

**19. ročník, úloha II.3 ... spektrální analýza (4 body; průměr 2,21; řešilo 48 studentů)**

Ve spektru jisté hvězdy byla pozorována emisní čára hélia, která má běžně vlnovou délku 587,563 nm. Nebylo však vinou použitého spektroskopu, že byla rozmazána přibližně v rozmezí 587,60 nm až 587,67 nm. Pokuste se odhadnout teplotu hvězdy a její rychlost v prostoru. Čím je rozmazání spektrální čáry způsobeno? Úloha z archivu, doformuloval Pavol Habuda.

Každá spektrální čára má nenulovou šířku. Tato nenulová šířka je způsobena spolupůsobením více faktorů. Nejdůležitější jsou:

- *Přirozená šířka čáry* – vzniká díky principu neurčitosti; hladiny, na kterých se nachází elektron, mají jakoby rozmazanou energii.
- *Instrumentální profil* – vzniká ve spektrografu, rozšíří i čáru o nulové tloušťce; podle zadání jej nebudeme dále uvažovat.
- *Teplotní rozšíření a rozšíření turbulencí* – obojí vzniká díky Dopplerovu jevu. Dají se od sebe odlišit podle toho, jak silně působí na částice o různých molekulových hmotnostech. Protože světlo k nám přichází z celé hvězdy a turbulence v atmosféře nejsou příliš silné, turbulencí zanedbáme. Naopak **teplotní rozšíření** budeme v dalším řešení uvažovat.
- *Rozšíření srážkami* – srážky deformují atomový obal, a tedy i energetické hladiny, na kterých se nachází elektrony. Díky tomu energetické rozmazání hladin způsobí, že fotony mají energie různé od energie nedeformované hladiny.
- *Rozšíření elektrickým (Starkův jev) a magnetickým polem (Zeemanův jev)* – elektromagnetické pole působí na elektricky nabitý elektron obíhající kolem atomu. To má za následek dodatečnou sílu působící na  $e^-$ , která způsobuje rozštěpení spektrálních čar. Různé atomy jsou různě citlivé na elektrické a magnetické pole. Protože většina hvězd nemá dostatečně silné pole na celém povrchu, které by čáru významně rozšiřovalo, nebudeme se jím dále zabývat.
- *Rozšíření rotací* – hvězdy rotují kolem své osy, často velice rychle. Protože část povrchu hvězdy se pohybuje směrem k nám a část od nás, spektrální čára se tímto díky Dopplerovu jevu rozšiřuje.

U různých čar se uplatňují jednotlivé faktory různě. To, co způsobilo rozšíření spektrální čáry, zjistíme podrobným průzkumem celého spektra. To my nemáme k dispozici, omezme se proto na to, co víme. Předpokládejme, že čára hélia je ve spektru výrazná – to znamená, že patří horké hvězdě s povrchovou teplotou 30 000 K a víc. Dále nic nevíme o rotaci hvězdy, předpokládejme, že se díváme na hvězdu směrem od pólu, a tedy žádnou rotaci pozorovat nebudeme<sup>1</sup>. Zbývá nám tedy pouze rozšíření způsobené tepelným pohybem molekul.

Podle zadání je čára široká 0,07 nm. Polovina atomů se pohybuje od pozorovatele, polovina k němu<sup>2</sup>. Polovina šířky čáry (nebo také 1/2 FWHM – full width at half maximum – šířka čáry v polovině největší intenzity) je 0,035 nm. Z Dopplerova jevu pak dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = 18 \text{ km/s.}$$

<sup>1</sup> Článek o tom, jak rychle rotují hvězdy, můžete najít na <http://www.astro.cz/clanek/987>. Velice horké hvězdy podle něj rotují velice rychle, až na hranici své stability. Jelikož jsou horké hvězdy i hmotné, dosahuje obvodová rychlost hvězdy až 300 km/s.

<sup>2</sup> Rozšíření spektrální čáry vlivem teploty vzniká z Maxwellova rozdělení rychlostí

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[ - \left( \frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \frac{dv}{v},$$

Podle ekvipartičního teorému<sup>3</sup> platí

$$E = \frac{1}{2} m_{\text{He}} v^2 = \frac{1}{2} kT. \quad (1)$$

Každý atom má pouze jeden stupeň volnosti, protože k Dopplerovu jevu přispívá pouze pohyb ve směru k pozorovateli. Pohyb kolmo k pozorovateli pozorovatelný Dopplerův jev nevyvolá.

Tento vztah se dá odvodit i následovně. Rychlost libovolné molekuly lze rozložit na složky tak, že  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Žádný směr rychlosti není preferován, platí tedy, že  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ , kde  $\langle v_x^2 \rangle$  je střední hodnota  $v_x^2$ . Rovněž platí, že  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ . Pak ale musí platit

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_x^2 \rangle.$$

Jestliže platí  $\frac{1}{2} m_{\text{He}} v^2 = \frac{3}{2} kT$ , rovněž musí platit

$$E = \frac{1}{2} m_{\text{He}} v_z^2 = \frac{1}{2} kT,$$

což je rovnice identická s (1), protože  $v_z$  je námi pozorovanou rychlostí, kterou změříme spektroskopem. Rychlosti  $v_x$  a  $v_y$  nepřispívají k Dopplerovu jevu.

Po dosazení zjistíme povrchovou teplotu hvězdy 160 000 K. To je trochu víc, než jsme očekávali, rozdíl je způsoben např. nepřesným modelem nebo tím, že úloha nevychází z naměřených dat. Nebo také tím, že jsme skutečně pozorovali spektrum výjimečně horké hvězdy. Která možnost je správná, bychom zjistili analýzou tvaru spektrální čáry.

Střed heliové čáry 587,563 nm je posunut o 0,072 nm, to znamená, že hvězda se vůči pozorovateli pohybuje. Protože čára je posunuta k červenému konci spektra, hvězda se od nás vzdaluje. Opět podle Dopplerova zákona vypočítáme rychlost vzdalování.

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 37 \text{ km/s}.$$

Tato rychlost nám udává pouze to, jak rychle se od nás hvězda vzdaluje, ale ne její rychlost tangenciální. Přesněji, jak rychle se vzdaluje od Země, ne od Slunce. Země, jak víme, obíhá kolem

kde  $v_0$  je nejpravděpodobnější rychlost. Z této rovnice pak integrací dostaneme přesnější výsledek, než jsme odvodili za jednodušších podmínek

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2RT}{M_m}},$$

což je poloviční výsledek, než jsme dostali za zjednodušených podmínek. Neberte to ale tak, že jednodušší řešení je špatně. V praxi často řešíme problémy jednodušeji, než bychom – buď proto, že úplné řešení neznáme, z principu nejde vypočítat nebo by to bylo zbytečně zdouhavé. O výsledku pak víme, že je přibližný, že se na něj nemůžeme plně spolehnout.

<sup>3)</sup> Ekvipartiční teorém říká, že na každý stupeň volnosti připadá stejné množství energie. Dalším stupněm volnosti se rozumí, že částici musíme popsat další souřadnicí, abychom přesně věděli, jaká je její poloha. Atom má tři stupně volnosti (pohyb v osách  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Kdybychom žili pouze v dvourozměrném prostoru, měl by atom pouze dva stupně volnosti, jelikož by se mohl pohybovat pouze ve směrech  $x$  a  $y$ . Jestliže se chcete o stupních volnosti dozvědět více, informace najdete v každé lepší knížce o termodynamice.

Slunce rychlostí 30 km/s. Proto bez znalosti souřadnic hvězdy a okamžiku, kdy jsme spektrum pořídili, nemůžeme zjistit rychlost v prostoru. Tangenciální rychlost pomocí spektroskopie nemůžeme vůbec zjistit, musíme ji určovat pomocí změny její polohy na obloze za dlouhé časové období. Nejrychlejší hvězdy se vůči pozadí pohnou i o několik obloukových sekund za rok.

#### *Komentáře k řešení*

Jestliže někomu vyjde rychlost  $3 \cdot 10^{20}$  m/s, což je  $10^{12}$ -krát více než rychlost světla, zřejmě něco není v pořádku. Prosím, čtěte po sobě to, co napíšete. Je to vaše vizitka.

Dvojhvězda spektrální čáru rozštěpí, ale nerozšíří. U málo disperzního (slabého) spektrografu může dojít k rozšíření čáry vlivem oběhu obou složek kolem společného těžiště, ale rozšíření je na hranici přesnosti měření.

Červený posun, který by způsobilo gravitační pole hvězdy, je zanedbatelný.

Hélium v atmosféře nepochází z jaderných reakcí ve vnitru hvězdy. Zhruba 20 % atmosféry je tvořeno héliem vzniklým při Velkém třesku.

Na závěr – jestliže jste pochopili, jak se střeďují veličiny, můžete se pokusit vypočítat koeficient pro rotaci hvězdy. Jestliže jste dobře počítali, vyjde vám  $1/3$ .

*Pavol Habuda*

[bzucco@fykos.mff.cuni.cz](mailto:bzucco@fykos.mff.cuni.cz)