

19. ročník, úloha I. E ... tvrdost kuliček (8 bodů; průměr 4,79; řešilo 56 studentů)

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky před odrazem a po něm).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepřeskočí bariéru a odstraní se.

Námět na úlohu našla Lenka Zdeborová v Rozhledech z roku 1965–66.

Padalo a létalo téměř všechno kulaté: ložiskové kuličky, ping-pongové, tenisové, dokonce i golfové míčky či případně také ty míčky, co skáčou velmi vysoko („hopíky“). Samozřejmě i chudák pejsánek se musel dívat, jak skáče jeho míček. Někteří házeli kuličku z myšky (té počítáčové).

Nejprve si uvědomíme, co jste měli změřit. V zadání bylo napsané, že máte určit koeficient odrazivosti kuličky a že je to poměr energie před odrazem a po něm. Tento název není příliš vhodný, je to spíš koeficient tlumení, protože čím vyšší má hodnotu, tím méně se kulička odrazí. Jeho převrácená hodnota udává potom koeficient odrazivosti. V zadání stálo: „Hodte kuličku a změřte, do jaké výšky se odrazí“. A proč takto? Protože víme, že energie se zachovává! Proto kinetická část energie odpovídající rychlosti kuličky po odrazu se přemění na potenciální energii v maximální výšce odskoku. Na kuličku působí ještě vzduch, ale budeme předpokládat, že ztráty energie třením jsou nepodstatné (aspoň pro naše účely).

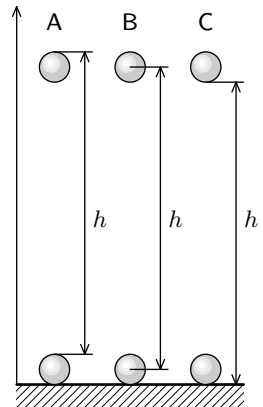
Zůstává problém určit rychlost kuličky těsně před dopadem. Jen tak hodit kuličku asi nemá smysl, ale stačí ji pustit z nějaké výšky. Potom stejně tvrdíme, že energie se zachovává, a tak energie před dopadem se rovná potenciální energii ve výšce, ze které jsme kuličku pustili. No a zjišťujeme, že stačí měřit maximální výšku po odrazu a výšku upuštění. Kdo nevěří, nechť si napíše vzorce pro koeficient odrazivosti

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (1)$$

A nyní bylo třeba trochu uvažovat. Co jsou přesně ty výšky? Musíme brát rozdíl výšek mezi polohami těžiště (anebo jiného bodu kuličky na její svislé ose). Položme si například nulovou výšku tak jako na obrázku 1A nebo to učiníme podle jedné ze zbylých dvou variant. Při malých rozměrech kuličky to můžeme ale vcelku úspěšně zanedbat a měřit jakoukoli výšku. Jenže jak měřit tyto výšky?

Najdeme si nějakou svislou stěnu a připevníme na ni metr a jen tak pozorujeme. Je to dost nepřesné, chyba je odhadem ± 1 cm, protože určit „od oka“, kdy a kde dosáhla kulička maximální výšky, asi bude problém. Případně použijeme nějaké ty technické vymoženosti, například kameru nebo fotoaparát s nastavitelnou dobou expozice (délka musí odpovídat době pádu). Tak budeme mít zaznamenaný pád kuličky po celý čas. Ale i tu vznikají nějaké chyby.

Existují však i jiné metody. Rozebereme trochu ty, které jste použili. V první řadě se často objevoval nápad jednoduše poslouchat, kdy kulička dopadne. A z času dopadu vypočítat, jakou rychlost má kulička při dopadu a odrazu. Ono stačí využít předpoklad, že kulička zrychluje rovnoměrně. Nejlepší je opět použít nějakou techniku. Z časů t_1 a t_2 dvou po sobě následujících



Obr. 1

dopadů určíme rychlost dopadu $v = \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)$. Tedy

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{(t_3 - t_2)^2}{(t_2 - t_1)^2}. \quad (2)$$

Přesnost měření času je se správnou technikou velmi vysoká, avšak je nutné provést více měření a na závěr odhadnout, jak velký vliv může mít odpor vzduchu na měření, a udat nepřesnost způsobenou technikou. Tolik k této metodě.

Další metoda je technicky náročná, ale realizovatelná. Inspirace pochází z měření *Radima Pechala*. Měření budeme provádět v trubici nejlépe natřené na černo. Těsně nad místem dopadu kuličky nainstalujeme optický člen, skládající se ze dvou LED-diod umístěných blízko sebe, a pustíme kuličku. Ta při svém pohybu proletí skrz optočlen, který zaznamená oba časy průchodu. Následně se odrazí a máme to samé po odraze. Je zřejmé, že vyhodnocovat budeme muset pomocí počítače, protože LED-diody jsme umístili blízko sebe. O pohybu kuličky mezi diodami předpokládáme, že je rovnoměrně zrychlený s konstantním tíhovým zrychlením. Takto dostaneme jak rychlost odrazu, tak rychlost dopadu. Koefficient odrazivosti vypočítáme podle (2). Přičemž optočlen umístujeme k podložce co nejblíže, abychom mohli zanedbat nulovou potenciální energii v této výšce.

Nyní si povíme, jak vyhodnocovat měření. Protože jste každý měřil svoji vlastní kuličku, nemá význam uvádět tu něco jako vzorové hodnoty. První metodou jsme naměřili hodnoty pro nezávislá měření v následující tabulce. Chyba měření h_1 je $\Delta h_1 = 0,5$ cm, chyba měření h_2 je $\Delta h_2 = 1$ cm.

h_1 [cm]	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
h_2 [cm]	42	45	46	48	45	43	41	42	43	46	45
p	0,53	0,56	0,58	0,60	0,56	0,54	0,51	0,53	0,54	0,58	0,56
Δp	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Jak jsme vypočítali jednotlivé hodnoty? Údaje v prvních dvou řádcích tabulky jsou naměřené hodnoty, p jsme vypočítali podle vztahu (1), Δp je chyba měření p , jedná se o takzvanou střední chybu. O té si něco povíme.

Hodnotu koeficientu p neměříme přímo (narozdíl od délky, kdy používáme nějaký etalón v podobě pravítka) ale pomocí nějaké funkční závislosti $f(a, b, \dots)$, která závisí na veličinách a, b, \dots . Chyby jejich měření označíme pomocí symbolu Δ . Potom pro střední chybu platí vztah¹

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot (\Delta b)^2 + \dots}$$

V tomto vztahu parciálně derivujeme, což znamená, že při derivování podle jedné z proměnných ostatní proměnné představují konstanty. V našem případě je $p = f(h_1, h_2) = h_2/h_1$.

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1^2}\right)^2 \cdot (\Delta h_1)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 \cdot (\Delta h_2)^2} = p \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta h_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_2}{h_2}\right)^2}.$$

¹⁾ viz např. Bohumil Vybíral: *Zpracování dat fyzikálních měření*. MaFy, Hradec Králové 2002. Ke stažení na stránkách Fyzikální olympiády <http://fo.cuni.cz>.

Dále z naměřených hodnot vypočítáme průměr a směrodatnou odchylku; celkovou chybu měření vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů směrodatné odchylky a průměru jednotlivých chyb měření. Tak se dostaneme k výsledku

$$p = 0,55 \pm 0,02.$$

Uvědomte si, že měření bez jakéhokoliv udání chyby je nesmyslné, protože nikdy neměříte nic přesně. Proto je třeba chyby alespoň nějak odhadnout. Na konci tohoto řešení najdete krátký text, který o chybách měření pojednává.

Na konec je ještě dobré diskutovat systematické chyby. Kulička měla nějakou rotaci při dopadu, a tak jsme neměřili odrazivost, protože část rotační energie se přeměnila na kinetickou energii (resp. naopak). To závisí na směru rotace při dopadu, který nikdy nebude dokonale kolmý na podložku. A pro jednotlivé metody je třeba uvážit tyto chyby:

- 1. metoda** – nesvislost měřidla, počáteční rychlost ve směru kolmém na podložku,
- 2. metoda** – odečtení času, kdy přesně kulička dopadne; předpoklad, že se kulička pohybuje celou dobu rovnoměrně zrychleně, avšak jistou dobu trvá odraz,
- 3. metoda** – zanedbání potenciální energie ve výšce přechodu kuličky přes optický člen.

A téměř na závěr několik obecných rad:

- Při psaní myslíte na to, že píšete pro někoho, kdo vaše měření určitě neviděl.
- Chybu měření výsledku alespoň odhadněte.
- Chybu výsledku zaokrouhlujte na jednu nebo dvě platné cifry, na stejný řád zaokrouhlete i hodnotu výsledku.
- Napište základní myšlenku, jak jste postupovali a jaké teoretické vztahy jste používali.
- Pište, na základě čeho jste chyby určili a jak jste je počítali.
- Popřemýšlejte nad možnostmi zpřesnění měření.
- Grafy prokládejte co nejhladší křivkou (někdy to neplatí).
- V tabulkách udávejte jednotky.

Ještě prozradím, jak jsem bodoval. Za ideu experimentu jsem dával dva body, za měření dva body (to zahrnuje například popis toho, jak a čím jste měřili, a možná vylepšení), za aspoň odhadnuté chyby měření dva body, za promyšlení různých vlivů na měření další dva body a snažil jsem se rozdat i nějaké ty bonusy za práci navíc.

Pochvala patří všem, kteří si úlohu udělali trošku těžší a nedrželi se návodu v zadání a vymysleli vlastní metody.

Peter Zalom
peter@fykos.mff.cuni.cz