha(1/f - 1)}} df.$$

Substitucí $u \equiv \sqrt{1/f - 1}$, $df = -2u/(u^2 + 1)^2 du$ si upravíme integrál na pravé straně a dostaneme

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du.$$

Integrál vypočítáme trikem. Pokusme se vypočítat metodou per partes integrál $\int 1/(u^2 + 1) du$. Derivovat budeme funkci $1/(u^2 + 1)$ a integrovat funkci 1. Pak dostaneme

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{u}{u^2 + 1} - \int \frac{-2u}{(u^2 + 1)^2} u du = \frac{u}{u^2 + 1} + 2 \int \frac{(u^2 + 1) - 1}{(u^2 + 1)^2} du.$$

Upravíme-li si ještě trochu pravou stranu, máme

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{u}{u^2 + 1} + 2 \int \frac{1}{u^2 + 1} du - 2 \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du,$$

odtud si už snadno vyjádříme hledaný integrál jako

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du = \frac{u(t)}{2(u^2(t) + 1)} + \frac{1}{2} \int_0^{u(t)} \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{u(t)}{2(u^2(t) + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u(t).$$

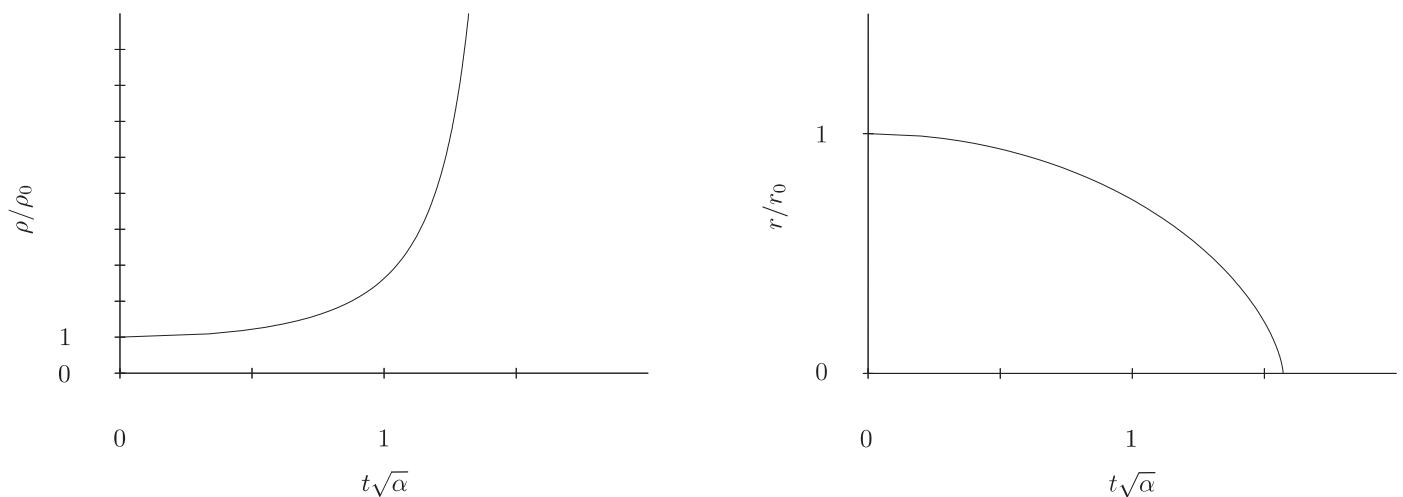
Dosadíme-li za u výraz $\sqrt{1/f - 1}$, získáváme

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{f(1-f)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{f} - 1} \right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{f(1-f)} + \arccos \sqrt{f} \right).$$

Můžete si ověřit, že funkce $t(f)$ je pro $0 < f \leq 1$ prostá, existuje k ní tedy inverzní funkce $f(t)$, která by po vynásobení r_0 dala hledanou funkci $R(r_0, t)$. Ať se ale budeme snažit sebevíc, ze získané závislosti t na f se nám nikdy nepodaří vyjádřit f v závislosti na t pomocí „jednoduchých“ funkcí.

To nám ovšem nebrání v tom, abychom si například vykreslili graf t v závislosti na f a z něj překlopením podle diagonály dostali graf $f(t)$.

Můžeme také využít toho, že objem oblaku je v čase t roven $V_0 f^3(t)$ a hustota tajemné hmoty (v každém bodě oblaku stejná, jak jsme zjistili) je $\rho_0/f^3(t)$, tedy $f(t) = (\rho_0/\rho(t))^{1/3}$, a stejným způsobem vykreslit graf $\rho(t)$ – viz obr. 1.



Obr. 1

Z nalezeného vztahu můžeme také docela snadno zjistit, jak dlouho bude celý kolaps trvat. Stačí najít limitu t pro $f \rightarrow 0$. Tak dostaneme pro dobu trvání kolapsu

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}.$$

K tomuto údaji lze dospět také elegantní úvahou využívající třetí Keplerův zákon o době oběhu tělesa. Ta totiž závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa a délce poloosy oběžné dráhy. Na radiální pád hmoty se přitom můžeme dívat jako na polovinu oběhu po „nekonečně excentrické“ eliptické dráze. Nevýhodou tohoto přístupu je, že nám nic neřekne o průběhu kolapsu.

Marek Pechal

marek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... srážka s asteroidem (4 body; průměr 2,80; řešilo 41 studentů)

Určete, jaký úhel po srážce svírala trajektorie asteroidu a vědecké lodi. Před srážkou byl kulový asteroid v klidu a měl stejnou hmotnost jako loď. Uvažte, že loď chrání štíty, které mají kulový tvar.

Problém kulečnickových koulí se zalíbil Zuzce Safernové.

Označme poloměr kulových štítů rakety a poloměr asteroidu r . Veličiny příslušející lodi budeme indexovat písmenem „l“ a veličiny příslušející asteroidu budeme indexovat písmenem „a“. Veličiny po střetnutí označujeme čárkou. Volme pravoúhlo soustavu souřadnic s počátkem v místě styku těles při srážce. Osa x nechť je určena spojnici středů těles. Osu y volme tak, aby vektor rychlosti rakety ležel v rovině xy . Složky vektoru rychlosti označme $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, přičemž $v_z = 0$ po celou dobu pohybu (neboť ve směru osy z nepůsobí žádné síly).

Protože loď je chráněna velmi pevnými štíty kulových tvarů, můžeme při malých rychlostech uvažovat dokonale pružnou srážku. První jednoduchý případ uvedeme bez důkazu; po čelní srážce zůstane loď v klidu a asteroid se bude pohybovat rychlostí \mathbf{v}_l (loď mu předá veškerou svou energii a hybnost). Nyní vyřešíme obecnou srážku.

Nejdříve vypočítáme úhlovou rychlost rotace lodi po srážce. Třecí síla mezi lodí a asteroidem jest $F_t = fF_n$ a velikost momentu síly působící na loď $M = fF_n r$. Snadno sestavíme rovnici vyjadřující druhou impulzovou větu $dL/dt = M$

$$J \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} f r,$$

kde $\Delta\omega$ a Δp_x je změna úhlové rychlosti a x -ové složky hybnosti během srážky, která trvala dobu Δt . Pro homogenní kouli s momentem setrvačnosti $J = 2mr^2/5$ dostáváme změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\omega = \frac{5}{2} \frac{f \Delta v_x}{r}.$$

Jelikož se loď před srážkou neotáčela, bude její úhlová rychlost po srážce $\omega'_l = \Delta\omega$. Na asteroid působí síly stejné velikosti, avšak opačného směru. Jeho úhlová rychlost po srážce bude mít tedy stejnou velikost $\omega'_a = \Delta\omega$, ale opačný směr. Rotační energie obou těles po srážce je vyjádřena vztahem

$$E'_r = 2 \cdot \frac{1}{2} J (\Delta\omega)^2 = \frac{5}{2} m f^2 (\Delta v_x)^2.$$

Podle zákona zachování momentu hybnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic (místo styku těles při srážce) píšeme

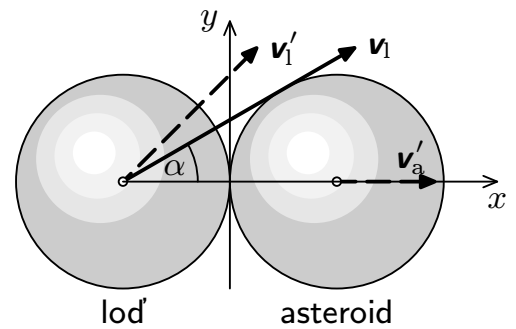
$$m v_{ly} r = -J \omega'_l + J \omega'_a + m v'_{ly} r - m v'_{ay} r \Rightarrow v_{ly} = v'_{ly} - v'_{ay}.$$

Podle zákona zachování hybnosti platí $v_{lx} = v'_{lx} + v'_{ax}$ a také $v_{ly} = v'_{ly} + v'_{ay}$. Navíc ze zákona zachování energie po násobení faktorem $2/m$ plyne

$$v_{lx}^2 + v_{ly}^2 = \frac{2E_r}{m} + v_{lx}^2 + v_{ly}^2 + v'_{ax}{}^2 + v'_{ay}{}^2.$$

Úpravou těchto vztahů získáme

$$v'_{lx} = \frac{5f^2}{2 + 5f^2} v_{lx}, \quad v'_{ly} = v_{ly}, \quad v'_{ax} = \frac{2}{2 + 5f^2} v_{lx}, \quad v'_{ay} = 0,$$



Obr. 2. Srážka lodě s asteroidem.

pohyb ve směru osy y se tedy nezmění. Úhel mezi trajektoriemi po srážce je roven úhlu mezi vektory rychlosti po srážce, tj. vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v'_{1y}}{v'_{1x}} = \frac{2 + 5f^2}{5f^2} \operatorname{tg} \alpha,$$

kde α je úhel, který svíral vektor rychlosti lodi se spojnicí středů obou těles před srážkou.

Pokud rotaci těles neuvažujeme či je koeficient smykového tření f roven nule, je výsledek jednoduchý $\alpha' = 90^\circ$.

Roman Derco

roman.derco@gmail.com

Úloha I.3 ... míchání barev kamínků (3 body; průměr 2,10; řešilo 41 studentů)

Vysvětlete, proč zkombinováním světél ze dvou barevných kamínků dostanou vědci jinou barvu, než když přímo smíchají dvě barvy, které kamínky mají.

Úloha vznikla při rozhovoru Honzy Prachaře a Lucky Pospíšilové o existenci hnědé barvy.

Nejprve se podívejme na případ, kdy chceme zkombinovat světla ze dvou barevných kamínků. Na začátku mějme bílé světlo, které rozložíme, a jednotlivé bílé svazky necháme projít barevnými kamínky a poté dopadnout na stejné místo. Jednotlivými kamínky projdou světla v barvách kamínků. Složky prošlých světél se sčítají a dohromady vytváří světlo s větší intenzitou. Intenzita výsledné barvy se rovná součtu intenzit jednotlivých složek. Hovoříme o *aditivním míchání*. Např. pokud kamínky mají barvu žlutou a azurovou, je výsledná barva světla zelená.

Příkladem aditivního způsobu míchání barev je barevný model RGB, který se používá např. v monitorech. Za základní barvy považujeme červenou, zelenou a modrou, pokud je smícháme všechny, dostaneme bílou (můžete si zkusit posvítit na jedno místo červenou, modrou a zelenou baterkou). Pokud smícháme dvě barvy, dostaneme z červené a modré purpurovou, z červené a zelené žlutou a z modré a zelené azurovou.

Pokud chceme smíchat barvy kamínků, můžeme buď kamínky rozdrtit a vzniklý prášek smíchat nebo nechat bílé světlo projít jedním kamínkem a světlo, které z něj vyjde, druhým. Světlo, resp. odpovídající část spektra je při průchodech jednotlivými barevnými vrstvami stále více pohlcováno. Výsledná barva se skládá z vlnových délek, které zbydou po průchodu oběma kamínky. V tomto případě hovoříme o *subtraktivním míchání*. Pokud máme (jako v prvním případě) žlutý a azurový kamínek, je výsledná barva tmavě zelená.

Na subtraktivním míchání barev je založen barevný model CMYK, který se využívá např. při tisku. Jeho základní barvy jsou žlutá, azurová a purpurová. Smícháním všech tří dostaneme černou barvu; při smíchání žluté a azurové vznikne zelená, žluté a purpurové červená, azurové a purpurové modrá.

Petra Malá

peta@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... kapitánův deník (3 body; průměr 3,14; řešilo 37 studentů)

Prispějte něčím zajímavým do deníku vědecké výpravy (obrázkem či jiným uměleckým výtvořem, dobrodružnou příhodou v délce denního hlášení, fyzikálním pozorováním, ...).

Tvůrčího ducha ve vás chtěl probudit Honza Prachař.

Kapitánův deník, 26. listopadu 2223⁴

Nedávná pozorování hranic Romulanské neutrální zóny odhalila podezřelé shlukování neznámé hmoty v sektoru 0056. Protože federační síť dálkových senzorů ještě není zdaleka hotova, velení se rozhodlo vyslat nás na průzkum.

„Blížíme se do dosahu senzorů, pane,“ ozval se vědecký důstojník.

„Přejděte na impuls a zaleťte třeba ... do nejbližší hvězdné soustavy. Jo, a ty senzory zapněte, ať se nenudíme.“

Osobní deník, kapitán S. Pilný, 27. listopadu 2223

Začali jsme senzorový průzkum soustavy. Světe, div se, stále nic. Skoro mám pocit, že si z nás dělá Hvězdná flotila srandu. Předtím to bylo hlídání transportu dilithia, práce jak za trest, a teď zas tohle. Já to vidím tak, že se zase nějaký romulanský kapitán ožral a odstřelil naším směrem pár asteroidů.

Zahvízdal interkom a z praskajícího reproduktoru se ozvala kulometná palba slov prvního důstojníka. Kapitán sice nerozuměl ani ň, ale aspoň ho to vzbudilo a vzpomněl si, že mu už dávno začala služba.

„No, konečně něco,“ pomyslel si, když se drápal z postele.

„Co tu máme?“ zeptal se po příchodu na můstek a hned ho udivilo, že na hlavní obrazovce nejsou žádné hvězdy. „Spíš, co tu nemáme, pane,“ neotálel s odpovědí vědecký důstojník, „při průzkumu soustavy jsme běžnými metodami nic nezjistili, ale pak jsme si všimli, že z jednoho místa nezachytáváme žádné signály. Podle všeho by tam měla být planeta, ale je tam tohle.“

„Co?“ rozespalý velitel nechápavě zíral na obrazovku.

„Tohle. Temná hmota. Visí nad planetou a vypadá to, jako by ji celou obklopovala. Jenom nad póly je ještě místo.“

„No jo, vidím,“ vzpamatoval se kapitán, „vemte nás tam a zahajte průzkum, já se jdu ještě prospat,“ zív a odešel.

To ale neměl dělat. Jenom co vylezl z turbovýťahu na chodbu, protější stěna si řekla, že už má dost své normální polohy, a vzala ho po hlavě. Když ho probudil jakýsi vousatý pán s klíčem od opodál stojící brány, zjistil, že je cosi špatně.

Ano, loď se při nezvládnutém přiblížení k planetě srazila s kusem temné hmoty a namířila si to po nejkratší možné trajektorii k zemi, po cestě zapálila půlku lesa na kontinentu a svezla se po nejbližším kopci až na jeho úpatí. Vrcholky hor se rozblikaly různými světly jako vánoční stromeček.

„Já jsem vám říkal, že máte opravit ty inerciální tlumiče na chodbách,“ obořil se první důstojník na vrchního inženýra, „teď máme z kapitána tapetu.“

„Co kapitán, ale jmelí,“ blekotal z cesty napůl omráčený inženýr.

„Co kdybyste se někdo obtěžovali s hlášením škod?“ řekl první důstojník s nadějí, že mu odpoví někdo, komu výlet z oběžné dráhy nevyklepl mozek z hlavy. Měl štěstí, zachránil

⁴⁾ Hvězdné datum se začalo používat až 1. 1. 2323.

ho vědecký důstojník: „Vypadá to sakra bledě, pane, sekundární trup jsme ztratili někde ve vzduchu, s ním i hlavní motory a půl posádky. Naštěstí nám zůstal fúzní reaktor a inerciální tlumiče. A interní senzory taky jakž takž fungují – zachytávám asi 42 známek života, včetně nás.“

„Co to je, strejdo?“ zeptal se neidentifikovatelný humanoid jedince vedle sebe.

„To určitě bude posel z nebes. Nebo taky primární trup lodi Hvězdné flotily třídy Daedalus. Ale spíš ten posel. Zítřka vezmem sousedy a půjdeme se na to podívat.“

„Čtř tnk psŤ,“ ozvalo se zpoza kusu upadené termoizolace.

„Sakra, už zas ten krám nefunguje!“ zachřestil šéfinženýr univerzálním překladačem a zavolal na prvního důstojníka: „Šéfe, máme návštěvu.“

K nouzovému táboru se teď blížila skupina postav.

„Ahoj, jak se vám líbí na naší planetě?“ ozvalo se.

„Ále, stromy jsou příliš vysoké na můj vkus,“ odpověděl kdosi z posádky. Asi nějaké červené tričko.

I když byli domorodci poněkud nakrknutí způsobem příchodu prvních lidí na jejich planetu – kdo by nebyl, kdyby mu návštěva zapálila živý plot a podupala záhonek – nakonec se nějak domluvili a výměnou za zrcátka a čočky se ztroskotancům podařilo získat lístek na lanovku do vyšších stromových pater. A tak vymontovali subprostorové rádio, nabili baterky a vydali se na výlet.

„Za jak dlouho temná hmota obklopí celou planetu?“ napadlo prvního důstojníka.

„Podle posledních měření tak za měsíc,“ dostalo se mu odpovědi.

„Myslíte, že bychom to měli domorodcům říct?“ začlo jej trochu hryzat svědomí.

„Ale proč, za dva týdny tady bude záchranná výprava, aspoň bude sranda.“

Kapitánův deník, hvězdné datum 47853.35

Při hlídkování poblíž neutrální zóny jsme zachytili nouzový signál plavidla flotily. Z analýzy vyplývá, že patřil USS Odyssey, která se zde před 147 lety ztratila...

Aleš Podolník

ales@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. P ... výška stromů (5 bodů; průměr 2,53; řešilo 38 studentů)

Odhadněte výšku stromů na planetě. Uvažte všechna možná hlediska, která mohou výšku stromů ovlivnit. Problém se zalíbil Zuzce Safernové při čtení knížky Svět očima fyziky.

Maximální výšku stromů limituje několik hlavních faktorů. Vyšetřeme nejprve trochu podrobněji, jak může být strom vysoký, aby byl schopen čerpat vodu až k svému vrcholu.

Předpokládejme nejprve, že strom transportuje vodu živou tkání. Céva by tak byla realizována sloupečkem nad sebou postavených buněk vzájemně oddělených porézní buněčnou stěnou a polopropustnou membránou (propouští pouze vodu, nikoli rozpuštěné látky). Transport vody směrem vzhůru je zprostředkován osmózou. Osmotický tlak je přímo úměrný rozdílu koncentrací roztoků mezi sousedními buňkami a každá vrchnější buňka musí tedy obsahovat koncentrovanější roztok. Pokud osmotický tlak mezi každými dvěma sousedními buňkami bude roven rozdílu tlaku způsobeného tíhou vody v buňkách, céva bude schopna udržet sloupec vody.

Můžeme si rozmyslet, že tato rovnováha nastane tehdy, když osmotický tlak způsobený rozdílem koncentrací mezi nejvrchnější a nejspodnější buňkou cévy je roven hydrostatickému tlaku vodního sloupce

$$p_{\text{osm}} = RT\Delta C = h\rho g,$$

kde ΔC je rozdíl molárních koncentrací roztoků, h výška vodního sloupce, ρ hustota vody. Předpokládejme na chvíli, že nejvrchnější buňka cévy „snese“ koncentraci nasyceného roztoku⁵ NaCl a nejspodnější buňka obsahuje čistou vodu. V tom případě $p_{\text{osm}} = 3 \text{ MPa}$. To je samozřejmě velmi nadnesené číslo. Osmotický tlak v rostlinách dosahuje maximálně 1,5 MPa. Dosazením této hodnoty do rovnosti a vyjádřením výšky h dostaneme maximální výšku v podmínkách na Zemi

$$h_{\text{max}} = \frac{p_{\text{osm}}}{\rho g} = 150 \text{ m}.$$

Výška je podle tohoto vztahu nepřímo úměrná gravitačnímu zrychlení, na planetě s polovičním zrychlením by limitující výška byla tedy zhruba 300 m.

Ve skutečnosti však transport vody probíhá kombinovaně živou tkání a specializovanými pletivy, která jsou tvořena odumřelými buňkami, ze kterých se zachovaly pouze části buněčných stěn. Céva je tedy v podstatě dutá trubička, ve které voda nemusí překonávat žádné membrány. Rychlost přenosu vody dutými cévami je o mnoho řádů vyšší než rychlost přenosu živou tkání. Céva se dá přirovnat ke kapiláře. V kapiláře voda v důsledku kapilární elevace vystoupá do výšky

$$h = \frac{2T \cos \alpha}{r\rho g},$$

kde T je povrchové napětí vody, α úhel smáčení stěny kapiláry (tyto hodnoty lze najít v tabulkách) a r poloměr kapiláry. Při běžné tloušťce cévy $40 \mu\text{m}$ stoupne voda do výšky zhruba 37 cm. To není mnoho, řeknete si možná. Hlavní čerpací silou je totiž zmíněná osmóza a kořenový vztlak. Ovšem při tloušťce kapiláry 5 nm , což je šířka pórů v buněčné stěně, dostaneme výšku sloupce téměř 3000 m. Takto tenké cévy by však bylo velmi obtížné realizovat a navíc přenos vody by byl velmi pomalý. Koloběh vody stromem zajišťuje kontinuální odpařování z listů, což vynucuje nasávání vody kořeny. Rychlost odpařování a tedy i rychlost cirkulace vody je ovlivněna tlakem atmosféry na planetě. Ten lze těžko odhadnout, např. na Marsu je gravitace přibližně třetinová, ale tlak atmosféry při povrchu stokrát menší. Pokud by celková hmotnost svislého sloupce atmosféry na planetě byla stejná jako hmotnost sloupce atmosféry Země, tlak při povrchu by byl poloviční. Tlak při povrchu je totiž přibližně dán tíhou sloupce vzduchu. Z tohoto hlediska by odpařování bylo rychlejší a pro přenos vody by mohly sloužit užší kapiláry, což by nepatrně zvýšilo limitující výšku stromu. Je však otázkou diskuse, jak nižší tlak celkově ovlivní vzrůst stromů.

Druhým hlediskem je otázka lámání stromů. To si probereme trochu obecněji. Vítr působí momentem síly M_1 vůči patě stromu a vychýlí strom ze svislé polohy. Ohnutý strom v důsledku vlastní tíhy působí momentem síly M_2 vůči patě stromu a tento moment je tedy funkcí velikosti prohnutí – čím je strom prohnutější, tím větší je rameno síly. Pro každé prohnutí je pro strom charakteristická síla pružnosti, která se snaží strom vrátit do svislé polohy a působí proti silám větru a tíhy. Síle pružnosti můžeme tedy také přisoudit moment síly M_3 vůči patě stromu. Pokud při daném prohnutí jsou vychylující momenty větší než moment síly pružnosti, bude

⁵⁾ Nasycený roztok NaCl má koncentraci 0,6 M, disociuje na dva ionty, celková koncentrace solutů je tedy 1,2 M.

docházet k dalšímu prohýbání. Existuje kritické prohnutí ε_{\max} , při kterém se strom láme. Velikost prohnutí ε můžeme definovat jako relativní prodloužení dřevního vlákna na vnějším oblouku prohnutí. Jakožto velké zjednodušení přijmeme předpoklad, že velikost M_2 je přímo úměrná ε . Velikost M_2 je dále úměrná tíze stromu a ramenu síly

$$M_2 = Ah\rho gS \cdot h\varepsilon = Ah^2gS\varepsilon,$$

kde S je obsah průřezu stromu, ρ hustota dřeva, A nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu. Velikost M_3 je úměrná prohnutí a průřezu stromu

$$M_3 = BS\varepsilon,$$

kde B je opět nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu.

Jednoduchým přibližným výpočtem zjistíme, že při prohnutí blízkém ε_{\max} je M_2 mnohem větší než M_1 . Zároveň se však při silnějším větru stromy často lámají, z čehož lze usoudit, že např. smrky by při stejné tloušťce už o mnoho vyšší být nemohly, protože by se lámaly i bez přispění větru.

Strom se nezlomí, pokud při prohnutí ε_{\max} je $M_2 < M_3$, a tedy

$$Ah^2gS\varepsilon_{\max} < BS\varepsilon_{\max} \quad \Rightarrow \quad h < \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Při polovičním g bude výška stromů na planetě $\sqrt{2}$ -krát větší než na Zemi. Při slabším vlivu větru bude výška stromů přirozeně o něco větší, při silnějším větru o něco menší. Můžeme si všimnout, že velmi tlustý strom by se ani při velkých výškách nezlomil. V tom případě by výška byla limitována „vodním kritériem“ a hlavně – uživit a vybudovat tlustý kmen stojí mnoho energie.

To už se ale dostáváme k evolučnímu hledisku. Růst stromu do výšky je hlavně výsledkem konkurenčního boje a tzv. „závodů ve zbrojení“. Evoluční pohled nám říká, že planetu obývají ty druhy, které jsou schopné se úspěšně rozmnožovat, a to mimo jiné znamená úspěšně soupeřit o živiny. Vysoký strom má dostatek světla, avšak jeho výška s sebou nese mnoho nevýhod a strom na růst spotřebuje mnoho energie, kterou jiné druhy věnují například tvorbě semen. Zemi obývá mnoho druhů rostlin, které se řídí různými strategiemi, a strategie růstu do výšky se ukázala jako jedna z mnoha úspěšných. Debata na toto téma by byla jistě velmi zajímavá a zároveň dlouhá, necháme si ji tedy na jindy.

Konečně, někdo by mohl namítnout, že Bůh stvořil život pouze na Zemi a nikde jinde.

Marek Scholz

mara@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. E ... sbírání šišek (8 bodů; průměr 5,00; řešilo 21 studentů)

Počet spirál tvořených šupinami šišek vycházejících od špičky není libovolný, nýbrž nabývá hodnot 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... To jsou členy tzv. Fibonacciho posloupnosti, v níž další člen získáme sečtením předchozích dvou, přičemž první dva členy posloupnosti jsou 1 a 1. Jako každé pravidlo má však i toto své výjimky. Někdy se totiž stane, že počet spirál je roven 1, 3, 4, 7, 11, ..., tedy prvku Lucasovy posloupnosti. Získáme ji stejným postupem jako Fibonacciho, začínáme ale s 1 a 3.

Vášim úkolem je zjistit, jak často a za jakých podmínek se tato anomálie vyskytuje na Zemi. Prozkoumejte závislost na co nejvíce různých parametrech (např. roste-li strom v lese či volně). *Těmito a jinými čísly v přírodě se zabývá Lenka Zdeborová.*

Úvodem našeho řešení uznejme, že se tentokrát nejednalo o klasickou experimentální úlohu, neboť vyžadovala jiné metody řešení, než jsme obvykle byli zvyklí. V tomto textu se nejprve pokusíme vysvětlit cosi o tajemství jevu zvaného *phyllotaxe*, povíme si, jak vše souvisí s Fibonacciho, resp. Lucasovými čísly, a závěrem provedeme zpracování „naměřených“ hodnot.

Teorie

V zadání úlohy jsme vás odkazovali na studijní text <http://artax.karlin.mff.cuni.cz/~zdebl9am/phyllot.pdf>, ve kterém se můžeme dočíst zdůvodnění, proč se šupinky šišek skládají do spirál, jejichž počet v obou směrech otáčení je vždy roven dvěma po sobě jdoucím číslům z Fibonacciho posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Toto zdůvodnění považujeme tedy za vyložené a nebudeme jej zde dále rozebírat.

Avšak tak tomu není pokaždé. Oním důvodem je fakt, že zmíněné uspořádání souvisí se *zlatým řezem*⁶ (připomeňme jeho hodnotu $\Theta = (1 + \sqrt{5})/2$), ke kterému konverguje poměr F_{n+1}/F_n . Jenže Fibonacciho posloupnost není jediná, jež má tuto vlastnost. Chovají se tak všechny posloupnosti přirozených čísel dané rekurentním vzorcem $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ bez ohledu na hodnoty prvních dvou členů. Důkaz je prostý.

Předpokládejme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L,$$

a dokažme nyní, že $L = \Theta$. Nejprve si rekurentní zadání posloupnosti upravme do tvaru $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ a vydělme jej členem a_n . Tím dostaneme rovnici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

kde za oba zlomky můžeme v limitě $n \rightarrow \infty$ podle předpokladu dosadit L , resp. $1/L$. Rovnice se nám tak zjednoduší do krásného tvaru

$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

který až nápadně připomíná rovnici, která vede na zlatý řez. A skutečně! Řešením jsou čísla $L_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ a $L_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, jenže druhý kořen nemá smysl, vždyť všechna čísla

⁶⁾ Některé zdroje uvádějí též souvislost ze *zlatým úhlem* $\varphi = 360^\circ \cdot (2 - \Theta) \approx 137,5^\circ$, k němuž v nekonečnu konverguje poměr $360^\circ \cdot F_n/F_{n+2}$. Pod tímto úhlem se nacházejí osy dvou po sobě vyrostlých šupinek či lístků. Ale v tomto textu se zlatým úhlem zabývat nadále nebudeme, pouze jej uvádíme jako zajímavost.

v posloupnosti jsou kladná a $L_2 < 0$. Vidíme tedy, že výše uvedený rekurentní vztah vede vždy ke zlatému řezu.⁷

Naskýtá se tedy otázka, proč šišky, ale i jiné přírodní výtvořky (květenství, listy na stonku, ...), preferují právě Fibonacciho posloupnost. Odpověď na tuto otázku není známa. Jako by počáteční prvky posloupnosti měly být co nejnižší (v případě Fibonacciho 1, 1; pokud jde o Lucasovu posloupnost 1, 3) a vyšší čísla nebyla pro rostlinky dostatečně přitažlivá, přestože některé takové řady konvergují ke zlatému řezu rychleji. O vysvětlení nejasnosti se máme pokusit počítáním spirál tvořených šupinami šišek. Celosvětová statistika uvádí výskyt v průměru 2–5 % případů čísel z Lucasovy posloupnosti. Abychom i my mohli zpracovávat data nějak rozumně, zkompletujeme veškerá dostupná doručená měření. Tím dostaneme poměrně rozsáhlý statistický soubor dat, ve kterém (možná) objevíme nějakou závislost.

Postup a výsledky měření

Nyní ve stručnosti ještě rozeberme metodu měření. Každá šiška má dva typy spirál – pravotočivé a levotočivé. Jejich počty jsou vždy dva po sobě jdoucí členy výše zmíněných posloupností. Díky tomu jsme schopni rozhodnout i sporný počet 3. Nejvhodnější je počítat spirály po obvodu ve zvolené úrovni tak, že si vždy jednu spirálu zvolíme za výchozí a nějak ji označíme.

Budeme zkoumat dva parametry – druh a osamělost (sám či v lese) stromu. Tímto omezením se pokusíme získat ještě větší množství dat, než kdybychom zkoumali každou lokalitu zvlášť.

Tabulka uvádí počty šišek, jejichž počty spirál odpovídají Fibonacciho, resp. Lucasově posloupnosti, v závislosti na druhu a umístění stromu.

Druh	Umístění	Lucas	Fibonacci	Relativní počet šišek Lucas [%]
Smrk	v lese	27	619	4,2
Smrk	osamocen	5	179	2,8
Borovice	v lese	61	766	7,4
Borovice	osamocena	24	136	15,0
Modřín	v lese	39	170	18,7
Modřín	osamocen	32	109	22,3
Celkem		188	1979	8,8

Přestože jsme měli k dispozici data z různých koutů světa (Česko, Slovensko, Francie, Švýcarsko, USA), výskyt anomálních šišek byl všude přibližně stejný. S naším výsledkem 8,8 % jsme se sice dostali lehce nad obecně uznávaný světový průměr, ale vzhledem k malému množství šišek jde spíše o náhodu.

Zdá se tedy, že výskyt abnormálních šišek je veskrze náhodný jev, nedá se přesně určit nějaká závislost např. na zeměpisné poloze, nadmořské výšce či druhu stromu. Patrně našimi závěry revoluci v biologii nespácháme, i když je třeba zmínit i určité speciální poznatky:

- Výskyt lucasovských šišek se zdá vyšší u modřínu a borovice než u smrku. Otázkou je, zda-li nedošlo k chybnému zjištění počtu spirál vzhledem k tomu, že modřínové a borovicové šišky jsou častěji deformované a nepravidelné.
- Na jednom stromě mohou vyrůst šišky obou typů, neboť nebyl pozorován strom plný výhradně anomálních šišek.

⁷⁾ Obdobného triku využívá i důkaz konvergence $360^\circ \cdot F_n / F_{n+2} \rightarrow \varphi$.

- Z předchozího pozorování vyplývá, že typ spirál nebude záviset na genetické výbavě daného stromu nebo jeho umístění v krajině.
- *Radimu Pechalovi* (Rožnov p. R.) a *Jakubu Michálkovi* (t.č. v USA) se podařilo najít smrkovou šišku s počtem spirál 6.

Snadno zjistíme, že číslo šest patří do řady 1, 5, 6, 11, ... nebo 2, 2, 4, 6, ..., ale takových možností je více. Rozhodnout bychom mohli, pokud bychom znali počet spirál v opačném směru. Ale každopádně je to více než anomálie.

Poznámky k řešení

Nejčastější chybou řešitelů byla ignorace faktu, že šišky mají dva směry stáčení spirál a že počty spirál v obou směrech jsou dva po sobě jdoucí prvky posloupnosti; tedy je možné, že šišky s počtem 8 a 13 jsou vlastně totožné, neboť mají v jednom směru 8 a ve druhém 13 spirál.

Námět pro další práci/projekt

Pokud by se někdo chtěl tomuto problému věnovat hlouběji, je to dobrý nápad, vzhledem k tomu, že většina informací o phyllotaxi jsou domněnky. Doporučený postup by byl zvolit si nějaký lesík (cca 2 ha) a po několik let tam rok co rok sesbírat veškeré šišky a data takto průběžně zpracovávat.

Tomáš Jirotko

byrot@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. S ... Bohrova hypotéza (4 body; průměr 2,59; řešilo 37 studentů)

V této úloze se budeme zabývat atomem vodíku, který je tvořen velice hmotným jádrem s nábojem e a lehkým elektronem o hmotnosti m s nábojem $-e$, který kolem jádra obíhá pro kruhové trajektorii.

- Určete, jak na základě klasické fyziky závisí vzdálenost elektronu od jádra atomu na jeho celkové (kinetické a potenciální) energii E .
- Přijmeme Bohrovu hypotézu, že moment hybnosti elektronu je kvantován, tzn. může nabývat jen velikosti $L = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. V jaké vzdálenosti potom může elektron kolem jádra atomu obíhat?
- Určete frekvenci fotonu, který elektron vyzáří, pokud přejde z n -té do m -té povolené vzdálenosti od jádra.

Zadal autor seriálu Jarda Trnka.

- Celková energie elektronu se skládá z potenciální a kinetické části

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Rychlost elektronu zjistíme z rovnosti elektrostatické a odstředivé síly

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}.$$

Dosadíme za velikost rychlosti v do vztahu pro energii a vyjádříme závislost $r = r(E)$.

$$r = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 E}.$$

Záporné znaménko je zde plně v pořádku, protože pro vázané stavy je $E < 0$. Volný elektron má nulovou energii.

- b) V úkolu a) jsme viděli, že v klasické mechanice se elektron může nacházet v libovolné vzdálenosti od jádra. Naložme teď na problém Bohrovu kvantovací podmínku $L = nh/2\pi$. Z toho jednoduše zjistíme, jaké rychlosti může elektron nabývat, $v = v(r)$.

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi mr}.$$

Srovnáme-li tento vztah pro rychlost se vztahem z části a) získaný ze silové úvahy, dostaneme

$$\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = \frac{nh}{2\pi mr} \Rightarrow r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{m\pi e^2}.$$

Vidíme tedy, že vzdálenost elektronu od jádra nemůže být v Bohrově modelu libovolná, ale může nabývat jen hodnot $r_n = r_0 n^2$, kde n je přirozené číslo, a

$$r_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{m\pi e^2} \doteq 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,53 \text{ \AA}$$

se nazývá *Bohrův poloměr*.

- c) Z úkolů a) a b) odvodíme, že elektronu na n -té hladině odpovídá energie

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2} = -1 \text{ Ry} \cdot \frac{1}{n^2} \doteq -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Tento vztah definuje energetickou jednotku atomové fyziky – Rydberg (Ry). Při přeskoku elektronu z n -té do m -té hladiny se vyzáří foton o energii

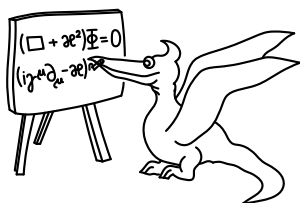
$$\Delta E_{nm} = E_n - E_m = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Podle Planckovy hypotézy je energie fotonu přímo úměrná frekvenci, tj. $E = hf$

$$f_{nm} = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

Kapitola 3: Základy kvantové mechaniky

Ve třetím díle našeho seriálu probereme základní aspekty kvantové mechaniky. Dozvíme se, co vůbec znamená, že je něco *kvantového*, jak kvantové systémy popisovat atd.

Popis klasického a kvantového systému

Objekty, se kterými v kvantové mechanice pracujeme, nazýváme *kvantové systémy*. Můžeme si pod tím představit elementární částici, atom, molekulu, ale třeba i svůdnou prodavačku zeleniny nebo kyblík slizu. Prostě je to cokoli, co popisujeme jako celek (ovšem samozřejmě může mít nějakou vnitřní strukturu). Klíčovým pojmem kvantové mechaniky je potom *stav* systému⁸, který popisujeme pomocí vektoru v Hilbertově prostoru⁹. V něm lze zvolit určitou bázi a potom každý stav $|\psi\rangle$ lze napsat jako lineární kombinaci vektorů této báze

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |j\rangle.$$

Říkáme, že stav $|\psi\rangle$ je *superpozicí* stavů $|j\rangle$. Pokud si vzpomeneme na závěr minulého dílu, tak tam jsme se zabývali částicí se spinem $1/2$. Báze tohoto prostoru měla jen dva prvky $|1\rangle = |\uparrow\rangle$, $|2\rangle = |\downarrow\rangle$. Stejnou proceduru lze učinit při popisu složitějšího systému, jen ta báze bude mnohem větší (obecně bude mít nekonečně mnoho prvků, jak uvidíme později).

Rozklad vektoru popisující systém do báze není specialitou kvantové mechaniky, to samé de facto děláme na klasické úrovni. Představte si, že máme systém mnoha stejných kuliček. Jak v daném okamžiku popíšeme jednu z kuliček? No potřebujeme vědět, kde se nachází – to určuje polohový vektor \mathbf{x} , no a samozřejmě taky, jak rychle se pohybuje – tuto informaci v sobě skrývá vektor hybnosti \mathbf{p} .¹⁰ Tedy pokud známe polohový vektor \mathbf{x} a hybnost \mathbf{p} , máme danou kuličku plně charakterizovanou.¹¹ K určení polohového vektoru potřebujeme tři parametry (jeho složky ve směru os x , y a z), stejně tak určení hybnosti vyžaduje tři parametry (opět složky ve směru souřadnicových os). Celkově je tedy k popisu kuličky zapotřebí šest parametrů, daný prostor stavů je šestidimenzionální. (V klasické mechanice mluvíme v této souvislosti o fázovém prostoru.)

Měření v kvantové mechanice

Veškeré informace o kvantovém systému se dozvídáme prostřednictvím měření. To však hraje daleko důležitější roli než v klasické mechanice, kde si můžeme měřit, co chceme, jak chceme, kolikrát chceme a systém to neovlivní. Asi nejlepší představu o měření v kvantové

⁸⁾ Nebudu filozoficky plkat o tom, co to vlastně je. Sám název to určuje.

⁹⁾ Zavzpomínejte na minulý díl, bude to potřeba.

¹⁰⁾ Přesněji o rychlosti něco říká vektor rychlosti \mathbf{v} , ale ten s hybností jednoduše souvisí $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Hybnost je ovšem z jistých důvodů k popisu vhodnější.

¹¹⁾ Samozřejmě jsou zde ještě veličiny jako hmotnost, velikost, atd., ale řekli jsme, že jsou všechny kuličky stejné, tudíž nás toto nemusí zajímat.

mechanice získáme, když si daný měřicí přístroj představíme jako jakýsi filtr, který propouští pouze stavy s danou vlastností. Opět využijme případ částice se spinem $1/2$ a představme si, že systém připravíme ve stavu

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$$

a měříme, zda se tento systém nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$ nebo $|\downarrow\rangle$. Co můžeme říci o výsledku tohoto měření? Klasickou úvahou bychom dostali jednoznačnou odpověď, zkrátka ten spin míří buď nahoru nebo dolů. V kvantové mechanice nikoliv. O tom svědčí i to, že daný stav je superpozice. To, co jsme schopni říci, je pouze *pravděpodobnost*, že naměříme $|\uparrow\rangle$ či $|\downarrow\rangle$. Nejedná se pouze o tento příklad, celá kvantová mechanika dává pouze pravděpodobnostní předpovědi, tj. neříká přesně, co se stane, ale pouze s jakou pravděpodobností se to či ono realizuje.

Pokud máme připravený systém ve stavu $|\psi\rangle$ a měříme, zda se nachází v nějakém stavu $|j\rangle$, pak kladnou odpověď dostaneme s pravděpodobností

$$w_j = |\langle j|\psi\rangle|^2.$$

Jedná se tedy o kvadrát skalárního součinu původního stavu $|\psi\rangle$ a stavu $|j\rangle$, který na tomto stavu „hledáme“.

Pro náš příklad

$$w_{\uparrow} = |\langle \uparrow|\psi\rangle|^2 = c_1^2, \quad w_{\downarrow} = |\langle \downarrow|\psi\rangle|^2 = c_2^2.$$

Z normovanosti vektoru $|\psi\rangle$ dostaneme, že platí $w_{\uparrow} + w_{\downarrow} = c_1^2 + c_2^2 = 1$, tedy celková pravděpodobnost, že něco naměříme, je 1. To zní logicky.

Během měření dochází k tzv. *redukci stavu*. To znamená, že po měření se systém již nebude nacházet v žádné superpozici, ale v *čistém stavu* (tj. ve stavu, který lze popsat vektorem báze), tedy v $|\psi'\rangle = |\uparrow\rangle$ či $|\psi'\rangle = |\downarrow\rangle$. Celkově dostaneme:

1. S pravděpodobností $w_{\uparrow} = c_1^2$ se bude systém nacházet po měření ve stavu $|\psi'\rangle = |\uparrow\rangle$.
2. S pravděpodobností $w_{\downarrow} = c_2^2$ se bude systém nacházet po měření ve stavu $|\psi'\rangle = |\downarrow\rangle$.

Obecně mějme n -dimenzionální prostor s bází $|j\rangle$, kde $j = 1, \dots, n$. Na tomto prostoru máme obecný vektor $|\psi\rangle$ popisující stav systému. Tento stav podrobíme měření na našem měřicím přístroji, který zjišťuje, zda se náš systém nachází ve stavu popsaném vektorem $|j\rangle$. Potom s pravděpodobností $w_j = |\langle j|\psi\rangle|^2 = c_j^2$ se bude systém nacházet po měření ve stavu $|\psi'\rangle = |j\rangle$.

Pokud už před měřením máme systém připravený ve stavu $|\psi\rangle = |j\rangle$, bude podle výše uvedeného po měření s pravděpodobností $c_j = 1$ ve stavu $|\psi'\rangle = |j\rangle$ a s pravděpodobností $c_{j'} = 0$ ($j' \neq j$) ve všech ostatních stavech $|j'\rangle$. Tedy pokud už na začátku máme čistý stav, tak měřením se s ním nic nezmění.

Pozorovatelné jako operátory

Na Hilbertově prostoru stavů lze zavést operátory, které přísluší tzv. *pozorovatelným*. Ty symbolizují veličiny, které můžeme na daném stavu měřit. Z klasické fyziky známe např. energii, hybnost, polohu, impulsmoment (moment hybnosti), ty všechny do kvantového světa přenešeme. Navíc nově máme třeba spin, který nemá klasický analog.

Libovolnou pozorovatelnou lze tedy reprezentovat pomocí operátoru \hat{A} . Pro něj můžeme najít příslušné vlastní stavy $|A_i\rangle$ a vlastní čísla A_i , jak již víme z minulé kapitoly.

$$\hat{A}|A_i\rangle = A_i|A_i\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

V případě, který jsme diskutovali minule, tj. částice se spinem $1/2$ (kde nás zajímal pouze spin), je tímto operátorem $\hat{A} = \hat{S}_3$ (o tom, proč ho označujeme takto, se dozvíme později), s vlastními stavy $|A_1\rangle = |\uparrow\rangle$, $|A_2\rangle = |\downarrow\rangle$ a vlastními čísly $A_1 = 1/2$, $A_2 = -1/2$.

$$\hat{S}_3|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_3|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle.$$

O nejdůležitějších operátorech si povíme něco více.

Energie

Operátor energie se nazývá *hamiltonián* a označujeme ho jako \hat{H} . Vlastní stavy mají ostrou hodnotu energie. To znamená, že můžeme přesně říct, jakou energii stavu $|E_i\rangle$ naměříme. V případě superpozice vlastních stavů tak učinit nemůžeme, míchá se tam víc energií a při měření dostaneme jen pravděpodobnostní odpověď. Analogicky to platí i pro jiné pozorovatelné. To, jakých hodnot může energie nabývat, záleží na konkrétní situaci.

$$\hat{H}|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle.$$

Může se stát, že energie bude nabývat spojitéch hodnot (pak nebude možno hodnoty energie očíslovat), stejně jako poloha a hybnost, o čemž si povíme v následujícím odstavci.

Poloha a hybnost

Operátory polohy a hybnosti značíme \hat{X} , resp. \hat{P} . Popisují, v jaké poloze se daný systém nachází, resp. jakou má hybnost. To samozřejmě lze říci pouze o vlastních stavech daného operátoru. Stavy popsané lineární kombinací nemají přesně definovanou polohu (resp. hybnost) a výsledek měření má opět pouze pravděpodobnostní charakter.

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle.$$

Tentokrát vlastní stavy ani vlastní hodnoty nečísloujeme, protože tyto dvě veličiny jsou spojité, neexistují diskrétní hodnoty pro polohu a hybnost. Proto x , resp. p tady značí libovolnou hodnotu. Samozřejmě můžeme mít nějaké okrajové omezení, ale jinak se obecně systém může nacházet např. jak v poloze $x = 1,02$ nm, tak v $x = 1,03$ nm.¹²

Toto platí v jednorozměrném případě. Pokud budeme uvažovat trojrozměrný případ, stane se z operátoru \hat{X} vektorový operátor $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$, obdobně pro hybnost. Rovnice pro vlastní stavy a vlastní hodnoty potom budou mít tvar

$$\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle.$$

Impulsmoment

Speciálním typem operátoru je *impulsmoment*. Jedná se o vektorový operátor (trojrozměrný), jež lze zapsat ve tvaru $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$, tedy operátor, který má tři komponenty – ve směru os x , y a z stejně jako operátor polohy či hybnosti. Z jistých důvodů (které uvidíme za chvíli) se měření impulsmomentu charakterizuje pomocí dvou operátorů – kvadrátu velikosti

¹²⁾ Přesněji x může nabývat libovolného reálného čísla. Předtím jsme číslovali energii E_i přirozenými čísly i . Zde to nejde, protože reálných čísel je více než přirozených (mají větší mohutnost).

$\widehat{J}^2 = \widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 + \widehat{J}_3^2$ a projekce na třetí osu J_3 . Pro vlastní hodnoty těchto operátorů lze odvodit (jak ukážeme v některém příštím dílu)

$$\widehat{J}^2|j\rangle = j(j+1)|j\rangle, \quad \widehat{J}_3|m\rangle = m|m\rangle,$$

kde j je nezáporné celé nebo polocelé číslo, které nazýváme velikost impulsmomentu, a m probíhá hodnoty $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$. Výsledek pro projekci na osu z je intuitivní – můžeme naměřit projekci od plus celé hodnoty spinu (míří ve směru osy z) až po minus celou hodnotu (míří proti směru osy z). Mezitím je různě sklopený vektor spinu, kde se uplatní jen část.

Nejdůležitějšími příklady těchto operátorů jsou operátory spinu $\widehat{S}^2, \widehat{S}_3$. Velikost impulsmomentu je v tomto případě spin částice $j = s$ a udává něco jako „vnitřní moment hybnosti“. Dále orbitální impulsmoment $\widehat{L}^2, \widehat{L}_3$ charakterizovaný orbitálním momentem hybnosti $j = l$ (to nabývá pouze přirozených čísel) je přímým analogem klasického momentu hybnosti.

Jednoduchým příkladem, který už byl několikrát zmiňován, je operátor spinu a částice se spinem $1/2$. Pro tu si jako cvičení můžete odvodit následující (vše, co k tomu potřebujete, najdete na konci minulého dílu)

$$\begin{aligned} \widehat{S}^2|\uparrow\rangle &= \frac{3}{4}|\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) |\uparrow\rangle, & \widehat{S}_3|\uparrow\rangle &= \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \\ \widehat{S}^2|\downarrow\rangle &= \frac{3}{4}|\downarrow\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1\right) |\downarrow\rangle, & \widehat{S}_3|\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Proto vlastní vektory $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ lze značit ve tvaru vlastních vektorů operátorů \widehat{S}^2 a \widehat{S}_3 .

$$|\uparrow\rangle = |s = 1/2, s_z = 1/2\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |s = 1/2, s_z = -1/2\rangle.$$

Zde jsme viděli zajímavou věc – vektory $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ byly vlastními pro oba operátory \widehat{S}^2 a \widehat{S}_3 . Tento závěr má obecnou platnost (jak si ukážeme za chvíli), vlastní stavy operátoru impulsmomentu \widehat{J}^2 jsou zároveň vlastními stavy operátoru projekce impulsmomentu na třetí osu \widehat{J}_3 .

Narozdíl od spinu, který nemá v klasické fyzice žádnou analogii, orbitální impulsmoment (čili moment hybnosti) je známý už v klasickém případě. Proto v korespondenci s klasickou fyzikou zavádíme

$$\widehat{L} = \widehat{X} \times \widehat{P}.$$

Ve složkách potom dostaneme¹³

$$\widehat{L}_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \widehat{X}_j \widehat{P}_k, \quad \text{kde } i = 1, 2, 3.$$

Kvantování fyzikálních veličin

Konečně se dostáváme k základnímu rozdílu klasické a kvantové mechaniky. Celý aparát popisu stavů pomocí vektorů v Hilbertově prostoru, zavedení pozorovatelných jako operátorů se sice v klasické fyzice nepoužívá, ale v principu by mohl. Zásadní rozdíl je ovšem skryt v měření veličin. Pokud na klasické úrovni měříme dvě fyzikální veličiny, vůbec nezáleží na tom, v jakém

¹³⁾ ε_{ijk} se nazývá Levi-Civitův symbol a platí: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$ a 0 ve všech ostatních případech. Tedy každá číslice se mezi indexy smí ocitnout pouze jednou a v tom případě je výsledek 1 či -1 podle toho, jestli se jedná o sudou či lichou permutaci.

pořadí je budeme měřit. Typicky pokud změříme polohu a potom hybnost tělesa, vyjde nám to samé jako kdybychom to měření provedli obráceně. To však v kvantovém světě neplatí! Mezi jednotlivými pozorovatelnými se zavádějí tzv. *komutační relace*, které tuto disproporci určují. Komutační relaci operátorů \hat{A} a \hat{B} můžeme zapsat ve tvaru

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C},$$

kde \hat{C} je nějaký operátor. Pokud $\hat{C} = 0$, pak říkáme, že operátory \hat{A} a \hat{B} komutují a o pozorovatelných, které těmto operátorům přísluší, říkáme, že jsou *kompatibilní*. To znamená, že je jedno, v jakém pořadí měříme, vždy vyjde to samé. Podle definice komutátoru totiž

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

a pokud $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, pak platí $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. Obě veličiny tedy lze měřit současně a nestarat se o to, která z nich byla prakticky změřena jako první, protože je to jedno. V klasické fyzice jsou kompatibilní všechny veličiny, v kvantové fyzice ne. Zcela základní je komutační relace mezi operátory \hat{X} a \hat{P}

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{I},$$

kde \mathbb{I} je identický operátor¹⁴. Důležité je, že to není nula! Na základě této komutační relace se dá také ukázat, jak působí operátor \hat{P} na vlastní stav operátoru \hat{X} , čehož v následujícím využijeme.¹⁵

$$\hat{P}|x\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}|x\rangle.$$

Další zásadní komutační relace souvisí s operátory impulsmomentu. Možná se vám zdála trochu podivná konstrukce, kterou jsme v minulém paragrafu dělali, ale má své hluboké opodstatnění. Projekce impulsmomentu (např. spinu) na různé osy totiž spolu nekomutují

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] \neq 0$$

atd. Komutační relace, kterou se de facto definuje impulsmoment (tj. pokud složky nějakého vektorového operátoru $\hat{\mathbf{A}}$ tuto relaci splňují, pak je $\hat{\mathbf{A}}$ impulsmomentem), mají tvar

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k,$$

kde indexy i, j a k probíhají hodnoty 1, 2, 3 (ty odpovídají jednotlivým osám x, y a z jako už předtím).

¹⁴⁾ Jen pro připomenutí, operátor identity působí na libovolný stav tak, že ho nechává nezměněný, tj. $\mathbb{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$.

¹⁵⁾ Odvození je jednoduché. Komutátor $[\hat{X}, \hat{P}]$ necháme zapůsobit na vektor $|x\rangle$

$$\hat{X}(\hat{P}|x\rangle) - \hat{P}(\hat{X}|x\rangle).$$

Po dosazení za operátor \hat{P} dostaneme

$$-i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar \frac{d}{dx}(\hat{X}|x\rangle) = -i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar|x\rangle = i\hbar|x\rangle = i\hbar\mathbb{I}|x\rangle,$$

kde jsme využili vztahu $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$.

Konkrétně tedy např. platí $[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3$. Proto nelze současně měřit projekce spinu (či orbitálního impulsmomentu) na osu x a y . Co však vždy platí, je kompatibilita jedné z projekcí \hat{J}_i s operátorem kvadrátu impulsmomentu \hat{J}^2

$$[\hat{J}_i, \hat{J}^2] = 0, \quad \text{konkrétně} \quad [\hat{J}_1, \hat{J}^2] = [\hat{J}_2, \hat{J}^2] = [\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0.$$

Vzájemně komutující veličiny jsou velmi důležité pro volbu báze na Hilbertově prostoru a i jinak, jak uvidíme v zápětí.

Úplná množina pozorovatelných

Klíčovým úkolem je volba báze na Hilbertově prostoru. Zatím jsme se zabývali pouze jednoduchým případem částice se spinem $1/2$, kde nás nezajímalo nic jiného než její spin, žádná poloha či hybnost, zkrátka nic. Proto bylo zřejmé, že bázi lze vytvořit ze dvou stavů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$. Nicméně ve složitějších případech to tak být nemusí. Například pokud budeme chtít popsat elektron v atomu vodíku, tak by bylo přirozené zvolit jako bázi vlastní stavy hamiltoniánu, tj. stavy s ostrou hodnotou energie $|E_i\rangle$. To však ani zdaleka nestačí, existuje totiž více různých stavů se stejnou energií, které se liší např. hodnotou orbitálního impulsmomentu. Proto kdybychom se dívali pouze na energii, pak by stavy $|E = E_2, l = 0\rangle$ a $|E = E_2, l = 1\rangle$ byly z našeho pohledu stejné, což nejsou.

Abychom byli schopni zvolit „kompletní“ bázi, je potřeba najít tzv. *úplnou množinu pozorovatelných*, zkráceně ÚMP. Je to maximální možná množina navzájem kompatibilních operátorů. To znamená, že jim odpovídající pozorovatelné můžeme současně měřit a navíc mají všechny stejné vlastní stavy!¹⁶ Nalezení této množiny je často nelehký úkol, nicméně pokud se to povede, tak poté každý vektor báze je jednoznačně určen vlastními hodnotami operátorů z ÚMP. Vlastním hodnotám těchto operátorů říkáme *kvantová čísla*. Každý vektor báze je potom plně definován určením všech kvantových čísel (odpovídajících operátorům ÚMP). Například pokud operátory \hat{A} a \hat{B} tvoří ÚMP, pak každý vektor je charakterizován dvěma čísly a a b , jež jsou vlastními hodnotami výše zmíněných operátorů. Lze tedy psát

$$\hat{A}|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad \hat{B}|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

Vektory $|a, b\rangle$ poté tvoří bázi našeho prostoru a libovolný vektor lze napsat jako jejich lineární kombinaci. Kvantová čísla a a b mohou nabývat buď diskrétních hodnot (např. spin), nebo libovolných hodnot ze spojitě číselné množiny (např. poloha). To záleží na konkrétních operátorech a konkrétní situaci.

Jako jednoduchý příklad si vezměme systém částic s různým spinem (nic jiného kromě spinu nás teď nebude zajímat). Úplnou množinu pozorovatelných teď tvoří operátory \hat{S}^2 a \hat{S}_3 (jež komutují, jak jsme si již řekli). Žádné jiné operátory s těmito dvěma nekomutují, tudíž nelze tuto ÚMP již rozšířit. Operátory \hat{S}_1 a \hat{S}_2 sice komutují s \hat{S}^2 , nicméně nekomutují s \hat{S}_3 .¹⁷ Na tomto Hilbertově prostoru tedy máme bázi $|s, m\rangle$ charakterizovanou dvěma kvantovými čísly – s je velikost spinu částice a m projekce spinu na osu z .

$$\hat{S}^2|s, m\rangle = s(s+1)|s, m\rangle, \quad \hat{S}_3|s, m\rangle = m|s, m\rangle.$$

¹⁶⁾ Pokud platí $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ a označíme $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$, potom $0 = [\hat{A}, \hat{B}]|a\rangle = \hat{A}\hat{B}|a\rangle - a\hat{B}|a\rangle$, tudíž $\hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = a(\hat{B}|a\rangle)$, což znamená, že $\hat{B}|a\rangle$ je vlastním vektorem operátoru \hat{A} či jeho násobkem $\hat{B}|a\rangle = b|a\rangle$.

¹⁷⁾ Pravdou je, že za ÚMP lze zvolit i dvojice $\{\hat{S}^2, \hat{S}_1\}$, $\{\hat{S}^2, \hat{S}_2\}$, ale to nic nového nepřinese, jedná se pouze o přeznačení os.

Pro představu uvedeme prvních pár vektorů báze

$$\begin{aligned} s = 0 : & \quad |s = 0, m = 0\rangle \\ s = 1/2 : & \quad |s = 1/2, m = -1/2\rangle, \quad |s = 1/2, m = 1/2\rangle \\ s = 1 : & \quad |s = 1, m = -1\rangle, \quad |s = 1, m = 0\rangle, \quad |s = 1, m = 1\rangle \\ & \dots \end{aligned}$$

Vidíme, že tato báze bude mít konečně mnoho prvků, pokud se omezíme jen na částice se spinem $s < n$, kde n je nějaké číslo. Nicméně pokud povolíme libovolné spiny, bude tato báze nekonečněrozměrná.¹⁸

Z předchozího je zřejmé, že nelze zvolit za ÚMP operátory \hat{X} a \hat{P} vzhledem ke komutačním relacím. Jinak konkrétní volba této množiny samozřejmě závisí na konkrétním fyzikálním problému. Už proto, že hamiltonián (operátor energie) je pro každou situaci jiný. Pak se může například stát, že jednou bude s operátorem \hat{P} komutovat, podruhé ne apod.

Úloha III. S ... *impulsmoment*

- a) Dokažte, že z komutační relace $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ plyne kompatibilitnost operátoru \hat{J}_z s operátorem \hat{J}^2 .
- b) Definujme posunovací operátory

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2.$$

Vypočítejte komutační relace $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$, $[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}]$, $[\hat{J}_{\pm}, \hat{J}^2]$.

- c) Na základě těchto vztahů dokažte, že vektory $\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle$ jsou vlastními stavy operátorů \hat{J}^2 a \hat{J}_z a platí pro ně

$$\hat{J}^2(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = j(j+1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle), \quad \hat{J}_z(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = (m \pm 1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle).$$

- d) (Bonus) Z předchozího vyplývá, že

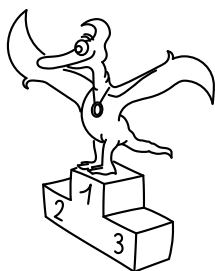
$$\hat{J}_+|j, m\rangle = \alpha^{(+)}(j, m)|j, m+1\rangle, \quad \hat{J}_-|j, m\rangle = \alpha^{(-)}(j, m)|j, m-1\rangle,$$

kde $\alpha^{(\pm)}(j, m)$ jsou koeficienty závislé na j a m . Určete je.

Rada: Užijte relace $(\hat{J}_{\pm})^{\dagger} = \hat{J}_{\mp}$ a toho, že pokud operátor působí napravo jako \hat{A} , tak nalevo působí jako hermitovsky sdružený \hat{A}^{\dagger} , tj.

$$\langle a | (\hat{A} | b \rangle) = (\langle a | \hat{A}^{\dagger} | b \rangle).$$

¹⁸⁾ Konkrétně u operátoru spinu se s tímto nesetkáme, protože nejvyšší spin částice, kterou známe je 1, resp. 2, pokud uvažujeme i gravitony. Ale třeba u orbitálního impulsmomentu žádné takové omezení není a báze by byla v tomto případě skutečně nekonečněrozměrná.



Pořadí řešitelů po I. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	5	8	4	31	100	31
1. Pavol Pšeno	G Ružomberok	–	4	3	3	5	7	4	26	96	26
2.–3. Jakub Benda	G Jana Nerudy, Praha	3	4	3	4	5	–	4	23	100	23
Tomáš Bzdušek	G Piešťany	4	4	3	4	4	–	4	23	100	23
4.–5. Martin Formánek	G Uherské Hradiště	1	4	2	3	3	4	4	21	68	21
Daniel Šimsa	G J. Jungmanna, Litoměřice	–	4	1	3	4	5	4	21	78	21
6. Lukáš Malina	G Ch. Dopplera, Praha	–	4	2	–	2	8	4	20	83	20
7.–10. Ondrej Bogár	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	4	1	4	3	–	4	16	84	16
Radim Pechal	SPŠE Rožnov p. R.	–	3	1	3	3	6	0	16	59	16
František Příbyl	G Milevsko	1	4	3	3	2	1	2	16	52	16
Kryštof Touška	G J. Vrchlického, Klatovy	–	4	3	3	2	4	–	16	70	16
11. Jan Jelínek	G Konstantinova Praha	2	4	2	3	1	–	3	15	65	15
12. Aleš Pilgr		–	4	3	–	3	–	–	10	83	10
13.–14. Michal Pavelka	G Strakonice	1	2	–	–	–	–	4	7	58	7
Tomáš Tintěra	G Ch. Dopplera, Praha	–	4	3	–	–	–	–	7	100	7
15. Jakub Hromádka	G Frýdlant nad Ostravicí	–	4	–	–	–	–	2	6	75	6
16.–17. Pavel Motloch	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	–	–	–	–	–	4	4	100	4
Matyáš Řehák	G Nymburk	–	1	2	–	–	–	1	4	36	4
18. Jaroslava Lavková	G Poprad	–	–	–	–	2	–	0	2	22	2

Kategorie třetích ročníků

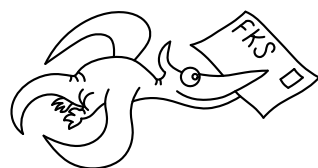
jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	5	8	4	31	100	31
1. Dalimil Mazáč	G Jana Keplera, Praha	3	4	3	3	3	6	4	26	84	26
2. Marek Nečada	G Jihlava	3	2	3	3	4	6	3	24	77	24
3. Jakub Michálek		4	4	2	3	–	6	4	23	88	23
4. Helena Svobodová	G Ch. Dopplera, Praha	–	4	2	3	2	8	3	22	81	22
5. Lukáš Ledvína	PČG Karlovy Vary	4	2	2	–	3	5	4	20	71	20
6. Jan Hermann	G Český Krumlov	2	4	3	3	2	–	4	18	78	18
7. Lucie Pospíšilová	G Matyáše Lercha, Brno	–	4	2	4	3	–	4	17	89	17
8. Jakub Marian	G Litoměřická Praha	0	4	3	3	1	–	1	12	52	12
9.–10. Iva Kocourková	G nám. TGM, Zlín	–	–	3	3	2	–	3	11	73	11
Zdeněk Vais	G Boskovice	2	–	–	1	–	8	–	11	73	11
11.–13. Juraj Hartman	Jiráskovo G Náchod	–	–	3	3	–	–	4	10	100	10
Petr Šedivý	G Dašická, Pardubice	1	1	2	3	2	–	1	10	43	10
Pavel Trudič	SPŠ Hronov	–	4	–	–	2	–	4	10	77	10
14. Pavel Motal	SPŠ a SOU Kuřim	1	0	1	3	–	–	0	5	28	5
15. Tomáš Talanda	G Tišnov	–	–	2	–	2	–	–	4	50	4

Kategorie druhých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	5	8	4	31	100	31
1. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	4	4	3	3	3	–	4	21	91	21
2. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	2	3	2	3	2	3	0	15	48	15
3. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	1	1	3	3	2	2	2	14	45	14
4.–5. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	–	4	1	3	3	–	–	11	73	11
<i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	1	1	1	3	2	3	0	11	35	11
6. <i>Radek Kříček</i>	G Děčín	2	1	3	–	2	–	1	9	45	9
7.–8. <i>Alžběta Pechová</i>		–	–	–	–	–	8	–	8	100	8
<i>Dana Suchomelová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	2	–	3	3	–	–	8	67	8
9.–11. <i>Katarína Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	–	4	2	–	–	6	75	6
<i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	1	–	3	2	–	–	6	50	6
<i>Dmytro Mishchuk</i>	SPŠ Hronov	0	1	1	3	1	0	–	6	22	6
12. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	1	1	–	–	2	–	1	5	29	5
13. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	–	–	–	–	–	–	2	2	50	2
14. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	–	–	1	–	–	–	–	1	33	1

Kategorie prvních ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	P	E	S	I	%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	4	4	3	3	5	8	4	31	100	31
1. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	2	3	3	4	4	7	–	23	85	23
2.–3. <i>Jana Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	–	–	1	4	2	6	–	13	68	13
<i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	1	2	1	3	1	2	3	13	42	13
4. <i>Simona Laňková</i>	G Havlíčkův Brod	1	0	1	3	–	–	0	5	28	5
5.–6. <i>Lumír Gago</i>	SPŠ Hronov	–	–	1	3	–	–	–	4	67	4
<i>Tomáš Kohlschütter</i>	SPŠ Hronov	–	0	1	3	–	–	–	4	40	4

**FYKOS**

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cze-mail: fykos@mff.cuni.cz

Anketa

Milí řešitelé, jsme velmi rádi, že jste jedni z nemnoha lidí, kteří se po přečtení úloh nad některou z nich zamysleli a poslali nám alespoň náznak řešení. Ne každý má trpělivost a chuť obětovat svůj čas řešení fyzikálních úloh. Avšak ne všichni přemýšliví studenti se o FYKOSu dozví, což je velká škoda. Proto bychom touto anketou rádi zjistili některá fakta, která nám napomůžou při propagaci FYKOSu a získávání dalších řešitelů. Otázky prosím zodpovězte podle nejlepšího svědomí!

- 1. Jak jste se dozvěděli o FYKOSu?*
- 2. Proč jste jej začali řešit?*
- 3. Odhadněte, kolik studentů na vaší škole by se mohlo stát řešiteli FYKOSu.*
- 4. V čem myslíte, že je FYKOS obtížný pro ostatní?*
- 5. Jak obtížné vám úlohy připadaly poprvé? A co teď?*
- 6. Ocenili byste jednodušší první úlohu?*
- 7. Navrhněte, jak upozornit ostatní studenty na FYKOS:*
- 8. Na závěr máte prostor na poznámky pro organizátory:*

Týden s aplikovanou fyzikou

Zároveň jsme pro vás připravili druhou anketu týkající se letošní novinky, Týdne s aplikovanou fyzikou (TSAF), jehož součástí bude tradiční akce Den s experimentální fyzikou v pondělí 2. dubna 2007. Na základě poslední ankety jsme se rozhodli vnést změnu – DSEF se bude sestávat ze tří společných exkurzí: návštěvy jaderného reaktoru VR01, laboratoře nízkých teplot a jaderné magnetické rezonance (NMR). Společně se též zúčastníte přednášky o NMR. Další tři exkurze si zvolíte sami z nabídky šesti různých exkurzí, lépe tak můžeme vyhovět vašemu zájmu a ti z vás, co se účastní DSEFu opakovaně, mohou navštívit nové exkurze. Jedná se o předběžný průzkum vašeho zájmu a nemůžeme garantovat, že se vybrané exkurze nakonec uskuteční. Pokud o DSEF nemáte zájem, napište nám proč a zbytek ankety nemusíte vyplňovat.

1. DSEFu se chci zúčastnit za každou cenu spíše ano ještě nevím děkuji, nemám zájem, protože _____

2. Exkurze

exkurze	v minulosti	účastí	zájem (A/N)	preference
STM (rastrovací tunelový mikroskop)	byla před 3 r.			
hvizdy (měření výbojů v atmosféře)	nebyla			
prach (zkoumání náboje)	byla před 3 r.			
kosmická fyzika (u děkana)	byla před 3 r.			
Van der Graafův urychlovač	byla před 3 r.			
Mössbauerova spektroskopie	nebyla			

Legenda:

- účastí – Kolikrát jste se podobné exkurze zúčastnili v předchozích letech?
- zájem – Ano/Ne, mám/nemám zájem (znovu) absolvovat.
- preference – Pořadí dle vašeho zájmu v množině nabízených exkurzí (1 – chci nejvíc, ...).

3. Vaše přání a náměty na exkurze (pouze v areálu MFF v Tróji).

4. Poznámky a vzkazy.

Soutěž o trička a ročenky FYKOSu

Odpovězte na následující otázku:

Kolik organizátorů FYKOSu přišlo na FYKOSí vánoční besídku?

Autory odpovědí, které se budou nejvíce blížit skutečnosti, odměníme.