

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV

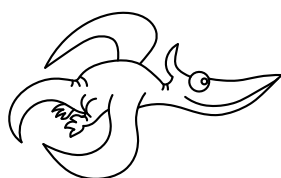
Fyzikální korespondenční seminář

XIX. ročník – 2005/06



matfyzpress

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	13
Zadání experimentálních úloh	69
Řešení experimentálních úloh	71
Seriál o statistické fyzice	90
1. Pravděpodobnost	91
2. Základní pojmy statistické fyziky	93
3. Příklady, aplikace statistické fyziky	98
4. Mnohočástečkové systémy	111
5. Magnetismus pevných látek	116
Řešení úloh ze seriálu	123
Akce FYKOSu	145
Podzimní soustředění	145
Jarní soustředění	159
Den s experimentální fyzikou	160
Výjezdní soustředění s exkurzí do CERNu	161
Pořadí nejlepších řešitelů	168



Předmluva

Milý čtenáři,

v rukou držíš ročenku XIX. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře (FYKOSu) MFF UK, který proběhl ve školním roce 2005/06.

FYKOS je nejstarší a největší fyzikální korespondenční soutěž pro střední školy u nás. Seminář organizují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snažíme se vyhledávat studenty se zájmem o přírodní vědy, techniku a hlavně o fyziku. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože člověk, který se umí nad (nejen fyzikálními) problémy zamyslet a cítí touhu se dobrat k nějakému řešení, se uplatní všude, kde si schopností lidského mozku cení.

V průběhu roku řešitelé pravidelně obdrží zadání sedmi úloh, z nichž je jedna experimentální. Zadávané úlohy nejsou vůbec podobně těm, které se počítají ve škole v hodinách fyziky. Řešiteli nestačí dosadit zadané hodnoty do známého vzorce, úlohu musí vyřešit vlastním důvtipem, někdy musí hledat analogie či teorii v literatuře. Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (někteří i všechny) a svá řešení posílají běžnou poštou či elektronicky organizátorům semináře. Ti úlohy opraví, okomentují, obodují a zašlou zpět účastníkům. Vzorová řešení také zveřejňujeme na našich webových stránkách. V komentářích se takto řešitelé seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Na základě bodování je sestavována průběžná výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Řešitelům během roku spolu se zadáním posíláme několikastránkový text (tzv. seriál na pokračování) z vybrané partie vysokoškolské fyziky (letos to byla statistická fyzika), kterou se jim snažíme co nejlépe přiblížit. S tímto textem se řešitelé v průběhu roku seznamují, pochopení textu si ověřují na příkladech. Každé zadání doprovází jedna úloha, která se tematicky váže k seriálu.

Kromě zasílání zadání a řešení pořádá seminář řadu dalších akcí. Zejména to jsou dvě týdenní soustředění, bez kterých si FYKOS snad nelze ani představit. Probíhají vždy na jaře a na podzim, zúčastní se jich asi 30 nejlepších řešitelů. Na soustředění organizujeme přednášky z mnoha oborů fyziky a matematiky. Odpoledne účastníci experimentují – seznamují se s připravenými fyzikálními experimenty, měří a zpracovávají výsledky. Jako odpočinek slouží týmové fyzické hry v přírodě.

Letošní ročník byl výjimečný tím, že se nám podařilo zorganizovat výjezdní soustředění do Německa a Švýcarska s exkurzí do CERNu – evropského centra pro částicovou fyziku. Tohoto soustředění se zúčastnilo 30 řešitelů vybraných podle získaných bodů. Nelžeme, když řekneme, že všichni byli velice nadšeni, že se mohli podívat, jak vypadá spolupráce fyziků na celosvětové úrovni.

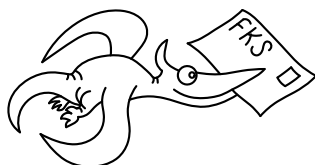
Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF UK, Akademií věd ČR a Ústavem jaderného výzkumu umožňujeme našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá opravdová fyzika.

Na našich www stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé semináře sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých

ročníků zde naleznete průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a reportáže ze soustředění, diskusní fórum, podrobné informace a pravidla pro připojení se k semináři a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání a řešení teoretických i experimentálních úloh. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím apelovat na každého čtenáře, aby před nalistováním stránky s řešením strávil alespoň chvíli nad zadáním a rozmyslel si, jak by danou úlohu řešil on. Další částí je Seriál o statistické fyzice, který je doplněn úlohami. Na konci se nachází krátké povídání o soustředěních, exkurzi do CERNu a seznam nejlepších řešitelů tohoto ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na e-mailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 504 (Mgr. Pavel Krtouš, Ph.D.)

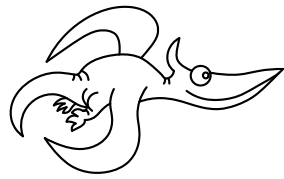
www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Na závěr předmluvy trocha statistiky – XIX. ročníku FYKOSu se zúčastnilo 113 řešitelů z 65 středních a základních škol. Přehled nejúspěšnějších škol uvádíme níže.

Pořadí škol

Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Jana Keplera, Praha	2	118,5	237
Masarykovo G, Vsetín	3	78,3	235
G Ľudovíta Štúra, Trenčín	7	32,7	229
G Lesní čtvrť, Zlín	3	74,7	224
G Terezy Novákové, Brno	3	68,7	206
G P. Bezruče, Frýdek-Místek	7	28,6	200
G Ch. Dopplera, Praha	5	36,2	181
G Jana Nerudy, Praha	1	141	141
G Boskovice	3	47	141
SPŠ Hronov	11	12,5	137
G J. Jungmanna, Litoměřice	2	66,5	133
PČG Karlovy Vary	1	107	107
G Uherské Hradiště	1	103	103
G Konstantinova, Praha	2	51,5	103
G Ružomberok	1	90	90
G J. Vrchlického, Klatovy	2	42,5	85



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... opravdu Saturn plave?

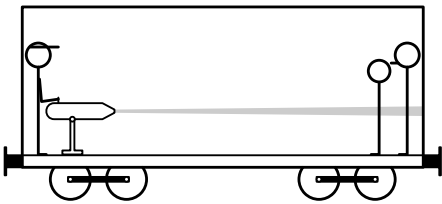
Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtete ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti.

(řešení str. 13)

Úloha I.2 ... Baník, slečno

Fanoušci Baníku jeli do Prahy na Spartu. Policisté však byli po špatných zkušenostech připraveni a do vagónu nainstalovali vodní dělo.



Obr. 1

Na půli cesty, když vlak zrovna stál v České Třebové, baníkovci začali demolovat vybavení vagónu (jenž váží 30 t). Policisté nechali dotyčný vagón odpojit a briskně využili své zbraně. Za minutu na fanoušky vystříkali tisícilitrovou nádrž. O jakou vzdálenost proto popojel vagón dlouhý 30 m?

Předpokládejte, že vagón je odbrzděný a že voda z vagónu může vytékat pouze ve svislém směru. Změnu hmotnosti vagónu způsobenou odtokem vody můžete zanedbat.

(řešení str. 15)

Úloha I.3 ... Armagedon

Poplach! Rudá světla indikují smrtelnou hrozbu. Směrem k Zemi se řítí meteoroid o známém průřezu S a tepelné kapacitě c . Určete, o kolik se zvýší jeho teplota během průletu atmosférou.

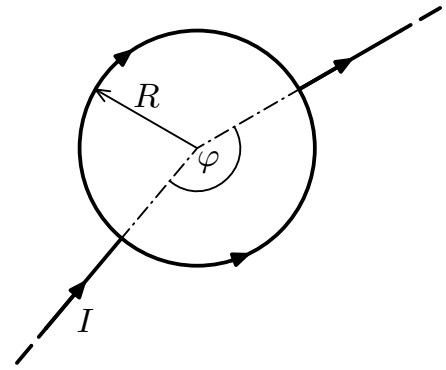
Předpokládejte, že se jeho rychlost stačí před dopadem ustálit a že se zahřívá rovnoměrně. Sami odhadněte, jaká část energie se spotřebuje na ohřátí vzduchu v atmosféře. Zamyslete se, jak je tento model realistický. Nakonec rozhodněte, zda bude mít meteoroid vyšší či nižší teplotu, pokud namísto vzduchem poletí vakuem, jež má nulovou tepelnou kapacitu.

(řešení str. 16)

Úloha I.4 ... hodte si smyčku

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 2). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R , úhel mezi radiálními přivodními dráty φ a proud v drátu I .

(řešení str. 23)



Obr. 2

Úloha I.P ... příliv na Bali

Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h 50 min). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy?

(řešení str. 24)

Úloha II.1 ... propiska na šňůrce

Ve stojící tramvaji visí u svislé desky na niti délky l propiska o hmotnosti m . Tramvaj se rozjede se zrychlením a , které můžeme považovat za konstantní. Vypočítejte, kam až toto kyvadlo vykýváne (jaký maximální úhel bude nit svírat s deskou) a kdy tužka opět ťukne do desky.

(řešení str. 28)

Úloha II.2 ... funicí lokomotiva

Lokomotiva s osmi vagóny se rozjíždí na dráze 1 km na rychlost 120 km/h. Jaká musí být minimální hmotnost lokomotivy tohoto vlaku, aby se vlak rozjel bez prokluzování kol na kolejnici, pokud hmotnost každého vagónu je 40 t?

Počítejte se součinitelem klidového tření $f = 0,2$. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.

(řešení str. 29)

Úloha II.3 ... spektrální analýza

Ve spektru jisté hvězdy byla pozorována emisní čára hélia, která má běžně vlnovou délku 587,563 nm. Nebylo však vinou použitého spektroskopu, že byla rozmazána přibližně v rozmezí 587,60 nm až 587,67 nm. Pokuste se odhadnout teplotu hvězdy a její rychlost v prostoru. Čím je rozmazání spektrální čáry způsobeno?

(řešení str. 30)

Úloha II.4 ... tepelná vodivost kovu

Odvoďte, jakým způsobem závisí tepelná vodivost kovu na teplotě, pokud znáte závislost jeho elektrické vodivosti na teplotě.

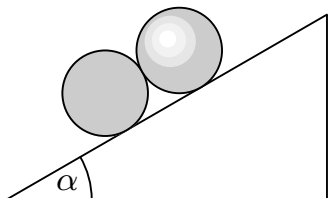
Pro vodivostní elektrony můžete použít model ideálního plynu, tj. elektrony se pohybují volně (přítomnost iontových zbytků vůbec neuvažujeme) a přímočaře až na občasné srážky s jinými elektrony, které změni směr i velikost jejich rychlosti.

Teplo přenesené krystalovou mřížkou kovu je zanedbatelné oproti teplu přenesenému vodivostními elektrony. Každý elektron má tepelnou kapacitu c , která nezávisí na teplotě.

(řešení str. 32)

Úloha II. P ... dechové nástroje

Pokuste se vysvětlit, proč je možné příčnou flétnu „přefouknout“ o oktávu výše (tj. zahrát stejným hmatem i tón s dvojnásobnou frekvencí), zatímco u klarinetu toho dosáhnout nelze. (řešení str. 36)



Obr. 3

Úloha III. 1 ... dotyk koule a válce

Koule a válec o stejném poloměru a stejné hmotnosti jsou vyrobené z různých materiálů a leží na nakloněné rovině tak, že se vzájemně dotýkají. Určete, za jakých podmínek zůstanou ležet v klidu. (řešení str. 38)

Úloha III. 2 ... nájezd na čočku

Mějme spojku o ohniskové vzdálenosti f . Zdroj světla je na ose ve vzdálenosti $a > f$ od čočky, za kterou vzniká jeho obraz. Zdrojem začneme pohybovat určitou rychlostí směrem k čočce. Určete, jak rychle se pohybuje obraz. Rozhodněte, zda tato rychlost může být i nadsvětelná. Bylo by to v rozporu s principy speciální teorie relativity? (řešení str. 39)

Úloha III. 3 ... odložená koupel

Robin se rozhodl, že se po půl roce vykoupe. Napustil si vanu teplou vodou o teplotě T_1 a objemu V_1 . Ke koupání ale zase nedošlo. Napadlo ho, že je to zbytečné plýtvání energií, teplo z vany totiž lze použít i lépe.

Robin je šikovný a umí si vyrobit libovolný tepelný stroj, proto si už dávno chtěl izotermicky stlačit plyn o teplotě T , objemu V_0 a hustotě ρ . A tady k tomu dostal ideální příležitost. Jako chladič použil okolní vzduch, jehož množství je nevyčerpátné a jehož teplota je T_2 . Určete, na jaký minimální objem V_{\min} lze tento plyn stlačit, použije-li k tomu Robin teplou vodu ve vaně a svůj tepelný stroj.

(řešení str. 40)

Úloha III. 4 ... stoupavý proud

Letadlo letí vodorovně rychlostí o velikosti v a najednou vletne do stoupavého proudu o rychlosti velikosti v' . Jaké bude počáteční vertikální zrychlení letadla těsně po nalétnutí do stoupavého proudu?

Předpokládejte, že součinitel vztlaku C (koeficient v Newtonově vzorci pro vztlak) závisí lineárně na úhlu, který svírá směr proudění vzduchu s rovinou křídla.

(řešení str. 42)

Úloha III. P ... udýchaný běžec na ledě

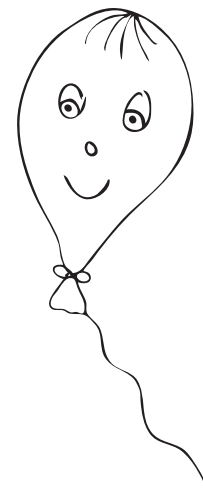
Jedno pozdní zimní odpoledne se šel Matouš proběhnout na zamrzlý broumovský rybník. Matouš chvilku běžel, ale po pár metrech už nemohl a zastavil se. V zápětí se však pod ním led prolomil a Matouš zahučel pod vodu. Vysvětlete, proč se při běhu pod Matoušem led neprolomil a po zastavení ano? (řešení str. 43)

Úloha IV.1 ... turnaj Balónků

Kdesi v dalekém vesmíru za 1001 hvězdami a jednou černou dírou byla nebyla planeta Balónků. Tyto inteligentní duté bytosti každý rok pořádají soutěž „Čím výš, tím líp“.

Každý z Balónků si přiváže provázek, aby bylo možné určit jeho výšku. Aby se mohli Balónci účastnit soutěže, musí mít všichni stejné parametry. Kupodivu nikdo zatím nikdy nevyhrál. Délková hustota provázku je 11 luftíků na špurgl, hustota atmosféry je 110101 luftíků na krychlový špurgl, poloměr každého z Balónků je 10 špurglů, hmotnost Balónka je 10 luftíků. Při pádu tělesa v tíhovém poli na planetě Balónků se za každý temp jeho rychlost zvýší o 111 špurglů za temp. Určete, jakou maximální výšku Balónka hlavní rozhodčí soutěže naměří a jak se bude Balónek pohybovat po dosažení této výšky. Nezvednutá část provázku každého Balónka leží volně na zemi. Závody Balónků probíhají v malých výškách, kde je hustota atmosféry přibližně konstantní.

Nápověda: Každý Balónek má maximálně jeden provázek.



(řešení str. 45)

Úloha IV.2 ... výprava na planetu Balónků

NASA chystá velkou výpravu na planetu Balónků za účelem navázání komunikace s tamními inteligentními dutými bytostmi. Špiónům se podařilo zjistit od místních informátorů následující údaje: atmosféra je složena z plynu o muškové hmotnosti 10001 luftíků na mušku, počet molekul atmosféry v jedné mušce je 10^{1101} , tloušťka atmosféry je 10^{10001} špurglů a srovnáním teploměrů obou civilizací špióni určili, že jednomu pozemskému kelvinu odpovídá sedm luftíků krát špurgl čtvereční na temp čtvereční.

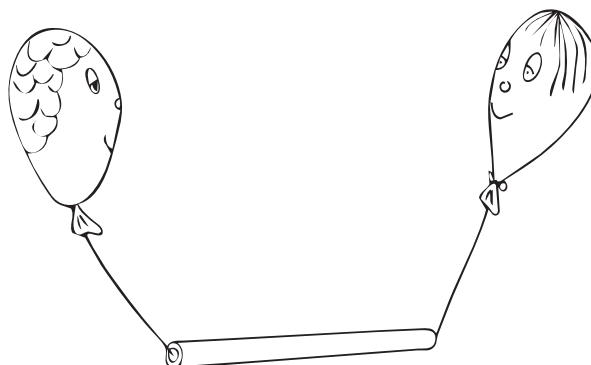
Určete teplotu na povrchu planety a rozhodněte, zda by si měli kosmonauti vzít spíše tričko či kožich. Při řešení se vám můžou hodit i údaje z již zmíněné soutěže.

(řešení str. 48)

Úloha IV.3 ... Balónci na kolotoči

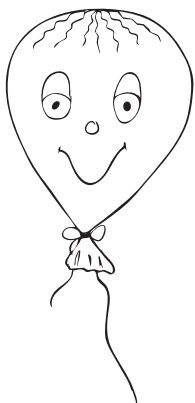
V hlavním městě planety Balónků Medicinbaldorfu se jednou za debrecinský megatemp koná pouť. Hlavní atrakcí je speciální balónkový kolotoč, který se Funík s Pískalem rozhodli navštívit.

Dutou tyčí délky L je provlečen provázek délky $l > L$. Na jeden konec provázku se přivázal Funík, na druhý konec Pískal. Oba kamarádi by měli vážit stejně, Funík ale ke snídani snědl kousek rozemleté traverzy a je o trochu těžší. Poté se tyč začne točit kolem svislé osy na ni kolmé. Určete polohu osy tak, aby vodorovná vzdálenost mezi Balónky byla co největší. (řešení str. 49)



Úloha IV.4 ... svatba Balónka a Balónky

... a už zní svatební síní slavnostní pískot a fukot. Ano, je to tak, Pískal s Foukalkou si dnes řeknou své písk. A už je tu první novomanželský polibek, při němž se spojí svými otvory. Poté kněz slavnostně rozváže provázky a dojde k propojení. Popište, co bude následovat. Nezapomeňte, že všichni svobodní Balónci mají stejné parametry. (řešení str. 51)

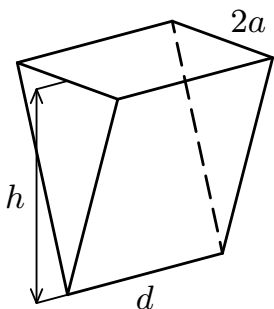
Úloha IV.P ... Balónek uprchlík

Na planetě Balónků došlo k revoluci a k moci se dostali fundamentalisté, kteří zakázali jíst traverzy se šlehačkou. Jelikož šlo o Funíkovo oblíbené jídlo, nezbylo mu nic jiného než odejít do dobrovolné emigrace.

Při přiletu na Zemi byl Funík zavřen do karantény a byl mu změřen objem V a teplota T . Imigrační úřad však rozhodl, že nedostane azyl, pokud nezmění svůj objem na V' a teplotu na T' . Funík nemůže v karanténě přijímat ani odevzdávat žádné teplo, měnit počet částic, ze kterých je složen, i na traverzy se šlehačkou si prozatím musí nechat zajít chuť. Poradte Funíkovi, jak to má udělat, aby mohl na Zemi prožít šťastný a spokojený život. (řešení str. 53)

Úloha V.1 ... veď svou bárku dál

Pracovníci NASA objevili, že určité sedimenty rostlinného původu na planetě Balónků mají zajímavou štěpnost na velice pevné desky tvaru obdélníku a rovnoramenného trojúhelníku, takže z nich lze snadno a levně postavit loď výšky h , délky d a šířky paluby $2a$ jako na obrázku 4. Kapitán vám dává za úkol zjistit, pro jaké hustoty tamějších oceánských vod bude plavba bezpečná.



Obr. 4

Předpokládejte, že desky mají konstantní tloušťku a hustotu ρ_m , že loď je dutá a má palubu. (Diskutujte případ, že plavidlo není duté a celé má konstantní hustotu ρ_m .) Nemusíte kapitánovi předložit jedinou výslednou relaci, spíše prakticky užitečný návod na propočty s uvedením všech potřebných vztahů; snažte se je napsat přehledně a úsporně a odůvodněte užití případné vhodné aproximace. (řešení str. 54)

Úloha V.2 ... Pet u okna

U okna ve vytopeném pokojíku stojí uzavřená prázdná PET láhev. Za oknem mrzne, až praští. Ráno maminka otevřela okno, aby místnost důkladně vyvětrala, jenže při vaření oběda na to zcela zapomněla, a v pokojíku tak klesla teplota pod bod mrazu. Určete relativní změnu objemu láhve, která stojí na okně.

(řešení str. 56)

Úloha V.3 ... účinnost elektrárny

Vypočítejte účinnost stroje, který pracuje mezi dvěma tepelnými lázněmi o teplotách T_1 a T_2 , $T_1 > T_2$ a který dosahuje maximálního možného výkonu. Do výsledného vztahu potom dosadte data některé známé elektrárny.

Uvědomte si, že Carnotův stroj má nulový výkon, protože při izotermickém ději je rozdíl teplot mezi strojem a lázní nekonečně malý, což způsobí nekonečně malý tepelný tok a nekonečně malý výkon stroje. (řešení str. 57)

Úloha V.4 ... přírodní reaktor

Ve vzorku přirozeného uranu je 0,72 % izotopu ^{235}U s poločasem rozpadu 704 milionů let a zbytek izotopu ^{238}U , který má poločas rozpadu 4 468 milionů let.

V sedmdesátých letech minulého století byla při těžbě uranu v oblasti Okla v rovníkovém Gabonu objevena ruda s relativním zastoupením izotopu ^{235}U 0,44 %. Tento nesoulad lze vysvětlit tím, že se v ložisku kdysi samovolně zažehl přírodní jaderný reaktor.

Určete, po jakou dobu jaderná reakce probíhala, bylo-li štěpení ^{235}U vyvoláno pomalými neutrony. Ke srážce nějakého pomalého neutronu s daným jádrem dojde průměrně jednou za 352 tisíc let. (řešení str. 59)

Úloha V.P ... o ztracené studně

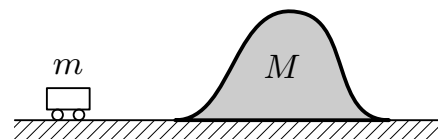
Babička a dědeček obývají už léta svoji starou chalupu, kde mají vlastní studnu se znamenitou vodou. Jednoho dne přestala pumpa jejich vodu čerpat, pravděpodobně se poškodil koš ve studni. Tato drobná závada se však ukázala jako velký problém, neb oni sami ani jejich předkové nevěděli, kde byla studna kdysi vykopána.

Od čerpadla, které je uvnitř chalupy, vede jedenapůlpalcová trubka asi metr pod zem, kde zahýbá a pokračuje vodorovně směrem ven z chalupy. Studna je zavezená, avšak není jasné, jestli je na zahradě, či dokonce přímo pod domem.

Poradte starouškům, jakým způsobem nalézt studnu. Navrhněte několik co nejnázne proveditelných postupů. (řešení str. 61)

Úloha VI.1 ... zdolání kopečku

Vozíček o hmotnosti m jede po rovině rychlostí v , na níž leží dřevěný „kopeček“ o hmotnosti M a výšce h , jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 5). Vozíček na kopeček najede. Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol? Jakou rychlostí se bude hora nakonec pohybovat?



Obr. 5

(řešení str. 62)

Úloha VI.2 ... kukačky na lanech

Kyvadlové hodiny o hmotnosti M jsou zavěšeny na dvou dlouhých rovnoběžných lanech (viz obr. 7). Kyvadlo se skládá ze závažíčka o hmotnosti m a lehké tyčky o délce l . Určete, o kolik se budou takové hodiny předbíhat (opozďovat) oproti hodinám pevně přibitým na stěně. (řešení str. 63)

Úloha VI.3 ... roztáčíme elektromotor

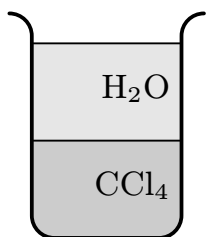
Na hřídeli elektromotoru je navinuta nit, na konci které je zavěšeno závaží o hmotnosti m . Pokud motor připojíme na ideální zdroj napětí U , závaží pojede vzhůru rychlostí v_1 . Jakou rychlostí bude závaží klesat, pokud zdroj odpojíme a vstup elektromotoru zkratujeme? Mechanické tření neuvažujte.

(řešení str. 65)

Úloha VI.4 ... sluneční prasátko

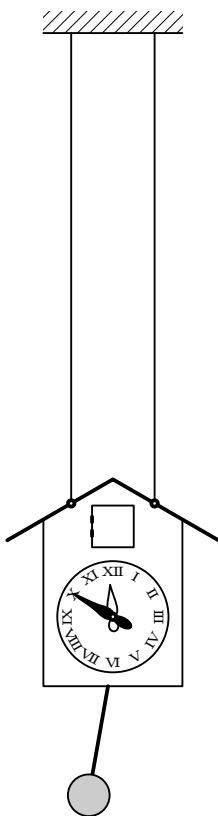
Za slunečných dní je oblíbenou zábavou vrhat obdélníkovým zrcátkem sluneční prasátka. Možná jste si všimli, že někdy má prasátko lichoběžníkový tvar a jindy tvar elipsy. Za jakých okolností nastává každá varianta? Pokud možno svou podmínku zformulujte kvantitativně. (řešení str. 67)

Úloha VI.P ... podivný bod varu

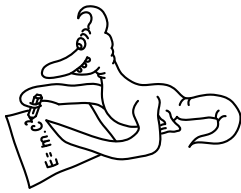


Obr. 6

Do nádoby nalijeme dvě kapaliny, vodu a tetrachlormetan. Tyto dvě kapaliny se mezi sebou nemísí. Teplota varu vody je $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, teplota varu tetrachlormetanu je asi $77\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pokud bychom však tento systém zahřivali, dočkali bychom se překvapení. K varu (vzniku bublin) totiž dochází již při asi $66\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vysvětlete zdánlivou podivnost. (řešení str. 68)



Obr. 7.
Kukačky na
lanech



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... opravdu Saturn plave?

(4 body; průměr 3,19; řešilo 63 studentů)

Věříte, že průměrná hustota Saturnu je menší než hustota vody?

Sami se můžete na Saturn podívat v dalekohledu. Kromě prstence uvidíte kolem planety několik měsíců, pokud nebudou zrovna v zákrytu. (V takovém případě byste si např. na měsíc Titan museli počkat nejdéle 6 hodin, kolik trvá jeho přechod přes kotouč planety.) Můžete zjistit, že Titan oběhne planetu jednou za 16 dní. Dokážete z pozorování měsíce Titanu určit průměrnou hustotu Saturnu? Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, vypočtete ji a přesvědčíte se o jedné zajímavosti.

Cílem této úlohy je vypočítat hustotu Saturnu pouze s pomocí doby oběhu T jeho měsíce Titanu a doby, po kterou je Titan v jeho stínu. Některé možná překvapí, že na to nepotřebujeme určit hmotnost Saturnu ani jeho objem. Hustota je totiž jenom poměr těchto dvou veličin. Hmotnost můžeme vyjádřit pomocí třetího Keplerova zákona jako závislou veličinu podobně jako objem z doby přechodu stínem.

Na začátku se dohodneme, že paprsky určující geometrický stín Saturnu jsou díky velké vzdálenosti Saturnu rovnoběžné. V dalším zjednodušení budeme pokládat dráhu Titanu za kruhovou (čímž rovněž neučiníme větší chybu). Vyjdeme ze vztahu pro rovnost odstředivé a gravitační síly a vyjádříme hmotnost Saturnu M .

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\omega^2 r^3}{G}, \quad (1)$$

kde ω je úhlová oběžná rychlost Titanu, r poloměr jeho oběžné dráhy a G gravitační konstanta. Po dosazení za úhlovou rychlost $\omega = 2\pi/T$ dostáváme

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{r^3}{T^2}.$$

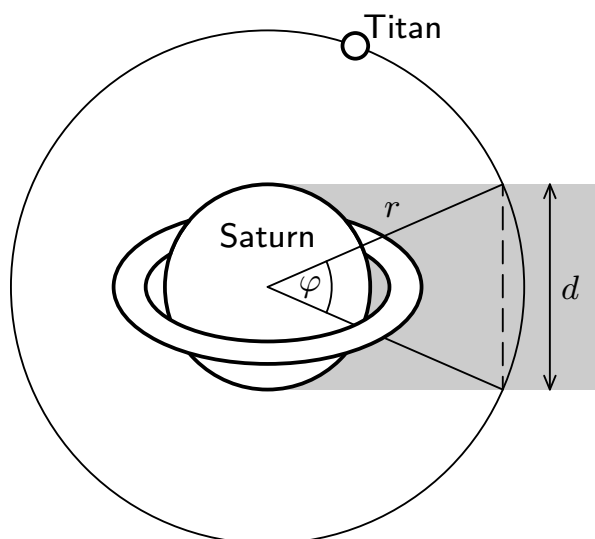
Tím jsme vlastně využili třetí Keplerův zákon.

K určení objemu potřebujeme vyjádřit poloměr Saturnu. Využijeme dobu t pohybu Titanu v geometrickém stínu Saturnu. Teď můžeme pokračovat dvěma různě přesnými výpočty.

- a) *Aproximace části dráhy Titanu ve stínu přímkou* (neboť díky velké vzdálenosti Titanu od Saturnu je jen málo zakřivená). Průměr Saturnu pak bude $d = vt = \omega r t$, kde t je čas pohybu Titanu ve stínu. Po dosazení do vztahu pro objem koule získáme pro objem Saturnu $V = \pi\omega^3 r^3 t^3 / 6$. Pomocí (1) vyjádříme hustotu Saturnu takto

$$\rho = \frac{6}{G\pi\omega t^3} = \frac{3T}{G\pi^2 t^3}.$$

Číselná hodnota je $625 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



Obr. 8. Schématický nákres Titanu na oběžné dráze (Titan ve skutečnosti obíhá v rovině prstenců).

- b) *Aproximace části dráhy Titanu ve stínu kružnicí.* Poloměr Saturnu můžeme získat následovně. Úhlovou dráhu φ , kterou projde Titan ve stínu, určíme ze vztahu

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi t}{T}.$$

Pro průměr Saturnu pak bude platit $d = 2r \sin(\varphi/2) = 2r \sin(\pi t/T)$ a pro objem dostaneme

$$V = \frac{1}{6} \pi \left(2r \sin \frac{\pi t}{T} \right)^3 = \frac{4}{3} \pi r^3 \sin^3 \frac{\pi t}{T}.$$

Hmotnost zůstává stejná jako v předchozím případě a pro hustotu získáváme vztah

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2 \sin^3(\pi t/T)}.$$

Dosazením hodnot ze zadání vypočítáme přesnější hodnotu průměrné hustoty Saturnu $626 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Vidíme, že výsledky se od sebe téměř neliší. Aproximaci jsme tedy zvolili správně. V obou případech jsme pouze z doby oběhu a doby přechodu stínem určili průměrnou hustotu Saturnu.

Otázkou zůstává reálnost takového pozorování. Pokud by Titan obíhal Saturn v neměnné rovině prstenců, pak by takové pozorování bylo možné jenom v době, kdy vidíme prstence Saturnu téměř přesně ze strany, tedy dvakrát za jeden oběh Saturnu kolem Slunce, obecně by to však bylo možné ještě méně často. Zkuste si také vypočítat, do jaké vzdálenosti sahá úplný stín Saturnu za jeho vzdálenost od Slunce a kde začíná polostín¹.

¹⁾ Polostín se nachází v takových místech, kde je planetou Saturn zakrytá jen část Slunečního kotouče.

Úloha I.2 ... Baník, slečno

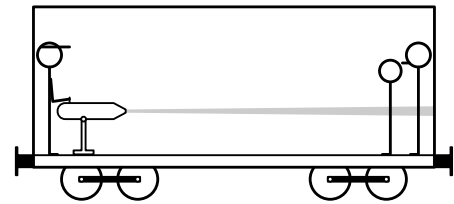
(4 body; průměr 3,02; řešilo 65 studentů)

Fanoušci Baníku jeli do Prahy na Spartu. Policisté však byli po špatných zkušenostech připraveni a do vagónu nainstalovali vodní dělo.

Na půli cesty, když vlak zrovna stál v České Třebové, baníkovci začali demolovat vybavení vagónu (jenž váží 30 t). Policisté nechali dotyčný vagón odpojit a briskně využili své zbraně. Za minutu na fanoušky vystříkali tisícilitrovou nádrž. O jakou vzdálenost proto popojel vagón dlouhý 30 m?

Předpokládejte, že vagón je odbržděný a že voda z vagónu může vytékat pouze ve svislém směru. Změnu hmotnosti vagónu způsobenou odtokem vody můžete zanedbat.

Rozeberme si podrobněji, co se děje při stříkání vody z děla na druhou stranu vagónu. V první řadě si určíme podmínky, za jakých budeme příklad řešit. Jakékoliv tření zanedbáváme. Rychlost vody je mnohem větší než rychlost vagónu, proto budeme předpokládat, že voda stříká z nehybného děla (i když to se ve skutečnosti pohybuje spolu s pohybujícím se vagónem). A také dráhu, kterou urazí voda, než doletí na konec vagónu, budeme pokládat za délku vagónu, ačkoliv se vagón zatím posunul proti směru letu vody a tím zmenšil její skutečnou dráhu.



Obr. 9. Vagón s vodním dělem.

Vyjdeme z první impulzové věty (v tomto případě konkrétně ze zákona zachování celkové hybnosti soustavy vagón–voda). Celý děj se sestává ze tří částí:

1. Nejprve voda stříká z děla, ale ještě nedorazila na druhý konec vagónu, a tak mu uděluje stejnou hybnost, jakou má ona, jenomže opačného směru.
2. V druhé fázi voda stříká z děla a v tomtéž okamžiku dopadá voda na druhou stranu vagónu stejnou rychlostí, a tedy hybnost vagónu uděluje, ale tutéž mu současně odebírá. V této fázi nenastává změna hybnosti vagónu.
3. Ve třetí fázi voda ještě dopadá na druhou stranu vagónu, ale už nestříká z děla, a tudíž jenom odebírá vagónu hybnost.

Voda stříká z děla rychlostí v . Délku vagónu l tedy proletí za čas $t = l/v$. Je-li objemový průtok vody Q , hmotnost vody, která ještě nedosáhne druhé strany vagónu, je $m = Q\varrho t = Q\varrho l/v$. Ze zákona zachování hybnosti musí být hybnost této vody rovna hybnosti vagónu (o hmotnosti M) na konci první fáze, kdy bude mít rychlost w . Platí

$$mv = Mw \quad \Rightarrow \quad Q\varrho l = Mw.$$

Pro rychlost vagónu na konci první fáze tedy máme

$$w = \frac{Q\varrho l}{M}. \quad (2)$$

Jelikož voda působí na vagón stálou silou, je jeho zrychlení konstantní a v průběhu první fáze urazí vagón dráhu $s_1 = \frac{1}{2}at^2$.

Ve třetí fázi, která je s první symetrická, vagón zpomaluje se zrychlením $-a$ a již má rychlost w (která se mu během druhé fáze nezměnila). Vagón projede dráhu

$$s_3 = wt - \frac{1}{2}at^2.$$

Celý pohyb trval vagónu dobu $T = 1$ min. Druhá fáze trvala dobu $T - 2t$, kdy se hybnost vagónu neměnila a jel rovnoměrnou rychlostí w . Urazil dráhu $s_2 = w(T - 2t)$. Celkovou dráhu dostaneme, když sečteme tyto tři dráhy.

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{1}{2}at^2 + w(T - 2t) + wt - \frac{1}{2}at^2 = w(T - t).$$

Za předpokladu, že doba t je proti celkové době T zanedbatelně malá, a po dosazení za w z (2) dostáváme

$$s = \frac{QT\rho l}{M},$$

kde $QT = 1 \text{ m}^3$ je celkový objem vystříkané vody. Po dosazení zadaných hodnot dostáváme $s = 1$ m. Vagón popojede o jeden metr.

Úloha I.3 ... Armagedon

(4 body; průměr 2,17; řešilo 35 studentů)

Poplach! Rudá světla indikují smrtelnou hrozbu. Směrem k Zemi se řítí meteoroid o známém průřezu S a tepelné kapacitě c . Určete, o kolik se zvýší jeho teplota během průletu atmosférou.

Předpokládejte, že se jeho rychlost stačí před dopadem ustálit a že se zahřívá rovnoměrně. Sami odhadněte, jaká část energie se spotřebuje na ohřátí vzduchu v atmosféře. Zamyslete se, jak je tento model realistický. Nakonec rozhodněte, zda bude mít meteoroid vyšší či nižší teplotu, pokud namísto vzduchem poletí vakuem, jež má nulovou tepelnou kapacitu.

Na úvod prozradíme něco o řešení celého příkladu. Model navržený v zadání používá příliš velká zjednodušení. Dokonce podmínky, které jsme zadali, jsou navzájem fyzikálně neslučitelné, nemohou platit všechny zároveň.

Model má tři podstatné chyby:

1. namísto teplotní kapacity c potřebujeme znát koeficient přestupu tepla λ ,
2. celý jev – průlet tělesa atmosférou – trvá méně než 10 sekund, za tento čas se nestačí ustanovit tepelná rovnováha,
3. teplota tělesa při průletu atmosférou vysoce převyšuje teplotu tání pevných látek a teplotu vypařování kapalin, proto při řešení není možné použít kalorimetrickou rovnici, musíme použít rovnici vypařování.

Pokusíme se říct vám něco o meteoroidech, abyste si udělali představu o tom, jak vypadá let tělesa atmosférou při velmi vysokých rychlostech.

Energie a teplota

Rychlost, jakou meteoroid vletí do zemské atmosféry, je přinejmenším druhá kosmická rychlost. Dá se říct, že všechny meteoroidy mají velikost rychlosti v atmosféře v rozmezí 10–70 km/s, čili se pohybují zhruba stokrát rychleji než kulka z pušky. Když vidíme, co dokáže kulka, jakou paseku by asi udělal meteoroid, kdyby ho atmosféra nezastavila? Kinetická energie jednoho kilogramu hmoty o rychlosti 50 km/s je

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = 1,25 \text{ GJ}, \quad (3)$$

což je zhruba 350 kWh. Toto číslo, pro porovnání, zhruba vyjadřuje spotřebu elektrické energie průměrné rodiny za jeden měsíc. Právě velké množství energie je důvodem, proč se u meteoroidu v atmosféře uplatňují efekty, se kterými nemáme v běžném životě zkušenost.

Při průletu atmosférou se meteoroid třením zahřívá.² Velikost tohoto zahřívání odhadneme pomocí následující úvahy. Molekuly dopadají na meteoroid rychlostí 10–70 km/s. Považujme tuto rychlost za kinetickou rychlost molekul atmosféry a na základě ekvipartičního teorému odhadněme jeho teplotu.

$$\frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (4)$$

Při rychlosti 330 m/s je kinetická teplota vzduchu 300 K. Uvedeným rychlostem pak odpovídá teplota 300 000 K (rychlost 10 km/s) až 15 milionů kelvinů (rychlost 70 km/s).

Rovnice popisující meteoroid v atmosféře

V dalším výpočtu jsme zanedbali gravitační sílu, v našem případě je dostatečně malá. Vliv odporové a gravitační síly bude ve stejném poměru jako poměr jeho kinetické a rozdílu potenciální energie meteoroidu ve výšce 100 km a na povrchu Země.

$$\frac{F_o}{F_g} \approx \frac{E_{\text{kin.}}}{E_{\text{pot.}}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{GmM_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R_Z + h} \right)} = \frac{v^2}{v_{2k}^2} \left(1 + \frac{R_Z}{h} \right) \gg \frac{v^2}{v_{2k}^2} > 1,$$

kde $v_{2k}^2 = 2GM_Z/R_Z$ je druhá kosmická rychlost.

Na meteoroid při průletu atmosférou pak působí jenom odporová síla. Jejím působením se meteoroid zpomaluje.

$$m \frac{dv}{dt} = ma = -\Gamma S \rho v^2. \quad (5)$$

I když tato rovnice vypadá stejně jako rovnice pro odporovou sílu, nejsou to dvě stejné rovnice. Při zkoumání, jakou silou působí prostředí (kterým těleso padá) na pohybující se těleso, bylo zjištěno, že:

1. při malých rychlostech je odporová síla úměrná rychlosti v (tzv. laminární proudění),
2. při větších rychlostech je odporová síla úměrná v^2 (za obtékaným tělesem se začínají vytvářet víry, které způsobují větší brždění tělesa),
3. při rychlostech kolem rychlosti zvuku je odporová síla úměrná v^3 , před tělesem se tvoří rázová vlna, která dále podstatně zpomaluje těleso,
4. při rychlostech, které jsou podstatně větší než rychlost zvuku v prostředí (tj. rychlost, jakou se v něm pohybují molekuly), je odporová síla opět úměrná v^2 .

²⁾ Někteří z vás možná namítnou, že přece čím rychleji jedeme na kole, tím nám je větší zima, proto se tělesa pohybem ochlazují. Tomuto se říká *windchill effect*. Vysvětlení spočívá v tom, že ochlazování je způsobeno odpařováním vody z povrchu těla.

V případech 2 a 4 je sice odporová síla úměrná v^2 , ale fyzikálně se tyto dva případy liší.

Jak už víme, v okolí meteoroidu panuje vysoká teplota, která vede k vypařování hmoty z povrchu tělesa. Tento fyzikální děj můžeme popsat rovnicí vypařování

$$\xi \frac{dm}{dt} = -\frac{1}{2} \lambda S \rho v^3, \quad (6)$$

kde

- Γ – koeficient odporu tělesa, má stejný význam jako C v Newtonově rovnici pohybu tělesa v odporovém prostředí, nejsou si ale rovny.,
- S – efektivní průřez tělesa,
- λ – koeficient přestupu tepla mezi tělesem a atmosférou,
- ξ – energie nutná k ablaci³ jednotkové hmoty, jednoho kilogramu. Je vyšší než měrné skupenské teplo vypařování.
- ρ, v, m – okamžitá hustota atmosféry, rychlost a hmotnost tělesa.

V dalších úvahách budeme využívat ablační koeficient σ daný vztahem

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\xi\Gamma}. \quad (7)$$

Jednoduchým dosazením rovnic do sebe dostaneme první integrál, závislost hmotnosti tělesa na rychlosti

$$m = m_\infty \exp\left(\frac{1}{2}\sigma(v^2 - v_\infty^2)\right),$$

kde m_∞, v_∞ jsou počáteční hmotnost a rychlost meteoroidu před vstupem do atmosféry.

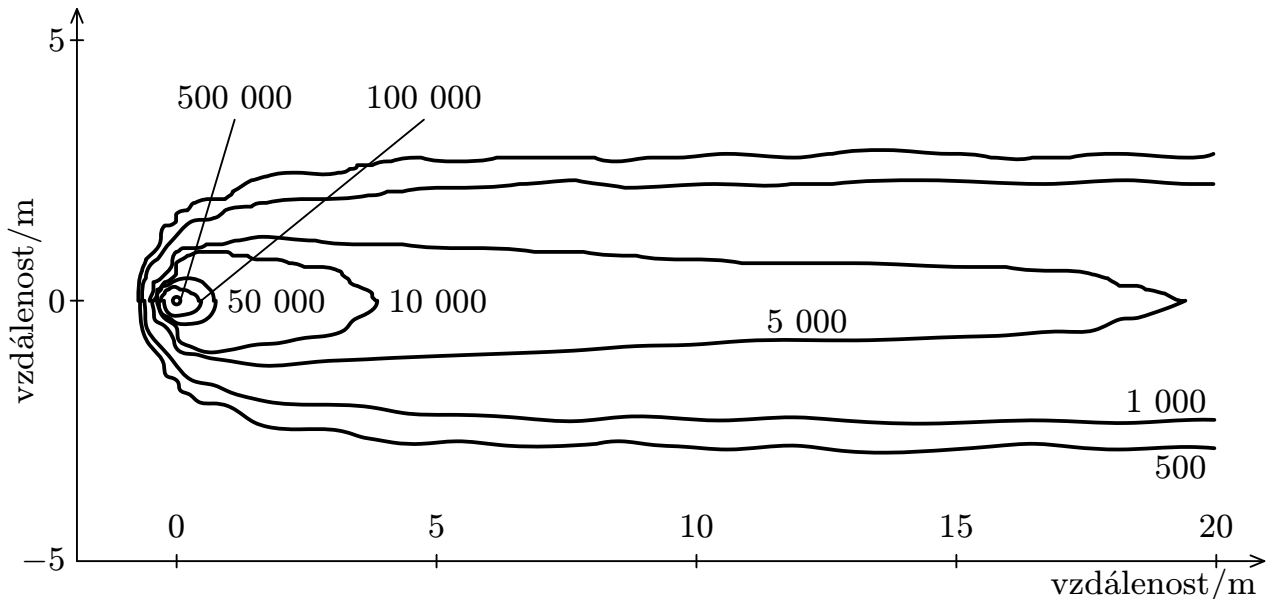
Rovnice (5) a (6) vedou k plnému popisu pohybu tělesa v atmosféře za předpokladu, že těleso ztrácí hmotu pouze ablací. To ale není pravda ve všech případech.

	v= konst.	rovn. zahřívání	dopadne na Zem
mikrometeoroid	ANO	ANO	NE
meteor	ANO	NE	NE
bolid	NE	NE	NE
„Tunguzka“	NE	NE	ANO/NE ⁴
planetka (\varnothing 1 km)	ANO	ANO/NE ⁵	ANO

Tabulka popisuje, jak meteoroid v závislosti na velikosti splňuje podmínky zadání.

³⁾ *Ablace* je proces, při kterém ztrácí meteoroid svou hmotu vlivem drolení a tavení povrchu. Z povrchu se oddělují úlomky, vznikají z nich roztavené kapky a vypařuje se hmota. Materiál, ze kterého je meteoroid, je většinou velice křehký. Můžete si to představit tak, že vezmete sklenici a prudce ji zahřejete. Sklenice vám popraská. Stejný proces, na efekt ještě lepší, probíhá při ochlazení, protože rychle ochladit sklo je mnohem jednodušší než ho prudce zahřát. Prudce ji ponoříte do vody. Sklo popraská, a když byla původní teplota dostatečně vysoká, tak se rozdrolí na malé kousky. Podobný proces probíhá i na povrchu meteoroidu.

Tento efekt se využívá i v praxi. Např. mise Apollo používala ablační štíty, které díky odpařování kovu na povrchu chránily vlastní kosmickou loď při přistání před roztavením.



Obr. 10. Rozložení teploty atmosféry v okolí meteoroidu dle modelu Iaina Boyda.

Realita

Když mluvíme o pohybu tělesa v atmosféře, rozlišujeme tři pojmy: *meteoroid*, *meteor*, *meteorit*.

- Meteoroid – tělíčko nebo těleso meziplanetárního původu, které obíhá kolem Slunce. V našem smyslu je to samotné hmotné těleso, které popisujeme během letu atmosférou.
- Meteor – samotné světlo, které vidí pozorovatel koukající se na oblohu. Velice jasný meteor se jmenuje *bolid*.
- Meteorit – pozůstatek meteoroidu, který dopadl na povrch Země. Na to, aby meteoroid dopadl na povrch jako meteorit, musí mít malou rychlost a velkou hmotnost. Menší tělesa se při letu atmosférou zbrzdí asi na rychlost 3 km/s, přestanou svítit a pak padají atmosférou volným pádem. Jejich dopadová rychlost je v řádu desítek metrů za sekundu. Větší tělesa se nezbrzdí na tuto rychlost a narazí na povrch rychlostí několika kilometrů za sekundu. Těmto se říká *impaktní meteority*.

Pojďme si teď rozebrat jednotlivé případy letu tělesa atmosférou, v závislosti na jejich hmotnosti.

Mikrometeoroid

Mikrometeoroid je tak málo hmotné těleso Sluneční soustavy, že se v atmosféře zbrzdí dříve, než se stačí dostatečně ohřát. Jeho hmotnost je 10^{-18} až 10^{-12} kg a průměr menší než $10\ \mu\text{m}$.

4) Křehká tělesa o průměru desítek metrů se dostanou do dolní části atmosféry, kde explodují. Jejich zbytky ve formě malých skleněných kuliček, *sférul*, spadnou na zem.

5) Kromě malé části povrchu se nezahřeje vůbec, až při samotném dopadu na povrch Země.

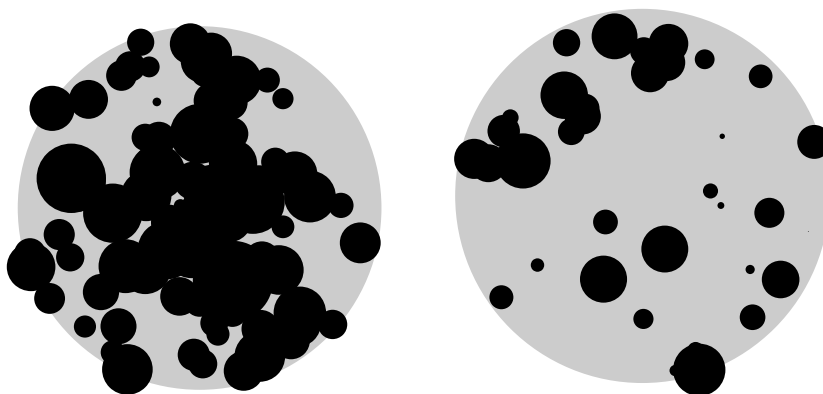
Meteor

Meteor je samotné světlo, které někdy vidíme na noční obloze. Říká se mu též padající hvězda. Tělesa hmotnější než mikrometeoroidy se dostatečně zahřejí, aby začaly zářit. Samotný meteoroid moc nezáří (jeho teplotu udržuje ablace na několika tisících kelvinů), světlo vychází především ze stopy za meteoroidem, z teplé plazmy o teplotě zhruba 4 000 K. Samotná plazma není v tepelné rovnováze, v jejím spektru lze nalézt i čáry, které odpovídají teplotám kolem 10 000 K. Rozložení teploty kolem meteoroidu můžeme vidět na obrázku 10.

Velká většina meteoroidů pochází z komet, mají tedy podobné složení. Současný model předpokládá, že meteoroidy jsou takové malé „prachové koule“. Jednotlivá křemičitanová zrna (jejich průměr je kolem 100 μm a teplota tání kolem 3 000 K) jsou slepena těkavými látkami s nižší teplotou tání (kolem 1 300 K), které se odpaří jako první. Následkem toho po jistém čase pokračuje dále shluk zrn nezávisle na sobě a prochází ablací nezávisle. Do svého úplného vypaření svou rychlost zrna prakticky nezmění. Meteory začínají svítit ve výšce kolem 100 km a končí ve výšce 80 kilometrů. Začátek a konec dráhy na hmotnosti nezávisí, pouze na vstupní rychlosti.

Bolid

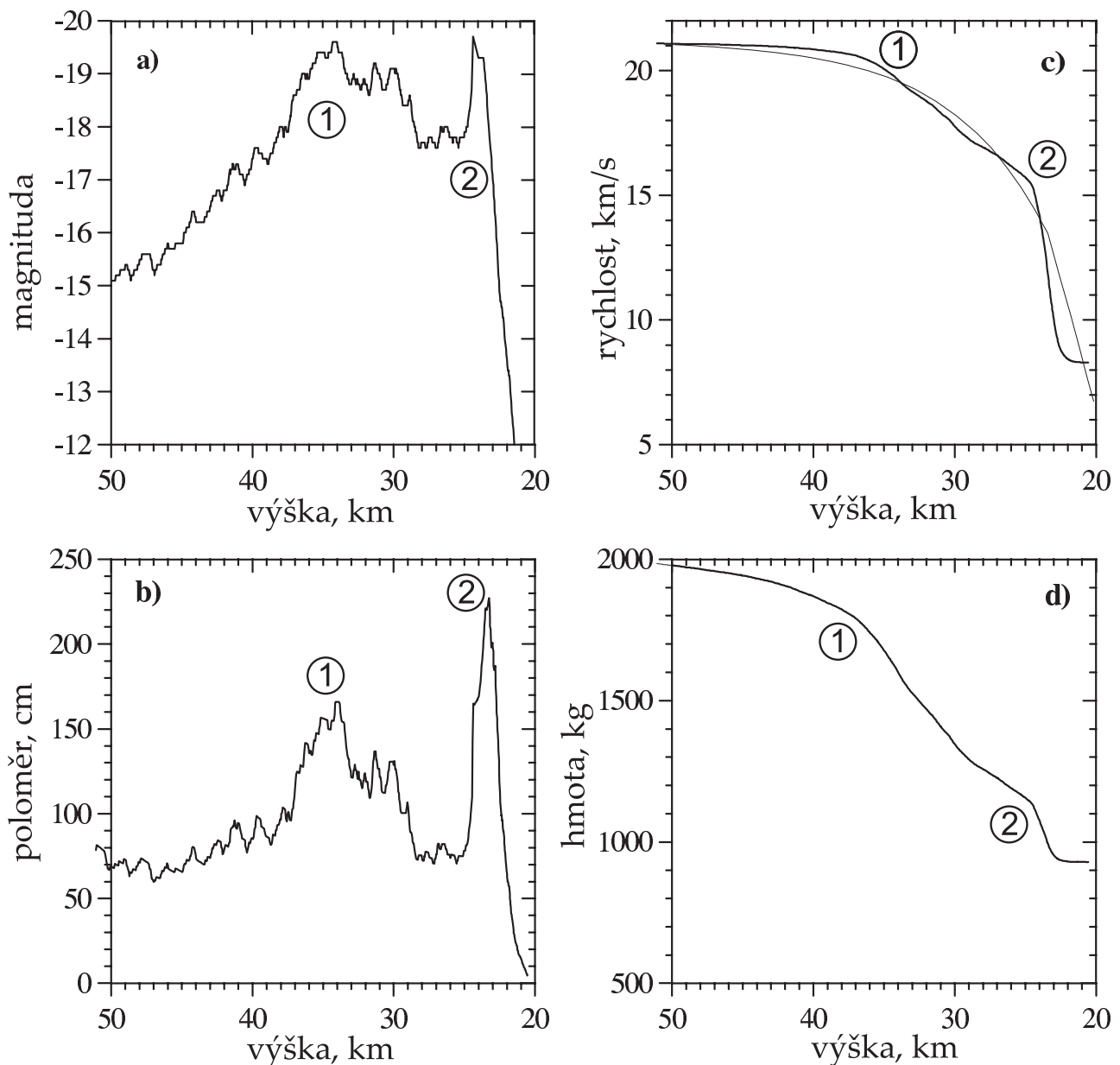
Větší tělesa (o hmotnosti desítek gramů a více, přičemž jas silně závisí na rychlosti: rychlý meteoroid produkuje stejné množství světla při podstatně menší hmotnosti) jsou natolik jasná, že v noci osvětlí okolí tak, že předměty vrhají stíny. Často se stane, že tyto meteory vybuchují, prudce zvyšují svoji jasnost. Je to způsobeno tím, že v jistém okamžiku u nich dochází k rozlomení – fragmentaci – a dále pokračují v letu. Dynamický tlak dosahuje až 10 MPa/m².⁶ Při větších tělesech se už těkavý materiál mezi zrna nestihne vypařit dříve, než začne těleso svítit. Rozpadem meteoroidu dojde k prudkému vypaření tohoto materiálu, zvýšení odporu vzduchu (dle rovnice (5) je zrychlení $a \sim 1/R$) a většímu zrychlení. Při skutečně velkých bolidech zaznamenají okamžik rozlomení i pozemní seismické stanice.



Obr. 11. Vlevo je zjednodušený model chondritu, vpravo meteoroidu pocházejícího z komety. Šedá hmota není prázdný prostor, ale těkavější složka, u Leonidy částečně smíchaná s ledem.

⁶⁾ Zkuste si najít křehký materiál, vezměte ho do dlaně a zkuste ho zmáčknout. Jak budete pomalu zvyšovat svou sílu, najednou se vám celý rozsype na mnoho malých částí. Stejný proces se děje i s meteoroidem.

Na obrázku 12 jsou tato místa označena 1 a 2. U tohoto bolidu vidíme, že se rozpadl dokonce dvakrát. Pro velká tělesa s hmotností několika tun je to běžná záležitost. Pro chování bolidů jsou podstatná dvě čísla – jejich hustota a ablační koeficient. Hustota kolísá většinou mezi 600 až 2 500 kg/m³. Čím je hustota nižší, tím více je meteoroid složen z těkavých látek a tím větší je pravděpodobnost, že se při svém letu rozpadne. S hustotou souvisí i ablační koeficient. Čím je vyšší, tím poréznější a křehčí materiál tvoří meteoroid. Na porovnání si vezměme jako příklad (viz obr. 11) meteoroid pocházející z komety Tempel-Tuttle (tyto meteoroidy se jmenují Leonidy) a meteoroid pocházející z pásma asteroidů, složením velice podobný kamení (*chondrit*). Leonida má $\sigma = 0,16 \text{ s}^2/\text{km}^2$ a $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$, chondrit $\sigma = 0,02 \text{ s}^2/\text{km}^2$ a $\rho = 3\,000 \text{ kg/m}^3$.



Obr. 12. Bolid Benešov

Meteorit

Dále budeme hovořit pouze o chondritech čili o kamení. O tom, proč na Zemi nedopadne těleso o nízké hustotě, si povíme v další části. Maximální rychlost me-

teoroidu, aby se celý nevypařil v atmosféře, je kolem 30 km/s. Jestliže vstupuje do atmosféry malou rychlostí (druhou kosmickou) a pod malým úhlem, stačí mu jen několik kilogramů k tomu, aby část dopadla jako meteorit.

V případě, že se tělesu podaří snížit svou rychlost na 3 km/s, jeho teplota se sníží natolik, že přestane probíhat ablace. Následně jej okolní vzduch zbrzdí a těleso padá k zemi volným pádem. Trvá mu několik minut, než dopadne. Jelikož se zahřívá pouze povrch (do hloubky max. několika milimetrů), vnitřek meteoroidu zůstal netknutý. Na povrchu se v důsledku přetavení vytvoří černá křusta. Podle ní poznáme meteority poměrně snadno, i když si je lze někdy mylně zaměnit např. se struskou.

Skutečně velká tělesa

30. června 1908 vybuchl nad Sibiří blízko řeky Podkamennaja Tunguzka obrovský meteoroid. Jeho průměr se odhaduje zhruba na 100 metrů. Svým výbuchem ve výšce zhruba 8 km nad zemí zničil obrovské území. Jednalo se pravděpodobně o úlomek komety. Kdyby bylo toto těleso chondrit, dopadlo by až na Zemi a vyhloubilo by meteorický kráter. Navíc pozůstatky komet mají vyšší rychlost než kamenné meteoroidy pocházející z pásu asteroidů.

Na Zemi můžeme najít stovky kráterů, které tady vytvořila vesmírná tělesa. Soudí se, že jedno takové těleso pomohlo dinosaurům odejít na evoluční odpočinek. Aby se nám nestala stejná nehoda, běží několik projektů, které mají za úkol najít všechna tělesa větší než 1 kilometr, která by v budoucnu mohla zasáhnout Zemi – zmiňme např. projekt LINEAR. Proto nepodceňujme červená světýlka, blikající a varující před srážkou s meteoroidem – pohled na nádherný bolid letící atmosférou by mohl být pro nás tím posledním, co vůbec uvidíme.

Teplota ve vakuu

Co se týče teploty meteoroidu ve vakuu, většina z vás správně podotkla, že jelikož vakuum neobsahuje žádné částice, meteoroid se zpomalovat nebude. Proto bude mít pořád stejnou teplotu.

K malé výměně energie ale docházet bude, a to zářením. Meteoroid obíhá kolem Slunce a jeho vzdálenost se mění – v různých částech své dráhy přijímá více nebo méně slunečního záření. Pak bude i jeho teplota kolísat, ale podstatně pomaleji než při průletu atmosférou.

Úloha I.4 ... hodte si smyčku

(4 body; průměr 3,08; řešilo 51 studentů)

Představte si kruhovou smyčku tvořenou drátem. Radiálními vodiči přivádíme a odvádíme elektrický proud (viz obr. 13). Jaké bude magnetické pole uprostřed smyčky? Poloměr smyčky je R , úhel mezi radiálními přívodními dráty φ a proud v drátu I .

Pro odstranění případných nejednoznačností v řešení si smyčku vhodně pootočíme, aby spodní oblouk byl ten kratší. Spodní index D budeme užívat pro veličiny spodního oblouku a H pro veličiny oblouku vrchního. Úhly budeme samozřejmě počítat v obloukové míře, tedy v radiánech.

Nejdříve se vrhneme na rozdělení proudu. Jelikož budeme uvažovat ideální situaci, budeme považovat materiál drátu za homogenní a jeho průřez za konstantní. Pak je zřejmé, že odpor jednotlivých částí je přímo úměrný jejich délce, takže

$$\mathcal{R}_D \sim l_D = \varphi R, \quad \mathcal{R}_H \sim l_H = (2\pi - \varphi)R,$$

kde \mathcal{R} značí odpor jednotlivých oblouků a l jejich délky. Také z Kirchhoffových zákonů plyne, že co do uzlu vteče, to také vyteče, neboli $I = I_H + I_D$. Když použijeme předchozí úměru a Ohmův zákon, získáme vztah mezi velikostmi obou proudů

$$I_D = \frac{(2\pi - \varphi)}{\varphi} I_H. \quad (8)$$

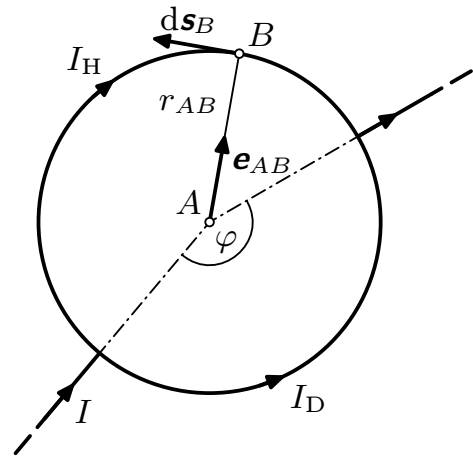
Nyní vypočítáme příspěvky jednotlivých částí obvodu k magnetické indukci ve středu smyčky. Pokud nám (či fyzikálním tabulkám) budete věřit nebo vám integrování nic neříká, můžete přeskočit následující odstavec.

Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona⁷, který popisuje příspěvek proudu vodičem k magnetické indukci v bodě A .

$$\mathbf{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\text{celý vodič}} \frac{I \mathbf{e}_{AB} \times d\mathbf{s}_B}{r_{AB}^2},$$

kde \mathbf{e}_{AB} je jednotkový vektor směřující od A k délkovému elementu vodiče $d\mathbf{s}_B$ a r_{AB} je délka spojnice bodu A a elementu vodiče $d\mathbf{s}_B$. Integrujeme samozřejmě po celém vodiči. Všimneme si, že pro přívodní dráty je vektorový součin nulový, a tak i jejich příspěvek k magnetickému poli je nulový.

Budeme uvažovat stálý proud I obloukem kružnice s počátečním úhlem φ_0 a konečným φ_1 o poloměru R . Když nyní budeme řešit příspěvek k magnetické indukci ve středu oblouku, uvědomíme si, že vektory $d\mathbf{s}_B$ a \mathbf{e}_{AB} jsou na sebe kolmé a oba leží v rovině, ve které leží oblouk. Zavedeme jednotkový vektor $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{e}_{AB} \times d\mathbf{s}_B / |d\mathbf{s}_B|$



Obr. 13. Nákres smyčky pro výpočet magnetické indukce.

⁷⁾ viz například Feynmanovy přednášky z fyziky

(kolmý k rovině oblouku) a substituci $|\mathbf{ds}_B| = R d\varphi$. Předchozí integrál můžeme přepsat jako

$$\mathbf{B}(A) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{\boldsymbol{\nu} I d\varphi}{R} = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} d\varphi = -\frac{\boldsymbol{\nu} I}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\varphi_1 - \varphi_0).$$

Nyní již víme, v jakém poměru se rozdělí proud a jaký je příspěvek k magnetické indukci proudu procházejícího tenkým vodičem ve tvaru oblouku. Dosadíme do vztahu pro příspěvek k magnetické indukci ve středu smyčky od spodního oblouku

$$\mathbf{B}_D = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_D}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (\varphi - 0) = -\frac{\boldsymbol{\nu} I_D \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 R}.$$

Obdobně dosadíme pro horní oblouk, musíme jen dát pozor na to, abychom zachovali stejný směr vektoru $\boldsymbol{\nu}$, neboli musíme zachovat stejný smysl obíhání oblouku. Tím ale získáme oblouk, kterým neteče proud I_H , nýbrž $-I_H$.

$$\mathbf{B}_H = -\frac{\boldsymbol{\nu}(-I_H)}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (2\pi - \varphi) = \frac{\boldsymbol{\nu} I_H}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} (2\pi - \varphi).$$

Když tyto příspěvky sečteme a využijeme vztah (8), získáme nulový vektor

$$\mathbf{B}_H + \mathbf{B}_D = \mathbf{0}.$$

Takže jsme došli k závěru, že magnetická indukce ve středu smyčky bude nulová.

Úloha I. P ... příliv na Bali

(5 bodů; průměr 2,40; řešilo 35 studentů)

Když skončila Mezinárodní fyzikální olympiáda na Bali, olympionici odešli na celý den relaxovat k moři na jižní okraj tohoto ostrova v Indonésii. Sledovavše korálový útes, jak mizí v přílivové vlně, uvědomili si po uplynutí úplňkové noci a letního dne, že příliv nastal jen jednou (během 24 h 50 min). Domorodci jim tuto skutečnost potvrdili, ale neuměli ji vysvětlit podobně jako účastníci MFO. Dokážete to vy?

V tomto řešení nesvedeme vysvětlit tu pravou příčinu toho, že t. č. byl na Bali příliv jen jednou denně. Zmíníme však některé jevy, které by to mohly mít na svědomí.

Nejdříve se zamyslíme, zda bychom to dokázali vysvětlit jako statický jev, tj. zanedbáme tření vody v oceánech a mořích a budeme předpokládat, že hladina vody v každém okamžiku zaujímá tvar ekvipotenciální plochy.

Uvažujme jedno slapotvorné těleso (v našem případě Měsíc), jehož přítomnost způsobí změnu gravitačního potenciálu na povrchu Země. Jeho nekonstantní část má tvar⁸

$$\phi_m = -\frac{Gma^2}{R^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right),$$

⁸⁾ Vztah pro slapotvorný potenciál zde nebudeme odvozovat, protože ho lze najít v literatuře.

kde m je hmotnost Měsíce, a je poloměr Země, R je vzdálenost středu Měsíce a Země a ψ je úhel měřený od spojnice Země a Měsíce (osy x , viz obr. 14). Potenciál je rotačně symetrický vzhledem k ose x .

Potenciál se slapy ve výšce h_2 nechť je stejný jako potenciál bez slapů ve výšce h_1

$$\phi(h_1) = \phi(h_2) + \phi_m(h_2).$$

Vzednutí hladiny bude zanedbatelné vzhledem k poloměru Země, potenciál ϕ_m je v blízkosti povrchu Země přibližně konstantní, proto dostáváme

$$gh_1 = gh_2 + \phi_m \quad \Rightarrow \quad h = h_2 - h_1 = -\frac{\phi_m}{g}.$$

Pro gravitační zrychlení na povrchu Země platí $g = GM/a^2$, a tak pro výšku dmutí hladiny platí vztah

$$h = \frac{ma^4}{MR^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) \doteq 36 \text{ cm} \cdot \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Dmutí hladiny je znázorněno (ovšem zveličeně) na obrázku 14. Tento obrázek odpovídá tomu, co nás učili na hodinách zeměpisu. Na rovníku na straně přivrácené a odvrácené od Měsíce je příliv, jehož výška dosahuje maximálně 36 centimetrů. Na pólech je trvalý odliv 18 centimetrů. Teoretické hodnoty přílivu jsou skutečně tak malé, protože se však Země díky slapům sama deformuje, je skutečný posuv ekvipotenciální plochy celkového gravitačního potenciálu asi o 30 % větší.

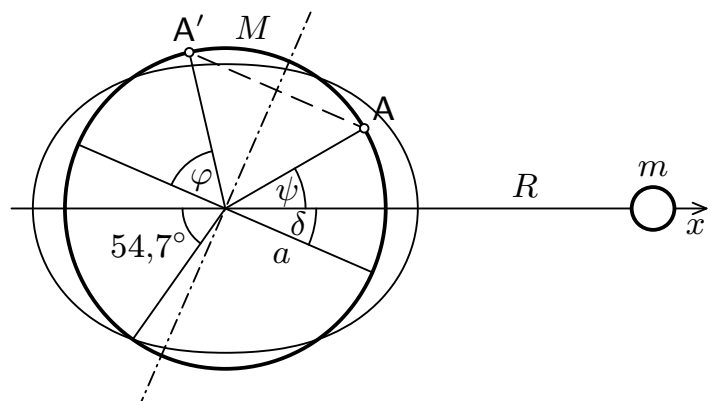
Dále je samozřejmě také nutné započítat vliv Slunce, který není zanedbatelný. Vzednutí hladiny způsobené Sluncem má stejný tvar jako (9) (při jeho odvozování se jen předpokládá $a \ll R$). Podle polohy Slunce se vlivy různým způsobem sčítají. T. č. byl na Bali úplněk, to znamená, že Slunce, Země a Měsíc byly na jedné přímce. Dmutí bylo tedy ve skutečnosti ještě větší. Nás zajímá kvalitativní výsledek, zda může jeden příliv zcela vymizet, proto není třeba dále vliv Slunce uvažovat.

Co může způsobit jinou než dvanáctihodinovou periodu přílivu a odlivu? Je to deklinace Měsíce δ , která může dosahovat hodnot až $\pm 28,5^\circ$. Situace je názorná na obrázku 14, na něm je označena noční A a denní A' poloha jednoho místa na povrchu Země. Vidíme, že výška vody není po 12 hodinách stejná.

Pojďme vypočítat, jak se během dne mění výška hladiny pro různé zeměpisné šířky φ . Vztah (9) si přepíšeme pomocí souřadnice x místa na povrchu Země, platí totiž $x = a \cos \psi$.

$$h = \frac{ma^2}{MR^3} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2 \right).$$

Budeme sledovat pohyb bodu A na zeměpisné šířce φ během dne (přerušovaná čára na obr. 14). Označme τ zeměpisnou délku (resp. čas během dne) sledovaného



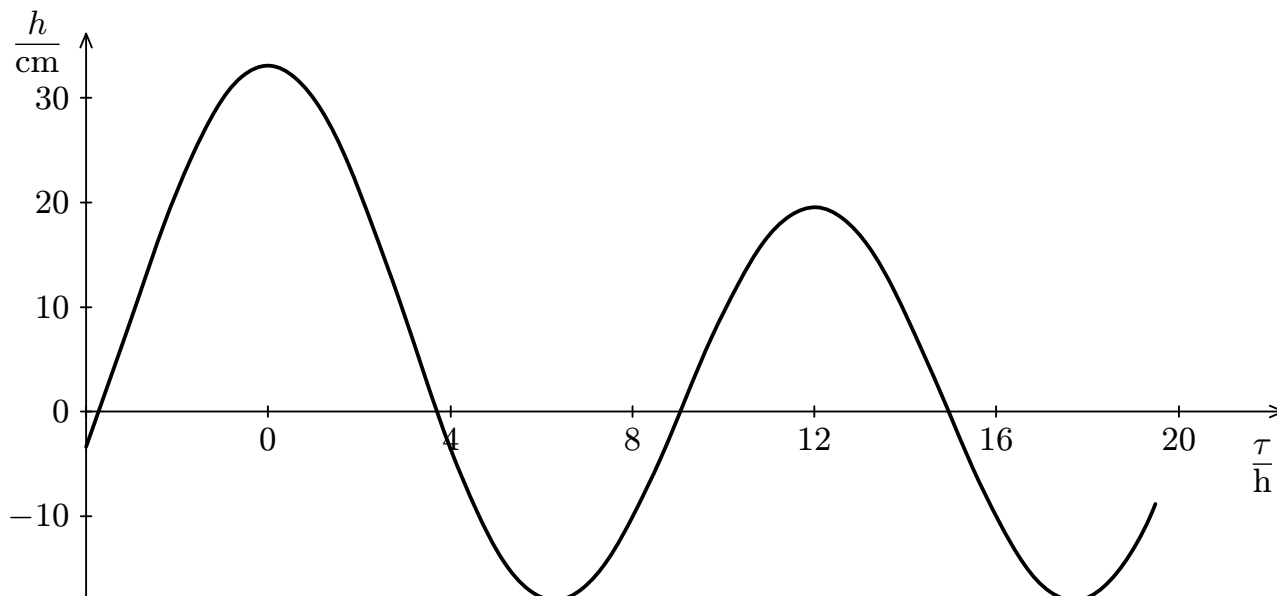
Obr. 14. Dmutí hladiny moří způsobené gravitací Měsíce.

bodů, přičemž bod A má zeměpisnou délku $\tau(A) = 0^\circ$ a bod A' $\tau(A') = 180^\circ$. Podle obrázku 14 se souřadnice x bodu A mění od hodnoty $a \cos(\varphi - \delta) = a \cos \varphi \cos \delta + a \sin \varphi \sin \delta$ (v noci) po hodnotu $-a \cos(\varphi + \delta) = -a \cos \varphi \cos \delta + a \sin \varphi \sin \delta$ (ve dne). Jelikož se bod pohybuje po kružnici, musí souřadnice x záviset na zeměpisné délce prostřednictvím $\cos \tau$, a tudíž platí

$$x = a(\cos \tau \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta)$$

a tím máme výšku dmutí vyjádřenou jako funkci $h(\varphi, \tau)$.

Výška hladiny moře při deklinaci Měsíce $\delta = -23^\circ$ (tj. v létě při úplňku) na Bali (10° j. š.) v průběhu dne je vynesena v grafu na obrázku 15.



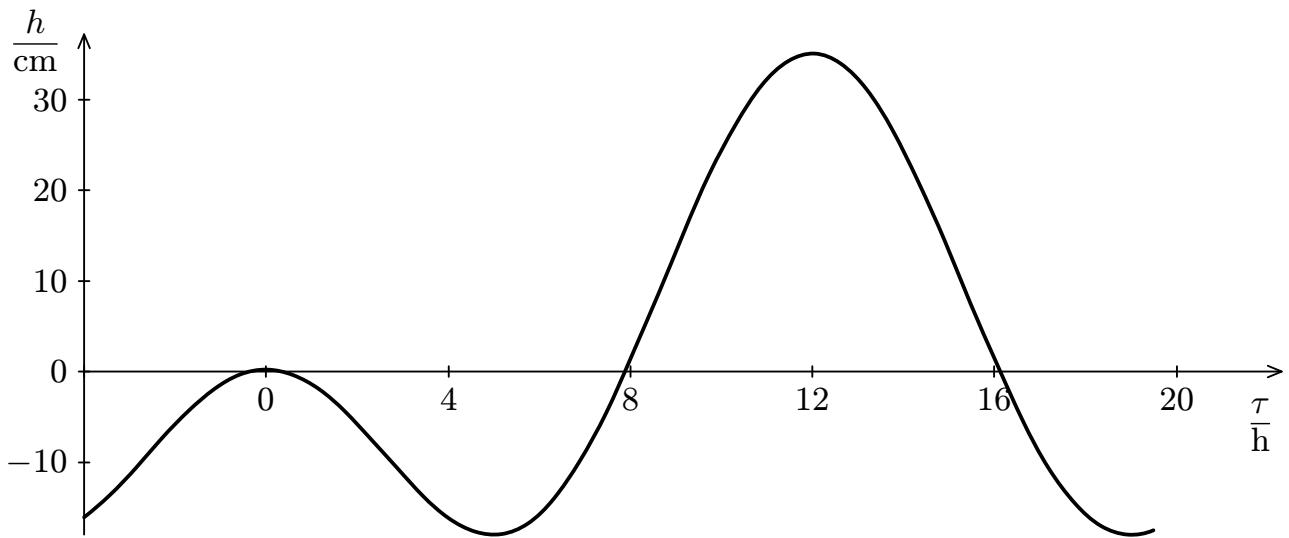
Obr. 15. Výška hladiny moře na 10° j. š.

Noční příliv je tedy asi o 50% vyšší než denní. Spolu s dalšími jevy to může být původní příčina toho, že byl t. č. na Bali pozorován jen jeden příliv denně. Příliv a odliv jsou dynamické procesy a na jejich výšce a času nástupu se výrazně podílí geologické podmínky – tvar pobřeží, tvar dna, blízkost jiné pevniny a vůbec poloha na mapě světa. T. č. na Bali byl příliv pozorován až v 6 h ráno, nikoli o půlnoci, přílivová vlna tedy přichází o dost později než potenciálové maximum.

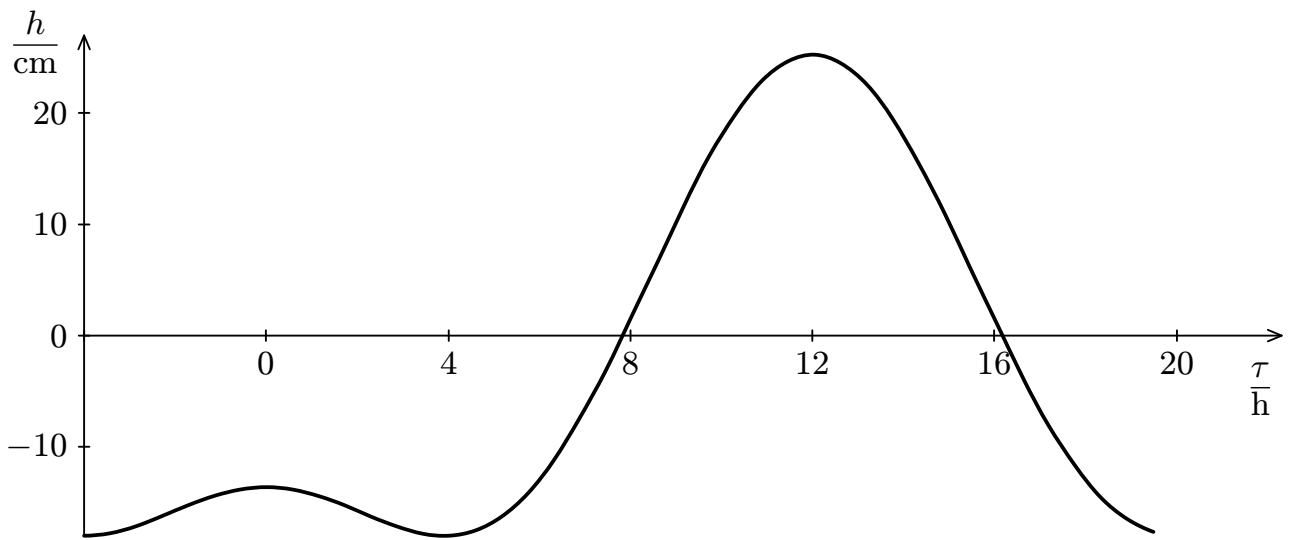
Řešení doplníme konkrétními údaji. Pobřeží, na kterém bylo pozorování slapů prováděno, tvořily korálové útesy. Hluboké moře bylo až mnohem dále od pobřeží. Korálové útesy čněly nad hladinu moře a jen jednou denně byly schovány pod přílivovou vlnou. Druhá přílivová vlna mohla být, jak víme, nižší, a tudíž nezaplavila korálové útesy, a proto nemusela být vůbec zpozorována.

Na závěr si na grafech na obrázcích 16 až 18 prohlédněte, jak teoreticky vypadají slapové jevy v různých zeměpisných šířkách, při deklinaci Měsíce $\delta = -23^\circ$. Na třicáté rovnoběžce má nižší příliv nulovou výšku, za polárním kruhem dokonce (jak si snadno rozmyslíte) může nastávat jen jeden příliv denně.

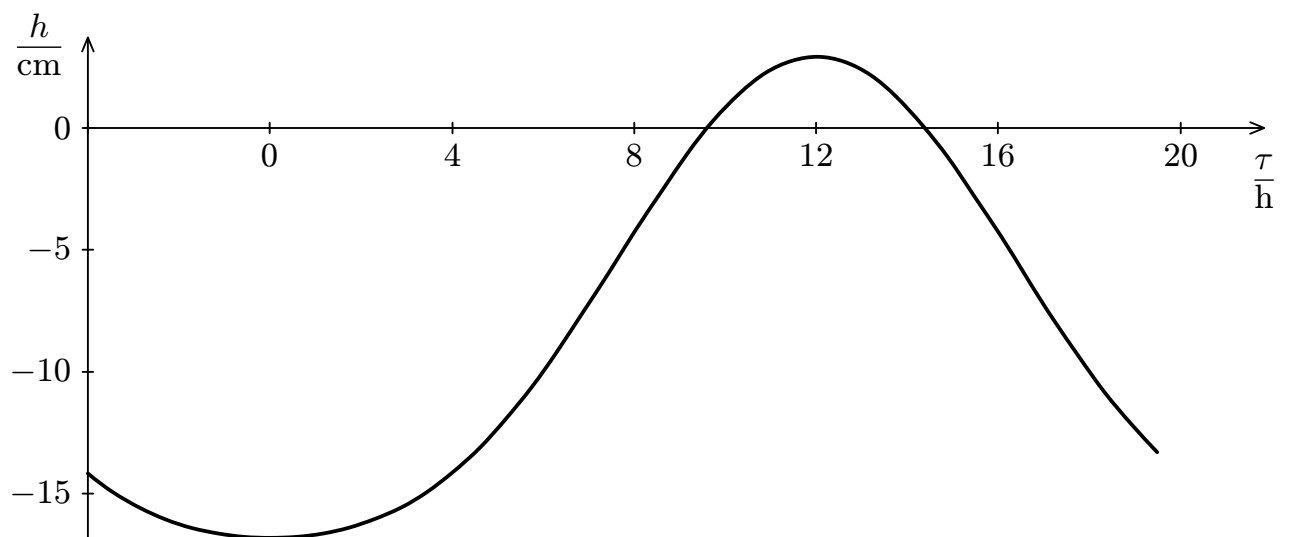
Musíme přiznat, že jsme tuto úlohu při zadání podcenili, doufaje, že jev půjde vysvětlit na základě sklonu zemské osy vůči rovině obíhání Měsíce. Leč se ukázalo, že slapové jevy jsou natolik komplikovaný děj, že žádné jednoduché vysvětlení jednodenního přílivu neexistuje. Uvedené řešení jsme konzultovali s *docentem Ctiradem Matyskou* z katedry geofyziky, za to mu na tomto místě děkujeme.



Obr. 16. Výška hladiny moře na 30° s. š.



Obr. 17. Výška hladiny moře na 50° s. š.



Obr. 18. Výška hladiny moře na 75° s. š.

Úloha II.1 ... propiska na šňůrce

(4 body; průměr 2,54; řešilo 61 studentů)

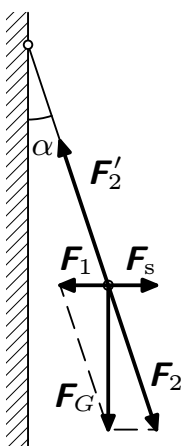
Ve stojící tramvaji visí u svislé desky na niti délky l propiska o hmotnosti m . Tramvaj se rozjede se zrychlením a , které můžeme považovat za konstantní. Vypočítejte, kam až toto kyvadlo vykývne (jaký maximální úhel bude nit svírat s deskou) a kdy tužka opět ťukne do desky.

Na začátku se dohodněme, že propisku budeme považovat za hmotný bod, neboť její rozměry nemají na řešení problému vliv. (Představme si propisku přivázanou za těžiště). Dále budeme uvažovat malou výchylku, obdobně jako u matematického kyvadla. Tato výchylka bude nejvýše asi 5° , což odpovídá zrychlení cca $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, na tramvaj až dost.

Úlohu budeme řešit v neinerciální vztažné soustavě – v soustavě spojené s tramvají. Nejprve musíme zjistit úhel φ , pro který bude propiska ve stabilní rovnovážné poloze. Tíhovou sílu F_G si rozložíme na F_2 a F_1 (viz obr. 19).

Aby propiska zůstala v rovnováze, musí být výsledná síla nulová. Síla F_2 bude vyrušena reakcí lanka F'_2 , nemusíme se jí tedy dále zabývat. Zbývá síla F_1 , jejíž velikost se musí rovnat velikosti setrvačné síly F_s . Dostaneme tedy rovnost (pro malé φ platí $\text{tg } \varphi \doteq \sin \varphi \doteq \varphi$)

$$mg \text{tg } \varphi = ma \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{arctg } \frac{a}{g}.$$



Obr. 19

Jak se vlastně propiska pohybuje? Na začátku je u stěny. Poté, co se tramvaj začne rozjíždět, bude mít propiska tendenci dostat se do své nové stabilní polohy. Její pohyb tedy lze chápat jako pohyb kyvadla s maximální výchylkou odpovídající úhlu φ v tíhovém poli, které uděluje zrychlení $\sqrt{a^2 + g^2}$.

Maximální úhel, který svírá lanko s deskou, potom bude 2φ .

Kdy propiska zase ťukne o desku? Protože se jedná o harmonický pohyb, propiska narazí zpět na desku právě za jednu periodu. Perioda takovýchto kmitů matematického kyvadla je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}.$$

Úloha II.2 ... *funicí lokomotiva*

(4 body; průměr 3,13; řešilo 71 studentů)

Lokomotiva s osmi vagóny se rozjíždí na dráze 1 km na rychlost 120 km/h. Jaká musí být minimální hmotnost lokomotivy tohoto vlaku, aby se vlak rozjel bez prokluzování kol na kolejnici, pokud hmotnost každého vagónu je 40 t?

Počítejte se součinitelem klidového tření $f = 0,2$. Odpor vzduchu a valivý odpor zanedbejte.

Nejdříve si musíme ujasnit, jaké síly nesmíme zanedbat při řešení této úlohy. Jelikož nevíme zhola nic o počtu kol jednotlivých vagónů, natož o jejich momentech setrvačnosti, spokojíme se s tím, že vagóny se pohybují a zrychlují bez jakéhokoliv odporu. Takže vagóny působí na lokomotivu jen a pouze svou setrvačnou silou F_V . Na lokomotivu samozřejmě také působí její setrvačná síla F_L . Tíhová síla působící na lokomotivu F_G je vyrovnána reakční silou od kolejnic. Na vyrovnání obou setrvačných sil zbývá jediné statická smyková třecí síla F_T mezi koly lokomotivy a kolejnicemi. Jelikož hledáme hraniční případ, kdy nastane prokluz u kol lokomotivy, budeme počítat s maximální velikostí této třecí síly, tedy

$$F_T = fF_G.$$

Setrvačné síly musí být v rovnováze s touto třecí silou

$$F_T = F_V + F_L.$$

Ze zadání lze snadno vypočítat, s jakým zrychlením se vlak pohyboval, když předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb.

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Víme tedy, jak velké byly setrvačné síly vagónů a lokomotivy.

$$F_V = m \frac{v^2}{2s},$$

$$F_L = M \frac{v^2}{2s}.$$

Tímto končí fyzikální úvahy a přichází na řadu matematické řemeslo v podobě dosazení do rovnice rovnováhy sil a následovných ekvivalentních úprav, kterými dostaneme

$$M = m \frac{v^2}{2fgs - v^2}.$$

Když dosadíme zadané údaje ($m = 8 \cdot 40 \text{ t}$), získáme

$$M \approx 130 \text{ t}.$$

Tuto podmínku splňuje například velká lokomotiva ČD řady 181.

Úloha II.3 ... spektrální analýza

(4 body; průměr 2,16; řešilo 50 studentů)

Ve spektru jisté hvězdy byla pozorována emisní čára hélia, která má běžně vlnovou délku 587,563 nm. Nebylo však vinou použitého spektroskopu, že byla rozmazána přibližně v rozmezí 587,60 nm až 587,67 nm. Pokuste se odhadnout teplotu hvězdy a její rychlost v prostoru. Čím je rozmazání spektrální čáry způsobeno?

Každá spektrální čára má nenulovou šířku. Tato nenulová šířka je způsobena spolupůsobením více faktorů. Nejdůležitější jsou:

- *Přirozená šířka čáry* – vzniká díky principu neurčitosti; hladiny, na kterých se nachází elektron, mají jakoby rozmazanou energii.
- *Instrumentální profil* – vzniká ve spektrografu, rozšíří i čáru o nulové tloušťce; podle zadání jej nebudeme dále uvažovat.
- *Teplotní rozšíření a rozšíření turbulencí* – obojí vzniká díky Dopplerovu jevu. Dají se od sebe odlišit podle toho, jak silně působí na částice o různých molekulových hmotnostech. Protože světlo k nám přichází z celé hvězdy a turbulence v atmosféře nejsou příliš silné, turbulence zanedbáme. Naopak *teplotní rozšíření* budeme v dalším řešení uvažovat.
- *Rozšíření srážkami* – srážky atomů deformují atomový obal, a tedy i energetické hladiny, na kterých se nachází elektrony. Díky tomu energetické rozmazání hladin způsobí, že fotony mají energie různé od energie nedeformované hladiny.
- *Rozšíření elektrickým (Starkův jev) a magnetickým polem (Zeemanův jev)* – elektromagnetické pole působí na elektricky nabitý elektron obíhající kolem atomu. To má za následek dodatečnou sílu působící na e^- , která způsobuje rozštěpení spektrálních čar. Různé atomy jsou různě citlivé na elektrické a magnetické pole. Protože většina hvězd nemá dostatečně silné pole na celém povrchu, které by čáru významně rozšiřovalo, nebudeme se jím dále zabývat.
- *Rozšíření rotací* – hvězdy rotují kolem své osy, často velice rychle. Protože část povrchu hvězdy se pohybuje směrem k nám a část od nás, spektrální čára se tímto díky Dopplerovu jevu rozšiřuje.

U různých čar se uplatňují jednotlivé faktory různě. To, co způsobilo rozšíření spektrální čáry, zjistíme podrobným průzkumem celého spektra. To my nemáme k dispozici, omezme se proto na to, co víme. Předpokládejme, že čára hélia je ve spektru výrazná – to znamená, že patří horké hvězdě s povrchovou teplotou 30 000 K a víc. Dále nic nevíme o rotaci hvězdy, předpokládejme, že se díváme na hvězdu směrem k pólu, a tedy žádnou rotaci pozorovat nebudeme⁹. Zbývá nám tedy pouze rozšíření způsobené tepelným pohybem molekul.

Podle zadání je čára široká 0,07 nm. Polovina atomů se pohybuje od pozorovatele, polovina k němu¹⁰. Polovina šířky čáry (nebo také $1/2$ FWHM – full width at half

⁹) Velice horké hvězdy rotují velice rychle, až na hranici své stability. Jelikož jsou horké hvězdy i hmotné, dosahuje obvodová rychlost hvězdy až 300 km/s.

¹⁰) Rozšíření spektrální čáry vlivem teploty vzniká z Maxwellova rozdělení rychlostí

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 \right] \frac{dv}{v},$$

maximum – šířka čáry v polovině největší intenzity) je 0,035 nm. Z Dopplerova jevu pak dostaneme

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad v = 18 \text{ km/s}.$$

Podle ekvipartičního teorému¹¹ platí

$$E = \frac{1}{2}m_{\text{He}}v^2 = \frac{1}{2}kT. \quad (10)$$

Každý atom má pouze jeden stupeň volnosti, protože k Dopplerovu jevu přispívá pouze pohyb ve směru k pozorovateli. Pohyb kolmo k pozorovateli pozorovatelný Dopplerův jev nevyvolá.

Tento vztah se dá odvodit i následovně. Rychlost libovolné molekuly lze rozložit na složky tak, že $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Žádný směr rychlosti není preferován, platí tedy, že $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, kde $\langle v_x^2 \rangle$ je střední hodnota v_x^2 . Rovněž platí, že $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Pak ale musí platit

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3\langle v_z^2 \rangle.$$

Jestliže platí $\frac{1}{2}m_{\text{He}}v^2 = \frac{3}{2}kT$, rovněž musí platit

$$E = \frac{1}{2}m_{\text{He}}v_z^2 = \frac{1}{2}kT,$$

což je rovnice identická s (10), protože v_z je námi pozorovanou rychlostí, kterou změříme spektroskopem. Rychlosti v_x a v_y nepřispívají k Dopplerovu jevu.

Po dosazení zjistíme povrchovou teplotu hvězdy 160 000 K. To je trochu víc, než jsme očekávali, rozdíl je způsoben např. nepřesným modelem nebo tím, že úloha nevychází z naměřených dat. Nebo také tím, že jsme skutečně pozorovali spektrum výjimečně horké hvězdy. Která možnost je správná, bychom zjistili analýzou tvaru spektrální čáry.

Střed heliové čáry 587,563 nm je posunut o 0,072 nm, to znamená, že hvězda se vůči pozorovateli pohybuje. Protože čára je posunuta k červenému konci spektra, hvězda se od nás vzdaluje. Opět podle Dopplerova zákona vypočítáme rychlost vzdalování.

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 37 \text{ km/s}.$$

kde v_0 je nejpravděpodobnější rychlost. Z této rovnice pak integrací dostaneme

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2RT}{M_m}},$$

což je poloviční výsledek, než jsme dostali za zjednodušených podmínek. Neberte to ale tak, že jednodušší řešení je špatně. V praxi často řešíme problémy jednodušeji – buď proto, že úplné řešení neznáme, z principu nejde vypočítat nebo by to bylo zbytečně zdouhavé. O výsledku pak víme, že je přibližný, že se na něj nemůžeme plně spolehnout.

¹¹⁾ Ekvipartiční teorém říká, že na každý stupeň volnosti připadá stejné průměrné množství energie. Dalším stupněm volnosti se rozumí, že částici musíme popsat další souřadnicí, abychom přesně věděli, jaká je její poloha. Atom má tři stupně volnosti (pohyb v osách x , y , z). Kdybychom žili pouze v dvourozměrném prostoru, měl by atom pouze dva stupně volnosti, jelikož by se mohl pohybovat pouze ve směrech x a y . Jestliže se chcete o stupních volnosti dozvědět více, informace najdete v každé lepší knížce o statistické fyzice.

Tato rychlost nám udává pouze to, jak rychle se od nás hvězda vzdaluje, ale ne její rychlost tangenciální. Přesněji, jak rychle se vzdaluje od Země, ne od Slunce. Země, jak víme, obíhá kolem Slunce rychlostí 30 km/s. Proto bez znalosti souřadnic hvězdy a okamžiku, kdy jsme spektrum pořídili, nemůžeme zjistit rychlost v prostoru. Tangenciální rychlost pomocí spektroskopie nemůžeme vůbec zjistit, musíme ji určovat pomocí změny její polohy na obloze za dlouhé časové období. Nejrychlejší hvězdy se vůči pozadí pohnou i o několik obloukových sekund za rok.

Úloha II.4 ... *tepelná vodivost kovu*

(5 bodů; průměr 2,05; řešilo 21 studentů)

Odvoďte, jakým způsobem závisí *tepelná vodivost kovu* na teplotě, pokud znáte závislost jeho elektrické vodivosti na teplotě.

Pro vodivostní elektrony můžete použít model ideálního plynu, tj. elektrony se pohybují volně (přítomnost iontových zbytků vůbec neuvažujeme) a přímočaře až na občasné srážky s jinými elektrony, které změni směr i velikost jejich rychlosti.

Teplo přenesené krystalovou mřížkou kovu je zanedbatelné oproti teplu přenesenému vodivostními elektrony. Každý elektron má tepelnou kapacitu c , která nezávisí na teplotě.

Úlohu vyřešíme v rámci Drudeho teorie kovů, která pochází z přelomu 19. a 20. století. Budeme předpokládat, že když přiblížíme atomy tak, aby vytvořily kovový krystal, stanou se valenční elektrony nevázanými a budou se moci volně pohybovat skrze krystal. Tyto elektrony budeme nazývat *vodivostní*. Iontové zbytky tvoří krystalovou mřížku a představují prakticky veškerou hmotu krystalu, proto pohyb iontů vzhledem k pohybu vodivostních elektronů zanedbáme.

Přestože mezi elektrony navzájem a mezi elektrony a ionty působí silná elektromagnetická interakce, na vodivostní elektrony aplikujeme kinetickou teorii ideálního plynu s jen drobnými modifikacemi. Hlavní předpoklady jsou:

1. *Aproximace nezávislých a volných elektronů*. Mezi srážkami je interakce vodivostních elektronů mezi sebou navzájem a s ionty zanedbána. To znamená, že se elektrony mezi srážkami pohybují rovnoměrně přímočaře nebo podle druhého Newtonova zákona, pokud se kov nachází ve vnějším silovém poli.
2. Srážky elektronů jsou okamžité události, které skokově změni směr a velikost rychlosti vodivostních elektronů. Pro pochopení vodivosti je jedno, zda se jedná o srážky mezi elektrony nebo o srážky elektronů s ionty.
3. Střední doba mezi srážkami¹² τ nezávisí na poloze ani rychlosti elektronu. V teorii pevných látek se ukazuje, že tento předpoklad je překvapivě dobrý v celé řadě aplikací.
4. Elektrony dosahují tepelné rovnováhy s okolím jenom prostřednictvím srážek. Tento proces lze jednoduše popsat: okamžitě po každé srážce má elektron rychlost, která nijak nezávisí na jeho rychlosti před srážkou, náhodného směru a velikosti, která odpovídá teplotě v místě srážky.

¹²⁾ Střední doba od poslední srážky je τ a střední doba do následující srážky je rovněž τ .

Číselnou hustotu vodivostních elektronů budeme značit n , tyto hustoty jsou typicky tisíckrát větší než u ideálního plynu při normálním tlaku a teplotě.

Elektrická vodivost kovů

Diferenciální Ohmův zákon¹³

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

říká, že proud tekoucí kovem je přímo úměrný vnějšímu elektrickému poli. Konstantu úměrnosti σ nazýváme *elektrická vodivost*, směr vektoru proudové hustoty \mathbf{j} je rovnoběžný se směrem proudu v daném místě a jeho velikost odpovídá velikosti proudu vztaženého na jednotku plochy kolmé na směr tečení proudu.

V každém bodě krystalu kovu se elektrony pohybují různými rychlostmi, jejich průměrnou rychlost v daném bodě označme \mathbf{v} . Za nepřítomnosti vnějšího elektrického pole a při tepelné rovnováze by tato rychlost byla ve všech bodech nulová. Za přítomnosti vnějšího pole \mathbf{E} však elektrony budou mít nenulovou průměrnou rychlost opačného směru, než je směr vnějšího elektrického pole. Pro proudovou hustotu můžeme napsat

$$\mathbf{j} = -nev.$$

Zrychlení elektronu v době mezi srážkami je podle druhého Newtonova zákona $-e\mathbf{E}/m$. Je-li t doba od poslední srážky a \mathbf{v}_0 jeho rychlost okamžitě po srážce, pak pro rychlost elektronu máme $\mathbf{v}_0 - e\mathbf{E}t/m$. Jelikož předpokládáme, že elektron má po srážce náhodný směr rychlosti, nepřispěje \mathbf{v}_0 nijak do průměrné rychlosti, ta je proto dána střední hodnotou $-e\mathbf{E}t/m$. Jenomže střední hodnota t je τ , proto

$$\mathbf{v} = -\frac{e\mathbf{E}\tau}{m} \Rightarrow \mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}.$$

Pro elektrickou vodivost jsme tedy dostali

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}. \quad (11)$$

Tepelná vodivost kovů

Je dobře známo, že elektrické vodiče vedou teplo mnohem lépe než izolátory. To Drude vysvětluje tím, že tepelná energie je přenášena elektrony mnohem spíše než ionty.

Představte si kovovou tyč, která má jeden konec teplý a druhý chladný. Díky tepelné vodivosti se bude teplejší konec ochlazovat a chladnější ohřívat, dokud se jejich teploty nevyrovnejí. Tok tepelné energie je tedy způsoben rozdílem (gradientem) teplot. Pokud budeme chladný konec ochlazovat stejně rychle, jako se zahřívá, a teplý konec zahřívá, stejně rychle jako se ochlazuje, dosáhneme rovnovážného stavu, kde gradient teploty i tok tepelné energie jsou konstantní. Definujeme hustotu toku tepla \mathbf{j}_q jako vektor rovnoběžný se směrem toku tepla, jehož velikost odpovídá tepelné energii přenesené za jednotku času jednotkovou plochou kolmou

¹³⁾ Tento zákon můžeme odvodit z Ohmova zákona $U = RI$, pokud sejmeme závislost této rovnice na tvaru vodiče.

na směr toku tepla. Pro malé teplotní gradienty je hustota toku tepla přímo úměrná rozdílu teplot (Fourierův zákon)

$$\mathbf{j}_q = -\kappa \text{grad } T.$$

Konstantu úměrnosti κ nazýváme tepelná vodivost.

Pro kvantitativní odhad tepelné vodivosti budeme uvažovat jednorozměrný model, ve kterém se elektrony mohou pohybovat jen podél osy x . Teplota se mění spojitě podél osy x , takže platí $j_q = -\kappa dT/dx$. Připomeňme, že rychlost elektronu po srážce odpovídá teplotě mřížky v bodě srážky. Elektrony přicházející z teplejší strany budou mít vyšší energii než elektrony, přicházející z chladnější strany. V daném bodě x přichází polovina elektronů zleva a polovina zprava.

Označíme-li $\mathcal{E}(T)$ tepelnou energii na elektron v kovu, který je v tepelné rovnováze a má teplotu T , potom elektron, jehož poslední srážka se odehrála na souřadnici x' , bude mít tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x'])$. Elektron přicházející zleva měl srážku v průměru na souřadnici $x - v\tau$, a nese proto průměrnou tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x - v\tau])$. Podobně elektron přicházející zprava nese průměrnou tepelnou energii $\mathcal{E}(T[x + v\tau])$. Celkovou hustotu toku tepla dostaneme jako počet elektronů na jednotku objemu krát jejich rychlost¹⁴ krát energie přenášená jedním elektronem

$$j_q = \frac{1}{2}nv[\mathcal{E}(T[x - v\tau]) - \mathcal{E}(T[x + v\tau])].$$

Za předpokladu, že střední volná dráha $v\tau$ je velice malá, provedeme rozvoj kolem bodu x

$$j_q = nv^2\tau \frac{d\mathcal{E}}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right).$$

Při přechodu do třech dimenzí musíme nahradit rychlost v x -ovou složkou rychlosti \mathbf{v} elektronu. Jelikož pro střední hodnotu x -ové složky (i ostatních) rychlosti platí $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}v^2$, kde v^2 je střední kvadratická rychlost, máme

$$\mathbf{j}_q = -\frac{1}{3}v^2\tau c \text{grad } T,$$

kde c je měrná tepelná kapacita elektronového plynu

$$c = \frac{1}{V} \frac{dE}{dT} = \frac{N}{V} \frac{d\mathcal{E}}{dT} = n \frac{d\mathcal{E}}{dT}.$$

Pro tepelnou vodivost jsme tedy dostali

$$\kappa = \frac{1}{3}v^2\tau c. \quad (12)$$

Elektrická i tepelná vodivost závisí lineárně na střední době mezi srážkami τ , jejich podíl tedy na této veličině, o které bychom těžko uměli něco říci, nezávisí

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\frac{1}{3}cmv^2}{ne^2}. \quad (13)$$

¹⁴⁾ Můžete namítnout, že jsme přehlédli skutečnost, že elektron přicházející zleva má jinou střední rychlost než elektron přicházející zprava (ze stejného důvodu přenášejí různou tepelnou energii). Rigorózním postupem lze však ukázat, že naše chyba se kompenzuje s jiným přehlédnutím (střední doba τ závisí na rychlosti), a náš výsledek je proto správnější.

Dále se pokusíme odvodit, jak tento podíl závisí na teplotě. Vyjdeme z Drudeho modelu, tj. použijeme zákony pro ideální plyn

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT, \quad c = \frac{3}{2}nk, \quad (14)$$

kde k je Boltzmannova konstanta. Výsledek je

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 T.$$

Poměr tepelné a elektrické vodivosti je přímo úměrný teplotě, což je hledaný výsledek, na který jsme se v zadání ptali. Říká se mu Wiedemannův-Franzův zákon.

Poslední vztah dává Lorentzovo číslo

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 1,11 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}. \quad (15)$$

Toto číslo je konstanta nezávislá na teplotě a stejná pro všechny kovy. Jeho hodnota je asi poloviční než typické hodnoty Lorentzova čísla uvedené v následující tabulce.

	$\kappa/\sigma T$ [$10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}$] při $T = 273 \text{ K}$	$\kappa/\sigma T$ [$10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}$] při $T = 373 \text{ K}$
Cu	2,20	2,29
Ag	2,31	2,38
Fe	2,61	2,88
Zn	2,28	2,30
Al	2,14	2,19
Sn	2,48	2,54
Bi	3,53	3,35

Experimentální hodnoty Lorentzova čísla $\kappa/\sigma T$ pro vybrané kovy při dvou různých teplotách.

Ve svém původním chybném výpočtu (vodivost (11) mu vyšla poloviční) došel Drude k dvojnásobné hodnotě, než je (15), což bylo ve výjimečném souhlasu s experimentem. Jenomže se experimentálně nepovedlo ověřit elektronový příspěvek $c = 3nk/2$ k tepelné kapacitě kovu. Dokonce se zdálo, že elektrony k tepelné kapacitě nijak nepřispívají.

Správné vysvětlení dala až kvantová mechanika, podle které stavy elektronu s ostrou hodnotou energie mají pouze diskrétní spektrum. Elektrony jsou fermiony, proto se navíc v každém takovém stavu může nacházet nejvýše dva elektrony s různou projekcí spinu. Rozdělení energie elektronů potom popisuje Fermiho-Diracova statistika, která pro volné elektrony dává zcela jiné výsledky než (14)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{E}_F, \quad c = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kT}{\mathcal{E}_F} \right) nk,$$

kde \mathcal{E}_F je Fermiho energie¹⁵. Pak dosazením do (13) dostaneme

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2,44 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \Omega \cdot \text{K}^{-2}.$$

¹⁵⁾ Energie elektronu v nejvyšším zaplněném stavu při teplotě 0 K.

Tato hodnota Lorentzova čísla již odpovídá experimentálním datům.

Je vlastně náhoda, že ač Drudeho model nedokázal předpovědět správnou hodnotu Lorentzova čísla, vysvětlil, že nezávisí na teplotě.

Úloha II . P ... *dechové nástroje*

(4 body; průměr 2,69; řešilo 39 studentů)

Pokuste se vysvětlit, proč je možné příčnou flétnu „přefouknout“ o oktávu výše (tj. zahrát stejným hmatem i tón s dvojnásobnou frekvencí), zatímco u klarinetu toho dosáhnout nelze.

Zvuk, který slyšíme, je periodická změna tlaku vzduchu. U flétny naráží proud vzduchu z úst na hranu otvoru, tím vznikají víry, nehomogenity v tlaku. Dochází k různým odrazům vlnění, přičemž nejvýrazněji se uplatní frekvence, při které sloupec vzduchu rezonuje. Flétnu se všemi dírkami ucpanými si můžeme představit jako trubici na obou koncích otevřenou, protože hráč vždy nechává část vstupního otvoru nezakrytou. Vzniká stojaté vlnění, na obou koncích trubice leží kmitny (ve skutečnosti se kvůli okrajovým jevům nalézají přibližně o 0,6 poloměru trubice od okraje směrem vně flétny). Vlnová délka základního tónu je dvojnásobná než délka flétny (viz obr. 21), jeho frekvenci určíme ze vztahu

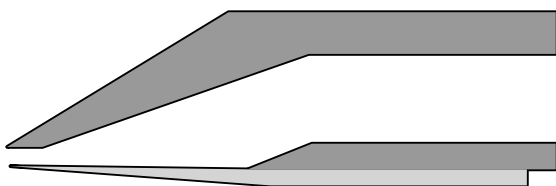
$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l},$$

kde v je rychlost vlny v trubici.

Podmínce kmiten na obou koncích však také vyhovují ostatní vlny na obr. 21. Pro vlnu, jejíž délka je stejná jako délka flétny, platí

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{l} = 2f_0,$$

jedná se tedy o druhou harmonickou frekvenci. Vznikne, pokud je proud vzduchu dostatečně silný.



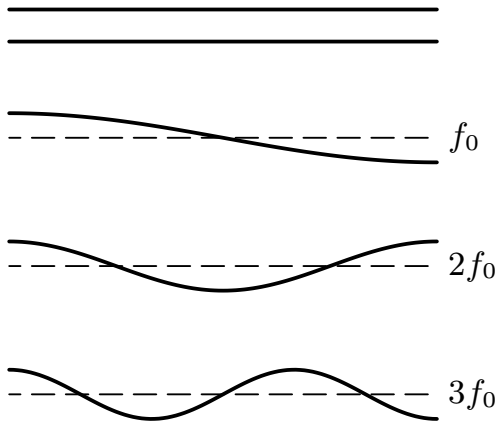
Obr. 20. Jazyček klarinetu

Konstrukce klarinetu je odlišná. Tento nástroj obsahuje klínovitý plátek (jazyček), mezi nímž a stěnami trubice je úzká mezera (obr. 20). Silný proud vzduchu vyvolá v této mezeře podtlak, jazyček se nadzdvihne, čímž tuto mezeru ucpe. Tím se reguluje proud vzduchu přicházející do trubice. Zvuková vlna rozkmitává jazyček, který budí další kmity vzduchového sloupce v trubici.

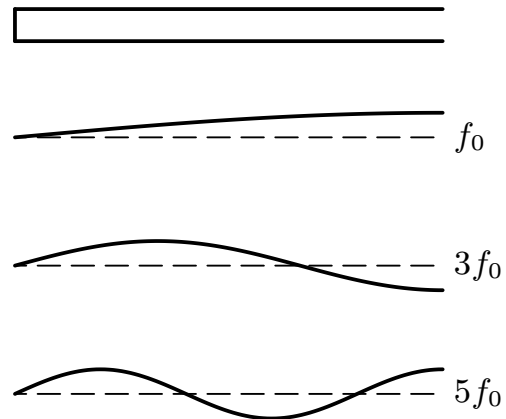
Při vhodném umístění a tlumení plátku je přefouknutí přeci jen možné, nese tkáváme se však se všemi harmonickými frekvencemi. Protože je mezera u jazyčku velmi malá, můžeme trubici považovat na tomto konci za uzavřenou, na druhém (vzdálenějším) konci za otevřenou. Rozšíření trubice na vzdálenějším konci zanedbáme. Vznikají stojaté vlny, které mají na jednom konci kmitnu a na druhém uzel (viz obr. 22).

Vlnová délka základního tónu je $\lambda = 4l$, odpovídající frekvence je

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l}.$$



Obr. 21. Vyšší harmonické u flétny.



Obr. 22. Vyšší harmonické u klarinetu.

Následující vlna má uvnitř nástroje ještě jeden uzel a jednu kmitnu, pro její frekvenci proto platí

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4l/3} = 3f_0.$$

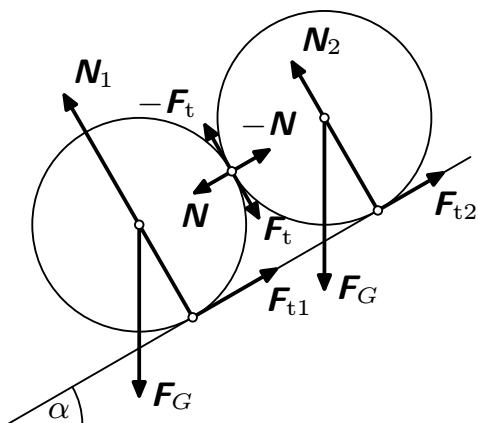
Obdobnou úvahou dospějeme k tomu, že mohou vzniknout pouze liché násobky základní frekvence. Třetí harmonické frekvence lze snadněji dosáhnout také otevřením otvoru ležícího přibližně ve třetině délky rezonanční trubice, změna hmatu ale nebyla v zadání povolena.

To, co jsme v tomto řešení nastínili, byl jen přibližný model těchto nástrojů, ve skutečnosti bude vznik tónu ovlivňovat více faktorů.

Úloha III.1 ... dotyk koule a válce

(4 body; průměr 1,69; řešilo 52 studentů)

Koule a válec o stejném poloměru a stejné hmotnosti jsou vyrobené z různých materiálů a leží na nakloněné rovině tak, že se vzájemně dotýkají. Určete, za jakých podmínek zůstanou ležet v klidu.



Obr. 23. Síly působící na válec a kouli.

Začneme tím, že si označíme dle obrázku 23 všechny síly, které na soustavu koule a válce působí. Tělesa na sebe vzájemně působí normálními silami \mathbf{N} a $-\mathbf{N}$ a třecími silami \mathbf{F}_t a $-\mathbf{F}_t$. Pro naše řešení zanedbáme valivý odpor, jelikož jeho velikost by byla o několik řádů nižší než velikosti ostatních uvažovaných sil.

Aby náš systém zůstal v klidu, musí být výslednice všech vnějších sil působících na každé těleso nulová. Obdobně musí mít nulovou velikost také součet všech momentů vnějších sil. Díky tomu, že nás zajímá statický případ, musí toto platit pro momenty sil vůči libovolné ose, tudíž i pro osu, která prochází středem koule (válce)

a je zároveň kolmá k nákresně. Jelikož vůči těmto osám mají nenulový moment jen třecí síly, budeme se momenty sil zabývat dříve než výslednicemi sil.

Klidové tření mezi válcem a podložkou i klidové tření mezi válcem a koulí působí se stejným ramenem síly vůči středu tohoto tělesa, proto platí rovnost $F_t = F_{t1}$. Obdobně pro druhé těleso zjistíme, že $F_t = F_{t2}$.

Nyní se zaměříme na výslednice vnějších sil. Z rovnováhy všech sil působících na válec pro složky sil rovnoběžných s nakloněnou rovinou plyne

$$mg \sin \alpha + N - F_{t1} = 0.$$

Obdobně pro kouli získáme vztah

$$mg \sin \alpha - N - F_{t2} = 0.$$

Odečtením posledních dvou rovnic dostaneme $N = 0$. Tělesa tedy k sobě nejsou přitisknuta, a tudíž nemůžou vzniknout ani třecí síly \mathbf{F}_t a $-\mathbf{F}_t$, což je ve sporu s předpokladem. Soustava nemůže být ve statické rovnováze a nemůže tedy zůstat v klidu. Jiná situace by samozřejmě nastala, pokud by tělesa měla rozdílné hmotnosti, nebo průměry.

Úloha III.2 ... nájezd na čočku

(4 body; průměr 2,88; řešilo 51 studentů)

Mějme spojku o ohniskové vzdálenosti f . Zdroj světla je na ose ve vzdálenosti $a > f$ od čočky, za kterou vzniká jeho obraz. Zdrojem začneme pohybovat určitou rychlostí směrem k čočce. Určete, jak rychle se pohybuje obraz. Rozhodněte, zda tato rychlost může být i nadsvětelná. Bylo by to v rozporu s principy speciální teorie relativity?

Ačkoliv je úloha velmi nevinně zadaná, skrývá mnohé nástrahy. Problém je v tom, že nejsou splněny předpoklady pro použití geometrické optiky.

Zkusme úlohu vyřešit nejdříve zcela naivně použitím zobrazovací rovnice. Pro polohu předmětu platí $a = a_0 - vt$, kde a_0 je počáteční poloha předmětu a v jeho rychlost. Pro polohu obrazu potom dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{(a_0 - vt)f}{a_0 - vt - f}.$$

Rychlost pohybu obrazu vypočítáme jako derivaci polohy podle času

$$v' = \frac{da'}{dt} = \frac{f^2 v}{(a_0 - vt - f)^2} = v \left(\frac{f}{a - f} \right)^2.$$

Vidíme tedy, že rychlost může nabývat libovolné velikosti, tedy i nekonečné (pokud jmenovatel jde k nule). Zde ale narážíme na zásadní problém. Toto řešení je zjevně špatně, neboť zobrazovací rovnice byla odvozena za předpokladu nekonečné rychlosti světla.

Pokud položíme před čočku předmět, bude chvíli trvat, než vznikne za čočkou obraz. Fotony tam musí chvíli letět a jejich rychlost není nekonečná, jak dobře víme. Ve statickém případě by to moc nevadilo, neboť by po nějaké chvíli obraz vznikl a poté už by stále existoval (tedy byl by zachytitelný na stínítku). Pro případ pohybujícího se předmětu to ale nejde. Rychlost obrazu, jak jsme ji vypočítali, totiž neodpovídá ničemu reálnému (jedná se pouze o virtuální bod, kam paprsky doletí někdy v budoucnosti). Pokud nás zajímá obraz, který by šel zachytit na stínítku (tj. který by byl skutečně vidět), musíme konečnou rychlost světla započítat.

Pokud je v čase $t_1 = 0$ předmět umístěn v poloze $x = a$, vytvoří paprsek obraz v poloze a' v čase $t'_1 = (a + a')/c$. O chvíli později v čase $t_2 = dt$ je předmět umístěn v poloze $x = a - da$ a obraz v poloze $a' + da'$ se utvoří v čase $t'_2 = (a - da + a' + da')/c + dt$. Obraz se tedy posune o da' za čas $t'_2 - t'_1$. Pro rychlost obrazu máme

$$v' = \frac{da'}{t'_2 - t'_1} = \frac{da'}{(da' - da)/c + dt}.$$

Po dosazení za $da = v dt$ a $da' = v f^2 / (a - f)^2 dt$ dostaneme po úpravách

$$v' = \frac{v f^2}{(a - f)^2 - a(a - 2f) \cdot v/c}.$$

Snadno se přesvědčíme, že takto vypočítaná rychlost je omezená rychlostí světla. Takže by se zdálo být vše v pořádku. Problémy však nekončí.

Tento výsledek totiž platí pouze pro bodový zdroj a hlavně pouze pro paprsky, které jdou po ose (taková totální paraxiální aproximace). Paprskům (přesněji fotonům), které nejdou po ose, trvá déle, než se na místo určení dostanou. To znamená, že nemůže vzniknout ostrý obraz, protože jeho jednotlivé části vzniknou v různých časech (příslušné fotony tam doletí postupně). Výsledkem tedy je, že v případě pohybujícího se předmětu nevznikne ostrý obraz. Naopak, obraz se bude postupně rozmazávat, a to tím víc, čím bude rychlost pohybu obrazu větší.

Úloha III.3 ... odložená koupel

(4 body; průměr 1,63; řešilo 30 studentů)

Robin se rozhodl, že se po půl roce vykoupe. Napustil si vanu teplou vodou o teplotě T_1 a objemu V_1 . Ke koupání ale zase nedošlo. Napadlo ho, že je to zbytečné plýtvání energií, teplo z vany totiž lze použít i lépe.

Robin je šikovný a umí si vyrobit libovolný tepelný stroj, proto si už dávno chtěl izotermicky stlačit plyn o teplotě T , objemu V_0 a hustotě ρ . A tady k tomu dostal ideální příležitost. Jako chladič použil okolní vzduch, jehož množství je nevyčerpatelné a jehož teplota je T_2 . Určete, na jaký minimální objem V_{\min} lze tento plyn stlačit, použije-li k tomu Robin teplou vodu ve vaně a svůj tepelný stroj.

K lepšímu znázornění problému nám pomůže obrázek 24. Veličiny odpovídající vaně označme indexem 1, vzduchu indexem 2 a zahřívanému plynu indexem 3. Kladným znaménkem označujeme teplo, které dané těleso přijalo, záporným znaménkem teplo odevzdané. Obdobně je práce vykonaná na plynu kladná. Klíčové bylo uvědomit si, že můžeme využít teplo δQ_3 uvolněné při izotermickém stlačování plynu.

Pokud je vnitřní energie plynu jenom funkcí teploty (což např. pro ideální plyn platí), nebude se při izotermickém ději měnit. Z prvního termodynamického zákona $dU = \delta Q + \delta W$ dostáváme pro element práce $\delta W = -\delta Q_3$. Soustava jako celek je uzavřená, její celková vnitřní energie se tedy nemění. Protože na vaně ani vzduchu se práce nekoná, budou přírůstky jejich vnitřní energie rovny přírůstkům tepel. Při použití výše uvedené znaménkové konvence dostáváme

Obr. 24. Schéma systémů a děje.

$$\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta Q_3 + \delta W = \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0.$$

Zavedme veličinu zvanou entropie následujícím vztahem pro její malý přírůstek $dS = \delta Q/T$.¹⁶ Celková entropie izolované soustavy nikdy neklesá, což si můžeme

¹⁶⁾ Pro přírůstek entropie (obdobně jako u vnitřní energie) používáme symbolu totálního diferenciálu d , protože jde o stavovou veličinu (při pevném látkovém množství je pevně určena hodnotami U a V). Oproti tomu se práce a teplo vztahují k určité trajektorii ve stavovém prostoru, nejsou určeny jedním bodem stavového prostoru, totální diferenciál nemají.

ilustrovat na příkladu dvou těles o teplotách T_s a T_t ($T_s < T_t$). Vyjádříme si změnu celkové entropie za předpokladu, že si obě tělesa vyměňují teplo pouze mezi sebou (tj. $Q_s = -Q_t$)

$$dS = dS_s + dS_t = \frac{\delta Q_s}{T_s} + \frac{\delta Q_t}{T_t} = \delta Q_s \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_t} \right) \geq 0.$$

Uvědomme si, že výraz v závorce je kladný a záporné δQ_s by odpovídalo předávání tepla ze studenějšího tělesa teplejšímu, což odporuje druhému termodynamickému zákonu.

Pro uvažovaný systém tedy dostáváme

$$\begin{aligned} dS_1 + dS_2 + dS_3 &\geq 0, \\ \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} + \frac{\delta Q_3}{T} &\geq 0. \end{aligned}$$

Uvažujme, že tepelná kapacita C vody ve vaně je nezávislá na teplotě, potom $\delta Q_1 = -\delta Q_2 = C dT_1$. Pro změnu entropie systému během celého děje, kde se vana ochladí z teploty T_1 na teplotu T_2 , dostáváme

$$C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT_1}{T_1} - \frac{C}{T_2} \int_{T_1}^{T_2} dT_1 - \frac{W}{T} \geq 0.$$

Vidíme, že práce vykonaná na plynu bude maximální, pokud bude zachována rovnost (děj je tedy vratný, opačný děj by neporušoval podmínku neklesání celkové entropie). Maximální práce je tedy

$$W_{\max} = CT \left[\ln \frac{T_2}{T_1} - \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right) \right]. \quad (16)$$

Abychom určili minimální objem V , musíme znát závislost tlaku plynu na teplotě a objemu, tedy jeho stavovou rovnici. Pro zjednodušení uvažujme ideální plyn se stavovou rovnicí $pV = nRT$, kde n je látkové množství a R univerzální plynová konstanta. Při vyjádření práce si dáme pozor na to, že změna objemu je záporná.

$$W_{\max} = - \int_{V_0}^{V_{\min}} p dV = -nRT \int_{V_0}^{V_{\min}} \frac{1}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_{\min}}{V_0}. \quad (17)$$

Porovnáním vztahů (16) a (17) dostáváme

$$V_{\min} = V_0 \exp \left[\frac{C}{nR} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} - \ln \frac{T_2}{T_1} \right) \right].$$

Ukažme si, že uvedené maximální práce lze skutečně dosáhnout. Vytvoříme Carnotův cyklus s vanou jako ohříváčem a vzduchem jako chladičem. Vana dodává teplo $-\delta Q_1$, tímto cyklem můžeme tedy získat práci $(-\delta Q_1)(1 - T_2/T_1)$. (Dokažte sami obdobnou úvahou jako na začátku řešení, že účinnost Carnotova cyklu je nejlepší možná.) Teplo $(-\delta Q_3)$, které se uvolní při stlačování plynu, můžeme využít

v dalším Carnotově cyklu, probíhajícím mezi plynem a vzduchem. Pro element práce vykonané na plynu dostáváme

$$\delta W = (-\delta Q_1) \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) + (-\delta Q_3) \left(1 - \frac{T_2}{T}\right).$$

Pokud si uvědomíme, že $(-\delta Q_3) = \delta W$ a pro element tepla platí $\delta Q_1 = C dT_1$, obdržíme rovnici

$$\delta W = -C \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dT_1 + \delta W \left(1 - \frac{T_2}{T}\right),$$

z níž snadno osamostatníme element práce

$$\delta W = -C \frac{T}{T_2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) dT_1.$$

Integrací opět dospějeme k výsledku (16).

Abychom mohli splnit podmínku izotermického stlačování, musí být $T \geq T_2$, v opačném případě by plyn nemohl odevzdávat teplo žádnému okolnímu objektu.

Úloha III.4 ... stoupavý proud

(3 body; průměr 2,16; řešilo 32 studentů)

Letadlo letí vodorovně rychlostí o velikosti v a najednou vletne do stoupavého proudu o rychlosti velikosti v' . Jaké bude počáteční vertikální zrychlení letadla těsně po nalétnutí do stoupavého proudu?

Předpokládejte, že součinitel vztlaku C (koeficient v Newtonově vzorci pro vztlak) závisí lineárně na úhlu, který svírá směr proudění vzduchu s rovinou křídla.

Svislá vztlaková síla působící na letadlo je dle Newtonova vzorce rovna



Obr. 25. Křídlo před náletem do stoupavého proudu.

$$F_v = \frac{1}{2} C \rho S v^2,$$

kde S je celková nosná plocha křídla, ρ hustota vzduchu a v velikost rychlosti vzduchu vůči křídlu. Koeficient vztlaku C charakterizuje křídlo včetně jeho náklonu vůči vzduchu.



Obr. 26. Křídlo po náletu do stoupavého proudu.

Sledujme problém ze soustavy spojené s letadlem. Na počátku letadlo letí vodorovně, křídlo je skloněno vůči horizontální rovině, ve které fouká vítr, o úhel α_0 , jak vidíme na obr. 25. Po nalétnutí do stoupavého proudu začne na křídlo proudit vzduch pod úhlem $\alpha + \alpha_0$ jako na obr. 26.

Podle zadání víme, že součinitel C je lineárně závislý na úhlu náklonu, pro koeficient odpovídající úhlu náklonu α_0 platí $C_0 = \tilde{C} + k\alpha_0$. Koeficient odpovídající úhlu náklonu $\alpha + \alpha_0$ můžeme vyjádřit ve tvaru $C = \tilde{C} + k(\alpha_0 + \alpha) = C_0 + k\alpha$.

Úhel α můžeme určit z obr. 26, $v'/v = \tan \alpha \approx \alpha$. Aproximaci provádíme za předpokladu, že rychlost stoupavého proudu je mnohem menší než horizontální rychlost letadla. Přímo dosazením do Newtonova vzorce vypočítáme sílu působící na letadlo.

$$F_{\text{před}} = \frac{1}{2}C_0\rho S v^2,$$

$$F_{\text{po}} = \frac{1}{2}C\rho S(v^2 + v'^2) = \frac{1}{2}(C_0 + k\alpha)\rho S(v^2 + v'^2) = \frac{1}{2}(C_0 + kv'/v)\rho S(v^2 + v'^2).$$

Síla $F_{\text{před}}$ kompenzuje gravitaci, proto počáteční vertikální zrychlení je rovno

$$a = \frac{F_{\text{po}} - F_{\text{před}}}{m} = \frac{C_0v'^2 + kv'(v'^2 + v^2)/v}{2m} \rho S,$$

kde m je hmotnost letadla.

Úloha III. P ... udýchaný běžec na ledě

(4 body; průměr 1,49; řešilo 53 studentů)

Jedno pozdní zimní odpoledne se šel Matouš proběhnout na zamrzlý broumovský rybník. Matouš chvilku běžel, ale po pár metrech už nemohl a zastavil se. V zápětí se však pod ním led prolomil a Matouš zahučel pod vodu. Vysvětlete, proč se při běhu pod Matoušem led neprolomil a po zastavení ano?

Nejdříve si vyslechněme rozmluvu našich starých známých.

Pták FYKOSák: „Slyšel jsi, že je nejlepší po ledě běžet a ne na něm jen tak stát?“

Student Pilný: „A to proč?“

P: „Mně to neprozradili. Mám ale takovouto teorii. Když na ledě stojíš, uděluješ danému místu ledu větší impuls síly, než když po něm jen tak proběhneš. A to i přesto, že při běhu na led určitě působíš větší silou než při běhu. A když ledu udělíš větší impuls síly, než je mezní impuls síly, pak se led prolomí.“

S: „Počkej, to je ale divné. Představ si to takto. Na led položíš také závaží, aby zdaleka nedosahovalo hodnotu síly, při které se led běžně prolomí, a čekáš. A za dostatečně dlouhý čas, když závaží udělí ledu potřebný impuls, se led prolomí.“

P: „Přesně to jsem říkal.“

S: „Ale přesně to je na tom divné. To by znamenalo, že je jedno, jak velkou silou působíš, že led reaguje na zatížení různou silou stále stejně, v podstatě lineárně a to není reálné.“

P: „A čím bys to vysvětlil ty?“

S: „No, je to něco podobného. Ukazuje se, že většina látek dokáže krátce odolat mnohem většímu zatížení, než je to při dlouhodobém zatížení. Říkáme, že dynamické mezní zatížení je větší než statické zatížení. A ještě bys neměl zapomenout, že se pod ledem nachází voda. Je například určitě velký rozdíl, když položíš ledovou desku na zem a když ji jen upevníš v nějakých bodech a potom ji namáháš. V prvním případě (to víš ze zkušenosti) vydrží větší zatížení.“

P: „To mám tedy podle tebe skákat na ledě, když se nechci utopit?“

S: „Určitě bych to nenazval skákáním. A kdybys skákal stále na stejném místě, tak se určitě proboříš, protože led sice můžeš jednorázově zatížit větší silou, ale ne víckrát. Takže nejlepší je skákat vždy na nové místo, tedy běžet. Ale i to určitě s mírou. Led také vydrží jen určité namáhání. Proto by bylo nejideálnější běžet co neopatrněji. No, a co se týká tebe, nejlepší je létat.“

Teď se na věc podíváme trochu blíže. Při běhu se od ledu odrážíme a následně na něj dopadáme, přičemž naše těžiště určitě nezůstane ve stejné výšce nad ledem. To ale znamená, že led je namáhaný znatelně víc, a přece to vydrží. Čím to tedy může být?

Co víme o ledě? V první řadě je ideální led¹⁷ krystalická a takzvaná křehká látka. Z toho zjišťujeme, že se může v různých směrech chovat při zatížení velmi odlišně. Pro křehké látky je charakteristické, že se v porovnání s kovy deformují méně a prakticky výlučně plasticky. Znamená to tedy, že se led na rybníku deformuje zanedbatelně? Je si třeba uvědomit, že struktura ledu na rybníku bude mít asi daleko do ideálního ledového bloku. Led bude mít spíše vrstevnatou strukturu. To samozřejmě způsobuje, že takovýto led je „ohebnější“ než ideální led.

Dále i samotný ideální led má jistou zvláštnost. Pokud bychom chtěli určit mezní napětí, mohli bychom použít stejné postupy jako u železu podobných látek. Jenže porovnání se skutečností ukazuje, že se takovéto úvahy od skutečnosti odlišují i více než stonásobně. Kde je tedy skrytý problém? Problém spočívá v tom, že v každé látce se vyskytují různé defekty a ty hrají pro křehké látky podstatnou roli. Pro mikrorys (vzpomínaný defekt) určité délky c v objemu, kde se nachází jen on a na který působí napětí způsobené zatížením (těchto zjednodušení se asi ve fyzice už nezbavíme), je možné odvodit následující vztah

$$\sigma > \sqrt{\frac{8E\gamma}{\pi c}}.$$

Ten mluví o tom, že při napětí σ větším, než je výraz napravo, dojde k náhlému prolomení materiálu (do té doby dochází k malým, ale plastickým deformacím), přičemž E a γ jsou materiálové konstanty (samozřejmě v určitém přiblížení). Že nevěříte? Zkuste to ověřit experimentem. Ukazuje se totiž, že tento vztah odpovídá realitě velmi dobře. Při dynamickém zatížení se začnou na ledě zvětšovat rysy a v podstatě klesá maximální možné zatížení. Když přestaneme zatěžovat materiál ve správném momentě, nepraskne. Proto musíme jednoduše ve správný moment odskočit.

Druhým podstatným faktorem je voda pod ledem. Představme si, že stojíme na nějakém kousku ledu. Protože jsme těžcí, led se potápí a my za chvíli získáme nepříjemnou zkušenost s ledovou vodou. Když však na takovýto kousek ledu doskočíme a okamžitě odskočíme, nemusíme se potopit. Čím to je? Led si pokojně plave na hladině. Doskočíme na něj, působíme na něj naší tíhou a okamžitá rychlost, se kterou se led potápí, je velká (kousek ledu je malý), proto i odporová síla bude velká. Proto pokud nebudeme příliš těžcí, můžeme stihnout odskočit. V případě ledu na rybníku se jedná o něco velmi podobného. Rozdíl je v tom, že tentokrát se nejedná

¹⁷⁾ Ideální led zde nazýváme krystalickou mřížku s různými poruchami, tedy v makroskopickém měřítku je homogenní.

jen o nějaký kus ledu, ale o součást ledu na rybníce. Odsud plyne, že celková síla (resp. napětí v daném bodě) je o něco menší než síla plynoucí jen z toho, jak běžíme (hlavně jak se pohybuje těžiště). Odsud dokonce plyne, že za určitých okolností může být dokonce celkové zatížení ledu po dobu dopadu menší než při obyčejném stání! Takže se oba vlivy velmi vhodně doplňují.

Jednotky na planetě Balónků

Každá fyzikální soustava, chce-li dosáhnout nějakého fyzikálního uplatnění (výsledku), musí ze vstupních dat vyprodukovat číslo krát tzv. rozměr tohoto čísla. Všechna odvození v následujících řešeních uděláme v soustavě SI.

Když vyjadřujeme délku, hustotu, tlak apod. pomocí čísel, vždy musíme za napsanými ciframi uvést také jednotky, ve kterých jsme měřili. Naměřili jsme délku 12 centimetrů nebo 12 stop? Či např. osvětlení: je to 1 lux nebo Hefnerova svíčka na čtverečný yard? Jednotka je nedílnou součástí výsledku.

V našem případě máme dvě soustavy jednotek. První je soustava SI (tvořena metrem, sekundou, kilogramem, molem, ...), druhá je balonkovská soustava ŠTLM (špurgl, temp, luftík, muška, ...). Každou fyzikální veličinu umíme převést z jedné soustavy jednotek do druhé.

Z nápovědy v první úloze (*Každý Balónek má maximálně jeden provázek.*) jsme měli usoudit, že Balónci počítají ve dvojkové soustavě. (Stejně jako lidé počítají v desítkové soustavě, protože mají deset prstů.) Všechny číselné hodnoty byly proto zadané ve dvojkové soustavě a tak s nimi bylo potřeba nakládat. Řešení úloh uvádějí výsledky jak ve dvojkové, tak v desítkové soustavě.

Úloha IV.1 ... turnaj Balónků

(4 body; průměr 2,71; řešilo 45 studentů)

Kdesi v dalekém vesmíru za 1001 hvězdami a jednou černou dírou byla nebyla planeta Balónků. Tyto inteligentní duté bytosti každý rok pořádají soutěž „Čím výš, tím líp“.

Každý z Balónků si přiváže provázek, aby bylo možné určit jeho výšku. Aby se mohli Balónci účastnit soutěže, musí mít všichni stejné parametry. Kupodivu nikdo zatím nikdy nevyhrál. Délková hustota provázku je 11 luftíků na špurgl, hustota atmosféry je 110101 luftíků na krychlový špurgl, poloměr každého z Balónků je 10 špurglů, hmotnost Balónka je 10 luftíků. Při pádu tělesa v tíhovém poli na planetě Balónků se za každý temp jeho rychlost zvýší o 111 špurglů za temp. Určete, jakou maximální výšku Balónka hlavní rozhodčí soutěže naměří a jak se bude Balónek pohybovat po dosažení této výšky. Nezvednutá část provázku každého Balónka leží volně na zemi. Závody Balónků probíhají v malých výškách, kde je hustota atmosféry přibližně konstantní.

Nápověda: Každý Balónek má maximálně jeden provázek.

Představme si, že držíme kulatý balónek objemu V a hmotnosti M , k němuž je přivázaný provázek délkové hustoty τ , jehož konec volně leží na zemi. Atmosféra

má hustotu ρ , velikost tíhového zrychlení označíme g . Teď balónek pustíme – jaké síly na něj působí? Vztlaková síla velikosti $V\rho g$ jej bude tahat nahoru, tíhová velikosti Mg dolů, když balónek trochu vystoupí, provázek ho začne tahat nějakou silou velikosti F_p směrem dolů, a pokud se hýbe, působí na něj také odporová síla velikosti F_o , a to vždy směrem proti okamžité rychlosti.

Najděme rovnovážnou výšku h_0 balónku, ve které se síly působící na balónek přesně ruší. Vztlakovou sílu působící na provázek zanedbáme; předpokládáme, že hustota provázku je mnohem větší než hustota vzduchu. (Stejně by to znamenalo pouze menší efektivní τ .) Výsledná síla působící na balónek má velikost

$$0 = F = V\rho g - Mg - \tau h g$$

a rovnovážná výška je

$$h_0 = \frac{V\rho - M}{\tau} = 1\,001\,001\,111_{[2]} \text{ špurglů} = 591_{[10]} \text{ špurglů}.$$

Jak bude vypadat pohyb balónku? Jsou v podstatě tři možnosti, jak bude pohyb vypadat, závisející na velikosti odporu proti pohybu:

- velký odpor – balónek se pomalu doplazí k rovnovážné poloze,
- mezní odpor – balónek projde rovnovážnou polohou, překmitne a shora se doplazí do rovnovážné polohy,
- malý odpor – balónek projde rovnovážnou polohou vícekrát, kmitá, přičemž perioda jeho pohybu závisí na tlumení, tlumenými kmity se postupně přibližuje k rovnovážné poloze.

Někteří z vás nebyli s tímhle řešením spokojeni a chtěli zjistit přesněji, co se bude s balónkem dít. Abychom to udělali, vrátíme se k analýze sil a sestavíme pohybovou rovnici. Je třeba ale zdůraznit, že následující úvahy budou také nepřesné. To, co získáme, nebude přesná předpověď pohybu balónku, ale hrubý, i když zajímavý pohled na jeho chování.

Pohybová rovnice balónku je

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_{vz} + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_o,$$

kde síly jsou po pořádku vztlaková, tíhová, od provázku a odporová. Všechny síly působí ve svislém směru, takže v dalším budeme psát jenom jednu rovnici pro svislé složky sil.

Určíme velikost síly od provázku. V některých vašich řešeních se vyskytl předpoklad, že velikost síly F_p je stejná jako velikost tíhové síly působící na provaz. Ale síla F_p nejenže vyrovnává tíhovou sílu, ale také navíc urychluje ležící část provázku. Takže F_p bude větší než $\tau h g$. Abychom si úlohu zjednodušili, budeme předpokládat, že energie se ztrácí pouze v důsledku odporu vzduchu a žádné jiné ztráty nenastávají (např. v provázku). Síla velikosti F_p působí na provaz směrem nahoru a při povytáhnutí o kousek dh vykoná práci $F_p dh$. Ta se rovná přírůstku pohybové a polohové energie provázku.

Podívejme se na okamžik t , kdy je balónek ve výšce h a provázek má rychlost v , hmotnost m , a na okamžik $t + dt$, kdy jsou veličiny větší o dh , dv a dm . Přírůstek energie provazu je $F_p dh = dE_k + dE_p$, takže

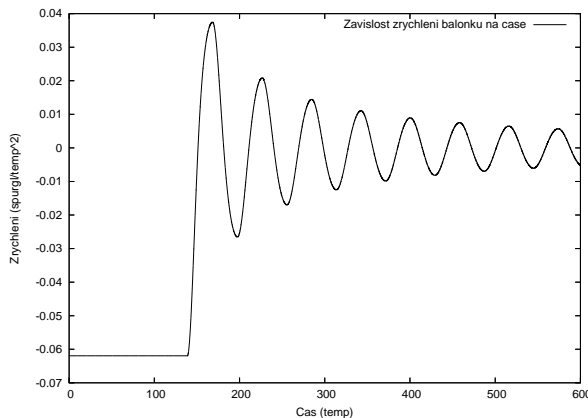
$$F_p dh = \frac{1}{2}v^2 dm + mv dv + \frac{1}{2}gh dm + \frac{1}{2}mg dh \quad \Rightarrow \quad F_p = \frac{1}{2}\tau v^2 + \tau h(a + g).$$

Použijeme lineární a kvadratickou závislost velikosti odporové síly na rychlosti $F_o = Av + C\pi R^2 \rho v^2/2$; směr odporové síly je vždy opačný než směr rychlosti. Pohybová rovnice balónku tedy je

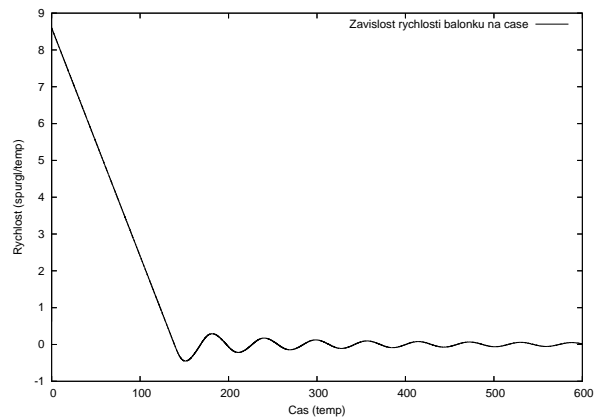
$$(M + \tau h) \frac{d^2 h}{dt^2} = (V\rho - M - \tau h)g - A \frac{dh}{dt} - \frac{1}{2} \left[\tau + C\pi R^2 \rho \operatorname{sgn} \left(\frac{dh}{dt} \right) \right] \left(\frac{dh}{dt} \right)^2$$

a hledáme funkci $h(t)$.

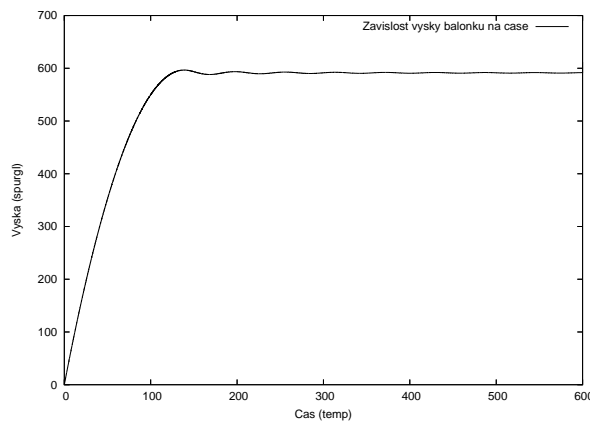
Tvarový součinitel pro kouli je přibližně¹⁸ $C = 1/2$, jak ale odhadnout A ? Závisí na viskozitě prostředí, kterou nevíme. Lze očekávat, že vliv lineárního členu na pohyb bude převládající až blízko rovnovážné polohy, když se balónek pohybuje pomalu – velmi velké A způsobí, že balónek nebude kmitat, ale jenom se pomalu doplazí do rovnovážné polohy. Naopak vliv kvadratického členu bude silnější, když se balónek pohybuje velmi rychle. Abychom alespoň něco zjistili, zvolíme $A = 0$.



Obr. 27. Závislost zrychlení $a(t)$ balónku na čase.



Obr. 28. Závislost rychlosti $v(t)$ balónku na čase.



Obr. 29. Závislost výšky $h(t)$ balónku na čase.

Zrychlení balónku je složitou funkcí h a v , takže kamarád počítač bude mít práci. Řešit takovouto rovnici můžeme pomocí počítače např. takto. Z rovnice můžeme vypočítat zrychlení a , z něho dokážeme vypočítat novou rychlost po uplynutí času Δt jako $v(t + \Delta t) = v(t) + a\Delta t$, z ní umíme vypočítat, jak se v následujícím okamžiku

¹⁸⁾ D. Ilkovič: Fyzika, SVTL 1962, Bratislava.

balónek pohne $y(t + \Delta t) = y + v\Delta t$. Tyto hodnoty dosadíme do pohybové rovnice a vypočítáme nové zrychlení, tak můžeme vypočítat mnoho bodů a pak je vynést do grafu (obrázky 27, 28 a 29).

Podívejme se na výsledek. Balónek si to od počátku šine jednoznačně nahoru a velmi rychle dosáhne maximální rychlosti (tak rychle, že to na grafu není vidět). Poté zrychlení spadne do záporných hodnot a Balónek rovnoměrně zpomaluje, dosahuje maximální výšky 597_[10] špurglů a tlumeně kmitá kolem své rovnovážné polohy. Vidíme, že Balónek je *silně brzděn* a jeho maximální výška je téměř totožná s rovnovážnou.

Není teď těžké říci, jaké výsledky by dal náš model pro zvětšující se A . Větší A znamená větší odporovou sílu, tj. pomalejší vzestup nahoru, ještě větší pak nekmitavý pohyb – Balónek se bude pomalu přibližovat rovnovážné poloze. V každém případě se Balónek výš než do výšky 597 špurglů nedostane. Samozřejmě, náš model není právě nejdokonalejší, odporovou sílu jsme jenom střelili a podobně to bylo s předpokladem ideálního provázku. Ve skutečnosti se jiné vlivy a hlavně vítr nezanedbatelně projeví a někam našeho Balónka zavanou.

Úloha IV . 2 ... výprava na planetu Balónků

(4 body; průměr 3,14; řešilo 29 studentů)

NASA chystá velkou výpravu na planetu Balónků za účelem navázání komunikace s tamními inteligentními dutými bytostmi. Špiónům se podařilo zjistit od místních informátorů následující údaje: atmosféra je složena z plynu o muškové hmotnosti 10001 luftíků na mušku, počet molekul atmosféry v jedné mušce je 10^{1101} , tloušťka atmosféry je 10^{10001} špurglů a srovnáním teploměrů obou civilizací špióni určili, že jednomu pozemskému kelvinu odpovídá sedm luftíků krát špurgl čtvereční na temp čtvereční.

Určete teplotu na povrchu planety a rozhodněte, zda by si měli kosmonauti vzít spíše tričko či kožich. Při řešení se vám můžou hodit i údaje z již zmíněné soutěže.

Pro jednoduchost předpokládejme, že hustota atmosféry je konstantní v celé své výšce. Jiný podobně jednoduchý model předpokládá lineární pokles hustoty s výškou. Složitější modely, používající např. barometrickou formuli

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right)$$

(kterou dostaneme za předpokladu konstantní teploty ve všech výškách), mají jeden velký problém. Vždy v nich neznáme hodnotu víc než jedné neznámé. Potřebovali bychom vědět hodnoty tlaku, teploty, hustoty, ... v jednom bodě svrchní vrstvy atmosféry. Jelikož tyto informace nemáme, je nejjednodušší spokojit se s lineárním, leč nerealistickým modelem (jež takovýto bod poskytuje).

K dalšímu řešení využijeme stavovou rovnici ideálního plynu $pV = NkT$. Hustota atmosféry je konstantní. Tlak na povrchu planety (atmosféra má výšku h) je roven hydrostatickému tlaku $p = \rho h g$. Dosazením těchto dvou rovnic do sebe dostaneme

$$T = \frac{ghM_m}{N_A k}.$$

Všechny výše uvedené rovnice platí i na planetě Balónků. Potíž činí „Boltzmannova konstanta“ v jednotkách ŠTLM. V jednotkách SI je její rozměr J/K. V ŠTLM jednotkách si ji označme k' a zvolme $k' = 1$ (bezrozměrně). Pak platí

$$T = \frac{ghM_m}{N_A k'} \equiv \frac{ghM_m}{N_A}.$$

Toto je vyjádření teploty v ŠTLM ($[T] = \text{luftík} \cdot \text{špurgl}^2 \cdot \text{temp}^{-2}$). My ovšem chceme vyjádřit teplotu T v soustavě SI. V zadání zaznělo: *jednomu pozemskému kelvinu odpovídá sedm luftíků krát špurgl čtvereční na temp čtvereční*. Takže nahradíme-li v rovnici v ŠTLM jednotkách 7 luftíků·špurgl²·temp⁻² jedním kelvinem, dostaneme teplotu v jednotkách SI.

$$\frac{ghM_m}{N_A} \left[\frac{\text{luftík} \cdot \text{špurgl}^2}{\text{temp}^2} \right] = \frac{1}{7} \cdot \frac{ghM_m}{N_A} [\text{K}] = T[\text{K}].$$

Po dosazení zadaných jednotek dostáváme $T = 100\,010\,000_{[2]} \text{ K}$, což je sympatických $272_{[10]} \text{ K}$.

Správnou odpovědí na zadanou otázku po překonání všech peripetií tedy je, že kosmonauti by si měli vzít kožich.

Úloha IV.3 ... Balónci na kolotoči

(3 body; průměr 2,14; řešilo 37 studentů)

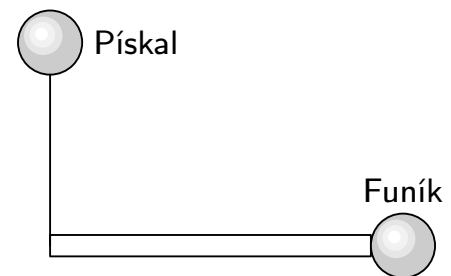
V hlavním městě planety Balónků Medicinbaldorfu se jednou za debrecinský megatemp koná pouť. Hlavní atrakcí je speciální balónkovský kolotoč, který se Funík s Pískalem rozhodli navštívit.

Dutou tyčí délky L je provlečen provázek délky $l > L$. Na jeden konec provázku se přivázal Funík, na druhý konec Pískal. Oba kamarádi by měli vážit stejně, Funík ale ke snídani snědl kousek rozemleté traverzy a je o trošku těžší. Poté se tyč začne točit kolem svislé osy na ni kolmé. Určete polohu osy tak, aby vodorovná vzdálenost mezi Balónky byla co největší.

Abychom mohli určit polohu osy, musíme si nejprve vhodně zvolit počátek soustavy souřadnic. Protože při změně polohy osy se mění těžiště soustavy, je vhodné místo těžiště zvolit jiný stabilnější počátek souřadnic. Zvolme třeba začátek tyče blíže lehčímu Balónkovi (Pískalovi). Dohodněme se i na počátečních podmínkách. Před tím, než se začne kolotoč točit, lehčí Balónek vystoupá do maximální výše a těžší Balónek zůstane nejnižší (viz obr. 30). Poté se začne kolotoč otáčet konstantní úhlovou rychlostí ω .

Zavedme si ještě značení (viz obr. 31). Síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 jsou výslednice tíhové, vztlakové a odstředivé síly a x je hledaná poloha osy rotace.

Úloha se dá řešit tak, že si vzdálenost mezi Balónky vyjádříme jako funkci polohy osy rotace a její první derivaci položíme rovnou nule. Místo toho, abychom převedli



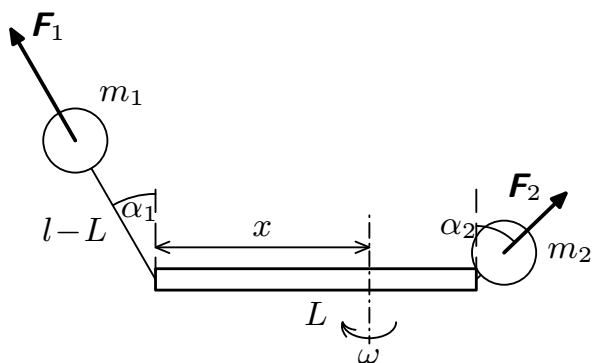
Obr. 30. Pískal a Funík na kolotoči.

úlohu na matematický problém, zkusíme se nejdříve nad úlohou zamyslet a pokusit se ji vyřešit fyzikální úvahou.

Osu umístíme na konec tyče k těžšímu Balónkovi $x = L$ a postupně jí budeme posouvat směrem k lehčímu Balónkovi $x = 0$.

1. V prvním případě bude těžší Balónek namáčknut na tyč a lehčí Balónek bude co nejdále od osy. Vzdálenost mezi Balónky se tak bude limitně¹⁹ blížit l pro velké ω . Ekvivalentně k tomu se úhel α_1 blíží pravému úhlu. Tato poloha je jasný lokální extrém, neboť vzdálenost nemůže být větší než l a navíc při pouze malém posunutí osy směrem k lehčímu Balónkovi je zřejmé, že vzdálenost klesá.
2. Při posouvání osy směrem k lehčímu Balónkovi stále klesá účinek odstředivé síly na lehčího Balónka a roste účinek odstředivé síly na těžšího Balónka, α_1 klesá. V určitém okamžiku musí nastat rovnost velikostí sil F_1 a F_2 . Nastala rovnovážná poloha, která je však labilní. Při dalším posunutí převládne síla F_2 a těžšího Balónka přetáhne lehčí Balónek a namáčkne ho na tyč určitou silou. Tato nová stabilní poloha je evidentně další lokální extrém, tentokrát minimum.²⁰
3. Posouváme-li osu dále směrem k lehčímu Balónkovi, pozorujeme, že vliv odstředivé síly na těžšího Balónka stále roste, zatímco vliv odstředivé síly na lehčího Balónka stále klesá. Takto se dostaneme až na konec tyče $x = 0$, kde nutně musí nastat další lokální extrém. Vzdálenost mezi Balónky se zase limitně¹⁹ blíží l pro velké ω . Ekvivalentně tomu se α_2 blíží pravému úhlu.

Který ze dvou lokálních extrémů je globální? Zase se nejdřív zamysleme. Vzdálenost mezi Balónky je tím větší, čím jsou úhly α_1 a α_2 větší. Tyto úhly jsou tím větší, čím větší je velikost odstředivé síly. Tedy globální extrém musí nastat až v druhém případě. Maximální vzdálenost mezi Balónky tedy nastane v případě, umístíme-li osu na konec tyče u lehčího Balónka.



Obr. 31. Hledání maximální vzdálenosti Pískala a Funíka.

Co se vlastně stane, když Balónci nasednou na kolotoč podle obr. 31 a začnou se točit kolem této osy? Těžší Balónek přetáhne lehčího jen v případě, že velikost odstředivé síly těžšího Balónka bude větší než velikost výslednice vztlakové a tíhové síly lehčího Balónka. Vyjádříme si tedy mezní úhlovou rychlost ω_0

$$V\rho g - m_1 g = m_2 \omega_0^2 L \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{|V\rho - m_1|g/m_2 L},$$

kde V je objem Balónka, ρ je hustota atmosféry a g je místní tíhové zrychlení.

¹⁹⁾ Pro případ, kdy se velikost vztlakové síly bude rovnat velikosti tíhové síly, bude vzdálenost mezi Balónky l pro jakékoliv ω .

²⁰⁾ Zajímavé je, že kdybychom nyní pohnuli osou zpět směrem k těžšímu Balónkovi, původní labilní rovnovážný stav bychom zde už nenašli. Museli bychom se vrátit mnohem více zpět v závislosti na poměru hmotností obou Balónků. Soustava se totiž změnila – lehčí Balónek je namáčknut na tyč a těžší Balónek zaujal svou rovnovážnou polohu co nejdále od osy rotace.

V celé úloze uvažujeme, že Balónci v průběhu otáčení zůstávají ve společné rovině s osou a tyčí. Ve skutečnosti tomu tak není. Balónci mají jistý fázový posuv (jsou ve skluzu), ale to na výsledek úlohy nemá vliv.

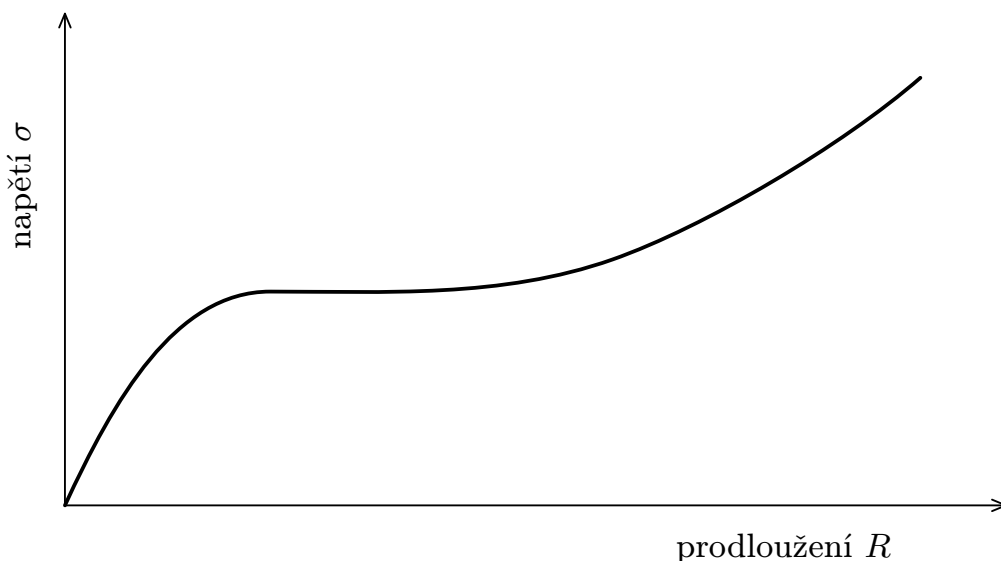
Úloha IV.4 ... svatba Balónka a Balónky

(3 body; průměr 1,48; řešilo 42 studentů)

... a už zní svatební síní slavnostní pískot a fukot. Ano, je to tak, Pískal s Foukalkou si dnes řeknou své písk. A už je tu první novomanželský polibek, při němž se spojí svými otvory. Poté kněz slavnostně rozváže provázky a dojde k propojení. Popište, co bude následovat. Nezapomeňte, že všichni svobodní Balónci mají stejné parametry.

Pokud se dva Balónci spojí otvory, v zásadě mohou nastat dvě různé situace. V případě, že oba byli vcelku málo nafouknuti, nastane případ obdobný chronicky známému experimentu spojených bublin, kdy se jedna bublina prakticky vyfoukne do druhé. Pokud byli oba Balónci nafouknuti více, tato analogie již neplatí a Balónci zůstanou zhruba ve stejném stavu, v jakém byli před spojením.

Pro pochopení fyzikální podstaty rozdílu mezi těmito situacemi nám napomůže kvalitativní graf závislosti napětí gumy na jejím relativním prodloužení (viz obr. 32). Je vidět, že zde máme zhruba tři oblasti. V první (velmi krátké) oblasti napětí rychle roste s prodloužením, toto je ten největší odpor na počátku nafukování. Pak následuje oblast, kdy se napětí příliš nemění s prodloužením, a toto je právě oblast, kdy je situace obdobná bublinám, které mají prakticky konstantní povrchové napětí. A nakonec je tu oblast, kde napětí opět začne růst. Toto je oblast, kde se již prakticky nic neděje po spojení Balónků.

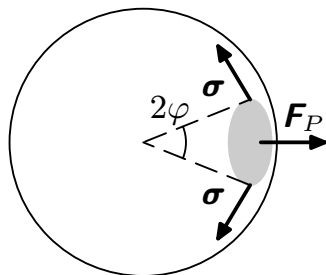


Obr. 32. Závislost napětí gumy na jejím relativním prodloužení.

V celém dalším textu budeme v našich spíše kvalitativních úvahách předpokládat kruhového Balónka o poloměru R s přetlakem P vzduchu uvnitř oproti okolnímu atmosférickému tlaku, kdy navíc přetlak bude malý oproti velikosti atmosférického tlaku. Tudíž hustota vzduchu uvnitř Balónka bude považována za konstantní. Tento předpoklad jde jednoduše ověřit například tak, že pokud k otvoru Balónka připev-

níme trubici, stačí její konec ponořit pod vodu do hloubky necelého půlmetru a Balónek již není schopen překonat hydrostatický tlak.

Nyní se podíváme na myšlený kroužek v povrchu Balónka o poloměru r a budeme studovat, jaké síly na něj působí. Jelikož nás zajímají především ustálené stavy, budeme předpokládat, že tento kroužek je v klidu, a tedy výslednice vnějších sil je nulová. Také zanedbáme vliv gravitace, jelikož hmotnost povrchu Balónka je malá. Zbyly tedy dvě působící síly – přetlak P vzduchu uvnitř Balónka a napětí σ jeho stěny, které působí na obvodu našeho myšleného kruhu, ve směru tečném k povrchu Balónka a zároveň kolmo ke kružnici ohraničující náš myšlený kruh.



Obr. 33. Síly působící na malý kousek povrchu Balónka.

Je zřejmé, že přetlak bude na náš myšlený kruh působit silou F_P směrem ven o velikosti $F_P = \pi r^2 P$. Úhel mezi rovinou našeho myšleného kroužku a tečnou rovinou k povrchu Balónka na okraji kruhu označíme φ . Z geometrie Balónka je zřejmé, že $\sin \varphi = r/R$. Z povahy napětí stěny zase můžeme odvodit, že výslednice napětí po celém obvodu našeho kruhu míří dovnitř Balónka a má velikost

$$F_N = 2\pi r \sigma \sin \varphi = \frac{2\pi \sigma r^2}{R}.$$

Jelikož tyto síly mají opačný směr a jsou to jediné dvě uvažované síly, musí se v klidu jejich velikosti rovnat, tedy

$$\pi r^2 P = \frac{2\pi \sigma r^2}{R} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\sigma}{R}. \quad (18)$$

Musíme si uvědomit, že σ pro Balónek nemusí být zdaleka konstantní, jako je tomu například u bubliny.

Nyní se vrátíme k našemu grafu závislosti σ na relativním prodloužení. Začneme oblastí, kde je σ prakticky konstantní, a situace je tedy analogická dvěma spojeným bublinám. Když se podíváme na (18) a budeme uvažovat konstantní σ , je zřejmé, že čím více bude Balónek nafouknutý, tím nižší tlak bude uvnitř. Tedy pokud na počátku máme stejně nafouknutého Balónka a Balónku a tlak v Balónkovi se nepatrně zvýší, vzduch začne proudit do Balónky a tím ji zvětšovat, čímž klesá tlak uvnitř ní. Zároveň se zmenšuje Balónek, čímž se zvyšuje tlak uvnitř něj. Máme tedy situaci, která skončí až ve chvíli, kdy se jeden z Balónků dostane mimo oblast, kdy σ nezávisí na prodloužení, což v praxi znamená, že jeden z Balónků se skoro vyfoukne a druhý se mírně nafoukne.

Pokud se budeme zabývat oblastí velkých prodloužení, můžeme vcelku úspěšně aproximovat závislost napětí na poloměru Balónka pomocí lineární závislosti, tedy $\sigma = \alpha R$, kde α je nějaký koeficient úměrnosti větší než nula. Pokud tento vztah dosadíme do (18), získáme vztah

$$P = 2\alpha.$$

Je tedy vidět, že tlak v Balónkovi (pro tuto oblast poloměrů) příliš nezávisí na poloměru Balónka. Pokud tedy máme na počátku stejně nafouknutého Balónka

i Balónku a vlivem fluktuací se v jednom z nich nepatrně zvýší tlak, nic se neděje, jelikož ten se opět vyrovná, aniž by se výrazně měnil poloměr.

Úloha IV . P ... Balónek uprchlík

(4 body; průměr 2,37; řešilo 35 studentů)

Na planetě Balónků došlo k revoluci a k moci se dostali fundamentalisté, kteří zakázali jíst traverzy se šlehačkou. Jelikož šlo o Funíkovo oblíbené jídlo, nezbylo mu nic jiného než odejít do dobrovolné emigrace.

Při příletu na Zemi byl Funík zavřen do karantény a byl mu změřen objem V a teplota T . Imigrační úřad však rozhodl, že nedostane azyl, pokud nezmění svůj objem na V' a teplotu na T' . Funík nemůže v karanténě přijímat ani odevzdávat žádné teplo, měnit počet částic, ze kterých je složen, i na traverzy se šlehačkou si prozatím musí nechat zajít chuť. Poradte Funíkovi, jak to má udělat, aby mohl na Zemi prožít šťastný a spokojený život.

I pravil Velký Balón svým věrným Balónkům:

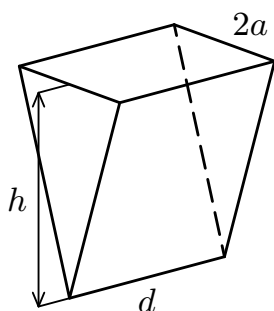
„Dosud jste dodržovali zákony, jež byly vyřčeny v pradávných dobách. Přijde však ten, jenž objeví tajné učení, které mělo být zapomenuto, a vzepře se nesvobodnému pohybu po předem určených křivkách. Jen on pochopí mou radu, že žádný okamžik není dost krátký.“

Jako správný věřící zná Funík tento citát z Balible. V semináři trávili nad interpretací tohoto citátu celé věky. Ale ani oni, ani nikdo z učenců s tím nepohnul. Od té doby si na to nikdy nevzpomněl, až teď v karanténě při zoufalé modlitbě a odříkávání Balónnáše. Ztratil už všechnu naději, jak splnit podmínky, jež mu byly stanoveny. Kdyby jeho teplota T a objem V ležely na adiabatě, která je spojuje s požadovanou teplotou T' a objemem V' , nebylo by co řešit. Prostě by se pořádně nadechnul či naopak vydechnul a bez výměny tepla by dosáhl požadovaných hodnot. Pánové z imigračního ale Funíka na Zemi nechtějí a určili V' a T' tak, aby to takto splnit nešlo. A už od mládí se učil poučku, již vyslovil v dávných dobách moudrý Adiabat, že pokud si s nikým nevyměňuje teplo, musí se jeho stavové veličiny nevyhnutelně pohybovat po předem určené křivce, jež nese mudrcovo jméno.

Ale zčistajasna pochopil posvátný citát. Mudrc se mýlil. Pokud provede libovolný proces dostatečně rychle, teplo se nestačí vyměnit. A to je klíč k záhadě, jež trápila Balónky po celé věky. Dosáhnout potřebné teploty a objemu byla už pro Funíka hračka. V mžiku si spočítal, že potřebuje svůj objem snížit na V'' (ale i se zvýšením objemu by si Funík poradil) při zachování stejné teploty T , aby se potom mohl po adiabatě dostat na hodnoty T' , V' . Mobilizoval tedy všechny své síly a prudce narazil do stěny karantény. Během krátkého okamžiku se jeho objem snížil na potřebnou hodnotu V'' . Pak už nezbyvalo než podepsat propouštěcí protokoly a začít nový život plný štěstí a spojenosti. A že se to Funíkovi skutečně povedlo, svědčí i to, že se zanedlouho dostal jako první Balónek do žebříčku stovky největších boháčů světa díky své síti rychlých občerstvení Mc'Travers. I lidi totiž nakonec poznali, co je dobré.

Úloha V.1 ... ved' svou bárku dál

(4 body; průměr 2,56; řešilo 27 studentů)

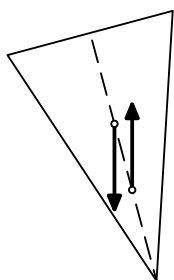
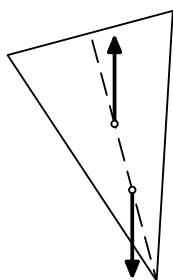


Obr. 34

Pracovníci NASA objevili, že určité sedimenty rostlinného původu na planetě Balónků mají zajímavou štěpnost na velice pevné desky tvaru obdélníku a rovnoramenného trojúhelníku, takže z nich lze snadno a levně postavit loď výšky h , délky d a šířky paluby $2a$ jako na obrázku 34. Kapitán vám dává za úkol zjistit, pro jaké hustoty tamějších oceánských vod bude plavba bezpečná.

Předpokládejte, že desky mají konstantní tloušťku a hustotu ρ_m , že loď je dutá a má palubu. (Diskutujte případ, že plavidlo není duté a celé má konstantní hustotu ρ_m .) Nemusíte kapitánovi předložit jedinou výslednou relaci, spíše prakticky užitečný návod na proočty s uvedením všech potřebných vztahů; snažte se je napsat přehledně a úsporně a odůvodněte užití případné vhodné aproximace.

Pro tuto úlohu je v první řadě důležité si uvědomit, že loď musí plavat, tedy že průměrná hustota lodě musí být nižší než hustota oceánu. Je také třeba, aby loď byla ve stabilní poloze, tzn. že působíště vztlakové síly (tzv. *metacentrum plování*) musí být nad těžištěm lodě. Pak totiž mírné výchylky z rovnovážné polohy vyvolají rozdíl momentů tíhové a vztlakové síly, který bude mít snahu vzniklou výchylku vyrovnat zpět. Pokud tomu tak nebude, rozdíl momentů těchto sil bude mít snahu tuto výchylku zvětšovat (viz obrázky 35 a 36).


 Obr. 35.
Labilní
poloha

 Obr. 36.
Stabilní
poloha

Souřadný systém volíme tak, že nulová výška je nejnižší bod lodě. Předpokládáme, že loď bude plavat v poloze, v jaké je nakreslena na obrázku, a že pluje velmi pomalu, tedy se chová obdobně, jako by stála na místě. Také budeme předpokládat, že tloušťka desek je zanedbatelně malá oproti rozměrům lodě.

Nejdříve vypočteme průměrnou hustotu ρ_l lodě, tedy vypočítáme hmotnost jednotlivých desek a podělíme objemem lodě.

$$\rho_l = \frac{2t\rho_m(ad + ah + d\sqrt{a^2 + h^2})}{adh} = \frac{t\rho_m S(a, d, h)}{adh},$$

kde t je tloušťka desek a S je funkce, kterou jsme substituovali celkový povrch lodě. Někteří pilní řešitelé přidali k hmotnosti lodě i hmotnost nákladu. Získali jsme tedy první podmínku, která je nutná pro bezpečnou plavbu, tedy aby hustota oceánu byla vyšší než ρ_l .

Nyní přichází na pořad stabilita. Výšku těžiště lodě najdeme jako vážený průměr výšek těžišť jednotlivých komponent, přičemž je zřejmé, že těžiště horní paluby je ve výšce h , těžiště obou trojúhelníků je ve výšce $2h/3$ a těžiště bočních obdélníků ve výšce $h/2$, tedy těžiště lodě bude ve výšce

$$h_T = \frac{2t\rho_m(adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2 + h^2})}{t\rho_m S(a, d, h)} =$$

$$= \frac{adh + \frac{2}{3}ah^2 + \frac{1}{2}dh\sqrt{a^2 + h^2}}{\frac{1}{2}S(a, d, h)} = \frac{2T(a, d, h)}{S(a, d, h)},$$

kde T je funkce, kterou jsme substituovali čítec předchozího zlomku, abychom zpřehlednili níže uvedené výpočty.

Loď se potopí do takové hloubky H , že hmotnost vytlačené vody je stejná jako hmotnost lodě, tedy

$$t_{\rho_m}S(a, d, h) = \rho \frac{aH^2d}{h} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{th\rho_m S(a, d, h)}{\rho ad}},$$

kde ρ je hustota oceánu. Z jednoduché geometrické úvahy – potopená část lodě je vlastně trojúhelníkový hranol – je zřejmé, že „těžiště vytlačené vody“ (čili působíště vztlakové síly) je ve výšce $H_T = 2H/3$.

Vrátíme-li se k naší podmínce, že působíště vztlakové síly má být výš než těžiště lodě, hledáme takovou hustotu oceánu, pro kterou platí $H_T > h_T$.

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{th\rho_m S(a, d, h)}{\rho ad}} > \frac{2T(a, d, h)}{S(a, d, h)} \Rightarrow \rho < \rho' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{th\rho_m S^3(a, d, h)}{9ad T^2(a, d, h)}.$$

Při nižší hustotě oceánu než ρ' se loď potopí do větší hloubky (stoupne působíště vztlakové síly), přičemž těžiště lodě zůstane na stejném místě, tedy loď bude stabilní. Při vyšší hustotě oceánu se loď více vynoří (klesne působíště vztlakové síly), a tedy působíště vztlakové síly bude níž než těžiště lodě, a tudíž loď bude nestabilní.

Máme tedy dvě podmínky stability (v uvažované poloze), jednak hustota oceánu musí být vyšší než ρ_1 , jednak nižší než ρ' . Samozřejmě pokud bychom uvažovali jinou polohu lodě, podmínky by byly radikálně odlišné.

$$\frac{t_{\rho_m}S(a, d, h)}{adh} < \rho < \frac{th\rho_m S^3(a, d, h)}{9ad T^2(a, d, h)}.$$

Vyřešme ještě otázku, zda pro daný tvar a polohu lodi existuje taková hustota oceánu, že loď bude plovat stabilně. Tehdy musí platit $\rho_1 < \rho'$ čili

$$1 < \frac{h^2 S^2(a, d, h)}{9 T^2(a, d, h)} \Rightarrow 1 < \frac{2(ad + ah + d\sqrt{a^2 + h^2})}{3(ad + \frac{2}{3}ah + \frac{1}{2}d\sqrt{a^2 + h^2})}.$$

Po úpravě dostaneme

$$2a < \sqrt{a^2 + h^2},$$

neboli délka ramena trojúhelníku musí být delší než délka základny.

Jestliže budeme uvažovat případ, kdyby byla celá loď homogenní (nejen desky, ale i uvnitř), výrazně se zjednoduší podmínka, aby oceán loď unesl. Stačí, když hustota oceánu bude vyšší než hustota lodě, která je již známa.

Druhá podmínka, tedy vzájemná poloha těžiště lodě a ponořené části se také poněkud zjednoduší. Těžiště lodě je (opět jde o homogenní trojúhelníkový hranol) ve $2/3$ výšky celé lodě. Těžiště ponořené části je ve $2/3$ její výšky, tedy vždy níže, než je těžiště lodě – za předpokladu, že loď plove. Tudíž by homogenní loď nesetřvala v poloze jako na obrázku, ale překloupila by se palubou dolů, podobně jako to dělají ledovce, z nichž nad hladinu vystupuje pouze špička.

Úloha V.2 ... Pet u okna

(3 body; průměr 2,81; řešilo 27 studentů)

U okna ve vytopeném pokojíku stojí uzavřená prázdná PET láhev. Za oknem mrzne, až praští. Ráno maminka otevřela okno, aby místnost důkladně vyvětrala, jenže při vaření oběda na to zcela zapomněla, a v pokojíku tak klesla teplota pod bod mrazu. Určete relativní změnu objemu δV láhve, která stojí na okně.

Výsledná změna objemu závisí na vlastnostech láhve, konkrétně polyetylenu, což je anizotropní materiál. Polyetylen se může při rostoucí teplotě v jednom směru smršťovat, to je způsobeno tím, že makromolekuly se do sebe více zašmodrchávají. Je tedy nutné, abychom zanedbali teplotní roztažnost láhve.

Předpokládejme, že láhev se bude v průběhu ochlazování trvale deformovat a zmenšovat svůj objem natolik, aby byl stále tlak uzavřeného plynu vyrovnán s atmosférickým tlakem (to je splněno tím spíše, čím je stěna láhve tenčí). Jedná se tedy o izobarický děj, pro který platí Gay-Lussacův zákon. Ten lze lehce odvodit ze stavové rovnice, pokud položíme n , R a p rovno konstantě; získáme vztah

$$\frac{V}{T} = \text{konst} ,$$

který platí po celou dobu děje. Z toho již vyjádříme hledaný výsledný objem

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \quad \Rightarrow \quad \delta V = \frac{\Delta V}{V_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \approx 7\% .$$

Ve skutečnosti má samozřejmě láhev určitou tuhost, bude tedy jistou dobu odolávat vnějšímu tlaku a pak skokem změni svůj objem (známé praskání při náhlé deformaci stěny láhve). Změna tvaru láhve je tedy obecně děj velmi složitý, prakticky nepopsatelný.

Úloha V.3 ... účinnost elektrárny

(5 bodů; průměr 1,07; řešilo 14 studentů)

Vypočítejte účinnost stroje, který pracuje mezi dvěma tepelnými lázněmi o teplotách T_1 a T_2 , $T_1 > T_2$ a který dosahuje maximálního možného výkonu. Do výsledného vztahu potom dosadte data některé známé elektrárny.

Uvědomte si, že Carnotův stroj má nulový výkon, protože při izotermickém ději je rozdíl teplot mezi strojem a lázní nekonečně malý, což způsobí nekonečně malý tepelný tok a nekonečně malý výkon stroje.

Jak jsme zmínili v zadání, maximální účinnost nemusí být nezbytně to, čeho chceme dosáhnout při konstrukci reálných tepelných strojů. Důležitý je výkon, který je ve sporu s maximální účinností – Carnotův stroj má nulový výkon.

Předpokládejme, že chceme odebírat teplo z teplejší tepelné lázně a nějakým způsobem získávat práci. Dobře víme, že maximální možné účinnosti dosahuje každý vratný děj (změna celkové entropie je nulová). Jestliže má někdy pracovní látka tepelného stroje dosáhnout teploty jedné z lázní, bude jí to trvat nekonečně dlouhou dobu, a stroj tak bude mít nulový výkon. Pokud však během odebírání tepla z lázně má pracovní látka teplotu nižší než teplota lázně, stává se děj nevratným (na přenesení tepla zpět na teplejší lázeň bychom museli dle druhé termodynamické věty konat práci). Abychom tedy získali nenulový výkon, musí extrakce tepla z teplé lázně (stejně jako odevzdávání přebytečného tepla chladnější lázni) probíhat nevratně²¹.

Pro další analýzu budeme předpokládat, že izotermy pracovního cyklu budou na teplotách T'_1 a T'_2 tak, že platí $T_1 > T'_1 > T'_2 > T_2$. Tudíž teplo přechází z teplejší lázně do pracovní látky skrze teplotní rozdíl $T_1 - T'_1$ a teplo odchází z pracovní látky do chladnější lázně skrze teplotní rozdíl $T'_2 - T_2$, jak je znázorněno na obrázku 37. Tepelný tok je úměrný teplotnímu rozdílu s konstantou úměrnosti \varkappa , kde \varkappa je tepelná vodivost krát plocha děleno tloušťka stěny mezi lázní a pracovní látkou.

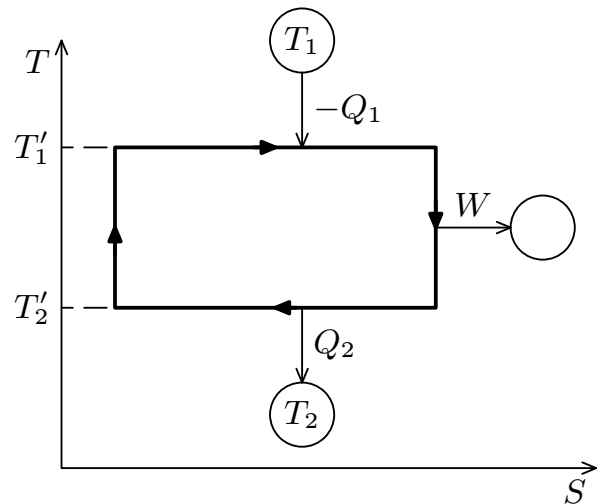
Jestliže t_1 je čas potřebný k přenesení tepla Q_1 , pak platí (Q_1 je teplo přijaté teplotou lázně, proto $Q_1 < 0$)

$$\frac{-Q_1}{t_1} = \varkappa_1(T_1 - T'_1).$$

Podobný vztah platí pro teplo Q_2 . Celkový čas, který stroj stráví na obou izotermách, tedy je

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{\varkappa_1} \frac{-Q_1}{T_1 - T'_1} + \frac{1}{\varkappa_2} \frac{Q_2}{T'_2 - T_2}. \quad (19)$$

Předpokládáme, že čas strávený na obou adiabatách je zanedbatelný vůči t , adiabatické děje totiž musí proběhnout velice rychle, aby pracovní látka nestihla relaxovat, navíc tento čas můžeme libovolně zkrátit.



Obr. 37. TS-diagram pracovního cyklu.

²¹⁾ Takový stroj, ve kterém dochází k toku tepla nevratně, nazýváme *endoreversibilní*.

Jelikož pracovní cyklus je vlastně Carnotův cyklus pracující mezi teplotami T_1' a T_2' , platí

$$\frac{W}{-Q_1} = \eta = 1 - \frac{T_2'}{T_1'}, \quad \frac{W}{Q_2} = \frac{W}{-Q_1 - W} = \frac{1}{-Q_1/W - 1} = \frac{\eta}{1 - \eta} = \frac{T_1'}{T_2'} - 1.$$

Toto využijeme do vztahu (19).

$$t = \left(\frac{1}{\kappa_1} \frac{1}{T_1 - T_1'} \frac{T_1'}{T_1' - T_2'} + \frac{1}{\kappa_2} \frac{1}{T_2' - T_2} \frac{T_2'}{T_1' - T_2'} \right) W.$$

Výkon našeho stroje je W/t a toto číslo chceme maximalizovat vzhledem k zatím neznámým teplotám T_1' a T_2' . Po provedení příslušných derivací dostaneme podmínky²²

$$T_1' = c\sqrt{T_1}, \quad T_2' = c\sqrt{T_2}$$

a maximální ziskatelný výkon je

$$P = \kappa_1 \kappa_2 \left(\frac{\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}}{\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2}} \right)^2.$$

Hledali jsme účinnost tohoto stroje vyjádřenou pomocí T_1 a T_2 a ta je

$$\varepsilon = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Pozoruhodné je, že účinnost nezávisí na koeficientech κ_1 a κ_2 .

Velké elektrárny evidentně pracují tak, že mají téměř maximální výkon, jak ukazují data ze tří elektráren v následující tabulce.

Elektrárna	T_2 [°C]	T_1 [°C]	η	ε	pozorovaná
West Thurrock (UK), tepelná elektrárna	~ 25	565	0,64	0,40	0,36
CANDU (Kanada), PHW jad. reaktor	~ 25	300	0,48	0,28	0,30
Larderello (Itálie), geotermální elektr.	80	250	0,32	0,175	0,16

Účinnosti elektráren ve srovnání s účinností η Carnotova stroje a s účinností ε .

²²⁾ Kde $c = (\sqrt{\kappa_1 T_1} + \sqrt{\kappa_2 T_2}) / (\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2})$.

Úloha V.4 ... přírodní reaktor

(4 body; průměr 2,59; řešilo 22 studentů)

Ve vzorku přirozeného uranu je 0,72 % izotopu ^{235}U s poločasem rozpadu 704 miliónů let a zbytek izotopu ^{238}U , který má poločas rozpadu 4 468 miliónů let.

V sedmdesátých letech minulého století byla při těžbě uranu v oblasti Okla v rovníkovém Gabonu objevena ruda s relativním zastoupením izotopu ^{235}U 0,44 %. Tento nesoulad lze vysvětlit tím, že se v ložisku kdysi samovolně zažehl přírodní jaderný reaktor.

Určete, po jakou dobu jaderná reakce probíhala, bylo-li štěpení ^{235}U vyvoláno pomalými neutrony. Ke srážce nějakého pomalého neutronu s daným jádrem dojde průměrně jednou za 352 tisíc let.

V případě rozpadu částic můžeme předpokládat, že částice jsou nezávislé a každá z nich se v malém časovém intervalu dt rozpadne s pravděpodobností λ . Za tento úsek času se tedy rozpadne $dN = -\lambda N dt$ částic (záporné znaménko bereme kvůli tomu, že částic ubývá). Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných

$$\int \frac{dN}{N} = -\lambda dt \quad \Rightarrow \quad \ln N = -\lambda t + \text{konst},$$

Počet částic, které se zatím nerozpadly, je tedy vyjádřen funkcí

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}, \quad (20)$$

kde $N(0)$ je původní počet částic. Střední doba života jedné částice τ je rovna převrácené hodnotě koeficientu λ . Střední dobu totiž můžeme určit tak, že každý z časů t započteme s vahou počtu částic rozpadlých v úseku $(t, t + dt)$. Pro spojitou proměnnou přejde součet v následující integraci

$$\begin{aligned} -\frac{1}{N(0)} \int_0^\infty t dN(t) &= \frac{1}{N(0)\tau} \int_0^\infty t N(0) e^{-t/\tau} dt = \\ &= \tau \int_0^\infty \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} d\frac{t}{\tau} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = \tau. \end{aligned}$$

Čas τ je tedy průměrnou dobou, po které dojde k rozpadu částice. S poločasem rozpadu $T_{1/2}$ (dobou, ve které se rozpadne přesně polovina částic) souvisí střední doba života vztahem $\tau \ln 2 = T_{1/2}$, který obdržíme z rovnice (20) dosazením $N(T_{1/2}) = 1/2 N(0)$.

Nechť reakce probíhala po dobu t_1 a pak se izotop po dobu t_2 dál rozpadal. Protože radioaktivní rozpad i snižování obsahu izotopu ^{235}U v důsledku reakce jsou nezávislé jevy, dostáváme pro počet jeho atomů ve vzorku z Okla

$$\begin{aligned} N_{235}(t_1) &= N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-t_1 \ln 2 / T_{235}}, \\ N_{235}(t_1 + t_2) &= N_{235}(t_1) e^{-t_2 \ln 2 / T_{235}} = N_{235}(0) e^{-t_1/\tau} e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{235}}, \end{aligned}$$

kde τ je střední doba srážky neutronů s jádrem a T_{235} poločas rozpadu izotopu ^{235}U . Počet atomů ^{238}U vypočteme obdobně už bez příspěvku reakce

$$N_{238}(t_1 + t_2) = N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2 / T_{238}}.$$

Pro vzorky z oblastí, kde jaderná reakce neproběhla, dostáváme

$$\begin{aligned} N'_{235}(t_1 + t_2) &= N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}, \\ N'_{238}(t_1 + t_2) &= N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}. \end{aligned}$$

Poměr zastoupení izotopů ^{235}U a ^{238}U před reakcí byl v obou vzorcích stejný, proto

$$\begin{aligned} \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} &= \frac{N_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \\ &= \frac{N'_{235}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{235}}}{N'_{238}(0) e^{-(t_1+t_2) \ln 2/T_{238}}} e^{-t_1/\tau} = \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} e^{-t_1/\tau}. \quad (21) \end{aligned}$$

Odsud získáme dobu reakce

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{N_{238}(t_1 + t_2)}{N_{235}(t_1 + t_2)} \cdot \frac{N'_{235}(t_1 + t_2)}{N'_{238}(t_1 + t_2)} \right].$$

Požadované poměry už snadno získáme z relativního zastoupení η izotopu ^{235}U

$$\eta = \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2) + N_{235}(t_1 + t_2)} \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{235}(t_1 + t_2)}{N_{238}(t_1 + t_2)} = \frac{\eta}{1 - \eta},$$

obdobně pro čárkované veličiny. Pro dobu reakce tedy konečně máme

$$t_1 = \tau \ln \left[\frac{\eta'(1 - \eta)}{\eta(1 - \eta')} \right],$$

číselně vychází asi 170 tisíc let. Všimněme si, že výsledek nezávisí ani na poločasech rozpadu jednotlivých izotopů, ani na době, ve které reakce proběhla.

Úloha V . P ... o ztracené studně

(3 body; průměr 2,65; řešilo 26 studentů)

Babička a dědeček obývají už léta svoji starou chalupu, kde mají vlastní studnu se znamenitou vodou. Jednoho dne přestala pumpa jejich vodu čerpat, pravděpodobně se poškodil koš ve studni. Tato drobná závada se však ukázala jako velký problém, neb oni sami ani jejich předkové nevěděli, kde byla studna kdysi vykopána.

Od čerpadla, které je uvnitř chalupy, vede jedenapůlpalcová trubka asi metr pod zem, kde zahýbá a pokračuje vodorovně směrem ven z chalupy. Studna je zavezená, avšak není jasné, jestli je na zahradě, či dokonce přímo pod domem.

Poradte starouškům, jakým způsobem nalézt studnu. Navrhněte několik co nejnázne proveditelných postupů.

Hned na začátku musíme říci, že následující text nebude řešením daného problému – nalezení studny. Půjde spíše jen o postup, který by mohl vést k určení umístění studny. Předně si uvědomme, jak hluboko může studna být. K získávání vody se používá povrchové čerpadlo umístěné pravděpodobně někde ve sklepě. Teoretická hloubka, ze které je čerpadlo schopné dostat vodu, je nejvýše 10 m, neboť hydrostatický tlak vodního sloupce o této výšce vyrovnává atmosférický tlak. Ve skutečnosti ale pumpa nevyčerpá vodu z hloubky větší než 8 m. Hladina studny nebude hlouběji než přibližně 6 až 7 metrů od čerpadla. Sací koš totiž musí být ponořen ve vodě navzdory kolísání výšky hladiny podzemní vody.

Pro další postup při hledání bude nutné si obstarat (třeba i nakreslit) plán půdorysu domu včetně okolí, do kterého budeme zakreslovat možné lokality studny. Polohu studny určíme nejnadhěji tak, že odkopeme zeminu kolem trubky vedoucí z čerpadla až ke kolenu, kde trubka zahýbá. Koleno odmontujeme a použijeme ocelový drát (asi tak trojku) k určení směru, ale hlavně vzdálenosti umístění studny. Lze totiž předpokládat, že potrubí vedoucí ke studně po cestě nezatačí, zahýbá až kolmo dolů do studny. Možnou polohu si zakreslíme a zvážíme, zda tam studna vůbec může být. Pokud je například hned vedle žumpa, můžeme nález zavrhnout. Pak musíme začít kopat. Této činnosti se v žádném případě nevyhneme, pokud chceme opravit sací koš.

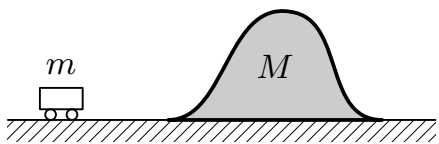
Neuspějeme-li, můžeme se obrátit s radou o pomoc na osoby, které umí vodu hledat, tzv. proutkaře. Jistě existuje mnoho osob, které neumí vodu hledat a vydávají se za proutkaře. Je tedy nutné hledat osvědčené, zkušené osoby. Tato možnost vyhledání studny by neměla být zamítnuta, přečtete si následující zkušenost mého dědy.

Asi před padesáti lety bylo potřeba zavést vodu pro bytový dům o čtyřech bytech pro pracovníky vodáren v Raduni u Opavy. Místní studny neposkytovaly dostatečnou kapacitu, a bylo tedy nutné najít nový zdroj podzemní vody. Na dvoře patřícím k domu se proto začala provádět náhodná sondáž. Ta bohužel nic nenalezla. Proto se zaměstnanci vodáren rozhodli k zoufalému kroku. Zeptali se místních, zda by jim nedoporučili proutkaře (dle dědy nějaký pan Pechanec, ale nebyl si jménem jistý). Pana Pechance pak pozvali na dvůr, který ho jistým způsobem prošel a určil dvě místa, kde se nalézá voda. Vrty, resp. čerpací pokusy potvrdily přítomnost podzemní vody. Jeden ze zdrojů poskytoval více vody a ten se vybral jako zdroj pro studnu, která se později vykopala a sloužila dlouhou dobu.

Úloha VI.1 ... zdolání kopečku

(5 bodů; průměr 2,96; řešilo 27 studentů)

Vozíček o hmotnosti m jede po rovině rychlostí v , na níž leží dřevěný „kopeček“ o hmotnosti M a výšce h , jenž po rovině klouže bez tření (viz obr. 38). Vozíček na kopeček najede. Za jakých podmínek se mu podaří přejet přes vrchol? Jakou rychlostí se bude hora nakonec pohybovat?



Obr. 38

Jelikož není nijak specifikováno, jak vypadá kopeček, je zřejmé, že zkoumat tuto úlohu pomocí účinků sil by nikam nevedlo – tedy možná vedlo, ale bylo by to zbytečně komplikované. Proto raději budeme úlohu zkoumat z hlediska energií. Pro platnost zákona zachování mechanické energie ne-

budeme uvažovat žádné odporové síly. Také je třeba, aby se vozíček během své cesty nevznesl nad povrch kopečku, jelikož při dopadu by se část jeho energie předala podložce. Také budeme předpokládat, že kopeček má dostatečně hladký povrch, aby do něj vozíček „nenarazil“. Vztažnou soustavu volíme pevně spojenou s podložkou, kladný směr rychlosti volíme tak, že vozíček má na počátku kladnou rychlost.

Pro stanovení velikosti kritické počáteční rychlosti v_k vozíčku (minimální počáteční rychlosti takové, aby vozíček kopeček přejel) budeme předpokládat, že kopeček má jediný vrcholek, a tedy po zdolání tohoto vrcholku je již jisté, že vozíček kopeček přejede. Jelikož kopeček volně klouže po podložce, bude mít vozíček při překonávání vrcholku v mezím případě stejnou rychlost jako kopeček, tuto společnou rychlost si označíme V_k . Díky předpokladům platí zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti

$$\frac{1}{2}mv_k^2 = \frac{1}{2}(m+M)V_k^2 + mgh,$$

$$mv_k = (m+M)V_k.$$

Vyloučením V_k dostaneme

$$v_k^2 = \frac{m+M}{M}gh, \quad (22)$$

čímž jsme získali kritickou velikost počáteční rychlosti vozíčku pro dostání se na vrcholek.

Nyní pojďme zkoumat, jakou rychlostí se bude kopeček pohybovat poté, co z něj vozíček sjede. Opět využijeme zákon zachování mechanické energie a zákon zachování hybnosti, tedy

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}MV^2,$$

$$mv = mw + MV,$$

kde w je rychlost vozíčku po opuštění kopečku a V je konečná rychlost kopečku. Po vyloučení w získáme rovnici

$$\frac{M}{m}V \left(\frac{m+M}{m}V - 2v \right) = 0,$$

která má dvě řešení pro V

$$V_1 = 0, \quad V_2 = \frac{2m}{m+M} v.$$

Jak ukážeme dál, první řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček překoná a dál pokračuje stejnou rychlostí jako na počátku, a druhé řešení odpovídá situaci, kdy vozíček kopeček nepřekoná.

Pokud tedy budeme uvažovat rychlost kopečku V_2 a vyjádříme si rychlost vozíčku w , získáme

$$w = \frac{m-M}{m} v,$$

ekvivalentními úpravami vztahů pro w a V_2 lze snadno dokázat, že $V_2 > w$, což vzhledem k povaze úlohy znamená, že kopeček je „před“ vozíčkem a stále se mu vzdaluje, neboli že vozíček kopeček nepřekoná.

Vozíček tedy musí jet alespoň rychlostí v_k dle vztahu (22), a pokud překoná kopeček, tak kopeček nakonec zůstane stát v klidu, ale bude posunut oproti své původní poloze.

Úloha VI.2 ... kukačky na lanech

(5 bodů; průměr 2,20; řešilo 15 studentů)

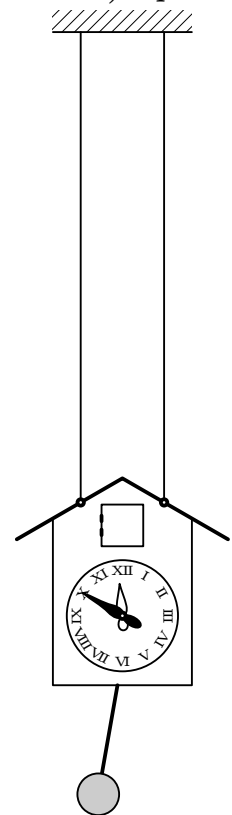
Kyvadlové hodiny o hmotnosti M jsou zavěšeny na dvou dlouhých rovnoběžných lanech (viz obr. 39). Kyvadlo se skládá ze závažíčka o hmotnosti m a lehké tyčky o délce l . Určete, o kolik se budou takové hodiny předbíhat (opožďovat) oproti hodinám pevně přibitým na stěně.

Vzhledem k tomu, že délka lana, na kterém jsou zavěšeny kukačky, je velká, lze považovat pohyb kukaček za vodorovný. Situace je tedy ekvivalentní tomu, že hodiny jsou vázány na vodorovnou přímku.

Uvažujme proto následující příklad. Mějme vozíček o hmotnosti M na vodorovných kolejnicích, na kterém je zavěšeno matematické kyvadlo o délce l a hmotnosti m (viz obr. 40). Na tuto soustavu působí pouze tíhová síla a reakce kolejí. Tyto síly mají svislý směr. Síly ve vodorovném směru jsou nulové, a proto vodorovná souřadnice těžiště této soustavy se podle zákona setrvačnosti nemění. Ve svislém směru kmitá těžiště harmonickým pohybem se stejnou frekvencí jako kyvadlo.

Přejděme do neinerciální soustavy spojené s těžištěm soustavy. Zde použijeme druhou impulzovou větu vzhledem k těžišti. Se setrvačnými silami se nemusíme trápit, protože mají působíště v těžišti, a tedy nulový moment vzhledem k těžišti. Také předpokládejme, že výchylky kyvadla jsou dostatečně malé, aby $\cos \alpha \approx 1$ a $\sin \alpha \approx \alpha$.

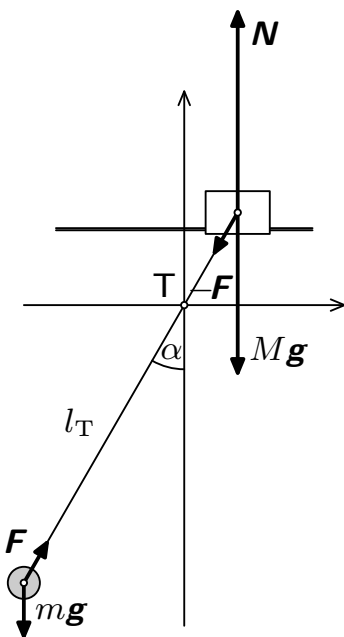
Velikost tahové síly vlákna F určíme z rovnováhy sil působících na kyvadlo ve směru rovnoběžném s vláknem $F = mg \cos \alpha$,



Obr. 39

v tomto směru se totiž kyvadlo nepohybuje. Svislá souřadnice výslednice sil působících na vozík je nulová, neboť se vozík v tomto směru nepohybuje. Vodorovná souřadnice je ovšem nenulová a má hodnotu $-F \cos \alpha = -mg \cos \alpha \sin \alpha$ (tj. vodorovná složka míří na obrázku 40 doleva). Zbývá vzdálenost kyvadla od těžiště označit l_T a máme vše připraveno k napsání druhé impulzové věty.

$$[ml_T^2 + M(l - l_T)^2]\ddot{\alpha} = -mgl_T \sin \alpha - mg(l - l_T) \cos^2 \alpha \sin \alpha \approx \\ \approx -mgl\alpha$$



Obr. 40. Síly působící na kyvadlo a vozík.

Jestliže za vzdálenost těžiště od kyvadla dosadíme $l_T = = Ml/(m + M)$, po úpravách dostaneme

$$\ddot{\alpha} + \frac{(M + m)g}{Ml} \alpha = 0.$$

Rovnice kyvadla má tvar $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$, takže úhlová frekvence soustavy kyvadla a vozíčku je

$$\omega = \sqrt{\frac{(M + m)g}{Ml}}.$$

Podíl úhlových frekvencí zavěšených hodin a hodin pevně přibitých na stěně je roven

$$\frac{\omega}{\omega_P} = \sqrt{1 + \frac{m}{M}} > 1,$$

a tedy zavěšené kukačky se předbíhají oproti přibitým hodinám.

Úloha VI.3 ... roztáčíme elektromotor

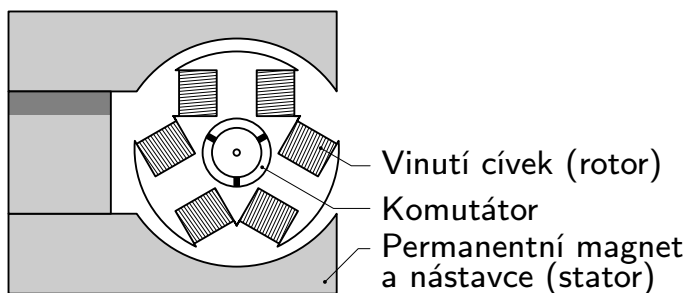
(5 bodů; průměr 2,38; řešilo 13 studentů)

Na hřídeli elektromotoru je navinuta nit, na konci které je zavěšeno závaží o hmotnosti m . Pokud motor připojíme na ideální zdroj napětí U , závaží pojede vzhůru rychlostí v_1 . Jakou rychlostí bude závaží klesat, pokud zdroj odpojíme a vstup elektromotoru zkratujeme? Mechanické tření neuvažujte.

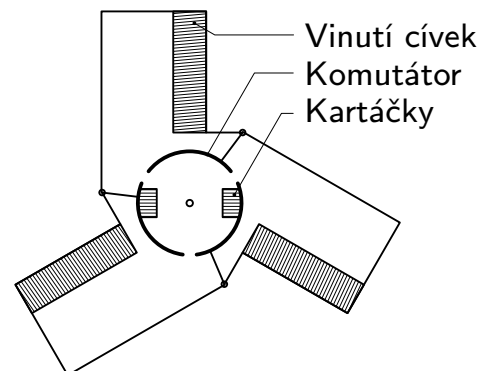
Jaký elektromotor máme vlastně uvažovat? Běžné motory na střídavý proud fungují tak, že jejich rotor se snaží otáčet spolu s točivým magnetickým polem uvnitř válce motoru. Úhlová frekvence tohoto pole je stejná jako frekvence napětí, tedy střídavé motory mají většinou konstantní otáčky 3000 ot/min nebo nějaký jejich celočíselný násobek a do zadání tohoto příkladu se moc nehodí. Naproti tomu elektromotory na stejnosměrný proud mají proměnné otáčky (podle zatížení), a jsou tedy ideální pro naši úlohu.

Ten nejobyčejnější stejnosměrný elektromotor (viz obr. 41), jaký možná znáte z rozebraných pohyblivých hraček na baterky a který budeme uvažovat, je složen ze statoru (dva opačné póly magnetu na obvodu), rotoru (osa s třemi navinutými cívkami, kterými teče proud) a komutátoru (ten přepne kontakty cívek ve správný čas tak, aby se rotor nezastavil v rovnovážné poloze, ale stále se otáčel).

Na čem závisí točivý moment (moment síly, kterým jej můžeme zatížit) takového elektromotoru? Víme, že Lorentzova síla působící na malý kousek proudovodiče v cívce na rotoru v magnetickém poli je úměrná velikosti proudu. Vektorový součet všech sil působících na cívky (a tedy na celý rotor) je sice nulový, neboť rotor zůstává v pouzdře. Výsledný moment těchto sil je však nenulový, a protože je úměrný silám, je také úměrný proudu. Točivý moment D elektromotoru je tedy úměrný protékajícímu proudu a závisí jedině na něm $D = \text{konst} \cdot I$.



Obr. 41. Schéma elektromotoru



Obr. 42. Schéma zapojení vinutí cívek a komutátoru

Podívejme se teď na naši úlohu. Na hřídeli elektromotoru máme navinutou nit, na ní je zavěšeno těleso, na které působí tíhová síla $F_G = mg$. Teď připojíme stejnosměrné napětí U . Pokud je napětí dosti velké a moment magnetické síly otáčející rotorem bude větší než moment tíhové síly F_G , rotor se začne otáčet, nit se bude navíjet a závaží bude zrychlovat směrem nahoru. Jeho rychlost bude ale shora omezená – při otáčení rotoru bude vznikat v jeho cívce indukované napětí, které podle Lenzova zákona snižuje proud v cívce rotoru, a tedy i moment síly, který na něj působí. Toto napětí roste s rychlostí otáčení rotoru. Rychlost závaží se tedy po chvíli ustálí na nějaké konečné hodnotě v_1 , kdy je všechna energie dodávaná zdrojem do

elektromotoru přeměňována na polohovou energii závaží a na teplo v elektromotoru. Magnetické pole je nasycené, jeho energie neroste. Pokud proud tekoucí obvodem označíme I a vnitřní odpor elektromotoru R , můžeme napsat

$$UI = RI^2 + mgv_1 .$$

Jak je to v druhém případě, kdy zdroj odpojíme, ale obvod necháme uzavřený? Teď místo zdroje napětí pracuje tíhová síla, která táhne závaží dolů. Tělísko zrychluje, ale v cívce opět vzniká napětí a proud v obvodu s odporem R ztrácí energii a přeměňuje ji na teplo, takže pohyb se opět ustálí na nějaké koncové rychlosti v_2 , při které je energie získávaná pádem přeměňována na teplo

$$mgv_2 = RI^2 .$$

Proč je proud stejný jako v prvním případě? Všimněte si, že síla velikosti mg , kterou působí elektromotor na závaží, je v obou případech stejná a nezávisí na velikosti rychlosti nebo na směru pohybu. To znamená, že i moment síly, kterým působí elektromotor na závaží, je stejný, a protože ten je jednoznačnou funkcí proudu tekoucího cívkou, i proudy jsou v obou případech stejné.

Z první rovnice vyjádříme I

$$I = \frac{U}{2R} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgR}{U^2} v_1} \right) .$$

Dostali jsme velmi podivný výsledek, totiž dvě možné hodnoty proudu tekoucího cívkou. Krátkou úvahou můžeme dojít k závěru, že obě řešení jsou fyzikálně správná – každé totiž odpovídá jiné konstrukci motoru (poloměr hřídele, počet závitů cívky, ...). A jelikož k elektromotoru nemáme bližší specifikace, musíme připustit obě řešení.

Vztah pro proud nyní dosadíme do druhé rovnice a obdržíme hledanou velikost rychlosti klesání závaží

$$v_2 = \frac{U^2}{2mgR} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgR}{U^2} v_1} \right) - v_1 ,$$

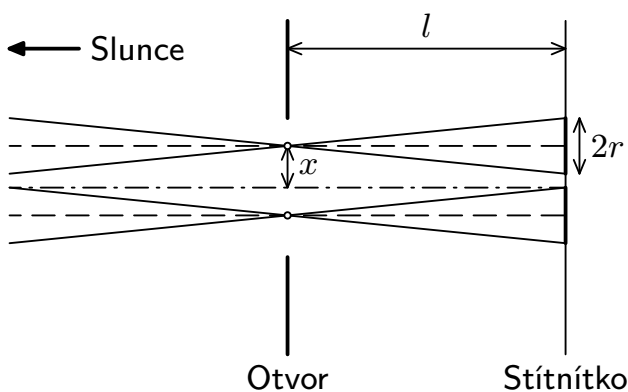
dopředu však nemůžeme říci, kterou z těchto rychlostí se závaží bude pohybovat.

Úloha VI.4 ... sluneční prasátko

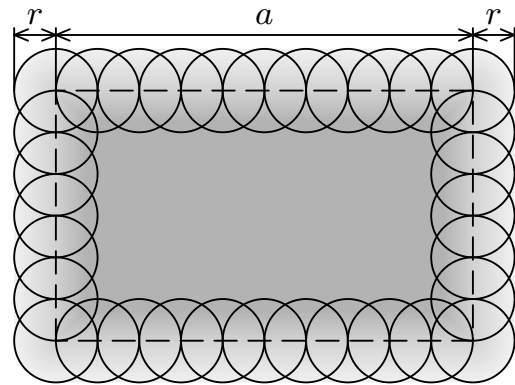
(4 body; průměr 1,73; řešilo 15 studentů)

Za slunečných dní je oblíbenou zábavou vrhat obdélníkovým zrcátkem sluneční prasátka. Možná jste si všimli, že někdy má prasátko lichoběžníkový tvar a jindy tvar elipsy. Za jakých okolností nastává každá varianta? Pokud možno svou podmínku zformulujte kvantitativně.

Stejně sluneční prasátko, jaké umíme vyrobit zrcátkem, vznikne za stěnou, ve které je otvor stejné geometrie, jako má průmět plochy zrcátka do roviny stěny. To je důsledek zákona lomu, podle kterého je úhel dopadu roven úhlu odrazu. Pro jednoduchost uvažujme, že průmět má tvar obdélníku a že sluneční paprsky dopadají kolmo na stěnu, fyzikální podstatě jevu nijak neublízíme.



Obr. 43. Zobrazení Slunce obdélníkovým otvorem



Obr. 44. Konstrukce obrazu Slunce vytvořeného obdélníkovým otvorem

Výsledný obraz Slunce na stínítku vytvořený obdélníkovým otvorem můžeme složit z obrazů vytvořených jednotlivými body otvoru. Označme R poloměr Slunce, L vzdálenost Země od Slunce a l vzdálenost obrazu od otvoru. Každý bod vzdálený o x od osy otvoru zobrazí Slunce na stínítko jako kroužek o poloměru $r = R/L \cdot l$ (viz obr. 43) se středem ve vzdálenosti x od osy otvoru, neboť Slunce je velice daleko od Země ve srovnání se vzdáleností obrazu od otvoru $L \gg l$. Superpozicí takových kroužků vznikne ovál stejných rozměrů, jako má otvor, zvětšených o hodnotu r . Můžeme ho geometricky zkonstruovat následovně. V každém krajním bodě otvoru zkonstruujeme kružnici o poloměru r , obálka takovýchto kružnic je potom onen ovál (viz obr. 44). Intenzita světla směrem k okrajům oválu bude klesat.

Zaoblení oválu má tedy poloměr křivosti r . Pokud je obraz blízko otvoru, je l malé a ovál bude vypadat téměř jako otvor, tj. bude mít tvar obdélníku. Při velké vzdálenosti obrazu od otvoru je l velice velké, tudíž je velký i poloměr křivosti r . Obraz se nám bude jevit jako mírně zdeformovaná kružnice – elipsa.

Zformulujme podmínku k určení charakteristické vzdálenosti l_0 , kdy přechází obdélník v elipsu. Tehdy je poloměr křivosti r roven rozměru otvoru, označme ho a . Podmínka tedy zní

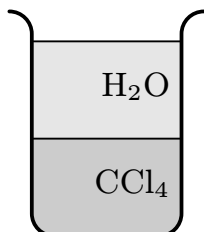
$$l_0 \approx \frac{La}{R}.$$

Stejnou podmínku bychom dostali, pokud by Slunce mělo mít stejnou úhlovou velikost jako otvor při sledování z místa obrazu $a/l_0 \approx R/L$.

Úloha VI. P ... podivný bod varu

(4 body; průměr 1,65; řešilo 20 studentů)

Do nádoby nalijeme dvě kapaliny, vodu a tetrachlormetan. Tyto dvě kapaliny se mezi sebou nemísí. Teplota varu vody je $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, teplota varu tetrachlormetanu je asi $77\text{ }^{\circ}\text{C}$. Pokud bychom však tento systém zahřívali, dočkali bychom se překvapení. K varu (vzniku bublin) totiž dochází již při asi $66\text{ }^{\circ}\text{C}$. Vysvětlete zdánlivou podivnost.



Obr. 45

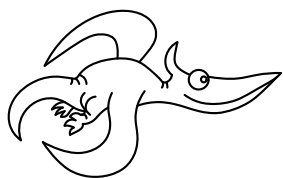
Voda na povrchu každé kapaliny se vypařuje a molekuly unikají z kapaliny. Je jedno, kam se snaží kapalina vypařovat; jestliže jí to dovolíme, vypařovat se bude. Na rozhraní dvou kapalin se může snažit vypařovat do druhé kapaliny. Stejně tak druhá kapalina do první.

Podstatné na řešení problému je, že tyto dvě kapaliny (a také plyny z nich vzniklé) spolu nereagují a jsou oddělené. Pak můžeme použít zákon Daltonův, který říká, že tlak dvou nereagujících plynů je dán součtem parciálních tlaků těchto plynů. Potom tlak par na rozhraní H_2O a CCl_4 (např. v bublince, která svým povrchem zasahuje jak do vody tak do tetrachlormetanu) je dán součtem parciálních tlaků nasycených par při dané teplotě.

Celkový tlak na rozhraní bude roven atmosférickému tlaku zvětšenému o hydrostatický tlak vodního sloupce (10 cm vodního sloupce přispívá k tlaku 1 kPa). Hydrostatický tlak tedy zanedbejme.

Tlak nasycených par tetrachlormetanu je při teplotě $77\text{ }^{\circ}\text{C}$ roven atmosférickému tlaku 101 kPa. Při této teplotě totiž začíná kapalina vřít. Tlak nasycených par vody při teplotě $66\text{ }^{\circ}\text{C}$ je dle tabulek kolem 30 kPa. Pak, protože směs začíná vřít při $66\text{ }^{\circ}\text{C}$ a součet tlaků na rozhraní musí dát atmosférický tlak, bude tlak nasycených par CCl_4 pouze 70 kPa. A to je tlak potřebný k tomu, aby začal CCl_4 vřít při teplotě $66\text{ }^{\circ}\text{C}$.

A proč tedy nesmícháme tisíc různých kapalin dohromady? Pak bude tlak, při kterém budou kapaliny vřít, mnohem menší. Problém je, že je už nemůžeme mít od sebe oddělené, ale musíme je smíchat. Nevznikne tedy rozhraní dvou kapalin. Vypařování směsi dvou kapalin pak musíme počítat pomocí zákonů termodynamiky. Výsledná teplota bude někde mezi teplotami varu jedné a druhé kapaliny.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... tvrdost kuliček

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky po odrazu a před ním).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepreskočí bariéru a odstraní se. (řešení str. 71)

Úloha II. E ... načechraná šlehačka

Změřte tlak plynu v sifonové bombičce. Bombička je buď plněná CO_2 a prodává se pro plnění sifonu v desetikusovém balení, nebo je plněná N_2O pro výrobu šlehačky.

(řešení str. 74)

Úloha III. E ... a jsou tu zase hody!

V Černvíře je veselo, všichni tancují, baví se, ale hlavně pijí alkoholické nápoje. Ne však každý se chce co nejdříve opít. Mezi místními stárky je jeden, kterému jde zejména o vědecký výzkum. Po vypití dvou litrů levného stolního vína ho napadlo, že by mohl zjistit, kolik toho alkoholu do sebe vlastně dostal. Nebyl ovšem v natolik střízlivém stavu, aby experiment zrealizoval. Zkuste to tedy vy!

Změřte, jaký je hmotnostní podíl alkoholu obsažený v levném stolním víně, a výsledek porovnejte s hodnotou na obalu. (řešení str. 76)

Úloha IV. E ... jak oči Balónka klamou

Balónci při pozorování oblohy často soudí, že se jim souhvězdí vysoko nad hlavou zdají menší, než když si je prohlížejí nízko nad obzorem. Proveďte pozorování na Zemi a měřením ověřte, zda jde skutečně o klam. Změřte úhlovou vzdálenost $\alpha(t_1)$ dvou vybraných hvězd, které jsou přibližně nad sebou (mají stejný azimut A), a úhlovou vzdálenost $\beta(t_1)$ jiných dvou hvězd, které jsou ve stejné výšce h nad obzorem, (tzn. kontrola v obou nezávislých směrech) v okamžiku, kdy se tyto hvězdy nacházejí *co nejnižše nad obzorem* (označení viz obr. 46). Až později stejné dvojice hvězd najdete v co největší výšce, měření obou úhlových vzdáleností $\alpha(t_2)$, $\beta(t_2)$ zopakujte. Snažte se pochopitelně měřit co nejpřesněji!

Zvlášť oceníme, pokud ze znalosti katalogizovaných souřadnic hvězd přesně vypočítáte jejich teoretickou úhlovou vzdálenost. Nezapomeňte popsat použité pomůcky a zamyslet se nad jejich výhodami a nevýhodami (resp. diskutovat přesnost měření), uvést důležité podmínky měření a určit zkoumané hvězdy – alespoň načrtněte mapku hvězdného okolí a uveďte směr (např. jih) a čas měření. Vyhodnoťte chyby měření a v diskusi srovnajte výsledky. (řešení str. 78)

Úloha V.E ... babiččiny palačinky

Rozehřejte pánvičku na plotýnce nebo nad plamenem tak, aby se na ní daly smažit palačinky (asi na 200°C). Pokud na její suchý rozžhavený povrch cáknete kapičku vody, hned se nevypaří, ale bude po něm až minutu rejdít. Proměřte dobu rejdění v závislosti na velikosti kapičky a tento jev se pokuste vysvětlit.

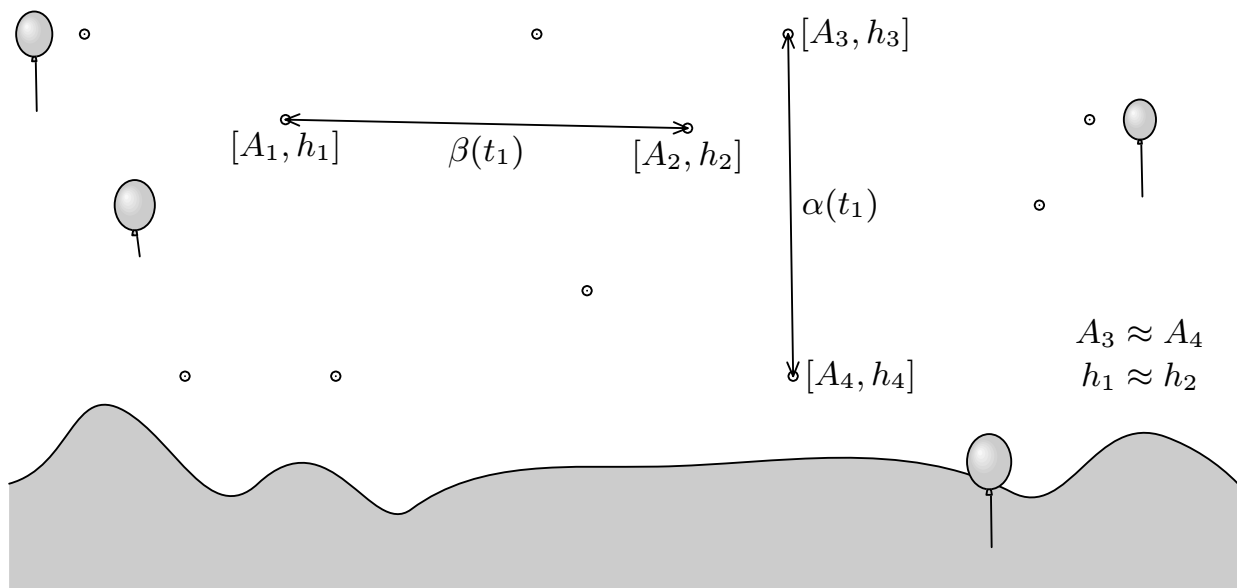
(řešení str. 83)

Úloha VI.E ... poznej své tělo

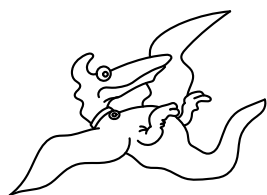
Na závěr ročníku pro vás máme jednoduchou experimentální úlohu. Z následujících tělních tekutin si vyberte alespoň dvě a změřte alespoň jednu jejich fyzikální vlastnost (hustotu, viskozitu, elektrickou vodivost, index lomu, teplotu varu, ...) – sliny, krev, moč, pot, slzy, žaludeční šťávy, míza.

V této úloze se řiďte heslem čím více, tím lépe.

(řešení str. 88)



Obr. 46. Balónci pozorují souhvězdí na noční obloze.



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... tvrdost kuliček

(8 bodů; průměr 4,79; řešilo 56 studentů)

Až budete jedno podzimní odpoledne hrát s kamarády kuličky, uzměte svým přátelům jednu z nich a mrštěte s ní o tvrdý povrch. Posléze si udělejte značku ve výšce, do které kulička vyskočí, a změřte ji. Z naměřených hodnot určete koeficient odrazivosti kuličky (poměr energie kuličky po odrazu a před ním).

Podobná metoda se používá pro třídění tvrdosti ložiskových kuliček; málo tvrdé kuličky nepřeskočí bariéru a odstraní se.

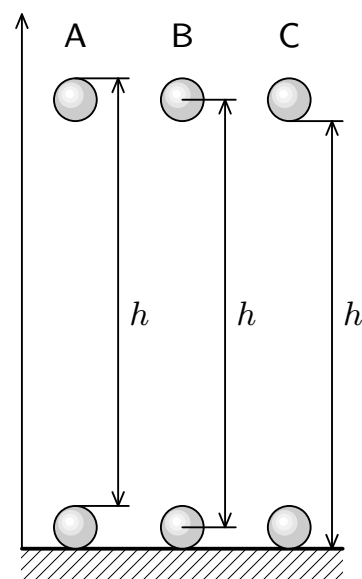
Padalo a létalo téměř všechno kulaté: ložiskové kuličky, ping-pongové, tenisové, dokonce i golfové míčky či případně takové ty míčky, co skáčou velmi vysoko („hopíky“). Samozřejmě i chudák pejsánek se musel dívat, jak skáče jeho míček.

Nejprve si uvědomíme, co jste měli změřit. V zadání bylo napsané, že máte určit koeficient odrazivosti kuličky a že je to poměr energie po odrazem a před ním. Dále v zadání stálo: „Hodte kuličku a změřte, do jaké výšky se odrazí.“ A proč takto? Protože víme, že energie se zachovává! Proto kinetická část energie odpovídající rychlosti kuličky po odrazu se přemění na potenciální energii v maximální výšce odskoku. Na kuličku působí ještě vzduch, ale budeme předpokládat, že ztráty energie třením jsou nepodstatné (aspoň pro naše účely).

Zůstává problém určit rychlost kuličky těsně před dopadem. Jen tak hodit kuličku asi nemá smysl, ale stačí ji pustit z nějaké výšky. Potom stejně tvrdíme, že energie se zachovává, a tak energie před dopadem se rovná potenciální energii ve výšce, ze které jsme kuličku pustili. No a zjišťujeme, že stačí měřit maximální výšku po odrazu a výšku upuštění. Kdo nevěří, nechtě si napíše vzorce pro koeficient odrazivosti

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (23)$$

A nyní bylo třeba trochu uvažovat. Co jsou přesně ty výšky? Musíme brát rozdíl výšek mezi polohami těžiště (anebo jiného bodu kuličky na její svislé ose). Položme si například nulovou výšku tak jako na obrázku 47A nebo to učinme podle jedné ze zbylých dvou variant. Při malých rozměrech kuličky to můžeme ale vcelku úspěšně zanedbat a měřit jakoukoli výšku. Jenže jak měřit tyto výšky?



Obr. 47

Najdeme si nějakou svislou stěnu a připevníme na ni metr a jen tak pozorujeme. Je to dost nepřesné, chyba je odhadem ± 1 cm, protože určit „od oka“, kdy a kde dosáhla kulička maximální výšku, asi bude problém. Případně použijeme nějaké ty technické vymoženosti, například kameru nebo fotoaparát s nastavitelnou dobou expozice (délka musí odpovídat době pádu). Tak budeme mít zaznamenaný pád kuličky po celý čas. Ale i tu vznikají nějaké chyby.

Existují však i jiné metody. Rozebereme trochu ty, které jste použili. V první řadě se často objevoval nápad jednoduše poslouchat, kdy kulička dopadne. A z času dopadu vypočítat, jakou rychlost má kulička při dopadu a odrazu. Ono stačí využít předpoklad, že kulička zrychluje rovnoměrně. Nejlepší je opět použít nějakou techniku. Z časů t_1 a t_2 dvou po sobě následujících dopadů určíme rychlost dopadu $v = \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)$. Tedy

$$p = \frac{\text{energie po odraze}}{\text{energie před odrazem}} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = \frac{(t_3 - t_2)^2}{(t_2 - t_1)^2}. \quad (24)$$

Přesnost měření času je se správnou technikou velmi vysoká, avšak je nutné provést více měření a na závěr odhadnout, jak velký vliv může mít odpor vzduchu na měření, a udat nepřesnost způsobenou technikou. Tolik k této metodě.

Další metoda je technicky náročná, ale realizovatelná. Inspirace pochází z měření *Radima Pechala*. Měření budeme provádět v trubici nejlépe natřené na černo. Těsně nad místem dopadu kuličky nainstalujeme optický člen, skládající se ze dvou LED-diod umístěných blízko sebe, a pustíme kuličku. Ta při svém pohybu proletí skrz optočlen, který zaznamená oba časy průchodu. Následně se odrazí a máme to samé po odrazu. Je zřejmé, že vyhodnocovat budeme muset pomocí počítače, protože LED-diody jsme umístili blízko sebe. O pohybu kuličky mezi diodami předpokládáme, že je rovnoměrně zrychlený s konstantním tíhovým zrychlením. Takto dostaneme jak rychlost odrazu, tak rychlost dopadu. Koeficient odrazivosti vypočítáme podle (24). Přičemž optočlen umístíme k podložce co nejbližší, abychom mohli zanedbat nenulovou potenciální energii v této výšce.

Nyní si povíme, jak vyhodnocovat měření. Protože jste každý měřil svoji vlastní kuličku, nemá význam uvádět tu něco jako vzorové hodnoty. První metodou jsme naměřili hodnoty pro nezávislá měření v následující tabulce. Chyba měření h_1 je $\Delta h_1 = 0,5$ cm, chyba měření h_2 je $\Delta h_2 = 1$ cm.

h_1 [cm]	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
h_2 [cm]	42	45	46	48	45	43	41	42	43	46	45
p	0,53	0,56	0,58	0,60	0,56	0,54	0,51	0,53	0,54	0,58	0,56
Δp	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Jak jsme vypočítali jednotlivé hodnoty? Údaje v prvních dvou řádcích tabulky jsou naměřené hodnoty, p jsme vypočítali podle vztahu (23), Δp je chyba měření p , jedná se o takzvanou střední chybu. O té si něco povíme.

Hodnotu koeficientu p neměříme přímo (narozdíl od délky, kdy používáme nějaký etalón v podobě pravítka), ale pomocí nějaké funkční závislosti $f(a, b, \dots)$, která

závisí na veličinách a, b, \dots . Chyby jejich měření označíme pomocí symbolu Δ . Potom pro střední chybu platí vztah²³

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \cdot (\Delta a)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \cdot (\Delta b)^2 + \dots}$$

V tomto vztahu parciálně derivujeme, což znamená, že při derivování podle jedné z proměnných ostatní proměnné představují konstanty. V našem případě je $p = f(h_1, h_2) = h_2/h_1$.

$$\Delta p = \sqrt{\left(\frac{h_2}{h_1^2}\right)^2 \cdot (\Delta h_1)^2 + \left(\frac{1}{h_2}\right)^2 \cdot (\Delta h_2)^2} = p \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta h_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h_2}{h_2}\right)^2}.$$

Dále z naměřených hodnot vypočítáme průměr a směrodatnou odchylku; celkovou chybu měření vyjádříme jako odmocninu ze součtu kvadrátů směrodatné odchylky a průměru jednotlivých chyb měření. Tak se dostaneme k výsledku

$$p = 0,55 \pm 0,02.$$

Uvědomte si, že měření bez jakéhokoliv udání chyby je nesmyslné, protože nikdy nenaměříte nic přesně. Proto je třeba chyby alespoň nějak odhadnout.

Na konec je ještě dobré diskutovat systematické chyby. Kulička měla nějakou rotaci při dopadu, a tak jsme neměřili odrazivost, protože část rotační energie se přeměnila na kinetickou energii (resp. naopak). To závisí na směru rotace při dopadu, který nikdy nebude dokonale kolmý na podložku. A pro jednotlivé metody je třeba uvážit tyto chyby:

Přímá metoda – nesvislost měřidla, počáteční rychlost ve směru kolmém na podložku,

Akustická metoda – odečtení času, kdy přesně kulička dopadne; předpoklad, že se kulička pohybuje celou dobu rovnoměrně zrychleně, avšak jistou dobu trvá odraz,

Optická metoda – zanedbání potenciální energie ve výšce přechodu kuličky přes optický člen.

²³⁾ viz např. Bohumil Vybíral: *Zpracování dat fyzikálních měření*. MaFy, Hradec Králové 2002. Ke stažení na stránkách Fyzikální olympiády <http://fo.cuni.cz>.

Úloha II . E ... načechraná šlehačka

(8 bodů; průměr 4,07; řešilo 42 studentů)

Změřte tlak plynu v sifonové bombičce. Bombička je buď plněná CO_2 a prodává se pro plnění sifonu v desetikusovém balení, nebo je plněná N_2O pro výrobu šlehačky.

Nejjednodušší řešení této experimentální úlohy je poměrně snadné. Tedy až na pár drobností, které si člověk musí předem uvědomit. Jednou z nich je, že vzhledem k dosti velikým hodnotám tlaku v sifonové bombičce už nelze použít při řešení stavovou rovnici ideálního plynu a z ní plynoucí souvislost mezi tlakem a hustotou. Později si ukážeme proč.

Prozatím zkusíme úlohu vyřešit s použitím van der Waalsovy rovnice, která popisuje chování reálného plynu o něco lépe. Znění této rovnice je

$$\left[p + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right] \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT,$$

odkud pro tlak plyne

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \left(\frac{n}{V} \right)^2. \quad (25)$$

Na výpočet tlaku p tedy potřebujeme znát hodnotu univerzální plynové konstanty R , konstanty pro uvažovaný plyn a , b , které snadno najdeme v tabulkách (vyslov [internet]), látkové množství plynu v bombičce, vnitřní objem bombičky a teplotu, při které experiment probíhal. Poslední tři z uvedených veličin musíme zjistit experimentálně.

Při určení látkového množství si opět pomůžeme tabulkami – tentokrát chemickými. Budeme potřebovat molární hmotnost plynu v bombičce. V našem případě to byl obyčejný CO_2 na výrobu sody. Z molární hmotnosti CO_2 ($M_{\text{CO}_2} = 44 \text{ g/mol}$) a hmotnosti plynu v bombičce se pak dá určit látkové množství n plynu v bombičce jako

$$n = \frac{m_{\text{CO}_2}}{M_{\text{CO}_2}},$$

kde n je látkové množství a m_{CO_2} hmotnost plynu.

Hmotnost plynu uvnitř bombičky snadno vypočítáme jako rozdíl hmotností bombičky před a po vypuštění plynu. Výrobce udává 8 gramů. Vážení na váze s přesností 0,1 g tento údaj nepotvrdila.

č. m.	Hmotnost před [g]	Hmotnost po [g]	m_{CO_2} [g]	n [mol]
1	30,6	24,9	$5,7 \pm 0,1$	$0,129 \pm 0,002$
2	32,0	25,5	$6,5 \pm 0,1$	$0,148 \pm 0,002$
3	34,4	25,3	$9,1 \pm 0,1$	$0,207 \pm 0,002$

Hmotnosti CO_2 v různých bombičkách a hodnoty n .

Zbývá tedy určit vnitřní objem bombiček. Jak se ukázalo, tento úkol byl na provedení (s rozumnou přesností) ze všeho nejkomplicovanější. Zvolili jsme metodu změření vnějšího objemu a dopočtení vnitřní dutiny ze známé hmotnosti prázdné bombičky a hustoty oceli. Zádrhel této operace tkví v tom, že je potřebné určit,

o jaký druh oceli se jedná. Není totiž ocel jako ocel. Domníváme se, že ocel použitá na výrobu sifonových bombiček má hustotu $(7,85 \pm 0,10) \text{ g/cm}^3$. Zanedbali jsme hmotnost plynu uvnitř (která je použitými prostředky naprosto neměřitelná) a různou hustotu malé mosazné čepičky na každé sifonové bombičce. Objem mosazi v ní totiž nepřevyšuje $0,5 \text{ cm}^3$ a hustota oceli a mosazi je natolik podobná, že vzniklá chyba se blíží přesnosti měření.

č. m.	Hmotnost [g]	Objem [cm^3]	Dutina [cm^3]
1	$24,9 \pm 0,1$	16 ± 1	13 ± 1
2	$25,5 \pm 0,1$	18 ± 1	15 ± 1
3	$25,3 \pm 0,1$	17 ± 1	14 ± 1

Tabulka shrnuje výsledky měření vnitřního objemu sifonových bombiček.

Zmíněné konstanty pro CO_2 mají hodnoty

$$a = 0,396 \text{ Pa}\cdot\text{m}^3, \quad b = 42,69 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{mol}.$$

Experiment probíhal při pokojové teplotě $T = (293 \pm 3) \text{ K}$. Dosazením dat z tabulek do rovnice (25) dostaneme výsledky kolem 30 MPa, což je špatně.

A teď slíbené vysvětlení, proč nemůžeme použít stavovou rovnici *ideálního plynu*. Problém je ve slovíčku „ideální“. Možná si z hodiny fyziky pamatujete, jaké zjednodušující předpoklady byly učiněny při odvozování stavové rovnice ideálního plynu. Ideální plyn předpokládá nulové interakce mezi částicemi kromě dokonale pružných srážek. Částice navíc mají nulový objem. Ani jeden z těchto předpokladů tady neplatí. V reálném plynu (obzvláště při vysokém tlaku) se projevuje vlastní objem částic (koeficient b ve van der Waalově rovnici) a odpudivé síly mezi částicemi (koeficient a). Díky těmto odpudivým silám je vnitřní energie stlačeného plynu (ač stejné teploty) vyšší a mění se s objemem.

Někde na konci odvození stavové rovnice pro ideální plyn bývá v učebnicích malými písmeny poznámka, že vlastnosti reálných plynů se od ideálního poněkud liší, avšak při tlacích a teplotách uvažovaných ve většině případů si s ní vystačíme. Přibližná hodnota tlaku, ke které dospěla většina z vás měřením a dopočtením klasickou metodou, byla kolem 40 MPa, což je asi 400 atmosfér. Při tak vysoké hodnotě tlaku už ale nebude stačit ani van der Waalova rovnice.

S ohledem na částicovou strukturu plynu je jasné, že objem, tlak a teplota budou vzájemně svázané vztahem

$$Z = \frac{pV_m}{RT}, \quad (26)$$

kde V_m je molární objem a R , T a p jsou plynová konstanta, termodynamická teplota a tlak. Avšak $Z \neq 1$ (const.) jako ve stavové rovnici pro ideální plyn. Obecně je tzv. *kompresibilitní faktor* Z funkcí tlaku a v limitě $p \rightarrow 0$ se blíží 1. S rostoucím tlakem klesá a po dosažení jisté hodnoty pak zase stoupá. Při vysokých tlacích je jeho hodnota pro všechny plyny větší než 1, což znamená, že jsou méně stlačitelné než ideální plyn, protože působí odpudivé síly mezi molekulami.²⁴

²⁴⁾ Průběh hodnoty kompresibilitního faktoru souvisí právě se vzájemnými silami, kterými na sebe molekuly působí. Ty jsou nejdřív přitažlivé a rostou (faktor klesá), ale jak se vzdálenosti mezi molekulami snižují, začnou být odpudivé (faktor stoupá).

Chování reálného plynu se v technice popisuje tzv. *virialní stavovou rovnicí*

$$pV_m = RT \left(1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \dots \right),$$

ve které tři tečky značí další členy, které vedou k přesnějším výsledkům, ale pro vyšší mocniny V_m ve jmenovateli jsou většinou zanedbatelné. Pro námi uvažovaný molární objem je už $C/V_m^2 \ll B/V_m$. Virialní koeficienty B , C a případné další závisí na teplotě plynu. Existuje hodnota teploty, pro kterou má koeficient B hodnotu 0 a tato rovnice se blíží rovnici (26) se $Z = 1$. Chování plynu se pak podobá ideálnímu, ale opět jen do jisté meze. Hodnota této *Boylovy teploty* je pro CO_2 asi 715 K.

Jak se tedy bude chovat reálný plyn při izotermickém stlačení? Experimenty ukazují, že hodnota tlaku bude stoupat až do dosažení jistého kritického bodu. Pak začne plyn kondenzovat na kapalinu. Objem plynu se bude dále zmenšovat, ale tlak zůstane konstantní. Tento tlak se nazývá *tlak nasycených par kapaliny* při dané teplotě. Množství kapaliny se bude zvyšovat, dokud všechen plyn nezmění skupenství, a pak se zmenšujícím se objemem poroste tlak velmi rychle. Pro příjemných 20°C, ve kterých probíhal experiment, je kritický tlak p_c oxidu uhličitého asi 60 atm.

Pro vyřešení úlohy budeme potřebovat ještě jednu kritickou konstantu pro oxid uhličitý, a to molární objem V_c kapalného CO_2 při kritickém tlaku. Ten je roven 78 cm³/mol. Snadným výpočtem ($V = nV_c$) si lze ověřit, že objem CO_2 ve všech bombičkách byl větší než objem příslušného množství kapalného CO_2 (tedy bombičky neobsahovaly stlačenou kapalinu), a proto tlak ve všech bombičkách byl roven $p_c \doteq 60$ atmosfér.

Úloha III. E ... a jsou tu zase hody!

(8 bodů; průměr 5,86; řešilo 44 studentů)

V Černvří je veselo, všichni tancují, baví se, ale hlavně pijí alkoholické nápoje. Ne však každý se chce co nejdříve opít. Mezi místními stárky je jeden, kterému jde zejména o vědecký výzkum. Po vypití dvou litrů levného stolního vína ho napadlo, že by mohl zjistit, kolik toho alkoholu do sebe vlastně dostal. Nebyl ovšem v natolik strízlivém stavu, aby experiment zrealizoval. Zkuste to tedy vy!

Změřte, jaký je hmotnostní podíl alkoholu obsažený v levném stolním víně, a výsledek porovnejte s hodnotou na obalu.

Teoretická část

Tato úloha byla mezi řešiteli zjevně oblíbená, a proto se objevila i celá řada postupů vypracování. Snad nejčastějším byla destilace, tj. ohřát víno na teplotu přibližně 78°C, nechat odpařit ethanol, následně ho zachytit na nějakém chladiči a zvážit. Tato metoda naráží na nedokonalost destilace (spolu s ethanolem se odpařuje i voda, naopak ne všechen ethanol zkondenzuje apod.). Jen několik řešitelů napadlo nezabývat se destilátem, ale naopak zvážit to, co po destilaci z vína zbude. Zde už je problém jen množství odpařené vody a to se dá poměrně jednoduše zjistit (viz náš postup). Tato metoda dávala výsledky s chybou v řádu procent, u některých řešitelů s nedokonalou aparaturou i desítky procent.

Druhou nejpoužívanější metodou bylo měření hustoty vína. Pokud předpokládáme, že víno je jen směs vody a ethanolu, můžeme z hustoty určit množství ethanolu. Zřejmým omezením této metody je zanedbání ostatních složek ve víně, což v závislosti na druhu použitého vína může vést k větším nebo menším nepřesnostem (někteří řešitelé zjistili, že jejich víno má větší hustotu než voda, nelze se pak divit, že výsledek byl chybný). Pro tuto metodu je asi ideální testovat bílé suché mladé víno, které má nejmenší podíl cukru. *Lukáš Drápal* zjistil, že podíl cukru ve víně je asi 1/9 podílu ethanolu, tento údaj se dal použít pro přibližnou korekci. *Marek Pechal* zkombinoval tuto metodu s destilací a zjistil tak množství přísad poměrně přesně. Celkově byla metoda měření hustoty nejjednodušší a nejpřesnější, i když byla zatížena systematickou chybou.

Několik řešitelů se pokoušelo o složité titrační postupy, které vesměs vedly k naprosto chybným množstvím ethanolu. Důvody jsou asi komplikované. I když budeme předpokládat, že titrační postup byl proveden precizně, pořád nelze vyloučit reakce titrační směsi s ostatními složkami vína. Objevily se ovšem i kurióznější postupy měření. Někteří řešitelé se pokoušeli víno zapálit (bohužel nebo právě možná našťastí neúspěšně). Bylo by možné určit podíl ethanolu tak, že by se experimentálně zjistilo, při jakém podílu ethanolu směs voda-alkohol ještě hoří, a poté přidáváním čistého lihu obohatit víno natolik, že by vzplálo. *Lukáš Drápal* měřil podíl ethanolu na základě ohřívání vína v kalorimetru, což při použití dobrého zdroje tepla vede k poměrně vysoké přesnosti.

Často zmiňovaným efektem bylo, že při mísení kapalin neplatí přesně zákon sčítání objemů. To je sice pravda, ale jde o velmi okrajový efekt. Jednou z nejdůležitějších schopností v experimentální fyzice je správné určení různých aproximací. Pokud tedy např. zanedbáme obsah cukru a dalších látek ve víně, ale přitom bereme zákon sčítání objemů jako nepřesný, pak se dopouštíme vskutku chybné úvahy.

Pracovní postup a výsledky měření

Pro určení podílu alkoholu ve víně jsme zvolili vylepšenou destilační metodu. Víno budeme ohřívát ve vodní lázni tak dlouho, až jeho teplota překročí teplotu varu ethanolu, a poté změříme, kolik roztoku nám zbylo. To, co se z roztoku odpařilo, není jen ethanol, ale i spousta vody. Abychom zjistili, kolik se jí odpařilo, vložíme do nádoby s vínem ještě menší baňku s vodou a změříme, kolik vody se z ní během ohřívání odpařilo. Zde předpokládáme, že vypařování vody a ethanolu jsou dva nezávislé děje a rovněž že vypařování vody nezávisí na podílu ethanolu ani jiných látek v roztoku. Jako měřicí pomůcky nám bude stačit šupléra na měření hloubky a teploměr na orientační určení teploty (teploměr není pro měření příliš podstatný, v zásadě bychom se bez něj mohli obejít). Značně zjednodušenou destilační soupravu lze snadno sestavit z několika hrnců a skleničky a ohřev zajistí kuchyňský sporák.

Celkem jsme provedli jedno pokusné a tři platná měření pokaždé s půl litrem krabicového bílého vína původem z Itálie (snad). V rámci dodržení základních pravidel bezpečnosti práce jsme se neodhodlali zkoumaný roztok ochutnat. Chyba v měření hladiny šuplérou je 0,1 mm, což se ve výsledku promítlo do chyby v určení podílu 0,5 objemových procent obsahu. Průměrná hodnota podílu alkoholu (bez korekce na odpařování vody) potom vyšla $w_1 = (16,1 \pm 0,5) \%$, hodnota korekce $w_{\text{kor}} = (5,2 \pm 0,5) \%$, což dává výslednou hodnotu podílu $w = (11,3 \pm 1,0) \%$. Podrobnější údaje z měření zde neuvádíme vzhledem k nízké reprodukovatelnosti experimentu.

Závěr

Úloha se dala s trochou fyzikální úvahy vyřešit jen s pravítkem a kuchyňským náčiním, popřípadě teploměrem. Výsledek je vcelku uspokojivý, hodnota uvedená na obalu (10 %) sice do naměřeného intervalu nespadá, ale vzhledem k původu vína je možné mít o přesnosti dané hodnoty oprávněné pochybnosti. Výsledná přesnost není jistě ideální, preciznějším měřením by se dala zmenšit až o řád. Důležité je, že měření není zatíženo žádnou výraznou systematickou chybou.

Úloha IV . E ... jak oči Balónka klamou

(8 bodů; průměr 4,57; řešilo 21 studentů)

Balónci při pozorování oblohy často soudí, že se jim souhvězdí vysoko nad hlavou zdají menší, než když si je prohlížejí nízko nad obzorem. Provedte pozorování na Zemi a měřením ověřte, zda jde skutečně o klam. Změřte úhlovou vzdálenost $\alpha(t_1)$ dvou vybraných hvězd, které jsou přibližně nad sebou (mají stejný azimut A), a úhlovou vzdálenost $\beta(t_1)$ jiných dvou hvězd, které jsou ve stejné výšce h nad obzorem, (tzn. kontrola v obou nezávislých směrech) v okamžiku, kdy se tyto hvězdy nacházejí co nejnižše nad obzorem. Až později stejné dvojice hvězd najdete v co největší výšce, měření obou úhlových vzdáleností $\alpha(t_2)$, $\beta(t_2)$ zopakujte. Snažte se pochopitelně měřit co nejpřesněji!

Zvlášť oceníme, pokud ze znalosti katalogizovaných souřadnic hvězd přesně vypočítáte jejich teoretickou úhlovou vzdálenost. Nezapomeňte popsat použité pomůcky a zamyslet se nad jejich výhodami a nevýhodami (resp. diskutovat přesnost měření), uvést důležité podmínky měření a určit zkoumané hvězdy – alespoň načrtněte mapku hvězdného okolí a uveďte směr (např. jih) a čas měření. Vyhodnoťte chyby měření a v diskusi srovnajte výsledky.

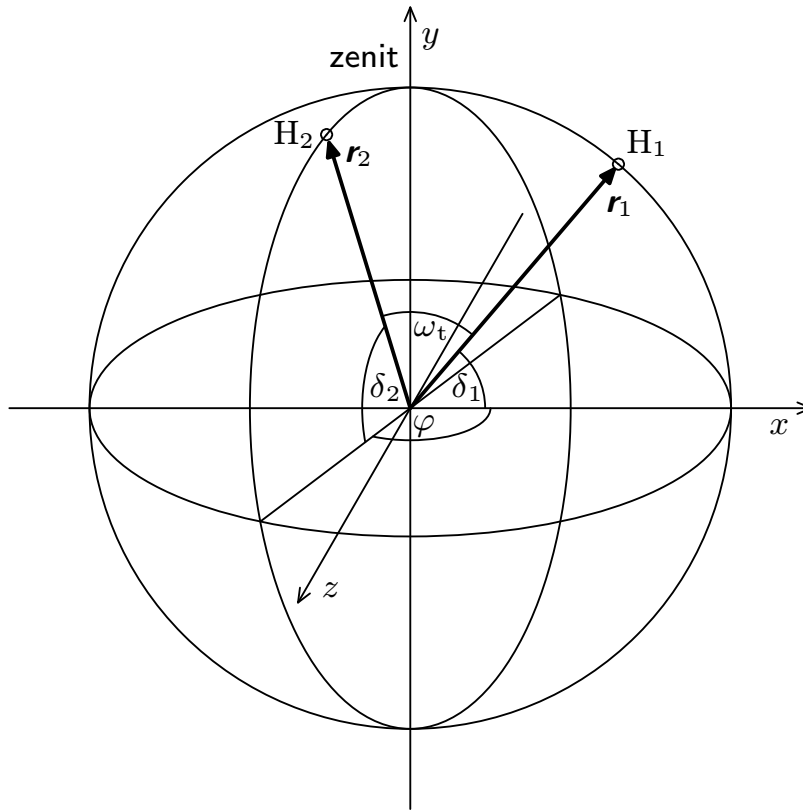
Primárním cílem úlohy mělo být ověřit neměnnost úhlových vzdáleností mezi hvězdami, a to ve dvou nezávislých a významných směrech – vodorovném a svislém. Totiž právě ve vertikálním směru můžeme očekávat případné změny úhlových vzdáleností, když si uvědomíme, že směr šíření světla je ovlivňován při průchodu atmosférou, což má za následek posunutí pozice hvězdy. Tento jev se nazývá *atmosférická refrakce* a jeho případné potvrzení nám budiž výzvou k honbě za co nejvyšší přesností našeho měření!

Teorie

V teoretické části bychom nejprve měli provést rešerši, abychom získali kvantitativní představu o velikosti atmosférické refrakce a podle toho mohli plánovat přesnost měření a vybrat vhodné hvězdy. Mnohá literatura udává maximální hodnotu refrakce 34 úhlových minut při obzoru, o kterou je pozorovaná pozice hvězdy posunuta výš oproti skutečné. (Díky refrakci je tedy Slunce déle nad obzorem, a to řádově o několik minut.) Zdůrazněme okolnost *při obzoru* a uvědomme si, že bychom neměřili absolutní refrakci, nýbrž tzv. diferenciální refrakci, což znamená, že se posouvají polohy obou hvězd, mezi kterými úhlovou vzdálenost měříme. Ke snížení relativní chyby bychom tedy měli volit hvězdy raději více vzdálené.

K potvrzení atmosférické refrakce bychom potřebovali měřit s přesností menší než půl stupně. Jelikož počasí většinou nedovoluje měřit hvězdy těsně nad obzorem,

pro reálně zkoumané hvězdy je vliv refrakce mnohem menší a její přímé experimentální potvrzení by bylo v našich možnostech nesmírně náročné.



Obr. 48. K teoretickému výpočtu úhlové vzdálenosti dvou hvězd.

Do teorie dále patří uvedení vztahu pro výpočet teoretické úhlové vzdálenosti dvou hvězd se známými katalogizovanými souřadnicemi α (rektascenze) a δ (deklinace). Uvedme rychlé odvození vztahu, které využívá analytickou geometrii. Osu x zavedeme jako průsečnici roviny světového rovníku s rovinou deklinační kružnice první hvězdy, osu y definuje v kladném smyslu polopřímka střed sféry – zenit a konečně osa z je na ně kolmá. Polohový vektor první hvězdy na jednotkové sféře je $\mathbf{r}_1 = (\cos \delta_1, \sin \delta_1, 0)$, analogicky pro druhou hvězdu, jejíž deklinační kružnice je v našem souřadném systému otočena podél osy y o úhel $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$, dostáváme polohový vektor $\mathbf{r}_2 = (\cos \delta_2 \cos \varphi, \sin \delta_2, \cos \delta_2 \sin \varphi)$. Hledaná teoretická úhlová vzdálenost ω_t mezi hvězdami potom odpovídá úhlu svíranému těmito vektory, který vypočteme pomocí skalárního součinu (sčítají se součiny vždy odpovídajících komponent vektorů). Platí

$$\cos \omega_t = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1| |\mathbf{r}_2|} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \varphi + \sin \delta_1 \sin \delta_2,$$

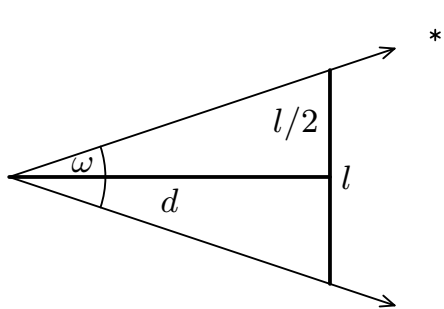
odkud po dosazení za φ a zjednodušení díky sudosti funkce kosinus dostáváme²⁵

$$\omega_t = \arccos(\cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin \delta_1 \sin \delta_2).$$

²⁵⁾ Při užití Pythagorovy věty k vyjádření délky tětivy v hledaném oblouku (vezmeme-li délky odvěsen jako rozdíl y -souřadnic v našem souřadném systému a vzdálenost pat kolmic spuštěných z obou hvězd na rovinu rovníku) vypočteme délku tohoto oblouku z délky tětivy

Plánování experimentu a pomůcky

V zimě kolem Vánoc se jako vhodné hvězdy nabízejí např. Polárka a některá z hvězd Velkého vozu pod Polárkou v době krátce po setmění. Po půlnoci najdeme Velký vůz v nadhlavníku, což by nám velice vyhovovalo. Bohužel v podmínkách měření (opar při obzoru, světelné znečištění) nebyla jasnost hvězd Velkého vozu dostatečná pro spolehlivé vizuální měření a obecně bylo nutné volit co nejjasnější hvězdy, jako např. vůbec nejjasnější hvězdu na obloze Sírius (α CMa) a jasnou hvězdu přibližně nad ním při jeho východu, třeba levou horní hvězdu Orionu s názvem Betelgeuze (α Ori). Kolem 23 hodin se tyto hvězdy nacházejí nejvýše nad obzorem (kulminují). Vodorovná úhlová vzdálenost byla měřena mezi jasnými hvězdami Rigel (β Ori) (v Orionově obrazci vpravo dole) a Prokyon (α CMi; alfa v souhvězdí Malého psa nalevo od horních hvězd Orionu).



Obr. 49. Měření pomocí Jakobovy hole.

K měření byla použita v antice osvědčená Jakobova hůl, která byla realizována ocelovým metrem a nevelkým dřevěným trojúhelníkem s ryskou. Samozřejmostí je použití statistického zpracování, které potlačí náhodnou chybu subjektivního měření (chceme srovnávat střední hodnoty). Dalšími potřebami byla baterka s červeným světlem, sešit pro zápis hodnot a slabé i silné rukavice.

Experimentálně zjištěná úhlová vzdálenost ω byla vypočtena z průměru d naměřených hodnot d_i délky Jakobovy hole (tj. vzdálenosti vrcholů, se kterými se kryly obě hvězdy při nastavené vzdálenosti d_i). Z jednoduché geometrie zřejmě platí

$$\omega = 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2d}.$$

Chybu takto vypočteného úhlu určíme z chyby měření l i d např. pomocí parciálních derivací

$$\Delta\omega_d = \frac{\partial\omega}{\partial d}(d_0, l_0)\Delta d = \frac{4l_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta d,$$

$$\Delta\omega_l = \frac{\partial\omega}{\partial l}(d_0, l_0)\Delta l = \frac{4d_0}{4d_0^2 + l_0^2}\Delta l,$$

které sloučíme podle kvadratického zákona sčítání chyb, tedy výsledek uvedeme ve tvaru

$$\omega = \left(2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2d} \pm \frac{4}{4d^2 + l^2} \sqrt{d^2(\Delta l)^2 + l^2(\Delta d)^2} \right) \cdot \frac{180^\circ}{\pi},$$

podle získaného vztahu

$$\omega_t = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} (1 - \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) - \sin \delta_1 \sin \delta_2)},$$

který odpovídá předchozímu výrazu přes identitu $\arcsin \sqrt{(1-x)/2} = \arccos x/2$, pro $x \in \langle -1; 1 \rangle$, kterou lze dokázat srovnáním derivací obou stran a samozřejmě funkčních hodnot např. v krajním bodě.

kde l , d jsou spočtené střední hodnoty ze statistického zpracování.

Postup měření

Jakmile byly za soumraku vybrané hvězdy pozorovatelné, zaznamenal jsem podmínky měření (datum, místo, čas, teplotu, příp. tlak a vlhkost vzduchu, měřené hvězdy a jejich výšky nad obzorem) a zahájil měření. Zapřel jsem se do rozvětveného stromu, tzn. opřel záda o kmen a levou ruku o příhodnou větev. Pravou rukou jsem konec ocelového metru vždy přikládal stejným způsobem na kost vedle oka, dřevěný trojúhelník jsem spolu s navijákem metru držel v levé ruce tak, že ocelový pásek metru byl kolmo na plochu trojúhelníka a ryska trojúhelníka přiléhala právě ke stupnici, na které bylo možno odečítat hodnotu d_i . Citlivě jsem měnil vzdálenost trojúhelníku od oka, dokud se měřené hvězdy nekryly s vrcholy trojúhelníka při rychle střídavém pohledu (to zajistí, že oba vrcholy současně splývají s příslušnými hvězdami). Před odečtením hodnoty jsem ukazováčkem přitiskl stupnici metru k dřevěnému trojúhelníku, aby nedošlo k posunutí. Pro vyšší efektivitu jsem si zapamatoval tři naměřené hodnoty a ty pak najednou zapsal. Nastavení délky Jakobovy hole při měření jsem prováděl střídavě jak při prodlužování, tak při zkracování vzdálenosti trojúhelníka od oka. Měření úhlové vzdálenosti jsem pro každou dvojici hvězd opakoval 10krát pro statistické zpracování. Na konci měření jsem opět zapsal aktuální podmínky experimentu.

Výsledky

Všechna měření byla provedena v neděli 22. ledna 2006 na louce (využití rozvětveného stromu) NPP Radouč u Mladé Boleslavi. Teplota vzduchu (měřená kuchyňským lihovým teploměrem s chybou $0,5\text{ }^\circ\text{C}$) na začátku první série měření byla $-4\text{ }^\circ\text{C}$, na konci $-5\text{ }^\circ\text{C}$; později na začátku i na konci druhé série $-9\text{ }^\circ\text{C}$. Velikost atmosférického tlaku byla odhadnuta podle televizní relace o počasí na $(1030 \pm 10)\text{ hPa}$. Během první série měření vzrostly výšky hvězd nad obzorem o 3 až 4 stupně, během druhé série klesly nejvýše o 2 stupně. Naměřené hodnoty úhlových vzdáleností jsou uvedeny a statisticky zpracovány v následující tabulce.

série	d_1 [cm]	d_2 [cm]	d_3 [cm]	d_4 [cm]	d_5 [cm]	d_6 [cm]	d_7 [cm]	d_8 [cm]	d_9 [cm]	d_{10} [cm]
I H	22,1	22,0	22,2	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,1	22,2
I V	31,1	31,3	31,6	31,7	31,1	31,6	31,6	31,3	31,2	31,5
II V	31,5	31,8	31,5	31,45	31,9	31,4	31,0	31,3	31,2	31,5
II H	22,0	22,1	22,1	22,1	22,2	22,1	22,2	22,1	22,1	22,1

Naměřené hodnoty délky Jakobovy hole pro horizontální (H) a vertikální (V) vzdálenost hvězd.

série	čas	hvězdy	výška nad obzorem	průměr d [cm]	σ_d [cm]
I H	17:55–18:21	α CMi – β Ori	8° , 18°	22,115	0,058
I V	18:30–18:56	α CMa – α Ori	4° , 31°	31,400	0,226
II V	23:00–23:21	α CMa – α Ori	22° , 44°	31,455	0,263
II H	23:22–23:44	α CMi – β Ori	45° , 23°	22,110	0,057

Naměřené úhlové vzdálenosti – statistické zpracování.

Ze střední hodnoty délky Jakobovy hole d a pro hodnotu $l = (15,70 \pm 0,05)\text{ cm}$ vypočteme experimentálně stanovenou úhlovou vzdálenost ω s příslušnou chybou podle

odvozeného vztahu. Chybu měření Δd určíme ze standardní výběrové odchylky σ_d a možné chyby měření ocelovým metrem 0,05 cm podle kvadratického zákona sčítání chyb $\Delta d = \sqrt{\sigma_d^2 + (0,05 \text{ cm})^2}$. Střední hodnoty správně zaokrouhlíme v řádu první (v případě jedničky až druhé) platné číslice chyby, kterou bezpečně zaokrouhlujeme nahoru. Na závěr vypočteme teoretickou úhlovou vzdálenost pro známé souřadnice hvězd rektascenze (α) a deklinace (δ). Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce.

Hvězda	Souřadnice α	Souřadnice δ	$d_{I,II} \pm \Delta d_{I,II}$ [cm]	$\omega \pm \Delta\omega$ [°]	rel [%]	ω_t [°]
α CMi	7 ^h 39 ^m 18,12 ^s	+5°13'30''	22,12 ± 0,06	39,01 ± 0,15	0,4	38,51
β Ori	5 ^h 14 ^m 32,28 ^s	-8°12'6''	22,11 ± 0,06	39,01 ± 0,15	0,4	38,51
α CMa	6 ^h 45 ^m 8,92 ^s	-16°42'58,1''	31,4 ± 0,3	28,1 ± 0,3	1,1	27,10
α Ori	5 ^h 55 ^m 10,32 ^s	+7°24'25,4''	31,5 ± 0,3	28,0 ± 0,3	1,1	27,10

Diskuse

Srovnáním hodnot v tabulce výsledků měření můžeme učinit závěr, že střední hodnoty zjištěných úhlových vzdáleností mezi určitou dvojicí hvězd s ohledem na chybu měření jsou poměrně dobře blízké, tedy můžeme konstatovat, že zdánlivá změna velikosti souhvězdí (uvážíme-li, že např. průměr Měsíce vidíme pod úhlem asi 0,5°) je skutečně klamem, což jsme experimentálně ověřili s chybou měření menší, než je např. úhlový průměr Měsíce. Domnělé zmenšení velikosti hvězdných obrazců vysoko nad obzorem než při pozici těsně nad obzorem můžeme vysvětlit jako psychologický efekt. Obrazce nízko nad obzorem máme možnost srovnávat s pozemskými objekty (domy, paneláky), vůči nimž se souhvězdí zdají poměrně velká, zatímco ve větší výšce nad obzorem možnost srovnávat nemáme a nabýváme dojmu, že souhvězdí jsou menší v rámci rozlehlé nebeské klenby.

Měření je zatíženo relativní chybou kolem 1 %. Přes použití primitivních pomůcek se podařilo chybu měření snížit, a to zejména užitím statistického zpracování, volbou vhodných hvězd (tj. dostatečně vzdálených) i parametrů pomůcek (l). Výsledná absolutní chyba je menší než maximální možná velikost atmosférické refrakce. Refrakci se však nepodařilo přímo potvrdit, jelikož nebylo možné měřit hvězdy těsně nad obzorem kvůli oparu a pro reálné výšky je velikost refrakce menší než výsledná absolutní chyba měření. Dokonce střední hodnoty jsou vychýleny v opačném smyslu, než bychom čekali (úhlová vzdálenost v důsledku diferenciální refrakce je nejmenší těsně při obzoru a pro větší výšky nad obzorem roste). Toto odchýlení lze zdůvodnit náhodnou chybou při měření čili statistikou. S ohledem na výslednou chybu nemůžeme z měření vyvozovat žádné závěry ohledně potvrzení refrakce, nanejvýš můžeme odhadnout její maximální velikost na 0,3°, což souhlasí s realitou. Srovnáním experimentálních hodnot s teoretickými objevujeme, že měření je zatíženo systematickou chybou (měřené úhlové vzdálenosti vycházejí větší než teoretické), což lze zdůvodnit okolností, že jsme se okem nedívali přesně z vrcholu (bližšího konce) Jakobovy hole. V tomto měření však systematická chyba není podstatná, jestliže jsme měřili stále stejným způsobem!

Závěr

Prohlásíme-li za okem postřehnutelný rozdíl ve velikostech obrazců souhvězdí, jenž je minimálně srovnatelný s úhlovým průměrem Měsíce, pak se nám podařilo

s relativní chybou asi 1 %, resp. s absolutní chybou pod $0,3^\circ$ ověřit, že úhlová vzdálenost mezi hvězdami se nemění (více než uvedená chyba měření) a popisované zdání je skutečně psychologický klam.

Úloha V.E ... *babiččiny palačinky*

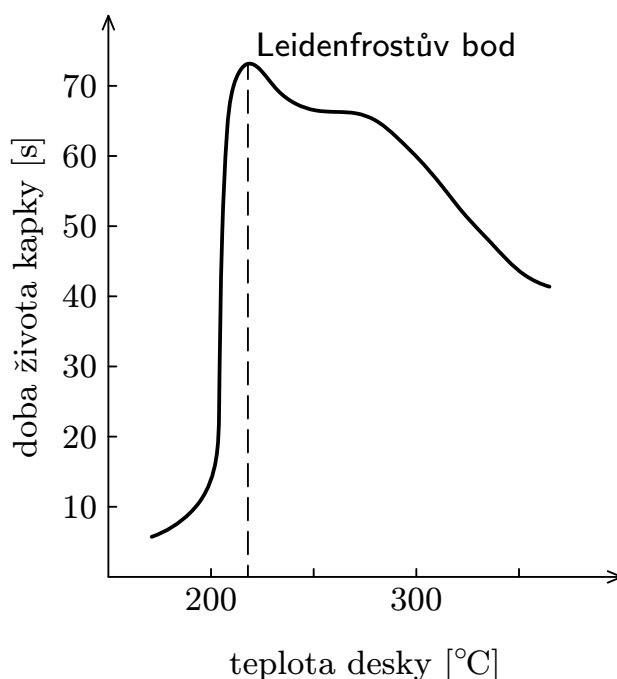
(8 bodů; průměr 3,62; řešilo 29 studentů)

Rozehřejte pánvičku na plotýnce nebo nad plamenem tak, aby se na ní daly smažit palačinky (asi na 200°C). Pokud na její suchý rozžhavený povrch cáknete kapičku vody, hned se nevypaří, ale bude po něm až minutu rejdít. Proměřte dobu rejdění v závislosti na velikosti kapičky a tento jev se pokuste vysvětlit.

Teorie

Vytáhneme z kredence pánvičku, pořádně ji rozežřejeme, kápneme na ni vodu a ona se okamžitě vypaří, přestože zadání tvrdí něco jiného. Kapka podle zadání prý vydrží rejdít na pánvičce až minutu. Takže kde je zakopán pes (přesněji kde jsou ty *babiččiny palačinky*)? Jakkoli nepřirozené to může někomu přijít, pánvička je jenom příliš studená, přesněji řečeno její teplota nedosáhla okolí tzv. *Leidenfrostova bodu* (citlivější povahy upozorňují, že žádná velká překvapení se už nechystají, a tudíž mohou klidně číst dál). Abychom pochopili, o co se jedná, podívejme na graf na obrázku 50 (převzato z [1]).

Tuhle závislost naměřil Jearl Walker z Clevelandské Univerzity v Ohio, o čemž si můžete přečíst v poměrně známé knížce [1]. Z této závislosti je zřejmé, že při jisté teplotě (kolem 200°C) dochází k prudkému růstu doby života kapek s teplotou pánve. Jako Leidenfrostův bod pak označujeme teplotu, při které žijí kapky nejdéle. A to je přesně ta teplota, při které bychom rádi proměřili závislost doby života kapky na jejím objemu (a pekli též *babiččiny palačinky*). Avšak dříve, než se pustíme do měření a vymýšlení různých teoretických modelů pro délku života kapek v závislosti na jejich objemu, měli bychom zjistit, proč se kapka chová takhle podivně. Protože nejlepším expertem na rejdící kapky na horké desce je vzpomínaný Jearl Walker, nechejme ho promluvit: „Je-li teplota nad Leidenfrostovým bodem, spodní povrch kapky se okamžitě vypaří. Tlak této páry ovšem kapku nadnáší, takže se zbytek kapky desky ani nedotkne. Vrstva je stále doplňována vodní párou z dolního povrchu kapky, odkud se voda neustále odpařuje díky záření a vedení tepla vrstvou páry. Přestože je tloušťka vrstvy menší než $0,1\text{ mm}$ u hranice a okolo $0,2\text{ mm}$ ve středu,



Obr. 50. Doba života kapek na horké desce.

dokáže výrazně zpomalit vypařování kapky.“ K tomuto vysvětlení jenom dodáme, že vedení tepla vrstvou páry je o poznání menší, než je tomu při vedení tepla přes rozhraní kapka–pánvička – a to vysvětluje i skutečnost, proč se kapka vypaří tak rychle při nízkých teplotách (myslíme tím teploty menší než je Leidenfrostův bod), kdy neexistuje tato vrstvička páry v dostatečné míře.

A nyní je na řadě slíbený teoretický model. Předpokládejme, že kapka má přibližně kulový tvar (kapka nezaujme přesně kulový tvar, koho by to víc zajímalo, toho můžeme opět odkázat na knihu [1]) a že mezi kapkou a povrchem pánve je vrstva páry. Kapka přijímá teplo od pánve prostřednictvím záření a vedením tepla skrz vrstvičku páry. O teplo přichází kapka díky vypařování, vyzařování a část tepla také odvádí okolní vzduch. Dominantním jevy, které mají vliv na teplotu kapky, jsou odpařování vody z kapky a vedení tepla vrstvičkou mezi pánví a kapkou²⁶. Pokud bude kapka v každém okamžiku ve stavu tepelné rovnováhy, pro vypařování můžeme napsat rovnici

$$-l\rho \frac{dV}{dt} = \lambda \frac{P(T - T_0)}{d}.$$

Člen na levé straně rovnice je teplo spotřebované na odpaření objemu²⁷ ($-dV$) kapky za čas dt , ρ je tedy hustota vody a l je měrné skupenské teplo vypařování. Člen na pravé straně vyjadřuje přenos tepla vedením skrz vrstvu páry, ten je úměrný obsahu průřezu kapky P , tepelné vodivosti směsi vzduchu a páry λ , rozdílu teplot mezi pánví a kapkou $T - T_0$ a nepřímo úměrný tloušťce d vrstvy páry. Zdůrazňujeme, že uvedená rovnice je jen hrubý popis toho, co se ve skutečnosti s kapkou děje. Experiment ukáže, jak bude tento teoretický model úspěšný.

Pro kulovou kapku platí $V = 4\pi R^3/3$ a $P = \pi R^2$, kde R je poloměr kapky. Rovnici pro odpařování kapky přepíšeme jenom v proměných V a t (tzn. že P vyjádříme pomocí V). Po úpravách dostaneme

$$-\frac{dV}{dt} = \left[\left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3} \lambda \frac{(T - T_0)}{l\rho d} \right] V^{2/3}.$$

Výraz v hranaté závorce označíme K a diferenciální rovnici vyřešíme separací proměnných

$$-\int_V^0 \frac{dV}{V^{2/3}} = \int_0^t K dt,$$

kde horní a dolní meze integrálů jsme zvolili tak, aby v čase 0 měla kapka objem V a v čase t objem 0. Počítáme už jenom dané integrály a pro dobu odpařování kapky obdržíme

$$t = \frac{3}{K} V^{1/3}.$$

Proměřením závislosti doby života kapky na jejím objemu $t(V)$ můžeme určit konstantu K , a tedy koeficient tepelné vodivosti λ dělený tloušťkou d vrstvy páry.

$$\frac{\lambda}{d} = \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \right)^{2/3} \frac{3l\rho}{T - T_0} \left(\frac{3}{K} \right)^{-1}. \quad (27)$$

²⁶⁾ Experimentální ověření tohoto faktu viz úloha IV.E 18. ročníku FYKOSu.

²⁷⁾ Objem kapky se zmenšuje, proto je dV menší než nula.

Hrubost našeho modelu se projeví ve skutečnosti, že konstanta K bude záviset na objemu kapky, protože se během odpařování mění její tvar, tloušťka polštáře mezi ní a pánví apod. Tato závislost bude obecně složitá. Zvláště při malých objemech kapky, kdy je děj nejvíce dynamický, se bude náš model nejvíce lišit od reality. Při integrování jsme předpokládali, že K na objemu nezávisí a pro dobu vypařování jsme dostali jednoduchý výsledek $t \sim V^{1/3}$. Takže se podívejme, co ukázal experiment.

Postup měření

Naším skvělým experimentálním zařízením byla elektrická plotna na koleji, místo pánve jsme ale použili nerezový hrnec, protože na pánvi se nedařilo rejdně pozorovat, pravděpodobně kvůli nízké teplotě pánve nebo možná také kvůli teflonovému povrchu. Injekční stříkačkou objemu 2 ml jsme kapali kapky vody na povrch a stopkami na mobilu měřili dobu, kterou kapka na rozpáleném povrchu vydržela.

Pro měření jsme použili dva druhy kapek. Velké kapky jsme odkapávali přímo ze stříkačky, malé kapky jsme připravovali tak, že jsme zmenšili otvor stříkačky tak, aby byly kapky menší. Další větší kapky jsme jednoduše vytvářeli rychlým nakapáním více kapek menších. Soustavná chyba měření objemu stříkačkou je asi 2 procenta, jak jsme zjistili měřením hmotnosti natáhnutého objemu vody. Vzhledem k době vypařování (asi 1 min) je měření času dostatečně přesné, bohužel méně přesné je měření objemu kapek. Objem kapky ze stříkačky je možné stanovit tak, že nakaпáte množství kapek, spočítáte je a za objem kapky pak prohlásíte výsledný objem vydělený počtem kapek. Takto jsme to dělali – při velkých kapkách to celkem šlo (nepřesnost asi 6 %), kdežto při malých to šlo o dost hůř a nepřesnost odhadujeme asi na 14 %. To už je opravdu hodně nepřesné, ale stále lepší, než kdybychom určovali objem měřením poloměru (který má smysl jenom pro malé kapky kulového tvaru).

Výsledky měření

Naměřené hodnoty jsou shrnuty v následující tabulce.

č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V [ml]	0,0182	0,0364	0,0522	0,0545	0,1044	0,1566	0,2088	0,2610	0,3132	0,3654
σ_V [ml]	0,0026	0,0052	0,0033	0,0078	0,0066	0,0099	0,0132	0,0155	0,0188	0,0221
	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t_4 [s]	t_5 [s]	t_6 [s]	t_7 [s]	t_8 [s]	t_9 [s]	t_{10} [s]
	52	65	88	77	109	134	153	168	174	194
	47	68	84	76	108	129	151	164	180	192
	43	70	84	82	109	129	142	155	182	183
	53	72	84	77	110	131	147	156	192	185
	49	62	80		113	129	147	162	183	197
	49	68	80		108	123	149	157	180	204
t_i [s]	48,8	67,5	83,3	78	109,5	129,2	148,2	160,3	181,8	192,5
σ_{t_i} [s]	1,8	1,8	1,6	1,7	1,3	1,8	1,9	2,3	2,6	3,4

Naměřené hodnoty závislosti doby vypařování na objemu kapky.

Naměřené hodnoty jsme spolu s jejich chybami vynesli do grafu (viz obr. 51) a nechali proložit závislostí $t = AV^{1/3} + B$ s neznámými koeficienty A a B . Oproti

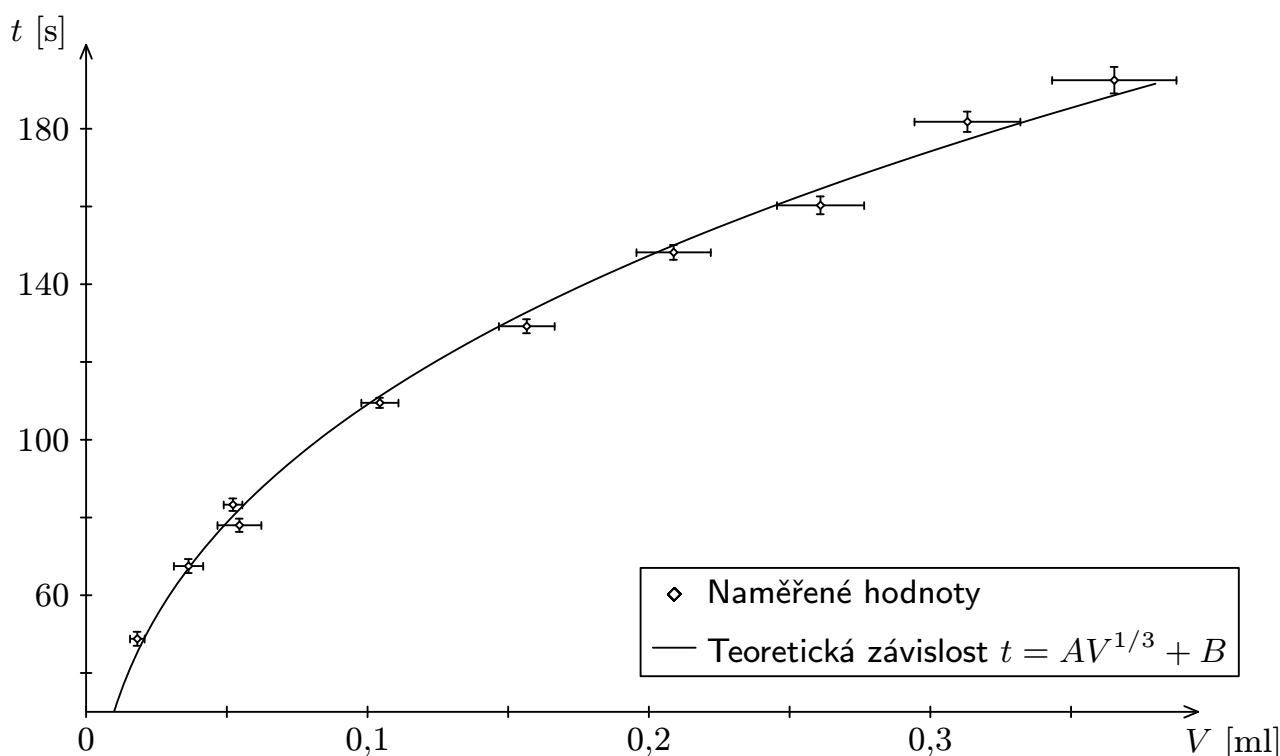
teoretické závislosti jsme přidali konstantu B , aby závislost dobře odpovídala i pro malé objemy kapek. Tehdy je náš teoretický model nejvíce špatně. Dostali jsme

$$A = (320 \pm 40) \text{ s} \cdot \text{ml}^{-1/3}, \quad B = (-40 \pm 15) \text{ s}.$$

Teplota kapky T_0 je rovna teplotě varu vody, teplota pánve je asi 220°C , takže $T - T_0 = (120 \pm 30) \text{ K}$. Hustotu vody a její skupenské teplo vypařování při 100°C najdeme v tabulkách $\rho = 958 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $l = 2260 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dosazením do (27) dostaneme

$$\lambda/d = (1400 \pm 500) \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Z této hodnoty můžeme alespoň odhadnout tloušťku vrstvy mezi pánví a kapkou. V tabulkách najdeme, že tepelné vodivosti plynů jsou řádově $10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, takže $d \approx 10 \mu\text{m}$.



Obr. 51. Závislost doby rejdění kapky na jejím objemu.

Diskuse výsledků

Největší vliv na celé měření měla nepřesnost stanovení objemu kapek, která se podle grafu na obrázku 51 značně projevila při malých kapkách (všimněte si skoku v naměřeném času mezi třetí a čtvrtou kapkou). Další vlivy na přesnost jsou: proměnlivá teplota povrchu, teplotní roztažnost plastové injekční stříkačky při kapání nad rozpáleným povrchem a z toho vyplývající vliv na objem kapek, nepřesné stanovení času (kapání více kapek do jedné větší musí být dost rychlé) atd. Dále je zřejmé, že konkrétní časy $t = t(V)$ závisí na konkrétních podmínkách, jako teplota, čistota a vlastnosti rozpáleného povrchu, složení vody, okolní vlhkost atd. Ale i přesto má měření význam jako informace o průběhu vypařování kapky.

Při pohledu na graf na obrázku 51 vidíme, že teoretická závislost (s korekcí pro malé objemy kapek) dobře vystihuje naměřenou závislost. Teoretický model tedy

nebyl úplně zcestný. Dokonce se nám podařilo řádově odhadnout tloušťku vrstvy páry mezi kapkou a povrchem pánve. Hodnota $10\ \mu\text{m}$ je reálná, dá se očekávat takový výsledek. To je další skutečnost, která nevyvrací uvedenou teorii.

Přesnější experiment by vyžadoval hlavně vymyslet lepší metodu kapání kapek a zejména měření jejich objemu. Možná by také bylo dobré zajistit větší stálost teploty povrchu – při našem měření termostat neustále vypínal a zapínal ohřívání plotny, takže teplota nebyla pořád stejná.

Bonus na závěr

Pokud kápnete trochu větší kapku (asi 0,5 ml) do malé jamky na plotně (takže vám kapka neutěče), dopadem dalších malých kapek ji trochu rozvibrujete. Pokud chvíli počkáte a ještě máte trochu štěstí, uvidíte něco opravdu krásného – kapka začne kmitat vlastním modem ve tvaru podobném trojčípé, pěticípé nebo i vícécípé hvězdě či mnohoúhelníku, má-li kapka vhodnou velikost (viz obr. 52). Přitom kapka kmitá tak rychle, že okem neuvidíte okamžitý tvar kapky, ale překryv dvou po sobě následujících kmitů (dva trojúhelníky pootočené o 60°), takže místo trojúhelníku vidíte šestiúhelník! Zajímavé je, že když už tyto kmity začnou, jen tak rychle nezmizí. Jak je to možné, když nějaké, byť velmi malé tření mezi kapkou a plotnou (a v neposlední řadě také vnitřní tření v kapce) tam být přece musí, takže dochází ke ztrátám energie kmitů?



Obr. 52

Jediným vysvětlením, které se nabízí, je, že kapka si musí brát tepelnou energii od plotny a měnit ji na mechanickou energii svého pravidelného kmitavého pohybu podobně jako tepelný stroj. Pokus je velmi pěkný, určitě si ho vyzkoušejte!

Literatura

[1] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika*. VUT Brno – naklad. VUTIUM, Brno 2000.

Úloha VI. E ... *poznej své tělo*

(6 bodů; průměr 5,20; řešilo 15 studentů)

Na závěr ročníku pro vás máme jednoduchou experimentální úlohu. Z následujících tělních tekutin si vyberte alespoň dvě a změřte alespoň jednu jejich fyzikální vlastnost (hustotu, viskozitu, elektrickou vodivost, index lomu, teplotu varu, ...) – sliny, krev, moč, pot, slzy, žaludeční šťávy, míza.

V této úloze se řiďte heslem čím více, tím lépe.

Konečně zajímavá experimentálka! Bohužel mnoho z vás její přínos k světovému vědění neocenilo. Ale našli se i tací, kteří ve jménu vědy byli ochotni nasadit i vlastní tělo. A ti si zaslouží uznání.

Jelikož se nejednalo o klasickou experimentální úlohu, bude i autorské řešení poněkud netradiční, protože nám přišlo škoda si nechat zajímavé a mnohdy šokující výsledky pro sebe.

Hustota

Tuto veličinu bylo asi nejjednodušší změřit. Možností bylo více, ale většinou jste změřili hmotnost vzorku daného objemu a podle vztahu $\rho = m/V$ určili hustotu. Při měření slin nedošlo k výraznějšímu překvapení. Většinou vyšla hustota o trochu větší než hustota vody. Např. sliny *Jakuba Bendy* měly hustotu $1032 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Pavla Motlocha* $1021 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Lukáš Cimpl* dospěl k hodnotě $1015 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ stejně jako *Lukáš Vítovec*. Poslední jmenovaný kromě těchto „odstálých slin“ změřil i hustotu slin čerstvých, jež byla $650 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Z toho je vidět, že slintáme často i vzduch.

U moči byla situace obdobná. *Iva Kocourková* naměřila hodnotu $1020 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Daniel Šimsa* $1007 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. *Ondrej Bogár* a *Katka Baxová* měřili společně a došli k podobným výsledkům $1015 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, resp. $1018 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. K zajímavé hodnotě dospěl *Peter Vanya*. U normální moči došel k hodnotě $1009 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ podobně jako ostatní, ovšem povedlo se mu „načapovat“ i žlutou moč, jejíž hustota byla $1192 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. To by značilo velké množství rozpuštěných látek.

Naštěstí velká část experimentátorů neváhala si pustit žilou, takže i hustotu krve máme dobře zmapovanou. *Pavel Motloch* uvádí hodnotu $1052 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, *Lukáš Cimpl* $1050 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Specialistka na měření s krví *Iva Kocourková* dospěla k výsledku $1080 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Juraj Hartman a *Peter Vanya* změřili také hustotu spermatu. Zde vyšly naprosto rozdílné hodnoty, prvnímu $685 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a druhému $2142 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. O tom, proč se výsledky tak dramaticky lišily, můžeme pouze spekulovat.

Index lomu

Při měření indexu lomu jste většinou svítily na daný vzorek a měřili jste odchylku paprsku. Z toho již šla snadno vypočítat potřebná hodnota. Pro porovnání: index lomu vody je 1,3. Naměřené hodnoty pro sliny a moč se dosti liší. *Jakubu Bendovi* vyšla pro obě tekutiny hodnota 1,1, ale sám uvádí, že to bude asi málo. *Jan Jelínek* došel k výsledku 1,2 u slin a 1,4 u moči. Duo *Baxová–Bogár* došli ke stejným výsledkům 1,36. *Peter Vanya* měřil i moč s výsledkem 1,35 u normální a 1,45 u žluté, *Marku Nečadovi* vyšlo taktéž 1,35.

pH

Zde bylo měření jednoduché pomocí lakmusového papírku či nějakého modernějšího prostředku. Jinak to bohužel nešlo. Všichni se shodli, že největší pH má krev (*Lukáš Cimpl* 7,2, *Pavel Motloch* 7,4), následuje moč (*Lukáš Cimpl* 6,7, *Pavel Motloch* 7,2) a nejmenší pH mají sliny (*Lukáš Cimpl* 6,7, *Pavel Motloch* 6,7). Nicméně se to moc neliší od neutrálního pH 7. Krevní plazma měřil *Lukáš Vítovec* a vyšlo mu 7,4.

Povrchové napětí

Povrchové napětí jste měřili pomocí odkapávání kapek z kapiláry, poté bylo z hmotnosti kapky možné určit hledanou hodnotu. Pro vodu máme tabulkovou hodnotu $73 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. *Jakub Benda* naměřil pro sliny hodnotu $72 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ a pro moč $65 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Moč a sliny *Jakuba Michálka* mají o poznání menší povrchové napětí, konkrétně $46 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, resp. $42 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Naopak rekordman v této kategorii je *Juraj Hartman*, jehož moč má povrchové napětí $119 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Krev měřila *Iva Kocourková*, jež dospěla k hodnotě $70 \cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$.

Další veličiny

Viskozitu měřil *Lukáš Cimpl* a vyšlo mu, že největší má krev následovaná slinami a močí. Stejnou veličinu měřil pečlivě u slin *Martin Formánek* a s prvně jmenovaným byl celkem ve shodě. *Peter Vanya* měřil teplotu varu potu a vyšla mu hodnota 93°C . Měrný odpor krve měřila *Iva Kocourková*, vyšlo jí $2 \Omega\cdot\text{m}$. Stejnou veličinu měřil *Jakub Benda* pro sliny a moč s výsledky $53 \Omega\cdot\text{m}$, resp. $44 \Omega\cdot\text{m}$. Pro srovnání voda má $2 \cdot 10^5 \Omega\cdot\text{m}$, takže tělní tekutiny jsou oproti ní velmi dobře vodivé. No, a poslední měřenou veličinou byla měrná tepelná kapacita, opět *Jakub Benda* s výsledky $4400 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ u slin a $4220 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$ u moči, takže ne moc odlišnými od vody.

Závěrem

Získané hodnoty jsou mimořádně zajímavé a jejich přínos světové vědě bude jistě ještě po dlouhá léta nedoceněn. Chtěl bych tedy aspoň ocenit všechny experimentátory, kteří neváhali a i přes nedůvěřivé pohledy přihlížejících vařili moč či vážili sliny. Jejich dílo nebude zapomenuto.



Seriál o statistické fyzice

Úvod

V tomto seriálu se pokusíme vyložit některé partie fyziky, ve kterých nějakým způsobem figuruje pojem pravděpodobnosti. Nebude se ovšem jednat o kvantovou mechaniku; v té je pravděpodobnost zanesena již od samého začátku. Namísto toho se budeme soustředit na situace, kdy se snažíme středovat veličiny, které neumíme přesně vypočítat. Abychom ilustrovali druh problémů, jimiž se budeme zabývat, podívejme se na každému známý příklad obyčejného plynu.

Cílem fyziky je vyložit pozorované jevy pomocí co nejméně a co možná nejjednodušších základních zákonů. Takovými zákony jsou v dobrém přiblížení Newtonovy zákony. Chtěli bychom tedy objasnit chování plynu pomocí Newtonových zákonů. Je nám ale jistě jasné, že to nebude jednoduchá záležitost. Vždyť v jednom litru běžného plynu se nachází řádově 10^{22} molekul, které spolu obecně interagují netriviálním způsobem. Snaha o výklad vlastností takového plynu pomocí řešení pohybových rovnic jednotlivých molekul jistě povede k nezdaru. Nejenže nejsme schopni je řešit (vzpomeňte si, s jakými problémy se potýkáme už při řešení jednoduchých mechanických úloh typu obíhání planety kolem Slunce). I kdybychom je byli schopni řešit, neznali bychom počáteční podmínky, to jest polohy a rychlosti všech částic. Ty bychom museli změřit, ale tím bychom jednak narušili stav systému a jednak by nám měření zabralo nějaký čas (takže by se nejednalo o počáteční podmínky). Nicméně my musíme vědět, jak vypadá soustava teď, když chceme činit závěry, kterak bude vypadat za minutu. Nakonec to nejdůležitější. Informace o trajektoriích všech částic by pro nás byla naprosto nepoužitelná – je to příliš mnoho informace, zajímá-li nás například otázka, kolik plynu máme nahustit do pneumatik, aby unesly nákladák.

Proto k řešení přistoupíme tak, že budeme uvažovat střední hodnoty pro nás zajímavých makroskopických veličin (například tlaku, teploty, objemu apod.) a zkoumat, jaké vztahy pro ně můžeme dostat z mikroskopických rovnic. Zjistíme, že některé výsledky na konkrétním tvaru pohybových rovnic závisí, zatímco jiná důležitá tvrzení mají obecný charakter, určený pouze statistickou povahou soustavy. K řešení pohybových rovnic se takto vůbec nedostaneme. Tento přístup je ovšem podmíněn dostatečně velkým počtem částic ve studovaném systému; s rostoucím počtem částic do pozadí ustupují původní zákony pohybu a vynořují se zákonitosti nové, statistické.

V tomto seriálu máme málo místa na podrobný a úplný výklad *statistické fyziky*, navíc předpokládáme pouze nevelké předběžné znalosti čtenářů. Pokud někoho látka zaujme, může se zkusit podívat do některé z učebnic.

Kapitola 1: Pravděpodobnost

Především si hned na začátku připomeneme pojem pravděpodobnost. Mějme nějaký děj, který může vyústit do několika různých situací. A priori předpokládejme, že všechny situace mají stejné šance být výsledkem děje. Potom pravděpodobností nějakého jevu se rozumí podíl počtu situací, kdy jev nastane, ku počtu všech možných situací. Příkladem může být hrací kostka. Děj je v tomto případě házení, koncovým stavem je padnutí 1, 2, 3, 4, 5 nebo 6, přičemž šance padnutí každého čísla je díky pravidelnosti kostky evidentně stejná. Jevem může být například padnutí sudého čísla. Je vidět, že pravděpodobnost sudého výsledku je stejná jako lichého výsledku. Pravděpodobnost existence nějakého výsledku je $100\% = 1$. Proto pravděpodobnost sudého je $50\% = 1/2$.

V kontextu fyzikálního systému je situace složitější. Problém spočívá v tom, že existují dvě rozumné definice pravděpodobnosti. Podstatu si objasníme na příkladu plynu v nádobě. Bude nás zajímat pravděpodobnost jevu, kdy v pravé půlce nádoby bude dvakrát více částic než v levé půlce. Jedna definice říká: Vezmi nádobu a nějakou dlouhou dobu sleduj počty částic v obou polovinách nádoby. Zjisti, po jaký čas z této doby byla splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu je potom poměr tohoto času ku celkové době pozorování. Tato definice je zřejmě úplně přirozená; její chybou je její značně problematický výpočet – musíme totiž znát časový vývoj plynu v krabici, tedy vlastně řešit pohybovou rovnici, od čehož jsme výše chtěli upustit. Pro účely výpočtů se hodí následující definice. Mějme veliké množství stejných nádob, které jsou i jinak makroskopicky stejné (tzn. mají stejnou teplotu, tlak atd.). Podívej se, v kolika z nich je právě teď splněna podmínka. Pravděpodobnost jevu vypočítej jako poměr tohoto čísla ku celkovému počtu nádob. Předpoklad (učiněný Maxwellem), že jsou tyto definice ekvivalentní (nazývá se ergodická hypotéza), se ukázal jako nesprávný. V našich úvahách bude nadále vystupovat sice „méně správná“, zato však užitečnější definice druhá.

Dále si uvědomme několik vlastností zavedeného pojmu. Je-li pravděpodobnost jevu A rovna p , pak pravděpodobnost nenastání jevu A je $1 - p$. Mějme dva jevy A a B, které se navzájem vylučují (například jevy „vpravo je stejně částic jako vlevo“ a „vpravo je třetina počtu částic vlevo“). Potom pravděpodobnost, že nastane jev A nebo B je dána součtem pravděpodobností jevu A a B (neboť výsledek příznivý pro A je zároveň nepříznivý pro B a naopak). Nechť nyní jevy A a B jsou jevy, které na sobě nijak nezávisí (např. A jest „částice č. 1 je vlevo“ a B „částice č. 10 je vpravo“). Potom pravděpodobnost výsledku příznivého jak pro A, tak i pro B, je rovna součinu pravděpodobností jevů A a B.

Nakonec ještě zavedeme několik užitečných matematických pojmů, které se nám v dalších kapitolách budou hodit. Jednak je to pojem faktoriálu. Faktoriálem z n , jež značíme $n!$, rozumíme součin přirozených čísel od 1 do n . Je to počet všech možných uspořádání n různých předmětů. To lze nahlédnout takto. První předmět můžeme vybrat (z n předmětů) n způsoby, druhé místo lze pak zaplnit libovolným ze zbývajících $n - 1$ předmětů, třetí nějakým ze zbývajících $n - 2$ předmětů atd. Celkem to dává $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ možných výběrů. Zajímá-li nás počet možností, kterak vybrat m předmětů z $n > m$ předmětů, přičemž nám záleží na pořadí, můžeme postupovat úplně stejně jako u faktoriálu. První předmět můžeme vybrat n způsoby, druhý $n - 1$ způsoby, až m -tý můžeme vybrat $n - m + 1$ způsoby, celkem tedy máme

k dispozici

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

možností. Je-li nyní potřeba vybrat m -tice předmětů nezávisle na pořadí předmětů v m -ticích, získáme počet možností tak, že si uvědomíme, že každý takový výběr je započítán $m!$ krát v počtu výběrů, kde záleží na uspořádání. Skutečně, počet uspořádání m předmětů je $m!$ a každé uspořádání dané m -tice je právě jednou započítáno ve vzorci výše. K určení hledaného počtu pak stačí vzorec výše vydělit $m!$. Počet různých m -tic z n předmětů se nazývá kombinační číslo a rovná se

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \stackrel{\text{def}}{=} \binom{n}{m}.$$

Úplně na závěr si uvedeme odhad faktoriálu, který nám umožní porovnávat zavedená čísla s námi dobře známými (tj. mocninnými) funkcemi. Odhad se nazývá Stirlingův vzorec a říká

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

přičemž relativní chyba klesá s rostoucím n k nule (přiblížení tedy platí pro velká n).

Úloha I. S ... pravděpodobnost

- Z 32 karet se náhodně vyberou tři karty. Zjistěte pravděpodobnosti jevů, že mezi vybranými kartami bude právě jedno eso, alespoň jedno eso, ani jedno eso.
- V nádobě se nachází N stejných částic. Určete pravděpodobnost, že v levé půlce bude o m částic více než v pravé půlce. Nakreslete graf závislosti pro $N = 10^{10}$. Rozsah m volte tak, aby pravděpodobnost na krajích intervalu byla desetinná oproti středu intervalu. Jak závisí šířka křivky (tj. rozdíl $m_2 - m_1$, kde $m_2 > 0$ a $m_1 < 0$ jsou hodnoty m , pro které je pravděpodobnost poloviční oproti maximu) na N ?
- Odhadněte velikost $\ln(n!)$ (bez použití Stirlingova vzorce).

(řešení str. 123)

Kapitola 2: Základní pojmy statistické fyziky

V této kapitole seriálu si vybudujeme aparát statistické fyziky. Nebudeme to dělat podrobně a rigorózně, neboť bychom tím ztratili spoustu místa a nestačili bychom diskutovat zajímavé jevy, kvůli nimž vlastně o statistické fyzice mluvíme. Budeme pracovat v rámci kvantové teorie, a to hned ze dvou důvodů; jednak se svět řídí kvantovou a nikoliv klasickou mechanikou, jednak je kvantová statistika jednodušší. Ti, co podrobně neznají kvantovou mechaniku, se nemusí ničeho obávat, potřebné znalosti (až na jisté výjimky) vyložíme včas předtím, než je použijeme.

Zkraje uvedeme pro nás nejdůležitější princip kvantové mechaniky, totiž fakt, že v prostoru omezené systémy se mohou nacházet jen v určitých diskrétních stavech (tyto budeme nadále nazývat *mikrostavy*), které jsou charakterizovány svojí energií.²⁸ Pokud vezmeme nějaký systém a ponecháme-li jej dostatečně dlouho v klidu, dobere se takzvané termodynamické rovnováhy. To je stav, kdy se již nemění makroskopické veličiny, kterými jsou například teplota, tlak apod. Příkladem nám bude žhavé železo náhle ponořené do studené vody. Teploty vody i železa se budou měnit a za jistý čas dosáhnou svých rovnovážných hodnot, které se již dále (za stejných okolních podmínek) nemění. Proces ustanovování rovnováhy je složitý a je založen na interakci mezi jednotlivými částicemi (atomy, molekulami, apod.) systému. Částice na sebe působí různými silami (ať již elektrické, kvantové či jiné povahy), „tahají“ se, „strkají“ do sebe a tím přenáší energii v rámci systému, dokud nebude nějakým způsobem rovnoměrně rozdělena.

Boltzmannův vztah

Již v minulém díle jsme rezignovali na popis složitých systémů pomocí přímého řešení pohybových rovnic. Místo toho jsme prohlásili, že existují jiné, statistické zákonitosti. Pro jejich nalezení nám poslouží následující postulát, který je asi hlavním principem statistické fyziky. Jak jsme řekli výše, částice neustále víří v jakémsi divokém tanci. Budeme předpokládat, že pokud se systém nachází v rovnováze, pak toto víření, nárazy, chaos mohou systém přivést se stejnou pravděpodobností do libovolného dostupného mikrostavu, to jest do takového mikrostavu, jehož existence je přípustná například z hlediska zákona zachování energie. V jiné formulaci tento postulát říká, že se systém v průměru nachází stejnou dobu ve všech dostupných mikrostavech, takže pokud bychom v daný okamžik zjišťovali mikrostav, se stejnou pravděpodobností bychom dostali libovolný přípustný výsledek.²⁹ Toto tvrzení se může zdát podivné. Říkáme tím vlastně, že je stejně pravděpodobné, že všechnu energii systému bude obsahovat jedna částice, jako že energie bude přibližně rovnoměrně rozdělena mezi všechny částice. Ale ze zkušenosti víme, jak je tomu doopravdy. Například ve vodě mají všechny molekuly většinu času přibližně stejnou

²⁸⁾ Pro znalce. Samozřejmě se jedná o značně zjednodušené tvrzení; systémy se mohou nacházet v libovolné lineární kombinaci těchto stavů, přičemž lineární kombinace stavů s různými energiemi pak nemá přesně určenou energii. Avšak v kvantové statistice se dá ukázat, že matice hustoty systému v rovnováze musí být v energetické reprezentaci diagonální. To je právě příčina, proč lze takto uvažovat.

²⁹⁾ Jak jsme již výše varovali, všechny formulace jsou (doutáme) úmyslně nepřesné a vágní, protože přesným formulacím a podrobným zdůvodněním bychom museli věnovat mnohem více místa. Pedanti se můžou poučit v příslušné literatuře.

energii; ty nejvíce energetické prodifundují až k povrchu a opustí kapalinu (vypaří se), ovšem je jich relativně málo vůči ostatním. Vtip spočívá v tom, že přibližně rovnoměrné rozdělení energie je možné realizovat nesrovnatelně více způsoby než nerovnoměrné rozdělení.

Výše řečené platí pro izolovaný systém, jenž má neměnnou celkovou energii. Ve skutečném světě ale neexistuje doopravdy izolovaný systém. Energie systému zavřeného v sebelepším termosce se bude trochu měnit. Když je ovšem systém velký, jsou jeho energetické hladiny naskládány velice hustě vedle sebe a i velice malá změna energie (malá na makroskopická měřítká) umožní realizaci obrovského kvanta nových stavů. Bude proto lepší přistoupit k problému z jiného úhlu.

Mějme dva systémy, jeden velký (např. bazén, vzduch v místnosti), druhý malý (např. hrníček s kávou). Předpokládejme, že celková energie E_0 obou systémů (dohromady) se mění velice málo, a to přibližně v intervalu $E_0 \pm \Delta$. Necháme-li tyto dva systémy dostatečně dlouho interagovat, dosáhne se stavu rovnováhy, kdy všechny dostupné mikrostavy budou stejně pravděpodobné. Zkoumejme, jaká je pravděpodobnost $P(E_m)$, že malý systém bude v daném mikrostavu s energií E_m .

Tuto pravděpodobnost najdeme oklikou, totiž přes poměr $P(E_m)/P(E_n)$ pravděpodobností nacházet se v konkrétních mikrostavech s energiemi E_m a E_n . Když budeme znát tento poměr pro dané n a všechna m , můžeme z podmínky jednotkové celkové pravděpodobnosti (tj. že systém se bude určitě nacházet v některém mikrostavu)

$$1 = \sum_m P(E_m)$$

určit správný koeficient úměrnosti.

Označme si $\eta(E)$ počet mikrostavů velkého systému (tepelného rezervoáru, termostatu), které mají energii v intervalu $E \pm \Delta$. Jestliže malý systém má být v mikrostavu s energií E_m , musí mít termostat energii v intervalu $E_0 - E_m \pm \Delta$.³⁰ Pravděpodobnost $P(E_m)$ pak bude podle hlavního principu statistické fyziky úměrná počtu $\eta(E_0 - E_m)$ mikrostavů termostatu, které jsou energeticky přípustné (celková energie $E_m + (E_0 - E_m \pm \Delta)$ se pohybuje v dovolených mezích). Koeficient úměrnosti zatím neznáme. Už ale umíme určit výše zmíněný poměr pravděpodobností

$$\frac{P(E_m)}{P(E_n)} = \frac{\eta(E_0 - E_m)}{\eta(E_0 - E_n)} = \exp[\ln \eta(E_0 - E_m) - \ln \eta(E_0 - E_n)].$$

Jelikož je termostat veliký, je i celková energie velká vůči energii malého systému, tj. $E_0 \gg E_m$. Ukazuje se, že veličina $\beta(E_0 - E_m)$, definovaná vztahem $\beta(E) = -d \ln \eta(E)/dE$, je skoro konstantní při malých změnách (o velikosti E_m) energie E_0 . Proto můžeme logaritmy v exponenciále nahradit v prvním přiblížení diferenciálem³¹, ve kterém zanedbáme členy vyššího řádu než prvního, čímž dostaneme

$$\frac{P(E_m)}{P(E_n)} = e^{-\beta(E_m - E_n)}.$$

³⁰⁾ Předpokládáme, že termostat je natolik velký, že se v tomto intervalu nachází velmi mnoho mikrostavů.

³¹⁾ Jak známo, pro malá h platí přibližně $f(x+h) \approx f(x) + f'(x) \cdot h$.

Položíme-li $P(E_m) = C \cdot \exp(-\beta E_m)$, z podmínky normalizace na jedničku snadno určíme konstantu C

$$1 = \sum_m P(E_m) \quad \Rightarrow \quad 1 = C \cdot \sum_m e^{-\beta E_m},$$

odkud plyne ústřední (tzv. *Boltzmannův*) vzorec statistické fyziky

$$P(E_m) = \frac{e^{-\beta E_m}}{\sum_m e^{-\beta E_m}}. \quad (28)$$

Šance nacházet se v daném mikrostavu exponenciálně klesá s energií mikrostavu. K odvození vzorce budeme mít ještě dva komentáře.

Představme si izolovaný systém, jenž se nachází v rovnováze a má teplotu 10°C . Poté jej ponoříme do nádrže s vodou o stejné teplotě. Je zřejmé, že přítomnost okolní vody (termostatu) podstatně neovlivní žádné jiné vlastnosti systému kromě relativně nezajímavé fluktuace energie systému. Ačkoliv nám přítomnost termostatu pomohla při odvození, není (pokud jsme dostatečně opatrní a klademe správné otázky) pro používání Boltzmannova vzorce nutná.

Druhá poznámka se týká podsystemu nějakého systému. Představme si například krystal kovu a v něm jeden určitý atom či skupinu atomů. O této skupině nyní můžeme uvažovat jako o malém systému a o krystalu, jenž obsahuje nesrovnatelně více atomů, jako o velkém systému, termostatu. Na jednotlivé atomy či jejich skupiny pak také můžeme aplikovat Boltzmannův vzorec. Konkrétním aplikacím Boltzmannova vzorce na konkrétní systémy se budeme zabývat v dalších kapitolách seriálu.

Význam veličiny β z Boltzmannova vztahu

Dále bychom chtěli vyjasnit význam veličiny β . Za tím účelem prozkoumáme jeho vlastnosti. Především si uvědomme, že pokud β roste, rychle se zmenšuje pravděpodobnost stavů s velkými energiemi a naopak. Je to vidět z Boltzmannova vzorce. Nyní si představme si dva izolované systémy A a B s energetickými hladinami A_i a B_i , pro něž platí

$$P_A(A_i) = \frac{e^{-\beta_A A_i}}{\sum_i e^{-\beta_A A_i}} \quad \text{a} \quad P_B(B_i) = \frac{e^{-\beta_B B_i}}{\sum_i e^{-\beta_B B_i}}.$$

Potom je spojíme tak, aby si mohly vyměňovat teplo. Za nějakou dobu se dosáhne rovnováhy, kdy bude pro složený systém platit Boltzmannův vzorec, ve kterém za energetické hladiny dosadíme hladiny složeného systému $A_i + B_i$. Hodnota β složeného systému se ustálí na nějaké rovnovážné hodnotě β_R . V rovnováze pak bude pro složený systém platit Boltzmannův vzorec ve tvaru

$$P(A_i + B_j) = \frac{e^{-\beta_R(A_i+B_j)}}{\sum_{i,j} e^{-\beta_R(A_i+B_j)}} = \frac{e^{-\beta_R A_i}}{\sum_i e^{-\beta_R A_i}} \cdot \frac{e^{-\beta_R B_j}}{\sum_i e^{-\beta_R B_j}}.$$

Rozdělení pravděpodobností v systému A (který nyní předpokládáme v rovnováze se systémem B) můžeme určit snadno; neklademe žádnou podmínku na energii systému B , čili musíme počítat přes všechny možné energie systému B . Hledané rozdělení v systému A pak vypadá následovně

$$P_A(A_i) = \sum_j P(A_i + B_j) = \frac{e^{-\beta_R A_i}}{\sum_i e^{-\beta_R A_i}},$$

a jak vidíme, má tvar Boltzmannova vzorce s parametrem $\beta = \beta_R$. Nicméně úplně stejnou úvahu jsme mohli provést i pro systém B . Z toho plyne důležité tvrzení, totiž že jsou-li systémy A a B v rovnováze, potom mají stejnou hodnotu β , tj. $\beta_A = \beta_R = \beta_B$. Je zřejmé, že totéž tvrzení platí i pro libovolný počet systémů v rovnováze (nejen pro dva).

Tato vlastnost je charakteristická pro jistou veličinu známou z každodenního života, totiž teplotu. Jak známo, teplota předmětů, nacházejících se v rovnováze je stejná; pokud ne, teče teplo od teplejšího ke chladnějšímu, dokud se teplota nevyrovná. Ovšem nemůžeme přímo položit $\beta = T$. Řekli jsme totiž, že při rostoucím β klesá pravděpodobnost stavů s velkou energií; to však platí pro klesající teplotu, neboť ustává tepelný pohyb částic a šance velkého energetického excesu klesá. Naopak při větších teplotách jsou pohyby prudší. Proto jsme nuceni definovat termodynamickou teplotu coby převrácenou hodnotu β vzorcem

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad (29)$$

který má již správné vlastnosti. Koeficient k je tzv. Boltzmannova konstanta, jež umožňuje měřit teplotu T v „lidských“ jednotkách, totiž Kelvinech. Takto definovaná teplota se shoduje s teplotou, kterou znáte ze školy. Boltzmannův vzorec s explicitně vyjádřeným β má tedy tvar

$$P(E_m) = \frac{e^{-E_m/kT}}{\sum_m e^{-E_m/kT}}.$$

Statistická (partiční) suma

Ve skutečnosti však nechceme počítat ani tak pravděpodobnosti jednotlivých mikrostavů, nýbrž hodnoty makroskopicky měřitelných veličin (např. tlaku, energie, magnetizace apod.) pro dané parametry (např. teplotu). To byla hlavní motivace zmíněná na začátku seriálu. Nyní si ukážeme, jak se to dělá.

Prvním krokem je výpočet tzv. *statistické (partiční) sumy* Z , definované vztahem

$$Z = \sum_m e^{-\beta E_m},$$

kde index m běží přes všechny mikrostavy systému. Tato suma je veličinou, stojící ve jmenovateli Boltzmannova vzorce; jde vlastně o pouhý normovací faktor, zajišťující jednotkovou celkovou pravděpodobnost. Přesto z ní lze vypočítat všechny makroskopické veličiny, které by nás mohly zajímat.

Jako první příklad si vezmeme výpočet střední energie systému.³² Podle definice je střední energie (budeme ji značit U) rovna

$$U = \sum_m E_m P(E_m) = \frac{1}{Z} \sum_m E_m e^{-\beta E_m},$$

³²⁾ Střední hodnota veličiny A je definovaná tímto způsobem. Máme-li množinu neslučitelných jevů s pravděpodobnostmi p_n a naše veličina A při těchto jevech nabývá hodnot A_n , pak její střední hodnotou $\langle A \rangle$ rozumíme součet $\sum_n A_n p_n$. Konkrétním příkladem této definice je třeba aritmetický průměr; tam jsou všechny pravděpodobnosti p_n stejné $1/n$.

kde jsme pravděpodobnosti $P(E_m)$ vyjádřili pomocí Boltzmannova vzorce. Tento vzorec lze však také zapsat jinak, což představuje jeden z nejdůležitějších triků

$$U = \frac{1}{Z} \sum_m E_m e^{-\beta E_m} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_m e^{-\beta E_m} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}. \quad (30)$$

Střední hodnotu energie jsme vyjádřili pomocí derivace určité funkce Z .

Podobně můžeme odvodit i střední hodnotu tlaku. Tlak vstupuje do Boltzmannova vzorce prostřednictvím energetických hladin E_m . Tlak v m -tém stavu je záporně vzatou derivací energie E_m tohoto stavu podle objemu, totiž

$$p_m = -\frac{\partial E_m}{\partial V}.$$

Střední hodnota tlaku pak bude

$$\langle p \rangle = \sum_m p_m P(E_m) = \frac{1}{Z} \sum_m -\frac{\partial E_m}{\partial V} e^{-\beta E_m} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial}{\partial V} \sum_m e^{-\beta E_m} = \frac{\partial \beta^{-1} \ln Z}{\partial V}.$$

Tímto způsobem můžeme vypočítat libovolnou střední hodnotu.

Na úplný závěr zadefinujeme dvě další veličiny a uvedeme některé důležité vztahy mezi nimi, které si můžete snadno ověřit právě předvedeným způsobem. Zavedeme tzv. *volnou energii*

$$F = -\beta^{-1} \ln Z = -kT \ln Z \quad (31)$$

a *entropii*

$$S = -\sum_m P(E_m) \ln P(E_m).$$

Platí

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (32)$$

apod. Bohužel veličinu F umíme přesně vypočítat jen pro nejjednodušší systémy.

Úloha II. S ... počítání mikrostavů

- Jaký je vztah mezi počtem mikrostavů $\Omega(E)$ termostatu s energií menší než E a veličinou $\eta(E)$ (tj. počtem mikrostavů s energií v intervalu $E \pm \Delta$) pro malá Δ ?
- Mějme systém N nezávislých harmonických oscilátorů, přičemž energie každého oscilátoru může nabývat hodnot $n\hbar\omega$ s $n = 0, 1, \dots$ (zanedbáváme energii nulových kmitů). Jaký bude mít tvar veličina $\eta(E)$ a $\beta(E)$ pro velká N a E ?
- Najděte stejné veličiny jako v předchozím příkladu pro systém N neinteragujících volných elektronů uvězněných na úsečce, (*) ve čtverci, (**) v krychli.

Nápověda. Použijte de Broglieho relace mezi hybností a vlnovou délkou de Broglieho vlny. Na úsečku se musí vejít celý počet půlvln. De Broglieho vlny ve čtverci si lze představit coby součin vln ve směru osy x a osy y , kvantovací podmínka je podobná jako pro úsečku.

(řešení str. 126)

Kapitola 3: Příklady, aplikace statistické fyziky

V minulé kapitole jsme odvodili základní vztah statistické fyziky, totiž Boltzmannův vzorec. Nyní se jej pokusíme aplikovat na jednoduché konkrétní příklady.

Paramagnetismus

Coby první aplikaci popíšeme problém *paramagnetismu*. Ze školy víme, že látky se v magnetickém poli chovají různě. Některé ze sebe magnetické pole jakoby vytlačují (tzv. *diamagnetika*), jiné naopak magnetické pole silně zesilují (tzv. *feromagnetika*), další sice pole také zesilují, nicméně pouze slabě – *paramagnetika*. Těmi se právě budeme zabývat.

Je všeobecně známé, že elektron i jiné částice se chovají jako malinkaté magnetky; ve svém okolí budí podobné (ale pochopitelně mnohem slabší) magnetické pole jako magnetky na ledničce. Mají tedy určitý vlastní magnetický moment, tzv. spin³³. Magnetek umístěný do vnějšího magnetického pole se snaží natočit tak, aby jeho magnetický moment (čili v podstatě směr namagnetování) mířil ve směru vnějšího magnetického pole. Elektron je poněkud zvláštní magnetek. Jeho magnetický moment (spin) totiž nemůže mířit libovolným směrem, nýbrž jenom směrem nahoru (+) nebo dolů (–).³⁴ Pro naše účely si stačí představit, že spin míří nahoru, nebo dolů podél osy dané směrem vnějšího magnetického pole. Jestliže spin elektronu míří ve směru vnějšího pole, je energie takového elektronu rovna $-\mu B$, kde B je velikost vnějšího pole a μ je magnetický moment (pro elektron platí přibližně $\mu \approx q/m$ s nábojem elektronu q a hmotností m). Mířil-li spin v opačném směru, tedy proti vnějšímu poli, pak má energii μB .

Představme si nyní krystal, v němž má každý atom kovu (kromě jiných) jeden elektron schopný volně měnit orientaci svého spinu. Jestliže zanedbáme interakci mezi jednotlivými spiny, bude energie krystalu rovna součtu energií interakce spinů s vnějším magnetickým polem; tato energie je rovna $E = -N_+ \cdot \mu B + N_- \cdot \mu B$. N_+ je zde počet spinů (z celkového počtu N) mířících ve směru pole a N_- je počet spinů mířících proti směru pole; zřejmě musí být splněna podmínka $N = N_+ + N_-$. Teď můžeme použít Boltzmannův vztah, který předpovídá následující rovnovážný poměr počtu spinů mířících ve směru pole ku počtu spinů mířících proti směru pole

$$\frac{N_+}{N_-} = \frac{P(-\mu B)}{P(\mu B)} = \frac{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)} = \exp\left(\frac{2\mu B}{kT}\right).$$

Použitím podmínky zachování celkového počtu částic můžeme dostat průměrné počty spinů s danou orientací

$$N_+ = NP(-\mu B) = \frac{N \exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)},$$

³³⁾ Spin ve skutečnosti označuje vlastní moment hybnosti částice. Moment hybnosti je však přímo úměrný magnetickému dipólovému momentu. Proto pojmem spin volně označujeme dvě veličiny.

³⁴⁾ Toto tvrzení není přesné. Ve skutečnosti může spin mířit libovolným směrem, ale každý takový stav se dá složit ze stavu „elektron má spin mířící nahoru“ a ze stavu „spin elektronu míří dolů“. Více se dozvíte v nějaké knize o kvantové mechanice.

$$N_- = NP(+\mu B) = \frac{N \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)}.$$

Jmenovatel obou výrazů je stejný a zajišťuje normování počtů tak, aby platilo $N_+ + N_- = N$; jedná se o partiční sumu Z , definovanou v minulé kapitole. Tyto vztahy předpovídají, že při velmi malé teplotě budou prakticky všechny spiny mířit ve směru pole, a budou tudíž pole zesilovat – krystal se bude chovat paramagneticky. S růstem teploty se objeví spiny orientované proti poli; při nekonečně vysoké teplotě nakonec budou obě orientace zastoupeny stejně. Elementárně to můžeme vysvětlit, uvědomující si, že preferovaný je stav s co nejmenší energií. Tepelné fluktuační (kmity mřížky, srážky s volnými elektrony atd.) ovšem mnohé spiny otočí do energeticky méně výhodné pozice; otočí jich tím více, čím větší je teplota.

Můžeme snadno vypočítat celkový magnetický moment kusu krystalu (pro určitost jednotkového objemu) — tento je prostě součtem magnetických momentů jednotlivých elektronů (s příslušnými znaménky). Pro střední magnetický moment proto dostáváme (N je počet atomů v jednotkovém objemu)

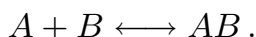
$$M = \mu N_+ - \mu N_- = \mu N \frac{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)}{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)}. \quad (33)$$

V tomto jednoduchém modelu navíc můžeme vypočítat i tepelnou kapacitu³⁵, to jest kolik energie (tepla) je potřeba k ohřátí soustavy spinů o 1 K. Platí zřejmě $C = dE/dT$; energie souvisí s magnetickým momentem krystalu jako $E = -M \cdot B$. Stačí tedy zderivovat vztah výše podle teploty a vynásobit jej velikostí magnetického pole. Nakreslíme-li si závislost tepelné kapacity na teplotě, zjistíme obecně platný zákon, totiž že tepelná kapacita klesá s klesající teplotou k nule. V tomto případě klesá tepelná kapacita k nule i s rostoucí teplotou – závislost má lokální maximum někde v oblasti „prostředních“ teplot.

Gultbergův-Waageův zákon

Ze školní chemie možná znáte poučku (tzv. *Gultbergův-Waageův zákon*) o rovnováze chemických reakcí, která tvrdí, že pro danou reakci v rovnováze je součin jistých mocnin koncentrací výchozích látek dělený součinem jistých mocnin koncentrací produktů reakce konstantní; exponenty jsou číselně rovny stechiometrickým koeficientům, se kterými příslušné molekuly vystupují v rovnici chemické reakce. Vzápětí se ale dodává, že tato konstanta je závislá na teplotě. Zde si zkonstruujeme jednoduchý model jedné speciální chemické reakce (jíž odpovídají exponenty 1) a určíme onu závislost.

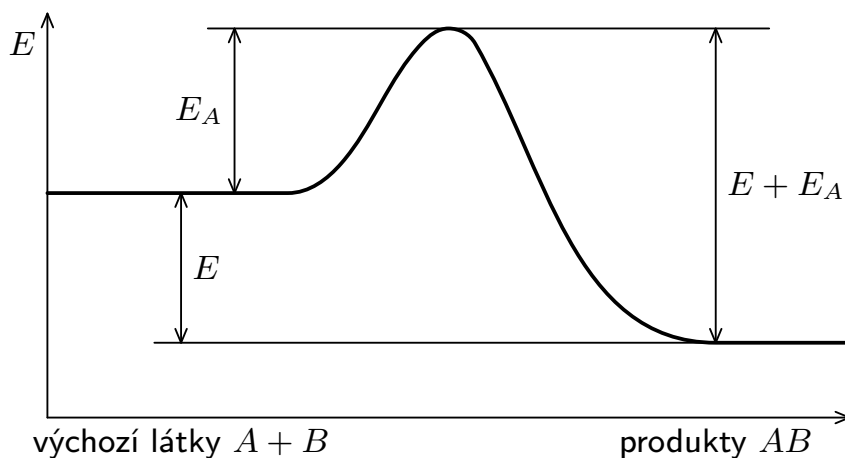
Uvažujme reakci, ve které se slučují dvě jednoduché molekuly A a B do jedné výsledné molekuly AB



Jak známo, chemická reakce probíhá neustále — molekuly se nepřetržitě slučují a jiné se zase rozpadají. V rovnováze, tedy ve stavu, kdy se koncentrace účastníků

³⁵⁾ Máme na mysli tepelnou kapacitu příslušející soustavě spinů. Krystal má také (dále diskutovanou) tepelnou kapacitu, způsobenou kmity atomů krystalu, a jiné.

reakce v roztoku nemění, je rychlost procesu slučování rovna rychlosti procesu rozpadání; za daný čas se stejný počet párů molekul A a B sloučí, jako molekul AB rozpadne. Je potřeba najít rychlosti reakcí přímé V a zpětné W a pak je položit rovny. Nemůžeme ale jít do detailů, poněvadž se ve skutečnosti jedná o velmi složitý problém. Nicméně pokusíme se alespoň odhadnout charakter těchto funkcí. Jako první najdeme rychlost W . Tato je jistě úměrná počtu molekul AB n_{AB} (je-li pravděpodobnost rozpadnutí molekuly rovna p , potom přímo z definice pravděpodobnosti plyne, že za stejný čas se z a -krát více molekul rozpadne a -krát více molekul). Dále je tento proces závislý na výšce energetické bariéry (aktivační energie), která se musí překonat.



Obr. 53. Energetická bilance reakce, aktivační energie.

Je-li aktivační energie přímé reakce rovna E_A , pak je bariéra pro zpětnou reakci vysoká $E_A + E$, kde E je výsledná energie uvolněná při vzniku jedné molekuly AB . Jaká část molekul získá dostatečnou energii – tj. o $E_A + E$ a více, než odpovídá základnímu stavu? Tento počet je úměrný výrazu

$$\int_{E_A+E}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{kT}\right) dx \sim T \cdot \exp\left(-\frac{E_A + E}{kT}\right),$$

v podstatě je to tedy exponenciální závislost. Výsledek³⁶ je

$$W \approx cn_{AB}T \exp(-(E_A + E)/kT)$$

s nějakou konstantou c . Rychlost přímé reakce je zase úměrná počtu molekul A n_A , ale i počtu molekul B n_B (pravděpodobnost srážky dané molekuly B s nějakou molekulou A bude dvakrát větší, jestliže bude dvakrát více molekul A a naopak), čili dohromady je rychlost úměrná součinu $n_A \cdot n_B$. V přímém směru se musí překonávat energetická bariéra o výšce pouze E_A , pročež rychlost bude úměrná (analogicky případu výše, ovšem výška bariéry je nyní pouze E_A) $T \exp(-E_A/kT)$. Celkově máme

$$V \approx c' n_A \cdot n_B T \exp(-E_A/kT),$$

³⁶⁾ Náš postup slouží jenom ke kvalitativnímu pochopení a je jistě nepřesný. Proto bychom faktor T před exponenciálou mohli klidně vynechat, neboť exponenciála se mění se změnou argumentu daleko rychleji než T a my nevíme, jsou-li veličiny E a E_A doopravdy nezávislé na teplotě – i slabá závislost může způsobit velikou výslednou změnu rychlosti W .

s další konstantou c' .

V rovnováze požadujeme $V = W$, což rozepsáno pomocí odvozených vzorců dává závislost

$$\frac{n_A n_B}{n_{AB}} = g \exp(-E/kT), \quad (34)$$

kde g je přibližně konstanta. Obdrželi jsme Gultbergův-Waageův zákon (zde pouze pro speciální případ reakce); nalevo stojí koncentrace reaktantů ve správné kombinaci a napravo je funkce pouze teploty – rovnovážná konstanta. Rovnovážná konstanta exponenciálně (a tedy silně) závisí na teplotě, s rostoucí teplotou se koncentrace mění v neprospěch produktů. Všimněme si, že aktivační energie E_A se v tomto rovnovážném vztahu nevyskytuje. A musí to tak být; Boltzmannův vztah předpovídá zastoupení různých energií nezávisle na tom, jakými procesy se mezi nimi přechází. Veliká aktivační energie může způsobit, že bude velmi dlouho trvat, než výchozí látka zreaguje (jelikož se jedná o exponenciální závislost, může to „dlouho“ znamenat prakticky cokoliv), ale jakmile se dosáhne rovnováhy, nehraje již roli.

Ideální plyny

V následujících příkladech provedeme jistý myšlenkový skok, přejdeme od diskrétních kvantových systémů ke spojitým klasickým. Ve skutečnosti v tom ale není žádná věda. Kvantový mikrostav byl popsán přirozeným číslem m . Klasický mikrostav jedné částice jednoduše popíšeme šesticí (x, y, z, v_x, v_y, v_z) (pro N částic $6N$ -ticí $(x_1, y_1, z_1, v_{x1}, v_{y2}, v_{z3}, \dots)$), tedy polohami a rychlostmi částic, které mikrostav jednoznačně určují. O množině $6N$ -tic pak mluvíme jako o fázovém prostoru. Pravděpodobnost, že se systém bude nacházet v nějakém mikrostavu, je dána Boltzmannovým vzorcem, ve kterém za E vezmeme pravděpodobnost mikrostavu.³⁷

Ještě potřebujeme určit spojitou analogii počtu mikrostavů s energií E , což je v kvantovém případě přirozené číslo, nicméně klasických $6N$ -tic s určitou energií je jistě nekonečně a nespočetně mnoho (tvoří nějakou nadplochu v $6N$ -rozměrném prostoru). Obvykle nás ale zajímá jen poměr počtů mikrostavů s určitými energiemi. V klasickém případě můžeme tento poměr nahradit poměrem mnoharozměrných objemů příslušných nadploch. Obsah těchto tvrzení vyjasníme na příkladech.

Barometrická rovnice

Naši anabázi začneme (jak jinak) odvozením barometrické rovnice, tj. určíme závislost tlaku vzduchu na výšce. Předpokládejme, že atmosféra se nachází v rovnováze, a teplota tedy nezávisí na výšce. Ve skutečnosti to samozřejmě není pravda, atmosféra Země je cokoliv, jen ne příklad rovnovážného systému. Nicméně abychom byli schopni určit alespoň charakter závislosti, budeme počítat výše uvedenou idealizovanou situaci.

³⁷⁾ Ve skutečnosti je pravděpodobnost nacházet se v nějakém určitém klasickém mikrostavu nulová, neboť mikrostavy tvoří tzv. kontinuum. Vždy když dále budeme hovořit o pravděpodobnosti nacházet se v mikrostavu, budeme tím mít na mysli šanci vyskytovat se v určitém (pro určitost jednotkovém) okolí tohoto mikrostavu. Pro malá okolí je pravděpodobnost přímo úměrná velikosti tohoto okolí. Pokud u všech pravděpodobností používáme stejné okolí, velikost okolí se nebude v poměrech pravděpodobností vůbec vyskytovat a nemusíme o něm explicitně mluvit. Pro erudovanější čtenáře zavedeme pojem hustoty pravděpodobnosti. Pravděpodobnost dP , že se veličina h nachází v intervalu $(h, h + dh)$, je pro infinitezimální dh dána vzorcem $dP = \varrho(h) dh$. Funkce $\varrho(h)$ se nazývá hustota pravděpodobnosti.

Budeme uvažovat pouze potenciální energii částic, neboť rozdělení kinetické energie se s výškou při konstantní teplotě měnit nemůže, a tedy neovlivní koncentraci. Celý přechod od kvantového případu ke klasickému pak spočívá v tom, že místo energie mikrostavu E_m vezmeme potenciální energii U atomu nacházejícího se v určité výšce. Nechť tlaku na úrovni moře odpovídá koncentrace (tj. počet molekul na jednotku objemu) molekul n_0 . Z Boltzmannova vzorce víme, že zastoupení molekul s energií o U větší, než mají molekuly u země, se řídí vztahem

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U}{kT}\right).$$

Potenciální energie jedné molekuly o hmotnosti m ve výšce h nad úrovní moře (kterou bereme jako hladinu nulové potenciální energie) je dána vzorcem $U = mgh$. Proto koncentrace molekul souvisí s výškou vztahem

$$n(h) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Pokles koncentrací je různý pro různé plyny, neboť molekuly různých plynů mají různou hmotnost. Například relativní zastoupení kyslíku vůči lehčímu dusíku s výškou klesá. Ve vysokých vrstvách atmosféry je také relativně vysoké zastoupení vodíku, který má nejlehčí molekuly; jeho hustota klesá s výškou nejpomaleji. Proto je potřeba mít nadále na mysli buď pouze jednu složku vzduchu, nebo za m dosadit nějakou „střední“ hmotnost molekuly; otázka jakou přesně nás nemusí příliš trápit, hmotnosti molekul kyslíku a dusíku, tedy hlavních složek vzduchu, se totiž liší jenom málo a navíc ve skutečnosti odvozená rovnice neplatí moc dobře, neboť atmosféra není v rovnováze. Exponenciální závislost se však přeci jen pozoruje.

Nyní použijeme stavovou rovnici ideálního plynu $PV = nkT$, kterou vztáhneme na jednotkový objem plynu (položíme $V = 1$), čímž dostaneme závislost tlaku na výšce

$$P = nkT = kTn_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) = P_0 \cdot \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right).$$

Tlak tedy klesá stejně exponenciálně jako koncentrace molekul.

Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení

V tomto okamžiku by byl hřích neodvodit i známé Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení rychlostí molekul v ideálním plynu. Ideálnost plynu spočívá v zanedbání interakcí mezi molekulami. Energie molekul pak nezávisí na poloze, a stačí tudíž uvažovat jen rozdělení rychlostí.

Nejprve vypočítáme, jaké je rozdělení rychlostí ve směru některé souřadnicové osy, třeba x . Z výrazu pro energii částice $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ je vidět, že rozdělení rychlostí ve směru x je nezávislé na směrech y i z . Přechod od kvantového ke spojitému systému nečiní potíže. Mikrostav s daným příspěvkem k energii je právě jeden, takže jsme v situaci příkladu výše. Pravděpodobnost, že částice bude mít rychlost v_x ve směru osy x , je pak úměrná (ve smyslu poznámky pod čarou 37)

$$P(v_x) \sim \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right). \quad (35)$$

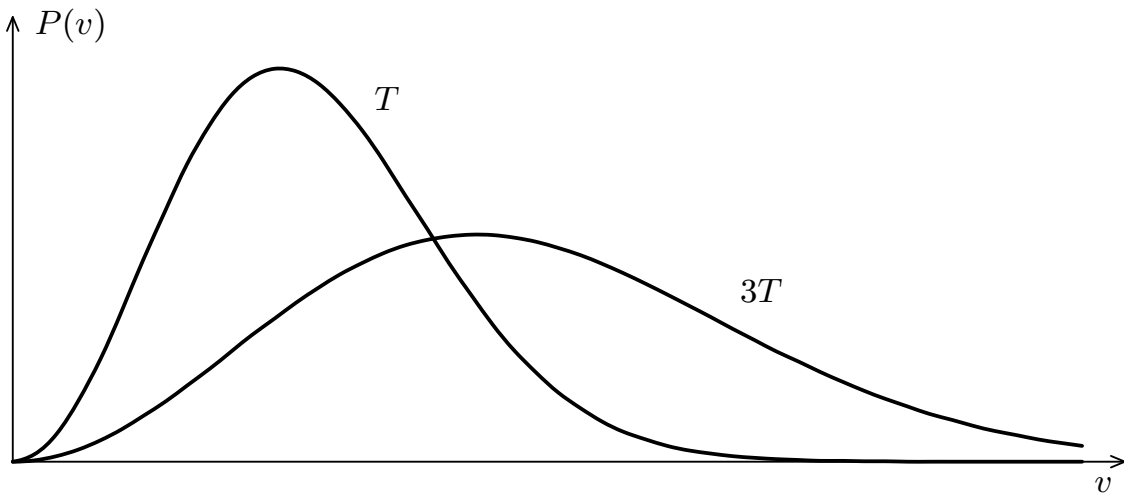
Dále odvodíme rozdělení velikostí rychlostí. Zde je situace malinko složitější. Poměr počtu mikrostavů s danou energií zde totiž není stálý. Kinetická energie částice je dána vztahem $mv^2/2$. K této energii vedou všechny vektory rychlosti \mathbf{v} , jejichž velikost je v , což jsou vlastně vektory, jejichž koncový bod leží na kouli o poloměru v . Ta má však povrch úměrný v^2 , takže poměr počtu mikrostavů s velikostmi rychlostí v_1 a v_2 je $(v_1/v_2)^2$. Proto poměr pravděpodobností mít rychlost o velikosti v_1 a v_2 je (z Boltzmannova vzorce)

$$\frac{P(v_1)}{P(v_2)} = \frac{v_1^2 \cdot \exp(-mv_1^2/2kT)}{v_2^2 \cdot \exp(-mv_2^2/2kT)}, \quad (36)$$

čili relativní počet částic (pravděpodobnost), které budou mít rychlost v okolí v , je

$$P(v) \sim v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

což je právě ono slavné Maxwelllovo-Boltzmannovo rozdělení, znázorněné na obrázku 54 pro různé teploty T a $3T$.



Obr. 54. Maxwelllovo-Boltzmannovo rozdělení pro teploty T a $3T$.

Všimněme si, že rozdělení rychlostí ve směru x má maximum pro $v_x = 0$; podstatný díl částic se tedy v tomto (a každém jiném) směru skoro nepohybuje. To by se mohlo zdát paradoxní. Nicméně rozdělení velikosti rychlostí jasně předpovídá, že podíl částic s rychlostí okolo $v = 0$ bude nulový (díky faktoru v^2 před exponenciálou) a maximum bude nastávat pro jistou hodnotu v_m , která roste s teplotou. Částice ve směru osy x stojící se tudíž pohybují ve směru y a z .

Úloha III. S ... aplikace statistické fyziky

- a) Pomocí podobné úvahy jako v příkladu v textu určete, jaký tvar má Gultbergův-Waageův zákon pro složitější reakce (např. $2A + B \rightarrow A_2B$). Zkuste zjistit, jestli (a jak dobře) tento zákon odpovídá skutečnosti.
- b) Z Maxwelllova-Boltzmannova rozdělení odvoďte, jaké mocnině teploty je úměrná střední kinetická energie částic plynu. Ověřte si, že jste schopni stejnou metodou zjistit, jak závisí na teplotě střední hodnota *libovolné* mocniny rychlosti.
- c) Mějme systém nezávislých spinů, diskutovaný v textu, o teplotě T_1 , který se nachází v magnetickém poli o velikosti B_1 . Následně systém adiabaticky zaizolujeme (tj. zavřeme jej do termosky, aby z něj nemohlo odcházet žádné teplo)

a budeme pomalu zmenšovat magnetické pole až na hodnotu B_2 . Vypočítejte, jaká bude výsledná teplota T_2 .

Nápověda. Práce vykonaná na systému s magnetickým momentem M při malé změně magnetického pole B o dB je dána vztahem $dW = -M dB$.

(řešení str. 129)

Dále se budeme zabývat otázkami (nejen) historické důležitosti, které v minulém století ukázaly na rozpor předpovědi klasické fyziky se skutečností a nakonec vedly až k formulaci kvantové mechaniky. Konkrétně půjde o vysvětlení poklesu tepelné kapacity plynů a kovů při nízkých teplotách a o vysvětlení tvaru spektra záření černého tělesa.

Klasické předpovědi

Nejprve se však podíváme, co vlastně předpovídá klasická fyzika. Především v klasické mechanice se dá energie zapsat jako součet kinetické a potenciální energie, kde kinetická energie závisí jenom na hybnostech a potenciální energie na hybnostech nezávisí. Platí, že každý stupeň volnosti systému (např. x -ová složka hybnosti j -té částice) přispívá k střední kinetické energii hodnotou $kT/2$. Například jedna částice má tři stupně volnosti, takže její střední kinetická energie bude $3kT/2$. Teď již umíme určit střední kinetickou energii libovolného systému.

Toto tvrzení není těžké dokázat. Především rychlosti ve směru různých os jsou nezávislé veličiny, neboť

$$\begin{aligned} P(\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)) &\sim \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2kT}\right) \cdot \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2kT}\right) \cdot \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right). \end{aligned}$$

Stačí je tedy zkoumat odděleně a na každý stupeň volnosti použít výsledek úlohy III.S, část b), jenž můžeme dále vylepšit vypočítáním tamních integrálů, čímž určíme konstantu úměrnosti. Přitom využijeme vztahu $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$. Vidíme, že odvození využívalo pouze rozkladu kinetické energie na součet kvadrátů. Stejný výsledek tedy musí platit pro potenciální energii ve tvaru $V = \sum_i k_i x_i^2/2$, kde x_i jsou nějaké souřadnice.³⁸ Každý stupeň volnosti v potenciální energii přispívá ke střední energii hodnotou $kT/2$. Čili například jednorozměrný (tj. s jedním stupněm volnosti) harmonický oscilátor by měl střední hodnotu potenciální energie rovnu $kT/2$.

Tyto vztahy mají dosti obecnou platnost. Můžeme je například použít pro odhad velikosti fluktuací světelné stopy zrcátkových přístrojů; to jsou zrcátka zavěšená na vlákně, která se vychylují podle velikosti měřené veličiny, například magnetického pole (pak se na vlákno zavěsí ještě kalibrovaný magnetek). Na zrcátko svítíme a z polohy odraženého paprsku vyvozujeme měřenou veličinu. Stopa se ale i po odstranění všech vibrací bude chvět, neboť do zrcátka naráží molekuly vzduchu.

³⁸⁾ V libovolné knížce o lineární algebře se dozvíte (a není ani těžké odvodit to samostatně), že výraz ve tvaru $\sum_{i,j} C_{ij} x_i x_j$ (tzv. kvadratická forma) se dá napsat jako $\sum_i C'_{ii} x'_i x'_i$, přičemž čárkované souřadnice získáme lineární transformací původních souřadnic. Triviálním příkladem je všem známý vzorec $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

Zrcátko se při malých odchylkách φ od aktuální rovnovážné polohy chová jako harmonický oscilátor s potenciální energií $V = q\varphi^2/2$, kde q je „tuhost“ vlákna. Podle předchozích odstavců víme, že střední potenciální energie jednoho stupně volnosti je $kT/2$. Proto střední kvadratická odchylka (fluktuační) stopy od správné polohy bude $\langle \varphi^2 \rangle = kT/q$. Fluktuační tedy můžeme zmenšit snížením teploty nebo použitím tužšího vlákna, případně úplným odčerpáním vzduchu.

Pro naše účely je důležitý spíše jiný příklad. Představme si krystalovou mřížku plnou atomů kmitajících kolem svých rovnovážných poloh. Pokud tyto kmity nejsou příliš velké, můžeme kmitání považovat za harmonické. Střední kinetická energie jednoho atomu je $3kT/2$ (atom má tři stupně volnosti), střední potenciální energie bude taktéž $3kT/2$ (atom kmitá ve třech směrech), střední celková energie proto bude $3kT$. V jednom molu látky je N_A částic, takže celková energie by měla být $3N_A kT = 3RT$. Molární tepelná kapacita je definována jako množství tepla potřebného na ohřátí krystalu o 1 K, $c = dQ/dT$. Poněvadž krystal prakticky nekoná práci, je dodané teplo přímo rovno změně vnitřní energie, která je, jak nyní víme, rovna $3RT$. Proto by molární tepelná kapacita krystalu měla být

$$c = 3R.$$

Tento vztah se nazývá *Dulongův-Petitův zákon*; tepelná kapacita podle něj nezávisí na teplotě. Ovšem experimentálně bylo zjištěno, že tepelná kapacita jde se snižující se teplotou k nule. Navíc je to nutné, pokud chceme udržet platnost třetího termodynamického zákona.

Téměř shodný je i problém poklesu tepelné kapacity víceatomových plynů. Molekulu plynu si klasicky představíme jako obrazec, v jehož vrcholech je rovnovážná poloha částic, jež jsou k ní vázány lineární vratnou silou, tj. potenciálem harmonického oscilátoru. Vypočítáme střední energii pro jednoduše dvouatomové molekuly (stejnou úvahu je analogicky možné provést pro libovolně složité molekuly). Molekula se může pohybovat jako celek, na což připadne energie $3kT/2$, dále může rotovat ve dvou kolmých směrech (nikoliv tedy podél osy molekuly) (příspěvek kT) a nakonec mohou molekuly harmonicky kmitat v jednom směru kolem rovnovážných poloh. Tomu odpovídá příspěvek $kT/2$ za kinetickou energii a $kT/2$ za potenciální. Dohromady to dělá $7kT/2$, odpovídající tepelná kapacita 1 molu plynu by měla být

$$c = 7R/2.$$

Ani tato závislost není správná. Pro některé plyny hodnota c přijatelně souhlasí s experimentem při pokojových a vyšších teplotách, avšak při nižších teplotách dochází k poklesu tepelné kapacity. Je zajímavé, že nejdříve dojde k poklesu střední energie molekuly o kT , kde se hodnota na nějaký čas zastaví a teprve pak klesá až k nule. Pokud kT identifikujeme jako příspěvek od kmitání, dochází zřejmě k jakémusi „zamrznutí“ kmitání.

Kvantový harmonický oscilátor

Naším úkolem je vysvětlit pozorovanou závislost. Jak jsme již naznačili, nesrovnalosti leží v nekvantovém popisu situace. Pohyb těžiště relativně těžkého objektu, jako je molekula lze popisovat klasicky i při dosti nízkých teplotách. Hůře je na tom

rotace molekuly, ale i tu lze klasicky popisovat až do teplot řádově 10 K (kromě izotopů vodíku). Avšak klasický popis mikroskopického harmonického oscilátoru je možný až při teplotách v řádech tisíců kelvinů. Musíme tedy určit statistické vlastnosti souboru nezávislých kvantových harmonických oscilátorů.

Jelikož jsou oscilátory nezávislé, stačí uvažovat jen jeden. Již dříve jsme zmínili, že kvantový harmonický oscilátor se může nacházet jen ve stavech s energií $E_n = \hbar\omega n$, kde $n = 0, 1, \dots$.³⁹ Abychom mohli určit tepelnou kapacitu, musíme nejdříve znát střední energii. Tu můžeme vypočítat metodou z druhé kapitoly. Pro připomenutí ji tu znovu odvodíme na našem konkrétním případě.

Pravděpodobnost, že oscilátor bude ve stavu s energií E_n , je podle Boltzmannova vzorce

$$p_n = \frac{\exp(-\beta E_n)}{Z} = \frac{\exp(-\beta E_n)}{\sum_i \exp(-\beta E_i)}.$$

Střední hodnota energie je proto

$$U = \sum_n E_n p_n = \frac{\sum_n E_n \exp(-\beta E_n)}{\sum_n \exp(-\beta E_n)}.$$

Dosadíme-li za E_n , dostaneme

$$U = \frac{\sum_n \hbar\omega n \exp(-\beta\hbar\omega n)}{\sum_n \exp(-\beta\hbar\omega n)} = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n},$$

kde $x = \exp(-\beta\hbar\omega) < 1$. Úkolem je sečíst vzniklé řady. Spodní řada nám jistě nečiní potíže, neboť jde o obyčejnou geometrickou řadu se součtem $1/(1-x)$. Horní je však o něco složitější. Ve druhé kapitole jsme prozradili šikovný trik (rovnice (30)), jak ji vypočítat⁴⁰

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^n = x \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Vraťme se však k fyzice. Pokud použijeme předchozí výsledky v rovnici pro U , dostaneme

$$U = \hbar\omega \frac{x}{1-x} = \frac{\hbar\omega}{x^{-1} - 1} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

³⁹⁾ Správně bychom měli psát $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$, avšak zanedbání energie $\hbar\omega/2$ nulových kmitů zde nehraje žádnou roli (počátek stupnice energie můžeme zvolit libovolně).

⁴⁰⁾ Pro zajímavost zde ukážeme, jak odvodit tento vztah (skoro) čistě algebraicky. Začneme jednodušší řadou, geometrickou $S = 1 + x + x^2 + \dots$. Když od této řady odečteme jedničku, dostaneme $S - 1 = x + x^2 + \dots$. Nabízí se vytknout x , odkud získáme $S - 1 = x \cdot (1 + x + x^2 + \dots) = x \cdot S$. Z této rovnice již snadno spočítáme $S = 1/(1-x)$. Podobně budeme postupovat i v případě řady $P = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \dots$. Nyní však nebudeme odečítat jedničku, nýbrž celou geometrickou řadu $x \cdot S = x + x^2 + \dots$. Takto dostaneme $P - xS = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + \dots$. Opět se nabízí vytknout x a získat rovnici $P - xS = x \cdot (1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \dots) = x \cdot P$. Odtud již plyne výsledek

$$P = \frac{xS}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Pokud je teplota dostatečně velká (tj. $\hbar\omega \ll kT$), můžeme pomocí vztahu $\exp x = 1 + x$ platného pro $x \rightarrow 0$ přibližně položit $\exp(\hbar\omega/kT) \approx 1 + \hbar\omega/kT$, čímž pro U dostaneme $U \approx kT$, tedy výsledek v souladu s předpovědí klasické fyziky.

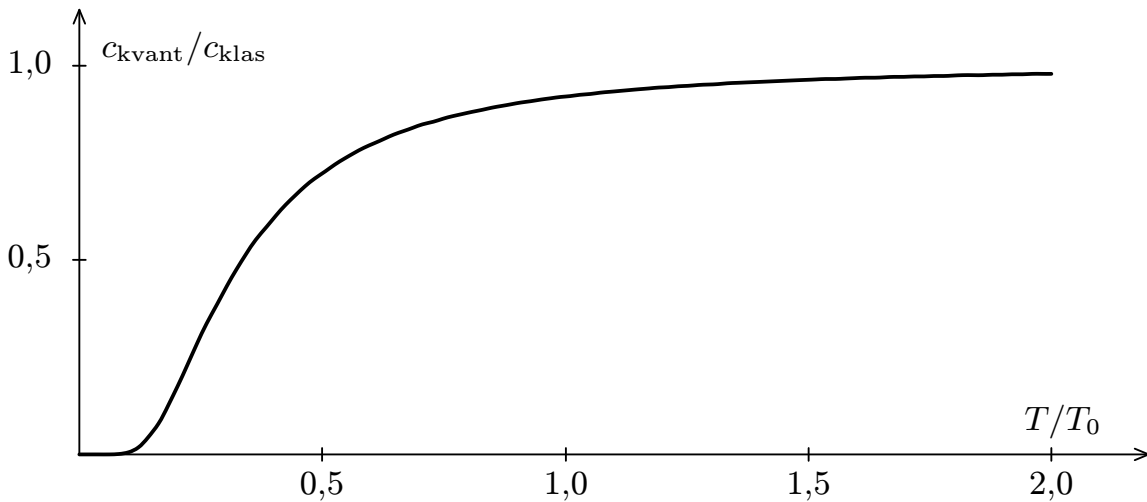
Nyní již víme, jak závisí střední energie oscilátoru na teplotě. Vypočítejme ještě tepelnou kapacitu takového oscilátoru

$$c = \frac{dU}{dT} = \frac{\hbar^2\omega^2}{kT^2} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)}{(\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^2}. \quad (37)$$

Tuto závislost lze zřejmě pro dostatečně vysoké teploty aproximovat vztahem

$$c = k \left(1 + \frac{\hbar\omega}{kT} \right) \rightarrow k.$$

Graf závislosti si můžete prohlédnout na obrázku 55. V něm je vynesena poměr kvantové a klasické tepelné kapacity v závislosti na poměru teploty a jakési charakteristické teploty $T_0 = \hbar\omega/k$ (tento poměr musí mít rozměr teploty, protože v exponenciále může stát jen bezrozměrné číslo). Při teplotách podstatně větších než T_0 jsou kvantové efekty naprosto zanedbatelné, při teplotách srovnatelných se již nedají dobře zanedbat. Abychom získali představu o konkrétních číslech, uvedeme hodnotu charakteristické teploty T_0 pro dusík (3300 K) a kyslík (2200 K).



Obr. 55. Poměr kvantové a klasické předpovědi pro závislost tepelné kapacity plynu na teplotě.

Odvozená závislost velice dobře vystihuje pokles tepelné kapacity plynů v širokém rozmezí teplot. S vysvětlením tepelné kapacity krystalu je to již horší. Náš (vlastně Einsteinův) jednoduchý model nezávislých harmonických oscilátorů předpovídá příliš rychlý pokles tepelné kapacity s teplotou.

Pokud se přesto pokusíme nafilovat odvozenou závislost na experimentální data, dostaneme hodnoty charakteristické teploty T_0 řádově sto K pro cín a řádově tisíc K pro diamant. Odtud plyne, že diamant bude mít za pokojové teploty tepelnou kapacitu podstatně menší, než předpovídá Dulongův-Petitův zákon.

Příčinu nepříliš velké shody nalezené závislosti s experimentem můžeme hledat v předpokladu nezávislosti oscilátorů. Vždyť dané atomy přeci interagují s okolními atomy, a to obzvláště při nízkých teplotách, kdy se všeobecně objevuje sklon ke kolektivnímu chování. Jsou-li atomy mezi sebou vázány lineární vratnou silou, můžeme

se na krystal podívat jako na celek a najít přípustné módy kmitání atomů (podobně jako třeba módy na struně). Energetické spektrum pak bude složitější.

Záření černého tělesa

Dále budeme zkoumat kmitání elektromagnetického pole v krychlové krabici o straně L . Jednomu módu odpovídá jeden foton. Pokusíme se vypočítat rozdělení počtu fotonů v závislosti na energii. Musíme si uvědomit jednu důležitou věc. Totiž že fotonů v krabici není nějaké neměnné množství, fotony mohou vznikat a zanikat. Jejich střední počet v rovnováze je dán zákony statistické fyziky.

Jelikož jsme se již trochu rozcvičili, budeme postupovat svižněji. Nechť se fotony mohou nacházet ve stavech s energiemi E_1, E_2, \dots , přičemž v každém stavu může být libovolně mnoho fotonů. Jestliže je v těchto stavech právě n_1, n_2, \dots fotonů, bude celková energie rovna $E = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots$. Příslušná partiční suma pak bude dána vztahem

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0}^{\infty} \exp(-\beta(n_1 E_1 + n_2 E_2 + \dots)) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \exp(-\beta n_1 E_1) \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp(-\beta n_2 E_2) \cdots, \end{aligned}$$

což se dá napsat jako součin

$$Z = \prod_k \left(\sum_{n_k=0}^{\infty} \exp(-\beta n_k E_k) \right).$$

Vnitřky součinu jsou geometrické řady vůči n_k , takže je zaměníme za jejich známý součet a dostaneme

$$Z = \prod_k [1 - \exp(-\beta E_k)]^{-1}.$$

Postupem vyvinutým na konci druhé kapitoly (strana 97) vypočítáme střední počet fotonů v k -tém stavu

$$\langle n_k \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial(\beta E_k)} = -\frac{\partial}{\partial(\beta E_k)} \left(-\sum_i \ln(1 - \exp(-\beta E_i)) \right) = \frac{1}{\exp(\beta E_k) - 1}.$$

Kdybychom věděli, jaké jsou k dispozici hladiny E_k , znali bychom odteď spektrum záření černého tělesa.

K získání odpovědi použijeme podobnou metodu jako při určování počtu mikrostavů pro elektron v krabici (což bylo předmětem úlohy II.S). Jeden foton – mód vlnění – o frekvenci ω má energii $\hbar\omega$. Módy se do krabice mohou naskládat jedině tak, že příslušné vlny mají uzly na stěnách krabice. Tyto vlny si lze představit jako součin vln ve směrech x, y a z . Naše požadavky si vynucují, aby se v každém směru vyskytoval celý počet půlvln. Označíme-li $k_x = 2\pi/\lambda_x$ vlnové číslo ve směru x , kvantovací podmínka $n\lambda/2 = L$ pro něj zní $k_x = n_x\pi/L$; podobně pro ostatní směry. Vektorově zapsáno

$$\mathbf{k} = (n_x, n_y, n_z) \frac{\pi}{L}, \quad n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots$$

Jak jistě snadno nahlédneme, pro fotony (elektromagnetické vlny) platí vztah $\omega = kc$. Energie fotonu $\hbar\omega$ je úměrná frekvenci ω , závisí tedy přímo úměrně na velikosti k vlnového vektoru \mathbf{k} . Tu ovšem snadno vypočítáme, platí

$$k^2 = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Při dostatečně vysokých teplotách je vybuzeno mnoho módů; potom místo diskrétních stavů můžeme uvažovat o kontinuu stavů, ve kterém se n_i mění spojitě. Určíme počet mikrostavů s vlnovým číslem menším než k (a tedy energií menší než $\hbar ck$). Tento počet $\Omega(k)$ (resp. trik sloužící k jeho nalezení) jsme odhalili ve zmiňované úloze. Jde vlastně o objem „osminokoule“, v níž může ležet koncový bod vektoru \mathbf{k} , má tedy poloměr k . Jednomu mikrostavu přísluší objem $(\pi/L)^3$, takže její objem jest

$$\Omega(k) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{Lk}{\pi} \right)^3.$$

Počet částic s velikostí vlnového vektoru mezi k a $k+dk$ je potom zřejmě roven $\Omega(k+dk) - \Omega(k) \approx (d\Omega/dk) dk = g(k) dk$. Veličina $d\Omega/dk = g(k)$ má význam hustoty stavů. Ze vzorce pro $\Omega(k)$ dostaneme explicitní vyjádření $g(k)$

$$g(k) dk = \frac{d\Omega(k)}{dk} = L^3 \frac{k^2 dk}{2\pi^2} = V \frac{k^2 dk}{2\pi^2}.$$

Záměna $L^3 = V$ reflektuje skutečnost, že výsledek nezávisí na tvaru krabice (jak se dá dokázat). Nyní v rovnici pomocí vztahu $E = \hbar kc$ dosadíme za k

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{2\pi^2 \hbar^3 c^3}. \quad (38)$$

Ještě jsme zapomněli, že vlnu kromě směru šíření charakterizuje i polarizace. V případě fotonu je to projekce momentu hybnosti na směr pohybu. V každém případě existují dva nezávislé směry polarizace (u fotonu dvě opačné projekce), takže náš výsledek musíme pronásobit dvěma

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{\pi^2 \hbar^3 c^3}.$$

Tolik je mikrostavů s energií mezi E a $E + dE$.

Všechny stavy z tohoto okolí mají energii přibližně E , pro střední počet fotonů $\langle n_k \rangle$ v jednom takovém stavu jsme výše odvodili jistý vzorec. Tento vzorec stačí pronásobit nalezeným počtem $g(E) dE$ a tím dostaneme kýžený výsledek, střední počet fotonů ve stavech s energií mezi E a $E + dE$

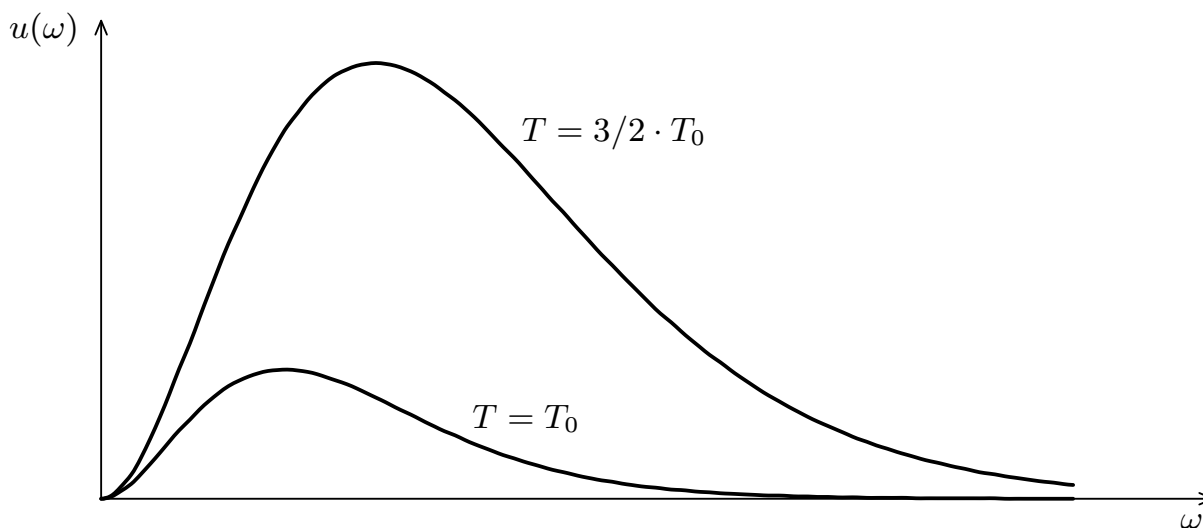
$$n(E) dE = \langle n \rangle \cdot g(E) dE = \frac{1}{\exp(\beta E) - 1} \cdot V \frac{E^2 dE}{\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{E^2}{\exp(\beta E) - 1} dE.$$

Názornější možná bude rozdělení celkové energie v krabici podle energie, které získáme prostým přenásobením vztahu výše energií. Pokud do něj pro energii E jednoho

fotonu dosadíme $E = \hbar\omega$, dostaneme rozdělení energie podle frekvencí. Toto rozdělení napíšeme jako $u(\omega) d\omega$, kde u hraje roli spektrální hustoty energie. Rozdělení se nazývá *Planckův vyzařovací zákon* a má tvar

$$u(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1} d\omega. \quad (39)$$

Planckův zákon je známý i ze středoškolské fyziky jako vztah pro spektrální rozdělení intenzity záření černého tělesa. Pojem černého tělesa je idealizací, má reprezentovat záření v tepelné rovnováze. Nicméně pokud záření uniká do prostoru, není v tepelné rovnováze. V každém případě lze experimentálně uskutečnit dobrou aproximaci záření černého tělesa, vezmeme-li naši krabici se zářením a do ní uděláme malou díрку. Unikající záření bude mít spektrum velice přesně popsané Planckovým vztahem. Energie, která projde za sekundu dírkou (vztažená na jednotkovou plochu), se nazývá intenzita záření a můžeme ji velice snadno určit ze znalosti vnitřní energie. Za sekundu totiž jednotkovou plochou projde záření o objemu $1 \cdot c$, kde c je rychlost šíření záření, v tomto případě rychlost světla. Intenzita pak bude $I = c \cdot U/V$ a spektrální intenzita $I(\omega) d\omega = c \cdot u(\omega)/V d\omega$.



Obr. 56. Spektrální rozdělení intenzity záření černého tělesa při dvou různých teplotách.

Úloha IV . S ... tepelná kapacita

- Jakou tepelnou kapacitu plynu složeného z tříatomových molekul s atomy uspořádanými do vrcholů trojúhelníku předpovídá klasická fyzika? Na jakou hodnotu tato kapacita poklesne při snížení teploty na 100 K?
- Zjistěte chování výrazů pro vnitřní energii krystalu a energetické spektrum záření černého tělesa pro malé teploty. Odvoďte dále tzv. Wienův posunovací zákon. Ten říká, že frekvence ω_m , pro níž má závislost intenzity záření černého tělesa na teplotě maximum, je přímo úměrná teplotě.
- Vypracujte lepší teorii tepelné kapacity krystalu, aby uvažovala kolektivní kmitů atomů. Případné integrály nemusíte počítat.

Nápověda. Uvědomte si, že se krystalem šíří zvukové vlny (jak příčné, tak podélné), a to různými rychlostmi. Počet módů nemůže být větší, než je počet stupňů volnosti $3N$ krystalu (N je počet částic).

(řešení str. 133)

Kapitola 4: Mnohočásticové systémy

V následujících řádcích probereme chování systému složeného z mnoha identických částic. Uvažujme tedy systém s N neinteragujícími identickými částicemi. Nechť má tento systém energetické hladiny E_i a v každém takovém stavu se nachází n_i částic. Půjde nám o to určit vlastnosti systému (vypočítat partiční sumu) při konstantním počtu částic $N = \sum n_i$. Konfigurace systému je jednoznačně zadaná počty částic n_i v jednotlivých stavech. Partiční suma proto bude mít tvar

$$Z = \sum \exp \left(- \sum_i \beta n_i E_i \right),$$

kde v první sumě sčítáme přes všechny konfigurace, pro které platí $\sum n_i = N$. Ukazuje se, že v tomto tvaru je nemožné získat explicitní výraz pro Z .

Místo řešení takto složitého problému budeme raději uvažovat jiný model. S naším systémem spojíme jakýsi rezervoár částic, ze kterého si systém může částice vypůjčovat a naopak. Podobný trik jsme užili již při odvozování Boltzmannova vzorce; tam jsme obešli požadavek neměnnosti celkové energie použitím rezervoáru energie. Předpokládejme, že pro přechod částice z našeho systému do rezervoáru je potřeba jí dodat energii μ . Střední počet částic v našem systému roste s rostoucím μ . Vhodným nastavením této energie se nám podaří zařídit, aby střední počet částic v nádobě byl N . Na rozdíl od předchozího případu zde počet částic není přesně N , nýbrž kolem této hodnoty fluktuuje, a to s amplitudou úměrnou \sqrt{N} . Relativní fluktuační počtu částic (tj. $\sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$) pak se vzrůstajícím počtem částic klesá k nule.

Odted' můžeme používat Boltzmannův vzorec, ovšem s novými energetickými hladinami $E_i - \mu$, tedy celkovou energií $E = \sum_i n_i (E_i - \mu)$. V partiční sumě se pak nebude sčítat přes konfigurace s $\sum_i n_i = N$, nýbrž přes všechny konfigurace $n_i = 0, 1, \dots$

$$Z = \sum_{n_1, n_2, \dots} \exp \left(- \sum_i \beta n_i (E_i - \mu) \right) = \prod_i \sum_{n_i} \exp \left(- \beta n_i (E_i - \mu) \right),$$

kde jsme prohodili sčítání a násobení (podobně jako při odvození záření černého tělesa).

Zatím jsme nespécifikovali, jakých hodnot mohou nabývat čísla n_i , tedy počet částic ve stavu i . Ve skutečnosti existují dvě různé fyzikálně důležité možnosti. U jednoho druhu částic, takzvaných *bosonů*, neexistuje žádné omezení na počet částic v jednom stavu, takže každé n_i může nabývat hodnot $0, 1, 2, \dots$. Pro druhý druh částic, *fermiony*, naopak platí, že v jednom stavu i může být nejvýše jedna částice, proto $n_i = 0, 1$. Částice se rozdělují do těchto skupin podle velikosti svého spinu. Částice s celočíselnou hodnotou spinu (např. foton) patří mezi bosony a částice s poločíslnou hodnotou spinu (např. elektron) patří mezi fermiony. Různé složené

částice, jako třeba atomové jádro či atom sám, může patřit jak mezi fermiony, tak mezi bosony, v závislosti na celkovém spinu. Tento fakt se ukázal jako klíčový pro vysvětlení supravodivosti kovů a supratekutosti hélia ^3He (jde o izotop hélia s jedním neutronem).

Nyní především vypočítáme partiční sumu pro oba druhy částic. Pro fermiony platí

$$Z_F = \prod_i \sum_{n_i=0,1} \exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) = \prod_i [1 + \exp(\beta(\mu - E_i))].$$

Pro bosony je výpočet o něco složitější, musíme totiž sečíst geometrickou řadu, což nám snad nedělá větší obtíže; tímto získáme

$$Z_B = \prod_i \sum_{n_i=0}^{\infty} \exp(-\beta n_i (E_i - \mu)) = \prod_i [1 - \exp(\beta(E_i - \mu))]^{-1}.$$

Zavedeme novou veličinu Ω (tzv. *grandkanonický*, termodynamický či Landauův potenciál) analogickou volné energii (31) v systému s konstantním počtem částic, a to vztahem

$$\Omega = -kT \ln Z,$$

kde Z je partiční suma s proměnným počtem částic. Z potenciálu Ω půjdou vypočítat všechny zajímavé veličiny, podobně jako jsme počítali např. střední hodnotu energie (32) ze známé volné energie F .

V případě proměnného počtu částic by nás obzvláště zajímalo, jak souvisí „umělá“ energie μ se středním počtem částic $\langle N \rangle$. Podobnou procedurou jako ve druhé kapitole (strana 97) najdeme

$$\langle N \rangle = \frac{\sum N \cdot P(N)}{Z} = \frac{\sum (\sum_i n_i) \exp(-\sum_i \beta n_i (E_i - \mu))}{Z} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}.$$

Tento postup lze aplikovat i na výpočet středního počtu částic v jednom určitém kvantovém stavu i . Stačí modifikovat Ω tak, že do něj započítáme pouze příspěvek od i -té hladiny (modifikované Ω označíme jako Ω_i). Pro fermiony má Ω_i tvar $\Omega_i = -kT \ln(1 + \exp(\beta(\mu - E_i)))$, pro bosony $\Omega_i = kT \ln(1 - \exp(\beta(\mu - E_i)))$. Z vypočítaných Ω_i již snadno získáme rovnici pro střední počet částic v i -té hladině

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) + 1} \quad (\text{fermiony}), \quad (40)$$

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_i - \mu)) - 1} \quad (\text{bosony}). \quad (41)$$

Tyto dva vzorce se ukázaly jako naprosto klíčové pro pochopení vlastností světa kolem nás. Mnoho reálných systémů se dá totiž modelovat jako systémy nepřilíš interagujících částic, jejichž vlastnosti můžeme počítat s pomocí vybudovaného aparátu.

Vyšetříme zde průběh těchto rozdělení. Především si povšimněme, že se obě rozdělení liší pouze znaménkem u jedničky ve jmenovateli. Jejich chování v klasické limitě, kdy je hustota částic natolik malá, že všechna $\langle N_i \rangle \ll 1$, a tedy exponenciála

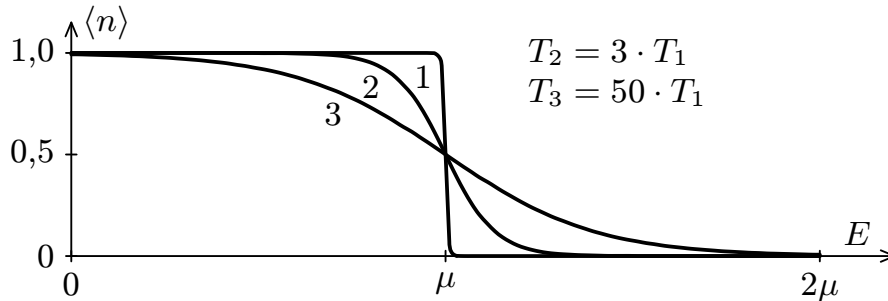
ve jmenovateli mnohem větší než 1, musí být tedy stejné, a to konvergující k nám již známému Boltzmannovu rozdělení. Zapsáno vzorcem tvrdíme

$$\langle N_i \rangle \approx \exp(-\beta(E_i - \mu)) .$$

V opačném případě, kdy je hustota částic velká nebo teplota nízká, se tato rozdělení budou podstatně lišit. Budeme je diskutovat separátně.

Chování fermionů

Bezprostřední důležitost má obzvláště *Fermiho-Diracovo* rozdělení (40). Na něm totiž stojí celá teorie pevných látek. Průběh tohoto rozdělení je pro různé teploty vyneseno v grafu na obrázku 57.



Obr. 57. Fermiho-Diracovo rozdělení pro různé teploty.

Přirozeným měřítkem energie je zde energie μ , která se v tomto případě obvykle nazývá *Fermiho energií* a značí se E_F . Energii $E = E_F$ odpovídá střední počet částic 0,5, čili poloviční zaplnění. Ve směru rostoucích energií od Fermiho energie obsazení stavů rychle klesá, naopak ve směru klesajících energií rychle roste až k jedničce. V ideálním případě nulové teploty by všechny stavy s energií $E < E_F$ byly zaplněny a všechny stavy s $E > E_F$ by byly prázdné. Můžeme také odhadnout typickou šířku tohoto rozdělení. Při nízkých teplotách existuje jakési „moře“ zaplněných stavů, z něhož je určitá část částic excitována nad Fermiho energii. Excitovány jsou částice z okolí E_F o šířce typicky $1/\beta = kT$ (jedině tehdy je exponenciála srovnatelná s jedničkou ve jmenovateli). Teplota zavedená vztahem $kT_F = E_F$ se nazývá Fermiho teplotou; tato teplota je předělem mezi klasickým a kvantovým chováním.

Teorie pevných látek pracuje s plynem elektronů, řídicích se Fermiho rozdělením. Elektrony v kovu se chovají jako vlny (vlnově částicová dualita). Rovnice kvantové mechaniky připouštějí různá řešení s různými energiemi. Typicky se stává, že mnoho stavů má stejnou energii. Nás zajímá zejména situace, kdy jsou elektrony popsány vlnovými vektory různých směrů a velikostí. Je to podobná situace jako při popisu fotonů v krabici; tam byly přípustné hodnoty vlnového vektoru určeny požadavkem naskládání celého počtu půlvln. V nejjednodušším modelu pevné látky můžeme použít přesně tutéž představu. Oproti fotonům se situace liší pouze výpočtem energie. Energie se vypočítá pomocí klasického vzorce $E = p^2/2m$, kam za p dosadíme velikost vektoru \mathbf{p} , jenž souvisí s vlnovým vektorem příslušné de Broglieovy vlny elektronu jako $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Z tohoto stejným postupem jako při výpočtu hustoty stavů fotonů v krabici vypočteme veličinu $g(E)$ (hustotu stavů), související s počtem stavů s energií mezi E a $E + dE$ vzorcem $dN = g(E) dE$. Při teplotě $T = 0$ jsou všechny stavy s energií $E < E_F$ zaplněny; vektor hybnosti každého elektronu tudíž leží v kouli o poloměru p_F (nazývaném Fermiho hybnost), který je s E_F svázán

vztahem $p_F^2/2m = E_F$. Při zvyšování teploty se povrch koule „rozmazává“ podle Fermiho rozdělení. Fermiho teplota pro kovy je řádově 10^4 – 10^5 K, což je teplota daleko větší než pokojová. Jen malá část elektronů ve skutečném kovu je při pokojové teplotě excitována.

Touto argumentací se vysvětlil další paradox klasické fyziky související s výpočtem tepelné kapacity krystalu na základě ekvipartičního teorému. Z naší úvahy jsme totiž zcela vynechali elektrony. Ty jsou sice daleko lehčí než jádra, nicméně i ony by měly každý nést svoji energii $3kT/2$; vtip ekvipartičního teorému je právě v tom, že střední energie nezávisí na hmotnosti! Příspěvek elektronů k tepelné kapacitě této velikosti se ovšem nepozoruje. Nyní již víme proč. Za pokojových teplot je většina elektronů uvězněna ve Fermiho kouli. Tepelného pohybu se účastní jen excitované elektrony, tedy jen malá část elektronů z okolí povrchu této koule. Dá se ukázat, že příspěvek elektronů k tepelné kapacitě je přímo úměrný teplotě, což dobře odpovídá skutečnosti.

Plyn elektronů má další zajímavou vlastnost. Jelikož částice uvězněné ve Fermiho kouli mají nenulovou hybnost, vykazují vždy nenulový tlak, a to i při nulové teplotě. Stavová rovnice elektronového plynu má pro nízké teploty tvar $PV = 2/5RT_F$, přičemž na rozdíl od ideálního plynu pravá strana nezávisí na teplotě.

Lepší modely kovů musí brát do úvahy další dvě fakta. Především krystal nemusí být izotropní. To vede k deformaci Fermiho koule do mnohem složitějších tvarů. Za druhé vektory hybností nemusí vyplňovat celou Fermiho kouli. Tento problém je skutečně aktuální a jeho vzetí do úvahy je základem teorie polovodičů. Základní myšlenka spočívá v tom, že přípustné energie elektronů leží v určitých disjunkt-ních intervalech, tzv. *energetických pásech*. Fermiho koule se pak změní na systém soustředných „mezikoulí“, mezi nimiž se nemůže nacházet žádný vektor hybnosti. Oblastem energie s absencí řešení se říká *zakázané pásy*. Vznikají díky interakci elektronů s mřížkou (představující periodický potenciál). Elektron při působení vnějšího pole vykazuje v tomto případě jinou (efektivní) hmotnost; stavy uprázdněné excitovanými elektrony se chovají jako částice s opačným nábojem, tzv. díry.

Rozhodujícím činitelem pro zařazení daného krystalu podle vodivosti mezi izolátory, vodiče či polovodiče je zaplněnost nejvyššího energetického pásu. Pokud je nejvyšší obsazený pás téměř zaplněný a od následujícího pásu oddělený dostatečně širokou mezerou, bude se krystal chovat jako izolátor. Elektrické pole totiž nemůže změnit hybnost elektronů, neboť téměř všechny dostupné stavy jsou obsazeny a jejich hybnost dána. Samozřejmě, při nulové teplotě budou vždy existovat (dle Fermiho rozdělení) elektrony i ve vyšších pásech, nicméně bude jich velice málo (jejich počet exponenciálně ubývá se vzdáleností od Fermiho energie). Pokud je nejvyšší pás jen částečně zaplněn, mohou být elektrony s nejvyšší energií excitovány do stavů s hybností mířící proti směru vnějšího elektrického pole, budou tedy vykonávat uspořádaný pohyb – elektrický proud. Kovy se vyznačují tím, že jejich nejvyšší pás není zaplněn ani při nulové teplotě. Polovodiče mají při nulové teplotě svrchní pás zcela zaplněný, avšak jejich zakázaný pás je natolik úzký, že je přes něj možné excitovat elektrony již při rozumných (např. pokojových) teplotách. Při vysokých teplotách vedou elektrický proud všechny látky.⁴¹

⁴¹⁾ Další informace o pásové struktuře pevných látek můžete najít v ročence FYKOSu z ročníku 1999/2000.

Chování bosonů

Dále přejdeme k diskuzi rozdělení bosonů, tzv. *Boseho-Einsteinova* rozdělení (41). Při zmenšování teploty (a tedy zvětšování β) bude chování určovat rozdíl $E_i - \mu$ v argumentu exponenciály. Z požadavku konvergence partiční sumy však pro bosony plyne podmínka $\mu \leq 0$. Rovnost zde nastává pro fotony. To znamená, že foton lze do systému přidat bez vynaložení energie. Fotonů ve skutečnosti není nějaké určité množství. Fotony vznikají a zanikají a jejich počet, stejně jako rozdělení podle energií, jsou diktovány pouze podmínkou termodynamické rovnováhy.

Při nízké teplotě se většina částic soustředí v okolí základního stavu (s energií $E_i = 0$), neboť pouze pro energie blízké základnímu stavu exponenciála ve jmenovateli nediverguje. Bosony se tedy díky svému spinu jakoby přitahují, snaží se dostat se do stejného stavu a chovat se kolektivně. Tomuto jevu se říká *Boseho-Einsteinova kondenzace*. Nicméně nejde o kondenzaci ve smyslu prostorovém (podobnou např. krystalizaci); částice se soustředí ve stavu se stejnou (nulovou) hybností. K přechodu ke kolektivnímu chování dochází náhle při určité teplotě $T_C \approx (\hbar^2/km)(N/V)^{2/3}$. V kritické teplotě je nespojitá derivace tepelné kapacity, takže jde o fázový přechod. Bosonový plyn vykazuje zajímavou vlastnost, totiž že jeho tlak při teplotách $T < T_C$ nezávisí na objemu. Nás to jistě nepřekvapí, poněvadž víme, že se téměř všechny částice nacházejí v základním stavu s nulovou hybností.

Indický fyzik S. A. Bose a A. Einstein jev teoreticky předpověděli již v roce 1924, nicméně nikdo jej nepovažoval za reálný. Až v roce 1930 se F. London pokusil vysvětlit supratekutost hélia ^4He , což je izotop hélia se dvěma neutrony a celkovým spinem celočíselným. Supratekutost je jev, kdy v silně ochlazeném heliu vymizí tření, a helium tedy může téci bez odporu. Absence tření je ekvivalentní tvrzení, že se supratekuté helium při dostatečně malých rychlostech (tj. malých energiích interakce) nenechá excitovat do stavů s vyšší energií. Boseho-Einsteinův kondenzát však není supratekutý, neboť jej lze excitovat libovolně malou energií. Pro popis supratekutosti je nevhodný kvůli zanedbání interakcí mezi jednotlivými částicemi. Interakce totiž vytvoří určitou mezeru mezi energií základního a prvního excitovaného stavu; malé poruchy (tření) tudíž systém neexcitují. Nicméně se oba systémy chovají kolektivně.

Supratekuté je i helium ^3He (kapalina fermionů, díky poločíselnému spinu tohoto izotopu). To by se mohlo zdát paradoxní, neboť jak zanedlouho uvidíme, fermiony se naopak odpuzují; v jednom stavu může být nanejvýše jeden fermion. Ačkoliv supratekutost nelze vysvětlit *pouze* Boseho-Einsteinovou kondenzací, nutnou podmínkou je kolektivní chování částic. Podobný problém vyvstává v teorii supravodivosti, kde pod určitou teplotou zmizí elektrický odpor některých kovů. Zdá se, jako by docházelo k „supratekutosti“ plynu volných elektronů v krystalu, tedy ke kolektivnímu chování. Avšak elektron je fermion!

Tento rozpor byl vyřešen v teorii supravodivosti pánů Bardeena, Coopera a Schrieffera, založené na myšlence, že se elektrony díky vhodné interakci s krystalovou mřížkou mohou efektivně přitahovat a vytvářet tak vázaný stav, tedy jakousi novou částici, tzv. Cooperův pár. Tato nová částice bude mít coby složenina dvou částic s poločíselným spinem spin celočíselný, a bude tudíž bosonem. Bosony se však mohou chovat kolektivně a k paradoxu nedochází.

Úloha V . S ... *fermiony a bosony*

- Najděte hustotu stavů $g(E)$ pro volné elektrony a pomocí ní určete vztah mezi počtem elektronů a Fermiho energií při nulové teplotě. Zjistěte, jak musí záviset Fermiho energie na teplotě (při malých teplotách), aby byl počet elektronů konstantní. Nakonec odhadněte počet excitovaných elektronů při pokojové teplotě.
- Určete závislost chemického potenciálu μ na teplotě při malých teplotách a konstantním počtu částic v systému stejných bosonů. Najděte teplotní závislost počtu excitovaných bosonů při nízkých teplotách.

(řešení str. 137)

Kapitola 5: *Magnetismus pevných látek*

Poslední kapitolu seriálu zasvětime diskusi různých modelů magnetismu látek. Tuto problematiku jsme zvolili proto, že je relativně názorná a také poměrně nenáročná na předběžné znalosti čtenáře; navíc patří k jakémusi fyzikálnímu folklóru, se kterým se čtenář stejně jednou bude muset seznámit.

Jak jste se dočetli ve třetí kapitole, různé látky po vložení do magnetického pole reagují různě. Zde jsme vypracovali jednoduchou teorii paramagnetismu. Uvažovali jsme pouze interakce částic s vnějším magnetickým polem a nikoliv mezi sebou. Zesilování magnetického pole jsme pak připsali na vrub snaze spinů orientovat se ve směru pole.

Je nám však jasné, že interakci mezi sousedními spiny není vždy možné jen tak zanedbat. Podíváme se, jaký vliv má interakce mezi částicemi na chování látky. Interakce mezi spiny v krystalech má obvykle jednoduchý tvar. Buď se snaží sousední spiny otáčet tak, aby mířily ve stejném směru, nebo naopak. Dále se omezíme pouze na první případ, jehož teorie je jednodušší. Původ těchto interakcí není v magnetické interakci dvou magnetů, nýbrž plyne z Pauliho principu – jde o tzv. *výměnnou interakci*.

Pokročíme kvalitativním rozborem situace. Představme si spiny ve vrcholech krystalové mřížky snažící se natočit stejným směrem (jako např. v železe) při nevelké teplotě. Tuto mřížku vložíme do velice slabého magnetického pole (krystal se vždy nachází v nějakém magnetickém poli, např. v poli Země). Pokud teplota není příliš velká, většina spinů bude orientována v jednom jistém směru, určeném slabým magnetickým polem. Bez tohoto pole by nebylo zcela jasné, kterým směrem se spiny natočí. Většina spinů mířících stejným směrem znamená nenulovou makroskopickou magnetizaci. Při zvětšování teploty se však tepelný pohyb bude snažit uspořádání rozbít; magnetizace krystalu bude klesat s teplotou k nule, již dosáhne při teplotě T_C (Curieova teplota). Nad touto teplotou tepelný pohyb zcela rozbije uspořádání a feromagnet se chová jako paramagnet.

Můžeme se ptát, proč ne každé železo, které najdeme kolem sebe, je namagnetované. Ve skutečnosti však je. Ve větším kusu železa se totiž vytvoří malé ostrůvky spinů mířících v zásadě stejným směrem (tzv. domény); ty je možno vidět pod mikroskopem. Pokud je vnější pole dostatečně slabé, domény jsou orientovány v náhodných směrech a celková magnetizace je blízka nule. Jakmile se vnější pole zvýší, domény se snaží orientovat se v jeho směru jako celek a celková magnetizace

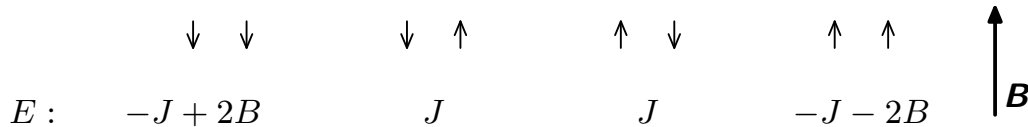
krystalu se stává nenulovou. Domény spolu a s poruchami mřížky složitým způsobem interagují a vývoj celého kusu železa je ještě dále komplikován svou závislostí na historii (způsobu přípravy) – hysterezi.

Naše ambice však nedosahují takových výšin. My budeme uvažovat mnohem jednodušší situaci, tzv. *Isingův model*. Spiny s_i (očíslované přirozenými čísly) rozmístíme do vrcholů d -rozměrné pravoúhlé mříže, jejíž každá strana obsahuje N spinů; na mříži je tedy celkem N^d spinů. Spinům dovolíme nabývat hodnot $+1$ a -1 . Ještě musíme každé konfiguraci spinů připsat určitou energii. Pokud je vnější magnetické pole rovno B , energii konkrétní konfigurace Isingova modelu definujeme jako⁴²

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i,$$

přičemž J je nějaký kladný parametr. Zde se první suma bere přes všechny dvojice nejbližších sousedů (takových, mezi kterými na mříži vede příčka). V druhé sumě sčítáme přes všechny vrcholy mříže. Pro ilustraci jsme do obrázku 58 zakreslili energii jedné dvojice spinů v závislosti na jejich vzájemné orientaci a na orientaci vůči vnějšímu magnetickému poli (jeho směr určuje dlouhá šipka).

Nyní přijde smutná zpráva pro všechny, kdož se těšili na vyřešení dalšího problému. Exaktní řešení (tj. vzorec pro partiční sumu) tohoto problému není kromě jednodimenzionální mříže a dvoudimenzionálního případu s nulovým magnetickým polem známo.



Obr. 58. Energie spinů v závislosti na jejich vzájemné orientaci.

Věnujme se tedy přibližnému řešení Isingova modelu. Celá složitost problému spočívá v následujícím. Kdyby v energii nevystupovaly součiny sousedních spinů, situace by byla velice jednoduchá – partiční suma by byla součinem partičních sum každého spinu zvlášť (v první sumě sčítáme přes všechny konfigurace spinů)

$$Z = \sum \exp(+\beta B \sum_i s_i) = \sum \prod_i e^{+\beta B s_i} = \prod_i \left(\sum_{s_i=\pm 1} e^{+\beta B s_i} \right) = \left(e^{\beta B} + e^{-\beta B} \right)^N.$$

V takovém případě se každý spin chová v podstatě nezávisle na ostatních. Magnetizace mříže pak bude součtem hodnot $M = \sum \langle s_i \rangle$. Jelikož se energie nemění při posunutí celé mříže, všechny střední hodnoty $\langle s_i \rangle$ jsou stejné; definujeme průměrnou magnetizaci na jeden spin vztahem $m = \langle s_i \rangle$, pak bude $M = Nm$. Střední hodnotu spinu pro tento jednoduchý případ jsme již vlastně vypočítali (33). Tam jsme dostali (pokud ve smyslu poznámky pod čarou 42 položíme $\mu = 1$)

$$m = \langle s_i \rangle = \frac{e^{\beta B} - e^{-\beta B}}{e^{\beta B} + e^{-\beta B}} = \operatorname{tgh} \beta B.$$

⁴²⁾ Pro jednoduchost používáme takové jednotky, ve kterých je magnetický moment spinu roven jedné. V takových jednotkách je B odlišné od pole v nějakých normálních jednotkách o konstantní faktor.

Klíčová otázka zní, jak započítat interakci mezi sousedními spiny. Nabízejí se různé možnosti. Jedním řešením je nahradit každý fluktuující sousední spin svojí střední hodnotou.

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i \quad \rightarrow \quad -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot \langle s_j \rangle - B \sum_i s_i.$$

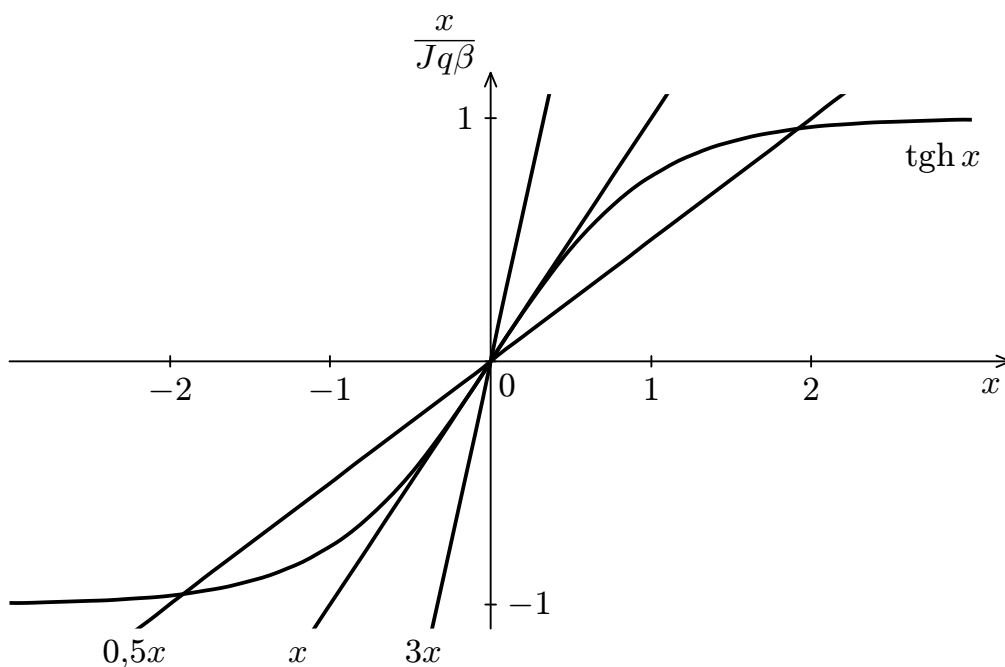
Efektivně to vede ke vzniku dodatečného magnetického pole $B_1 = qJm$, kde q je počet nejbližších sousedů každého spinu.⁴³ Výraz pro E přejde do tvaru

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot m - B \sum_i s_i = -(Jqm + B) \sum_i s_i = -(B_1 + B) \sum_i s_i. \quad (42)$$

Ovšem pro takovou energii známe jak partiční sumu, tak magnetizaci. Dosazením do příslušného vzorce dostáváme rovnici

$$m = \langle s_i \rangle = \operatorname{tgh} \beta(B_1 + B) = \operatorname{tgh} \beta(Jqm + B). \quad (43)$$

Takovým rovnicím se říká selfkonzistentní rovnice. Význam tohoto slova pochopíme snadno, pokud uvážíme, jak se objevilo m na levé a jak na pravé straně rovnice. Napravo jsme *předpokládali*, že střední magnetizace je m , a z toho vypočítali magnetizaci, kterou takový model předpovídá. Aby byl náš postup konzistentní, musíme tímto výpočtem dostat stejnou hodnotu m magnetizace, jakou jsme vložili do výpočtu pravé strany. To však jistě nepůjde pro libovolnou hodnotu m . Naopak, půjde to pouze pro zcela určité hodnoty m . Jinými slovy, odvozenou rovnici přímo použijeme k určení těch m , pro které výpočet dává smysl; musíme nalézt její kořeny.



Obr. 59. Grafické řešení rovnice pro magnetizaci.

Nečekejme však, že se nám pro ně podaří dostat nějaký vzoreček. Opět jsme nuceni použít nějaké přibližné metody. Pokusíme se onu rovnici vyřešit graficky, a to

⁴³⁾ Na čtvercové mříži ve 2D $q = 4$, na přímce v 1D $q = 2$, na kubické mříži v 3D $q = 6, \dots$

pro případ nulového pole B ; každý pak snadno provede tutéž úvahu i pro nenulové B . Do grafu vyneseme křivku odpovídající pravé straně a křivku odpovídající levé straně. Je lepší pracovat místo s proměnnou m s proměnnou $x = Jqm\beta$. Řešená rovnice má v této proměnné tvar

$$\frac{x}{Jq\beta} = \operatorname{tgh} x .$$

Směrnice tečny funkce $\operatorname{tgh} x$ v $x = 0$ je 1. Z grafu okamžitě vidíme, že nenulová řešení existují pouze tehdy, pokud $1/Jq\beta < 1$ (pak existuje průsečík přímky a $\operatorname{tgh} x$); pokud existují, jsou dvě. Díky existenci slabounkého vnějšího pole, o němž jsme mluvili na začátku tohoto dílu, se z těchto dvou řešení vybere to, jež má v takovém poli menší energii.

Podmínku na existenci spontánní magnetizace můžeme přepsat do názornějšího tvaru $kT < Jq$. Nenulová magnetizace při nulovém vnějším magnetickém poli B tedy existuje pouze při dostatečně nízkých teplotách. Na pravé straně podmínky stojí vlastně typická energie interakce mezi sousedními spiny, na pravé straně zase typická energie tepelných fluktuací. Podmínka se takto změní v od začátku zřejmý fakt, totiž že uspořádání je možné, pouze pokud je uspořádání libá energie větší než uspořádání rozbíjející energie. Teplota, pro niž právě platí $kT_C = Jq$, se nazývá kritická (Curieova) teplota; dochází při ní k fázovému přechodu druhého druhu mezi fází neuspořádanou a uspořádanou.

Zatím jsme odvodili, kdy řešení existuje a kolik jich je, nikoliv ale jak se chová např. v závislosti na teplotě. Pokusíme se najít přibližný vzorec pro m pro teploty blízké kritické teplotě T_C . Na to použijeme známý trik, a sice rozvineme $\operatorname{tgh}(\beta Jqm)$ do Taylorovy řady kolem bodu 0. Ta má tvar

$$\operatorname{tgh} x \approx x - x^3/3 + \dots .$$

Pro teploty $T < T_C$ a malé magnetizace $m \ll 1$ máme potom přibližnou rovnici

$$m \approx \beta Jqm - (\beta Jqm)^3/3 + \dots ,$$

odkud

$$m^2(\beta Jq)^3/3 \approx \beta Jq - 1 .$$

Uvědomme si, že magnetizace je malá, pouze pokud se teplota příliš neliší od T_C (viz graf na obr. 59). Proto předchozí rovnici přepíšeme pomocí nové proměnné $\varepsilon = (T_C - T)/T = (\beta Jq - \beta_C Jq)/\beta_C Jq$, přičemž ve sledované oblasti platí $\varepsilon \ll 1$. Pokud ještě položíme $\beta Jq \approx \beta_C Jq = 1$, rovnice nabude tvaru

$$m \approx \sqrt{3}(\beta Jq - 1)^{1/2} = \sqrt{3} \cdot \varepsilon^{1/2} .$$

Závislost magnetizace na vzdálenosti od kritické teploty je mocninná. Mohli bychom vypočítat chování dalších veličin v okolí T_C , např. susceptibility $\chi = \lim_{B \rightarrow 0} \partial m / \partial B$, či najít závislost magnetizace m na vnějším magnetickém poli B při kritické teplotě $T = T_C$ (přesně). Tyto dva výpočty jsme vybrali jako úlohy k této kapitole (krom jiných).

Jak jsme již podotkli, při $T = T_C$ nastává fázový přechod mezi fází uspořádanou ($T < T_C$) a neuspořádanou ($T > T_C$). Pokud studujeme chování různých veličin v různých modelech, které také vykazují podobný druh fázového přechodu, téměř vždy nalezneme mocninnou závislost. Navíc se ukazuje, že exponenty těchto závislostí (kritické exponenty) nezávisí na konkrétním modelu, nýbrž pouze na počtu rozměrů mříže a na rozměru tzv. parametru uspořádání. To je nějaký parametr charakterizující makroskopický stav systému, jenž má v neuspořádané fázi hodnotu 0 a v uspořádané fázi nějakou nenulovou hodnotu. V našem konkrétním případě je parametrem uspořádání střední magnetizace m (s rozměrem 1). Pokud bychom vzali model, jenž uvažuje spiny jakožto vektory ve třírozměrném prostoru, parametrem uspořádání by byla také střední magnetizace, nyní však jsoucí vektorem \mathbf{m} (s rozměrem 3); tento model by tedy měl odlišné kritické exponenty.

Jak je možné, že všechny kritické exponenty závisí na pouhých dvou celých číslech? Především je jasné, proč nezávisí např. na síle interakce; změna by vedla pouze k pronásobení mocninné závislosti nějakým faktorem. Proč ale nezávisí na detailech interakce? Důvod je velice hluboký a náš jednoduchý model jej vůbec nevystihoval. Spiny se totiž v blízkosti kritického bodu vůbec nechovají nezávisle. Spiny jsou mezi sebou korelovány a vzdálenost, na které se ovlivňují (korelační délka), jde při přibližování ke kritickému bodu do nekonečna. Chování modelu tedy neurčují interakce na krátkou vzdálenost, nýbrž na dlouhou vzdálenost. Je jedno, zda při výpočtu energie uvažujeme jen nejbližší sousedy či dvě vrstvy nejbližších sousedů apod. Tyto interakce jen zprostředkovávají korelaci mezi dalekými spiny a detaily zprostředkovatelů jsou nepodstatné; každý spin efektivně interaguje s obrovským počtem jiných spinů. Dosah korelací ovšem přirozeně závisí na počtu rozměrů prostoru; druh interakce je zase vystižen rozměrem parametru uspořádání.

Zcela přirozeně náš jednoduchý model selže při výpočtu kritických exponentů. Sousední spiny jsou silně korelované, nemůžeme proto nahradit sousední spiny jejich střední hodnotou. Pokud by však sousedů bylo hodně (což nastává v prostoru s velkou dimenzí), byly by v okolí každého spinu zastoupeny mnohé hodnoty s_i . Průměrujeme velký soubor a ten dosti přesně dává hodnotu m nezávisle na velikosti centrálního spinu. Náš model je tedy dobrý v limitě $q \rightarrow \infty$. Bohužel, dvojka či šestka se rozhodně nedá považovat za ∞ .

Existuje několik dalších modelů magnetismu. Jejich řešení je však ještě složitější než výpočet chování Isingova modelu (které v zajímavých případech není známo). Proto je uvedeme pouze telegraficky pro rozšíření obzoru. Jedno možné zobecnění je povolit spinům nabývat více hodnot než dvou (*Pottsovy modely*). Jiný přístup je uvažovat spin \mathbf{s}_i jakožto klasický vektor délky 1, jenž se může natáčet do libovolného směru. Energie určité konfigurace je pak přirozeně dána vzorcem

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j - \mathbf{B} \cdot \sum_i \mathbf{s}_i .$$

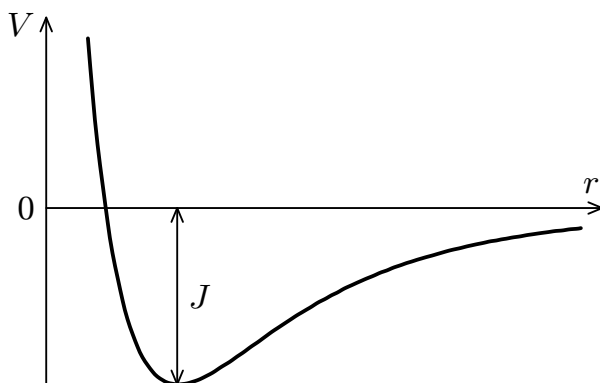
Tomuto modelu se říká *klasický Heisenbergův model*. Jak již bylo zmíněno výše, jeho chování je v okolí kritické teploty podstatně odlišné od chování Isingova modelu, a to právě díky svému vektorovému charakteru. Existuje i přirozené kvantové zobecnění, kdy vektory \mathbf{s}_i nahradíme příslušnými operátory spinu (*kvantový Heisenbergův model*). Známý je rovněž *Hubbardův model* (kvantový), jenž popisuje magnetismus d-elektronů v kovech, přitom uvažuje Coulombickou energii interagujících elektronů.

Jiným druhem zobecnění Isingova modelu jsou modely uvažující stejný obor hodnot spinu, nicméně umožňující i jiné interakce než interakce pouhých nejbližších sousedů. Sem spadá např. široká třída *gaussovských modelů*, v nichž je energie dána kvadratickou formou spinů. Můžeme uvažovat i interakce nekonečného dosahu.

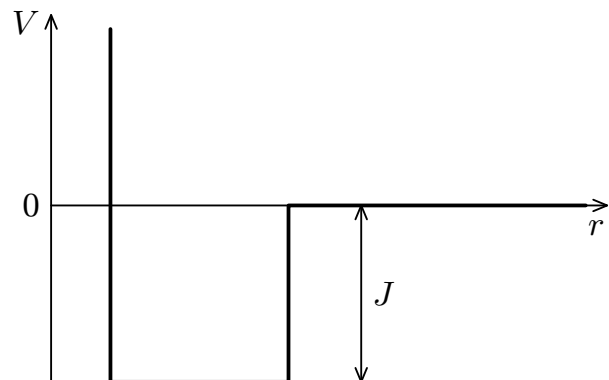
Nakonec vzniká možnost přidat do modelu náhodnost. A to buď prostřednictvím fluktuujícího vnějšího pole (tzv. *random field Ising model*), nebo přidáním průměsových atomů s určitým magnetickým momentem na mříž. Tyto atomy můžeme uvažovat buď jako pevně umístěné (kdy do partiční sumy tato náhodnost nepřispívá, středuje se až při výpočtu termodynamických veličin), případně náhodně se pohybující (potom jejich rozmístění musíme započítat do partiční sumy); oba druhy náhodnosti vedou k různému chování. Velice zajímavým a důležitým modelem je *model spinového skla*. Spinové sklo je v podstatě Isingův model s náhodnými (ale pevnými) interakčními energiemi J , různými pro různé dvojice spinů. Tyto interakční energie mohou být i záporné, takže některé dvojice spinů se snaží zarovnávat ve stejném směru, zatímco jiné proti sobě. Tyto snahy spolu s dalekodosahovostí interakce dělají jeho chování značně chaotickým.

Dvě aplikace Isingova modelu

Poté, co jsme naznačili těžkosti teorie magnetismu, neodpustíme si uvést další zajímavé aplikace Isingova modelu. Již jsme naznačili, že Isingův model nevysvětluje feromagnetismus kvantitativně správně. Možná příčina neshody leží v zanedbání vektorových vlastností spinu – spin se zde uvažuje jako skalár. Existuje ale jiný přírodní jev, který je naopak popsán docela dobře. Je jím přechod pára-kapalina.



Obr. 60. Párový potenciál dvou atomů nebo molekul.



Obr. 61. Nespojité aproximace potenciálu.

Jak víme, elektricky neutrální atomy či molekuly na sebe působí silami, jejichž párový potenciál vypadá v zásadě jako na obrázku 60. Můžeme se pokusit přenést situaci na mříž, abychom nemuseli uvažovat složitosti spojené se spojitým prostorem. Potom do čtverečků mříže dosadíme čísla 0 a 1, přičemž nula odpovídá prázdné buňce a jednička buňce obsazené jedním atomem. Pokud zvolíme rozměr mříže tak, aby vzdálenost středů dvou buněk (tj. šířka buňky) odpovídala poloze minima potenciálu, můžeme spojitý potenciál nahradit přibližným nespojitým (viz obr. 61), jenž zajistí, aby potenciální energie všech dvojic atomů kromě nejbližších sousedů byla nulová a potenciální energie nejbližších sousedů byla $-J$, kde J je hloubka potenciálové jámy párového potenciálu. Energie určité konfigurace atomů se pak bude

rovnat (obsazení i -té buňky označíme jako n_i)

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j .$$

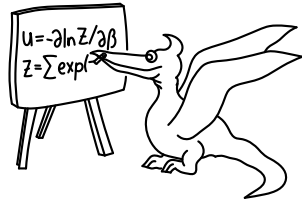
Je evidentní, že se tento model dá přepsat na Isingův model (v jiných proměnných). Konkrétní výpočet ponecháváme za úlohu. V chování je pak dobře vidět kondenzace a jde vypočítat i kritická teplota. V tomto případě však pojem kritické teploty známe i ze střední školy. Kritická teplota je teplota odpovídající pravému konci křivky koexistence páry a kapaliny (v diagramu T, P). Vzhledem k tomu, že parametrem uspořádání je zde hustota kondenzované fáze (skalár), jeho rozměr se shoduje s rozměrem magnetizace Isingova modelu a Isingův model správně předpovídá kritické exponenty.

Jiným příkladem může být chování tzv. binárních slitin. Na mříži máme atomy dvou typů A a B . Pokud spolu sousedí dva atomy A , jejich energie je rovna E_{AA} . Podobně energie dvou sousedních atomů typu B je E_{BB} . Nakonec energie sousedních atomů AB je E_{AB} . Zjistit vlastnosti takového modelu dáváme rovněž za úkol čtenáři.

Úloha VI. S ... kritická teplota

- Kvalitativně popište, jak se chová tepelná kapacita Isingova modelu s nulovým vnějším magnetickým polem v okolí kritické teploty.
- Podobným postupem, jako jsme vypočítali chování magnetizace m v okolí kritického bodu, určete chování susceptibility χ a závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě.
- Ukažte, že model mřížového plynu vede ke kondenzaci, a určete kritickou teplotu.
- Prozkoumejte model binární slitiny.

(řešení str. 141)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... pravděpodobnost

(5 bodů; průměr 3,43; řešilo 51 studentů)

- a) Z 32 karet se náhodně vyberou tři karty. Zjistěte pravděpodobnosti jevů, že mezi vybranými kartami bude právě jedno eso, alespoň jedno eso, ani jedno eso.
- b) V nádobě se nachází N stejných částic. Určete pravděpodobnost, že v levé půlce bude o m částic více než v pravé půlce. Nakreslete graf závislosti pro $N = 10^{10}$. Rozsah m volte tak, aby pravděpodobnost na krajích intervalu byla desetinná oproti středu intervalu. Jak závisí šířka křivky (tj. rozdíl $m_2 - m_1$, kde $m_2 > 0$ a $m_1 < 0$ jsou hodnoty m , pro které je pravděpodobnost poloviční oproti maximu) na N ?
- c) Odhadněte velikost $\ln(n!)$ (bez použití Stirlingova vzorce).
- a) Nejjednodušší je určit pravděpodobnost, že nevytáhneme ani jedno eso. Potom všechny vytažené karty musí být z množiny 28 „nees“. Počet příznivých případů (výběrů) je $\binom{28}{3}$, celkový počet výběrů je $\binom{32}{3}$, takže pravděpodobnost vychází

$$p_0 = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{30 \cdot 31 \cdot 32} \doteq 0,660.$$

Má-li být mezi kartami právě jedno eso, musíme jednu kartu vybrat z množiny es a zbylé dvě karty z množiny nees. Eso lze z es vybrat $4 = \binom{4}{1}$ způsoby, dvě karty z nees pak $\binom{28}{2}$ způsoby. Tyto dva výběry lze libovolně kombinovat, takže počet příznivých případů je $4 \cdot \binom{28}{2}$. Počet všech výběrů je stejný jako výše, čili pravděpodobnost, že mezi třemi kartami bude právě jedno eso, je

$$p_1 = \frac{\binom{4}{1} \binom{28}{2}}{\binom{32}{3}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 27 \cdot 28}{30 \cdot 31 \cdot 32} \doteq 0,304.$$

Jestliže požadujeme, aby ve výběru bylo alespoň jedno eso, můžeme postupovat oklikou. Je totiž zřejmé, že vždy nastává právě jeden z jevů „alespoň jedno eso“ a „žádné eso“. Pravděpodobnost jevu „alespoň jedno eso“ pak bude doplňkem do jedničky pravděpodobnosti jevu „žádné eso“, kterou již známe. Proto

$$p_{\geq 1} = 1 - p_0 = 1 - \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} \doteq 0,340.$$

- b) Chceme určit pravděpodobnost, že z celkového počtu N částic bude $(N + m)/2$ v levé půlce a $(N - m)/2$ v pravé půlce (potom bude vlevo o m více částic než vpravo). Celkový počet možných uspořádání je 2^N (u každé částice můžeme říct,

má-li být vpravo, nebo vlevo), počet příznivých případů je $\binom{N}{(N+m)/2}$ (ze všech částic vybíráme ty, které mají být vlevo). Počítaná pravděpodobnost tedy vychází

$$p = \frac{1}{2^N} \cdot \binom{N}{\frac{1}{2}(N+m)}.$$

Dále bylo úkolem namalovat graf této závislosti pro $N = 10^{10}$. Umocníme-li naň dvojku nebo počítáme-li z něj faktoriál, dostaneme obrovské číslo, které se do žádné kalkulačky ani PC nevejde. Navíc není na první pohled zřejmé, jak závisí kombinační číslo na svých argumentech. Budeme se jej proto snažit odhadnout, a to pomocí Stirlingova vzorce (lze použít i odhad z bodu c). Stirlingův vzorec dává pro faktoriál čísla odhad

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

platný pro dostatečně velká n (s chybou menší než 1% se dá používat již od čísla $n = 9$).

Pravděpodobnost si rozepíšeme pomocí faktoriálů a odhadneme Stirlingovým vzorcem

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2^N} \frac{N!}{\left(\frac{N+m}{2}\right)! \left(\frac{N-m}{2}\right)!} \approx \\ &\approx \frac{1}{2^N} \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{\pi(N+m)} \left(\frac{N+m}{2e}\right)^{(N+m)/2} \cdot \sqrt{\pi(N-m)} \left(\frac{N-m}{2e}\right)^{(N-m)/2}}. \end{aligned}$$

Tento výraz se po provedení elementárních operací (například typu $N^N = \exp(N \ln N)$) dostane do tvaru

$$p \approx \sqrt{\frac{2}{N\pi}} \frac{1}{2^N} \frac{\exp\left(N \ln N - \frac{N+m}{2} \ln\left(\frac{N+m}{2}\right) - \frac{N-m}{2} \ln\left(\frac{N-m}{2}\right)\right)}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{N^2}}},$$

který nám však stále mnoho neříká. My však očekáváme, že při růstu m bude pravděpodobnost rychle klesat; důležité budou tudíž jen oblasti s $m \ll N$. Můžeme tedy zanedbat odmocninu ve jmenovateli, která je téměř rovna jedné, a rozvinout logaritmy v exponenciále do Taylorovy řady (stačí do druhého řádu, tj. použijeme vztah $\ln(1+x) \approx x + x^2/2$). Tímto způsobem nakonec získáme vzorec

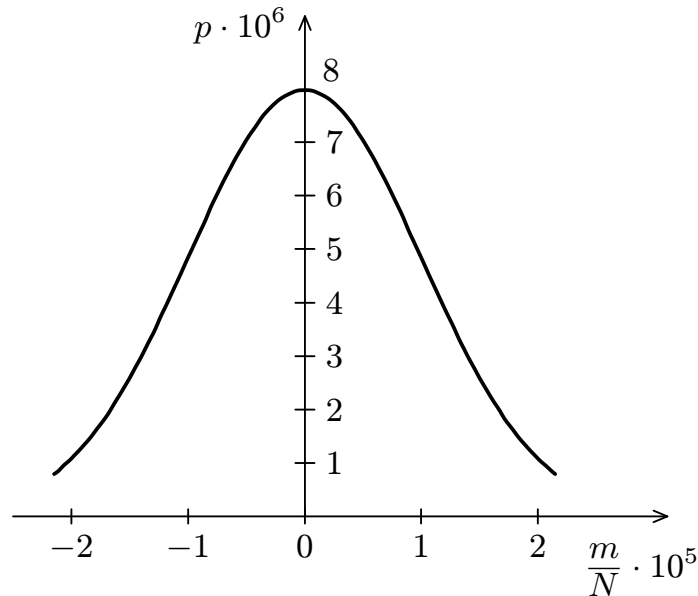
$$p \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{m^2}{2N}\right),$$

který odůvodněně připomíná známou Gaussovu křivku (viz teorie pravděpodobnosti, Gaussovo rozdělení je totiž limitním případem tzv. binomického rozdělení). Všimněme si, že je normovaná (neb m běží pouze přes sudá čísla).

Nyní máme nakreslit graf v takovém měřítku, aby na krajích byla desetinná pravděpodobnost proti středu, tj.

$$\exp\left(\frac{m^2}{2N}\right) = \frac{p(0)}{p(m)} = 10,$$

pročež $m^2/N = 2 \ln 10 \approx 4,61$ a $m/N \approx 2,15 \cdot 10^{-5}$, takže naše přiblížení bylo jistě v pořádku. Vidíme, že šířka křivky Δ (definovaná v zadání úlohy) je dána vzorcem $\Delta = \sqrt{N} \sqrt{2 \ln 2}$. Pokud by nás ale zajímala relativní šířka, tj. $\delta = \Delta/N$, dostali bychom $\delta = \sqrt{2 \ln 2} / \sqrt{N}$. Pravděpodobnost určité relativní fluktuace počtu částic v obou polovinách klesá s celkovým počtem částic N , což je dosti všeobecná vlastnost a důvod, proč funguje statistická fyzika. V systému obsahujícím řekněme 1000 částic se bude například tlak molekul na stěnu pohybovat řádově v 1% okolí své průměrné (rovnovážné) hodnoty. Pokud však místo tisíce vezmeme částic 10^{23} , tlak bude mít odchylku od průměrné hodnoty typicky $3 \cdot 10^{-12}$ %, což je naprosto zanedbatelné oproti jiným vlivům.



Obr. 62. Rozdělení pravděpodobnosti rozmístění molekul v nádobě.

- c) Nakonec poněkud ospravedlníme Stirlingův vzorec. Odhadneme totiž $\ln(n!)$. Celý odhad je založen na následujícím povšimnutí

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n = \sum_{k=1}^n \ln k.$$

Pro velká n se logaritmus mění velice pozvolně, a je proto možné nahradit sumu integrálem. Takto dostáváme odhad

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k \approx \int_1^n \ln x \, dx \approx n \ln n - n,$$

čili

$$n! \approx e^{n \ln n - n} = \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Úloha II. S ... počítání mikrostavů

(5 bodů; průměr 3,25; řešilo 8 studentů)

- a) Jaký je vztah mezi počtem mikrostavů $\Omega(E)$ termostatu s energií menší než E a veličinou $\eta(E)$ (tj. počtem mikrostavů s energií v intervalu $E \pm \Delta$) pro malá Δ ?
- b) Mějme systém N nezávislých harmonických oscilátorů, přičemž energie každého oscilátoru může nabývat hodnot $n\hbar\omega$ s $n = 0, 1, \dots$ (zanedbáváme energii nulových kmitů). Jaký bude mít tvar veličina $\eta(E)$ a $\beta(E)$ pro velká N a E ?
- c) Najděte stejné veličiny jako v předchozím příkladu pro systém N neinteragujících volných elektronů uvězněných na úsečce, (*) ve čtverci, (**) v krychli.

Nápověda. Použijte de Broglieho relace mezi hybností a vlnovou délkou de Broglieho vlny. Na úsečce se musí vejít celý počet půlvln. De Broglieho vlny ve čtverci si lze představit coby součin vln ve směru osy x a osy y , kvantovací podmínka je podobná jako pro úsečku.

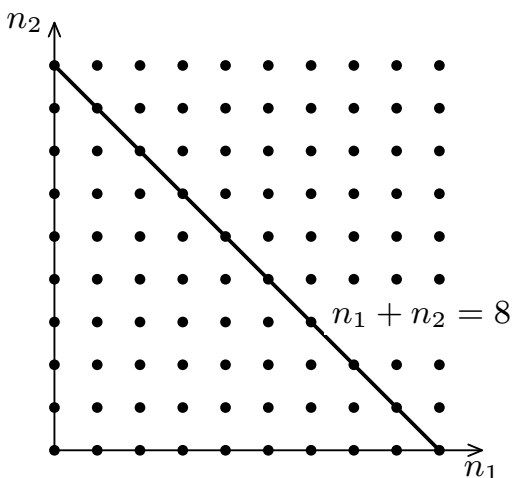
- a) Veličina $\eta(E)$ byla definována jako počet mikrostavů termostatu s energií v intervalu $E \pm \Delta$, kde Δ je malé v porovnání s energií E . Veličinu $\Omega(E)$ jsme definovali coby počet mikrostavů termostatu s energií menší než E . Pokud si toto uvědomíme, nepodivíme se nad rovnicí

$$\eta(E) = \Omega(E + \Delta) - \Omega(E - \Delta).$$

Pokud je Δ dostatečně malé, můžeme veličinu Ω přibližně vyjádřit pomocí diferenciálu, odkud získáme vztah

$$\eta(E) = \left(\Omega(E) + \frac{d\Omega}{dE} \cdot \Delta \right) - \left(\Omega(E) + \frac{d\Omega}{dE} \cdot (-\Delta) \right) = \frac{d\Omega}{dE} \cdot 2\Delta.$$

- b) Úlohu nejdříve vyřešíme pro $N = 2$. Nejprve vypočítáme veličinu $\Omega(E)$. Jelikož energie nabývá pouze celočíselných hodnot, $\Omega(E)$ se zřejmě změní skokem vždy, když E dosáhne celočíselné hodnoty. Energie se musí rozdělit mezi dva oscilátory s energetickými hladinami $\hbar\omega n$. Počet mikrostavů $\Omega(E)$, kde $E = \hbar\omega n$, se tedy bude rovnat počtu způsobů, kterými lze číslo n rozdělit na součet dvou celých čísel, $n = n_1 + n_2$. Do grafu si znázorníme všechny možné dvojice (n_1, n_2) a nakreslíme přímku $n = n_1 + n_2$. Snadno si rozmyslíme, že přípustné dvojice s energií menší než E budou ležet v části prvního kvadrantu omezené zkonstruovanou přímkou (včetně bodů na přímce ležících). V tomto konkrétním případě je můžeme snadno počítat přímo.



Obr. 63

Pro obecný případ však bude vhodnější použít malý trik. Všimneme si, že každý puntík lze ztotožnit s jedním čtverečkem vzniklé čtvercové mříže. Plocha každého čtverečku je rovna jedné. Počet puntíků je

proto roven ploše všech čtverečků pod přímkou a těsně nad ní. Avšak při dostatečně velkých n neuděláme velkou chybu, pokud zanedbáme plochu čtverečků ležících v těsném okolí přímky a za celkovou plochu čtverečků prohlásíme plochu pod přímkou. To proto, že plocha pod přímkou roste jako n^2 , kdežto plocha čtverečků v těsném okolí přímky roste pouze jako n a $n/n^2 \rightarrow 0$. Pro $N = 2$ tedy dostáváme výsledek

$$\Omega(E) = \Omega(\hbar\omega n) \approx \frac{n^2}{2}.$$

V obecném případě budeme analogicky počítat N -rozměrný objem pod plochou $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$. Není příliš jasné, jak jej vypočítat. Nicméně nás zajímala pouze závislost na energii (tj. na n). Snadno si uvědomíme obecnou charakteristiku objemu v k -rozměrném prostoru. Totiž že zvětšíme-li těleso λ krát, jeho objem se zvětší λ^k krát, což můžete snadno ověřit pro 1D (délku úsečky), 2D (plochu obrazce) i 3D (objem tělesa). Počet rozdělení čísla n je tedy přibližně úměrný jeho N -té mocnině. Veličina $\Omega(E)$ proto musí splňovat úměrnost

$$\Omega(E) = \Omega(\hbar\omega n) \sim n^N \sim E^N.$$

Zájemci se mohou pokusit vypočítat konstantu úměrnosti. S ní je pak výsledek roven $\Omega(\hbar\omega n) = n^N/N!$.

Z předchozího příkladu víme, že veličina $\eta(E)$ je úměrná derivaci $\Omega(E)$, čili

$$\eta(E) \sim E^{N-1}.$$

V seriálu bylo definováno $\beta(E) = d \ln \eta(E) / dE$, takže platí $\beta(E) = (N-1)/E$. Energii E celého systému napíšeme ve tvaru $E = \varepsilon N$, kde ε má význam jakési střední energie jednoho oscilátoru. Vztah pro β můžeme přepsat do tvaru $\beta(E) = \beta(N\varepsilon) \approx 1/\varepsilon$. V tomto tvaru je jasně vidět, že $\beta(E)$ závisí pouze na průměrné energii jednoho oscilátoru a nikoliv na jejich počtu.

Z odvozených vztahů můžeme vypožorovat jeden zajímavý jev. Zkoumejme počet mikrostavů s energií mezi E a $E - \delta$. Z výše uvedeného pro tento počet dostáváme vzorec $\Omega(E) - \Omega(E - \delta) \sim E^N - (E - \delta)^N$. Ten pro velká N upravíme užitím definice funkce e^x ($e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$)

$$\begin{aligned} \Omega(E) - \Omega(E - \delta) &\sim E^N - (E - \delta)^N = \\ &= E^N \left(1 - \left(1 - \frac{\delta}{N\varepsilon} \right)^N \right) \approx E^N \left(1 - e^{-\delta/\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Výraz v závorce je díky exponenciále podstatně odlišný od jedničky jen v oblasti s šířkou δ řádově rovnou ε . To znamená, že téměř všechny mikrostavy s energií menší než E mají energii v okolí o šířce zhruba střední energie ε jednoho oscilátoru, což je poměrně překvapivý výsledek.

- c) Jak je (by mělo být) známo ze školy, de Broglieho relace svazují hybnost elektronu, resp. energii elektronu s vlnovou délkou, resp. frekvencí příslušné de Broglieho vlny. Pro jednorozměrný elektron uvězněný na úsečce mají tvar

$$\frac{h}{\lambda} = \hbar k = p \quad \text{a} \quad \hbar\omega = E.$$

Bohrova kvantovací podmínka požaduje, aby na hranicích oblasti, ve které je elektron uvězněn, byl uzel de Broglieho vlny. Na úsečku se proto může umístit jen celý počet půlvln. Vlnová délka proto musí být rovna $\lambda = 2L/n$, kde $n > 0$ je počet půlvln na úsečce délky L . Pro přípustné hybnosti dostáváme $p_n = hn/2L$. Klasická energie volného elektronu je rovna kinetické energii

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}.$$

Tímto jsme vypočítali energetické spektrum elektronu uvězněného na úsečce.

De Broglieho vlna elektronu na čtverci o straně L je (jak bylo napovězeno) součinem vln ve směru x a y . Kvantovací podmínka požaduje nulovou amplitudu na stranách čtverce, vlna v příslušném směru musí mít tedy na hraně uzel. Proto pro hybnosti ve směru x a y píšeme

$$p_{x,n_x} = \frac{hn_x}{2L} \quad \text{a} \quad p_{y,n_y} = \frac{hn_y}{2L}.$$

Kinetická energie elektronu je rovna $p^2/2m = (p_x^2 + p_y^2)/2m$, takže energetické spektrum bude

$$E_{n_x, n_y} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2).$$

Kdo ví, o čem jde řeč, nebude překvapen spektrem

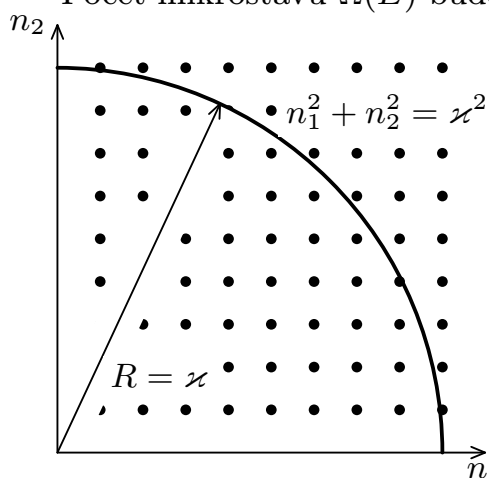
$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

pro trojrozměrný elektron uvězněný v krychli o straně L .

Dále budeme postupovat podobně jako v bodě b). Pro jednoduchost budeme uvažovat jednorozměrný elektron. Energie N elektronů popsanych kvantovými čísly n_1, \dots, n_N bude součtem energií jednotlivých elektronů, tj.

$$E = \frac{h^2}{8mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_N^2) = \frac{h^2 \varkappa^2}{8mL^2}.$$

Počet mikrostavů $\Omega(E)$ bude roven počtu N -tic přirozených čísel, jejichž součet druhých mocnin je menší než \varkappa^2 .



Obr. 64

Pro $N = 2$ si nakreslíme podobný diagram jako v bodě b) (obr. 64). Do něj znázorníme čtvrtkružnici $n_1^2 + n_2^2 = \varkappa^2$. Všechny přípustné kombinace (černé puntíky) se nacházejí uvnitř čtvrtkruhu. Téměř každému opět koresponduje jeden čtvereček o jednotkové ploše, počet rozdělení proto bude přibližně roven ploše čtvrtiny kruhu, tedy $\pi \varkappa^2/4$, a příslušné

$$\Omega(E) = \pi \varkappa^2/4 = \frac{2\pi mL^2}{h^2} E.$$

Pro obecné N je počet mikrostavů $\Omega(E)$ roven počtu N -tic čísel n_1, \dots, n_N , splňujících nerovnost $n_1^2 + \dots + n_N^2 \leq \varkappa^2$. Tento počet je přibližně roven objemu N -rozměrné „čtvrtkoule“ o poloměru \varkappa . Již v úloze b) jsme vyjasnili, že objem libovolného N -rozměrného tělesa je úměrný jeho charakteristickému rozměru na N -tou. Proto

$$\Omega(E) \sim \varkappa^N \sim E^{N/2}.$$

V tomto případě již není jednoduché vypočítat konstantu úměrnosti. Vypočítáme ještě veličinu $\eta(E) \sim E^{N/2-1}$ a veličinu $\beta(E) = (N/2 - 1)/E$.

Každý teď jistě snadno odvodí závislost $\Omega(E)$ pro 2D elektron ($\Omega(E) \sim E^N$) i pro 3D elektron ($\Omega(E) \sim E^{3N/2}$).

Úloha III. S ... aplikace statistické fyziky

(5 bodů; průměr 3,73; řešilo 15 studentů)

- Pomocí podobné úvahy jako v příkladu v textu určete, jaký tvar má Gultbergův-Waageův zákon pro složitější reakce (např. $2A + B \rightarrow A_2B$). Zkuste zjistit, jestli (a jak dobře) tento zákon odpovídá skutečnosti.
- Z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení odvoďte, jaké mocnině teploty je úměrná střední kinetická energie částic plynu. Ověřte si, že jste schopni stejnou metodou zjistit, jak závisí na teplotě střední hodnota libovolné mocniny rychlosti.
- Mějme systém nezávislých spinů, diskutovaný v textu, o teplotě T_1 , který se nachází v magnetickém poli o velikosti B_1 . Následně systém adiabaticky zaizolujeme (tj. zavřeme jej do termosky, aby z něj nemohlo odcházet žádné teplo) a budeme pomalu zmenšovat magnetické pole až na hodnotu B_2 . Vypočítejte, jaká bude výsledná teplota T_2 .

Nápověda. Práce vykonaná na systému s magnetickým momentem M při malé změně magnetického pole B o dB je dána vztahem $dW = -M dB$.

- Pro složitější reakci ze zadání ($2A + B \rightarrow A_2B$) provedeme úplně stejnou úvahu jako pro reakci v textu seriálu. Aby se výchozí atomy mohly sloučit do molekuly, musí se současně srazit dva atomy A a jeden atom B . Pravděpodobnost takové srážky je přibližně přímo úměrná počtu atomů B a druhé mocnině počtu atomů A . To je zřejmé; o prvním a druhém atomu A se dá totiž formálně uvažovat jako o atomu A a atomu C a pravděpodobnost srážky tří atomů A , B a C je zřejmě úměrná koncentraci každého z nich.

Z řečeného vyplývá, že ve vzorci pro jednoduchou reakci stačí nahradit n_A počtem n_A^2 , takže Guldbergův-Waageův zákon bude mít tvar

$$\frac{n_A^2 n_B}{n_{A_2B}} = g \exp(-E/kT),$$

kde E je energie potřebná na rozštěpení molekuly A_2B . Každý si nyní jistě snadno odvodí, že pro obecnou reakci typu $\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \dots \rightarrow \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 + \dots$ bude v rovnováze platit

$$\frac{n_{A_1}^{\nu_1} \cdot n_{A_2}^{\nu_2} \cdot \dots}{n_{B_1}^{\mu_1} \cdot n_{B_2}^{\mu_2} \cdot \dots} = g \exp(-E/kT).$$

Pokud jde o určení rovnovážného stavu reakce, Guldbergův-Waageův zákon platí dosti přesně, přinejmenším v tom smyslu, že kombinace koncentrací na levé straně je funkcí pouze teploty a tlaku. Tato funkce však ve skutečnosti nemusí být přesně exponenciální.

Nicméně předpovídané rychlosti reakcí nejsou správné ani ve smyslu závislosti na koncentracích. To je důsledkem složité dynamiky srážek, jichž se obvykle účastní více molekul než jen ty potřebné. Rozmyslete si například, že reakce $A+B \rightarrow AB$ vlastně není sama o sobě kinematically možná, neboť nemohou být současně splněny zákony zachování hybnosti a energie, poněvadž energie vázaného stavu je menší než energie dvou samotných atomů, a navíc mají atomy na začátku nenulovou hybnost. Aby mohla proběhnout, musí se objevit nějaký prostředník, který přebytečnou energii odnese ve formě své kinetické energie; tímto prostředníkem může být například další atom nebo vyzářený foton. Další příčinou selhávání je omezená platnost Boltzmannova vztahu pro nerovnovážné stavy.

- b) Tato úloha šla vyřešit pouhou rozměrovou analýzou. Všimněme si, že se teplota vždy vyskytuje v kombinaci s k , tj. jako kT , kterýžto výraz má rozměr energie. Výraz $\langle mv^2 \rangle$ má také rozměr energie. Odtud snadno odvodíme $\langle v^n \rangle \sim T^{n/2}$.

K početnímu řešení této úlohy nebylo třeba umět vypočítat nějaký konkrétní integrál, stačilo pouze umět provést nejtriviálnější možnou substituci. Vyjdeme z Maxwellova-Boltzmannova rozdělení, jež jsme v seriálu psali ve tvaru

$$P(v) = C \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right),$$

kde C je konstanta nezávislá na rychlosti (v seriálu jsme místo C psali úměrnost). Pravděpodobnost, že částice bude mít rychlost o velikosti mezi v a $v + dv$, je $P(v) dv$.

Prvním důležitým krokem bylo uvědomit si, že celková pravděpodobnost má být jednotková. Tedy $1 = \int_0^\infty P(v) dv$. K tomu musíme vhodně nastavit konstantu C . Zajímáme se však pouze o závislosti na teplotě, nepotřebujeme tudíž splnit rovnost. Integrál rozepíšeme a zasubstitujeme v něm. Stačí, aby integrál vpravo nezávisel na teplotě.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty C \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv &= \\ &= C \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} \cdot \int_0^\infty \frac{mv^2}{2kT} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}} v\right). \end{aligned}$$

Poslední výraz je, pokud jde o teplotní závislost, úměrný

$$C \cdot T^{3/2} \cdot \int_0^\infty \alpha^2 e^{-\alpha^2} d\alpha \sim C \cdot T^{3/2},$$

neboť integrál podle α již také na teplotě nezávisí. Konstanta C musí vyrušit teplotní závislost, platí tedy úměrnost $C \sim T^{-3/2}$, a Maxwellovo-Boltzmannovo rozdělení včetně teplotní závislosti napíšeme ve tvaru

$$P(v) \sim T^{-3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right).$$

Nyní již snadno určíme teplotní závislost libovolné mocniny rychlosti. Střední hodnota veličiny $f(v)$ závislé na rychlosti, je definována jako

$$\langle f \rangle = \int_0^\infty f(v)P(v) dv.$$

Střední hodnotu n -té mocniny rychlosti proto vypočítáme jako

$$\langle v^n \rangle = \int_0^\infty v^n P(v) dv \sim T^{-3/2} \int_0^\infty v^{n+2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv.$$

Nyní stačí zopakovat výše provedený postup (substituci), abychom dostali

$$\langle v^n \rangle \sim T^{-3/2} \cdot \left(\frac{2kT}{m}\right)^{(n+3)/2} \int_0^\infty \left(\frac{mv^2}{2kT}\right)^{(n+2)/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) d\left(\sqrt{\frac{m}{2kT}} v\right),$$

odkud

$$\langle v^n \rangle \sim T^{n/2} \cdot \int_0^\infty \alpha^{n+2} e^{-\alpha^2} d\alpha \sim T^{n/2}.$$

Například kinetická energie je úměrná druhé mocnině rychlosti, čili střední hodnota kinetické energie v plynu je přímo úměrná teplotě, jak nás učili na střední škole.

- c) Úloha se pro systém neinteragujících spinů dala vyřešit velice jednoduchou úvahou. Na klíč k řešení bylo možno přijít hned dvěma způsoby. Ten jednodušší z nich využívá zákon zachování momentu hybnosti (tedy celkového spinu). Jelikož je náš systém v termosce adiabaticky zaizolován, neinteraguje s okolím jinak než prostřednictvím magnetického pole. Magnetické pole samo o sobě však v našem systému nemůže překlápet spin (ten je překlápen slabou interakcí spinů mezi sebou), takže přinejmenším celkový spin (resp. magnetický moment M) musí zůstat zachovaný. Tato úvaha však může selhat v obecnějším systému, neboť magnetické pole obecně mění projekci spinu (příkladem je tzv. precese spinu, kdy spin částice jakoby rotuje kolem směru magnetického pole).

Druhý způsob využívá náповědy. Při odvozování vztahů pro spinový systém jsme uvedli, že energie spinu v magnetickém poli je rovna $-\mu B$. Podíváme-li se na vorec pro celkovou magnetizaci M , snadno identifikujeme výraz $-MB$ jako (vnitřní) energii systému spinů v magnetickém poli. V zadání ale bylo uvedeno, že práce v magnetickém poli je $dW = -M dB$. První termodynamický zákon má pro adiabaticky izolovaný systém (žádný přenos tepla) tvar $dE = dW = -M dB$, avšak ze vzorce $E = -MB$ určíme změnu energie jako $dE = -M dB - B dM$. Porovnáním prvního a druhého vztahu snadno zjistíme, že $dM = 0$, čili že M se při zmenšování magnetického pole nemění. Vztah $E = -MB$ platí pouze pro tento jednoduchý model.

Celková magnetizace M je monotónní funkcí kombinace $\mu B/kT$ (viz (33)). Zde μ a k jsou konstanty. Proto okamžitě vidíme, že poměr B/T je během ochlazování konstantní. Pro konečnou teplotu tedy bude platit

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{B_2}{B_1}.$$

Tento vzorec ovšem evidentně nemůže zcela odpovídat realitě. Kdybychom totiž například snížili magnetické pole až na nulu, konečná teplota by také byla nulová; jedním z postulátů (experimentálně dobře ověřených) termodynamiky však je tvrzení, že nulové teploty nelze dosáhnout. A co by se teprve stalo, kdyby konečné pole mělo opačný směr než počáteční!

Náš systém je nerealistický v zanedbání všech interakcí. Ve skutečné látce vždy dochází k interakcím spinů mezi sebou i s krystalovou mřížkou; existuje jistá velikost magnetického pole, pod kterou již není stav látky určen převážně vnějším magnetickým polem. Pod touto hranicí již neplatí podmínka $B/T = \text{konst}$ a teplota se s polem přestává snižovat. Efektivně to odpovídá existenci malého vnitřního magnetického pole B_0 , pod které nelze celkové pole v látce snížit, takže mezní konečná teplota je dána vzorcem $T_2 = T_1 \cdot B_0/B_1$. Problém záporného magnetického pole ve skutečné látce nenastává, neboť v realistické verzi se ve vztahu pro konečnou teplotu objevují absolutní hodnoty magnetického pole.

Pokud půjdeme s B_2 až do záporných hodnot, nastane kuriózní situace: častěji budou obsazeny hladiny s vyšší energií než s nižší energií (tj. větší část spinů bude mířit proti směru pole), což při kladné teplotě odporuje Boltzmannovu vzorci i „zdravému rozumu“. Pokud ovšem formálně takovému stavu přiřadíme zápornou teplotu (jakou by předpovídal odvozený vzorec), vše bude v pořádku. S touto myšlenkou poprvé přišel velký sovětský fyzik L. D. Landau ve svém kurzu teoretické fyziky.

Experimentálně lze záporných teplot doopravdy dosáhnout. Podmínkou je mít systém nepříliš interagujících spinů (např. systém jaderných spinů v krystalu), které velice slabě interagují s krystalovou mřížkou. Pak je možné na krátký čas (dokud ji tepelný kontakt s mřížkou nenaruší) dosáhnout záporné teploty spinů.

Popisovaná metoda chlazení, nazývaná *adiabatická demagnetizace*, se v praxi hojně využívá, nejčastěji na některých paramagnetických solích. Adiabatickou demagnetizací systému jader lze získat teploty v řádu mikrokkelvinů.

Úloha IV . S ... tepelná kapacita

(5 bodů; průměr 4,00; řešilo 12 studentů)

- a) Jakou tepelnou kapacitu plynu složeného z tříatomových molekul s atomy uspořádanými do vrcholů trojúhelníku předpovídá klasická fyzika? Na jakou hodnotu tato kapacita poklesne při snížení teploty na 100 K?
- b) Zjistěte chování výrazů pro vnitřní energii krystalu a energetické spektrum záření černého tělesa pro malé teploty. Odvoďte dále tzv. Wienův posunovací zákon. Ten říká, že frekvence ω_m , pro níž má závislost intenzity záření černého tělesa na teplotě maximum, je přímo úměrná teplotě.
- c) Vypracujte lepší teorii tepelné kapacity krystalu, aby uvažovala kolektivní kmity atomů. Případné integrály nemusíte počítat.

Nápověda. Uvědomte si, že se krystalem šíří zvukové vlny (jak příčné, tak podélné), a to různými rychlostmi. Počet módů nemůže být větší, než je počet stupňů volnosti $3N$ krystalu (N je počet částic).

- a) Při řešení budeme postupovat naprosto stejně jako v seriálu. Víme, že na každý kinetický stupeň volnosti jedné molekuly připadá střední kinetická energie $kT/2$, a z viriálového teorému je také známo, že na každou harmonickou interakci mezi dvěma částicemi připadá střední potenciální energie $kT/2$.

Naši tříatomovou molekulu si můžeme představit tak, jako to ukazuje obrázek 65; pružiny znamenají harmonickou interakci mezi částicemi. Pružiny jsou tři, proto je střední potenciální energie molekuly rovna $3kT/2$.

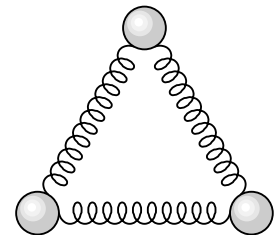
Střední kinetickou energii molekuly můžeme určit velice snadno. Jelikož pracujeme se třemi atomy a každý se může hýbat ve třech směrech, máme dohromady devět stupňů volnosti. Proto střední kinetická energie molekuly bude $9kT/2$. Počet stupňů volnosti jsme mohli určit i poněkud jiným způsobem, a sice rozložit si pohyb molekuly na jisté elementární pohyby. Jedním z nich je pohyb těžiště molekuly – tři stupně volnosti, dále rotace molekuly jako celku kolem svíslé osy a dvou os procházejících vždy jednou molekulou a středem protější strany (tři stupně volnosti); nakonec jsou to tři kmitavé pohyby, podmíněné pružinami. Celkem rovněž dostáváme devět kinetických stupňů volnosti.

Jelikož se v jednom molu plynu nachází N_A molekul, molární tepelná kapacita plynu je rovna

$$c = N_A \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \right) kT = 6RT .$$

Pokud plyn ochladíme na teplotu 100 K, „zamrznou“ vibrační stupně volnosti molekuly; tuhost pružin klesá k nule. Tepelná kapacita se zmenší právě o příspěvek potenciální a kinetické energie kmitů, tedy o $3kT/2 + 3kT/2$ na molekulu. Nová měrná tepelná kapacita proto bude rovna

$$c_{100\text{ K}} = N_A \cdot \frac{6}{2} kT = 3RT .$$



Obr. 65. Model tříatomové molekuly.

- b) Nyní se podíváme, jak se chovají v seriálu odvozené vzorce pro nízké teploty. Nejprve prozkoumáme závislost tepelné kapacity (37) krystalu

$$c = R \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \frac{\exp(\hbar\omega/kT)}{(\exp(\hbar\omega/kT) - 1)^2}.$$

Při malých teplotách je poměr $\hbar\omega/kT$ velice velký. Ve jmenovateli tedy můžeme s klidným svědomím zanedbat jedničku, čímž dostaneme

$$c \approx R \frac{\hbar^2 \omega^2}{kT^2} \exp(-\hbar\omega/kT).$$

Einsteinův model řeší zásadní rozpor s třetím termodynamickým zákonem – tepelná kapacita jde se snižující se teplotou k nule. Předpovězený pokles je v zásadě exponenciální. Experimentálně pozorovaná závislost ovšem klesá k nule mnohem pomaleji, a to jako T^3 . Situaci poněkud napravíme v další podúloze.

Pro spektrální hustotu energie záření černého tělesa jsme v seriálu odvodili vztah (39)

$$u(\omega) = V \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

Malé teploty odpovídají velkým $\hbar\omega/kT$. Stejně jako v předchozím odstavci lze zanedbat jedničku ve jmenovateli oproti exponenciále, čímž získáme

$$u(\omega) \approx V \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \exp(-\hbar\omega/kT).$$

Opět jsme došli k téměř exponenciální závislosti na frekvenci. V tomto případě je však tento závěr v naprostém souhlasu s experimentem.

Dalším úkolem bylo najít maximum spektrální hustoty energie, respektive určit jeho závislost na teplotě. To provedeme snadným derivováním vzorce pro $u(\omega)$. Nejprve si však pro přehlednost označíme $x = \hbar\omega/kT$. Podmínka nulové derivace zní

$$0 = \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} \sim \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1},$$

kde jsme vynechali všechny na frekvenci nezávislé faktory. Vypočítáme poslední derivaci

$$0 \sim \frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2},$$

čili

$$3(e^x - 1) = x e^x.$$

Poslední rovnice má jisté řešení x^* , jež nejde určit analyticky⁴⁴ (pro zajímavost $x^* \approx 2,82$). My jej však ani znát nemusíme. Spokojíme se s faktem, že v maximum

⁴⁴⁾ Nicméně jde odhadnout analyticky. Rovnici přepíšeme na tvar $1 - e^{-x} = x/3$ a exponenciálu rozložíme do Taylorovy řady $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$. To znamená $x - x^2/2 + x^3/6 + \dots = x/3$, tedy $2/3 = x/2 - x^2/6 + \dots$. Zanedbáme-li člen s druhou mocninou, dostaneme odhad $x^* \approx 4/3 \approx 1,33$. Ponecháme-li jej a vezmeme-li kladný kořen příslušné kvadratické rovnice, náš odhad bude $x^* \approx 3,56$. Po chvíli přemýšlení o zanedbaných členech si snadno uvědomíte, že tyto dvě hodnoty omezují x^* shora i zdola.

platí $x = x^*$, čili

$$\omega = x^* \frac{kT}{\hbar} \approx 2,82 \frac{k}{\hbar} \cdot T.$$

Odvodili jsme Wienův posunovací zákon.

- c) Naším posledním úkolem je vylepšit teorii tepelné kapacity krystalu. Jak jsme již naznačili v seriálu i v zadání úlohy, hlavním problémem Einsteinova modelu je předpoklad, že každý atom kmitá nezávisle na všech ostatních. Představme si například dvě sprzęžená kyvadla (jakožto model krystalu o dvou atomech). Zkušenost dokonce již s tímto triviálním modelem nás učí, že není vhodné uvažovat kmity obou kyvadel samostatně, nýbrž uvažovat kmity coby superpozici dvou normálních kmitů (jeden z nich odpovídá stavu, kdy se kyvadla kývají ve fázi, a druhý v protifázi).

Potřebovali bychom tedy zjistit, jakého druhu jsou kolektivní kmity v krystalu. Náповěda nás nasměrovala na zvukové vlny. Představme si například stojatou zvukovou vlnu v krystalu. Každá taková vlna o určité frekvenci odpovídá vpravdě kolektivním kmitům, neboť stačí znát pohyb jediného atomu, abychom mohli určit pohyb všech ostatních. Stojatá vlna ovšem nemůže být libovolná, nýbrž platí pro ni známá kvantovací podmínka, totiž že do rozměru krystalu se musí vejít celý počet půlvln. Skutečné kmity pak odpovídají superpozici jednotlivých stojatých vln (módů).

Závěr zní: Místo individuálních kmitů uvažuj jednotlivé módy zvukových vln. Odteď jsme v přesně stejné situaci jako při odvozování hustoty záření černého tělesa. Můžeme jej doslova zopakovat, pouze musíme vhodně zaměnit rychlost světla (elektromagnetických vln) za rychlost zvukových vln.

Pokud si osvěžíme zmíněný postup, snadno poznáme, že vhodným místem k nahrazení c za rychlost zvuku je rovnice (38) pro $g(E) dE$. Nynější situace je však poněkud složitější. Máme totiž jak příčné vlny, šířící se rychlostí v_{\perp} se dvěma možnými polarizacemi, tak podélné vlny s jednou polarizací a rychlostí v_{\parallel} . Každé z těchto vlnění přispěje příslušným způsobem do celkové hustoty stavů. Správná hustota stavů bude proto dána vztahem

$$g(E) dE = V \frac{E^2 dE}{2\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3} \right).$$

Porovnejme tento vzorec s hustotou stavů pro světlo. Snadno nahlédneme, že naše $g(E)$ získáme záměnou

$$\frac{2}{c^3} \rightarrow \frac{2}{v_{\perp}^3} + \frac{1}{v_{\parallel}^3} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{v^3},$$

kde jsme definovali jakousi efektivní rychlost šíření vln v (jež odpovídá třem módům – dva příčné a jeden podélný). Až na jeden dále diskutovaný drobný detail stačí ve všech formulích pro záření černého tělesa provést tuto záměnu a získáme tím odpovídající vzorec pro kmity atomů v krystalu.

Onen drobný detail spočívá v otázce celkového počtu módů. Tento počet není pro elektromagnetické záření v krabici nijak omezený. Ovšem celkový počet módů v krystalu bude jistě omezen počtem stupňů volnosti atomů v uzlech krystalové

mříže. Každý atom se může pohybovat ve třech směrech (má tři stupně volnosti), krystal jako celek má tedy $3N$ stupňů volnosti. Počet vybuzených módů musí být (alespoň přibližně) roven tomuto číslu. Řešením je neuvažovat módy s frekvencí větší než nějaká určitá frekvence ω_D (Debyeova frekvence). Ta je dána rovností celkového počtu módů a $3N$

$$3N = \int_0^{\omega_D} g(\omega) d\omega = \int_0^{\omega_D} \frac{3V\omega^2}{2\pi^2v^3} d\omega = \frac{3V}{2\pi^2v^3} \frac{\omega_D^3}{3},$$

odkud

$$\omega_D = 2\pi v \left(\frac{3\rho}{4\pi} \right)^{1/3},$$

kde jsme zavedli hustotu atomů $\rho = N/V$. Nyní bychom například mohli vypočítat vnitřní energii, a to jako

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\omega_D} u(\omega) d\omega = \frac{3V\hbar}{2\pi^2v^3} \int_0^{\omega_D} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1} = \\ &= 9NkT \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}, \end{aligned}$$

kde jsme zavedli tzv. Debeyeovu teplotu T_D , splňující $\hbar\omega_D = kT_D$.

Snadno prozkoumáme limitní vlastnosti tohoto výrazu. Pro velké teploty je horní mez integrálu velice malá, hlavní příspěvek k integrálu pochází od malých x . Tehdy můžeme místo exponenciály napsat první dva členy Taylorova rozvoje a odhadnout integrál jako $\int x^2 dx = (T_D/T)^3/3$. Potom $E \approx 3NkT$ a molární tepelná kapacita je $c = dE/dT = 3N_A kT = 3RT$, což identifikujeme jako Dulongův-Petitův zákon. Pro malé teploty je naopak horní mez integrálu velmi velká. Integrand exponenciálně klesá, takže hlavní příspěvek k integrálu pochází z oblastí nevelkých x . Integrál je proto téměř nezávislý na teplotě. Závislost energie na teplotě bude tedy dána pouze předintegrálním faktorem, a to jako $E \sim T^4$. Tepelná kapacita je derivací energie, proto $c \sim T^3$ zcela ve shodě s experimentem.

Úloha V. S ... fermiony a bosony

(5 bodů; průměr 3,86; řešilo 7 studentů)

- a) Najděte hustotu stavů $g(E)$ pro volné elektrony a pomocí ní určete vztah mezi počtem elektronů a Fermiho energií při nulové teplotě. Zjistěte, jak musí záviset Fermiho energie na teplotě (při malých teplotách), aby byl počet elektronů konstantní. Nakonec odhadněte počet excitovaných elektronů při pokojové teplotě.
- b) Určete závislost chemického potenciálu μ na teplotě při malých teplotách a konstantním počtu částic v systému stejných bosonů. Najděte teplotní závislost počtu excitovaných bosonů při nízkých teplotách.
- a) Veličinu $g(E)$ jsme již v podstatě vypočítali v rámci druhé úlohy (počítání mikrostavů) a v seriálu při odvozování záření černého tělesa (38). Elektron má podobně jako foton dva dodatečné stupně volnosti spojené s orientací spinu $+1/2$ a $-1/2$. Po dosazení vyjde

$$g(E) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}. \quad (44)$$

V seriálu jsme odvodili, že v rovnováze je střední počet fermionů ve stavu i s energií E_i dán Fermiho-Diracovým rozdělením

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{\exp(\beta(E_i - E_F)) + 1}, \quad (45)$$

kde E_F je Fermiho energie. Pro $E_i = E_F$ má rozdělovací funkce $\langle N_i \rangle$ hodnotu $1/2$ – stavy s energií E_F jsou zpola zaplněny. Pokud je teplota nulová, znamená to, že pod energií E_F jsou všechny stavy zcela zaplněné $\langle N_i(E_i < E_F) \rangle = 1$ a nad touto energií naopak zcela prázdné $\langle N_i(E_i > E_F) \rangle = 0$.

Tímto můžeme svázat počet elektronů N s E_F při nulové teplotě – počet elektronů je totiž totožný s počtem stavů s energií $E \leq E_F$. Z definice hustoty stavů $g(E)$ nyní přímo plyne, že

$$N = \int_0^{E_F} g(E) dE = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{E_F^{3/2}}{3/2}. \quad (46)$$

Tak zní souvislost mezi energií nejvyššího zaplněného stavu E_F a počtem všech částic N .

Dalším úkolem, jenž je početně náročnější, bylo zjistit, jak se bude pohybovat Fermiho energie při zvyšování teploty. Především si ale uvědomme, proč se vlastně bude pohybovat. Příčina bude jasná, jakmile si prohlédneme graf Fermiho-Diracova rozdělení na obrázku 57 (strana 113). Podle něho ze stavů, jež byly za nulové teploty zcela zaplněny, začnou mizet elektrony a objevovat se ve stavech s vyššími energiemi. Graf zobrazuje střední zaplnění *jednoho* stavu v závislosti na jeho energii. Počet stavů s energií v určitém intervalu (tj. vlastně veličina $g(E)$) ovšem roste s energií. Počet elektronů zmizivších z každého stavu musí být pronásoben počtem stavů; podobně počet elektronů objevivších se. Díky růstu $g(E)$ se tedy (při pevném E_F) nad E_F objeví více elektronů, než

zmizí z oblasti pod E_F . Počet elektronů má nicméně zůstat konstantní. Přírůstek je kompenzován posunutím E_F , a tím i celého Fermiho-Diracova rozdělení k nižším energiím.

Nové E_F vypočítáme následovně. Zjistíme počet elektronů při nenulové teplotě a položíme jej roven počtu elektronů při nulové teplotě. Tím dostaneme rovnici pro E_F . K tomu můžeme použít odvozený vzorec pro N , jenom je její potřeba mírně modifikovat, a to pronásobením hustoty $g(E)$ průměrným obsazením stavu $\langle N \rangle$; v případě výše je to jedna pod E_F a nula nad E_F . Dále musíme horní integrační mez prodloužit do nekonečna, neboť v principu může být obsazen libovolně vysoký stav. Máme tedy

$$N = \int_0^\infty \langle N \rangle g(E) dE = \int_0^\infty \frac{1}{\exp(\beta(E - E_F)) + 1} \cdot \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE.$$

Tento integrál musíme nějak odhadnout. Ukážeme si zde pěkný trik.

Především si všimněme, že Fermiho-Diracovo rozdělení (45) je symetrické vůči E_F , a to následujícím způsobem

$$\langle N(E_F + \Delta E) \rangle = 1 - \langle N(E_F - \Delta E) \rangle.$$

Tento vzorec platí pro libovolné ΔE a dá se ověřit prostým dosazením do Fermiho-Diracova rozdělení. Jeho význam se dá shrnout vulgarizujícím sloganem: „Co se nahoře objeví, to dole zmizí.“ Nyní by nás mohlo napadnout rozdělit integrál v energii E_F na dva integrály

$$N = \int_0^{E_F} \langle N(E) \rangle g(E) dE + \int_{E_F}^\infty \langle N(E) \rangle g(E) dE.$$

Jako y si označíme rozdíl $E - E_F$. V prvním integrálu využijeme symetrii

$$\begin{aligned} \int_0^{E_F} \langle N(E) \rangle g(E) dE &= \int_0^{E_F} \langle N(E_F + y) \rangle g(E) dE = \\ &= \int_0^{E_F} (1 - \langle N(E_F - y) \rangle) g(E) dE = \\ &= \int_0^{E_F} g(E) dE - \int_{-E_F}^0 \langle N(E_F - y) \rangle g(E_F + y) dy. \end{aligned}$$

Rovnice pro N přejde do tvaru

$$\begin{aligned} N - \int_0^{E_F} g(E) dE + \int_0^{E_F} \langle N(E_F + y) \rangle g(E_F - y) dy &= \\ = \int_{E_F}^\infty \langle N(E) \rangle g(E) dE = \int_0^\infty \langle N(E_F + y) \rangle g(E_F + y) dy. \end{aligned}$$

Sem nyní dosadíme explicitní výraz pro $\langle N(E) \rangle$

$$N - \int_0^{E_F} g(E) dE + \int_0^{E_F} \frac{g(E_F - y)}{e^{\beta y} + 1} dy = \int_0^\infty \frac{g(E_F + y)}{e^{\beta y} + 1} dy.$$

Nakonec provedeme substituci $x = \beta y$ a za integrál z $g(E)$ dosadíme hodnotu (46) vypočítanou na začátku řešení

$$\begin{aligned} N - \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} + \int_0^{\beta E_F} \frac{g(E_F - x/\beta)}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right) &= \\ &= \int_0^\infty \frac{g(E_F + x/\beta)}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Je-li teplota malá, veličina β je velká. Integrovaná funkce má strukturu $g \cdot f$, kde g se mění pomalu, zatímco f exponenciálně (to jest rychle) klesá. Do integrálu přispějí jenom hodnoty s nevelkými x . Ovšem pokud x není velké, x/β je rozhodně malinké. V této oblasti můžeme odhadnout funkci $g(E_F + x/\beta)$ pomocí diferenciálu

$$g(E_F + x/\beta) \approx g(E_F) + \frac{x}{\beta} \left. \frac{dg(E)}{dE} \right|_{E=E_F}.$$

Navíc můžeme horní mez prvního integrálu prodloužit do nekonečna, neboť součin βE_F je velký. Po dosazení dostáváme rovnici

$$N - \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E_F^{3/2} = 2g'(E_F) \int_0^\infty \frac{x/\beta}{e^x + 1} d\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

Fermiho energii při nulové teplotě označíme E_F^0 . Pro malé teploty je E_F blízké E_F^0 , rozdíl bude záviset na teplotě. Členy tohoto rozdílu, které jsou úměrné vyšší než druhé mocnině teploty, budeme zanedbávat. Jako první bod řešení jsme vypočítali, jak souvisí energie E_F^0 s počtem částic N . Nalezený vzorec (46) sem můžeme dosadit. Dále můžeme přímo vypočítat derivaci g' z (44). Po dosazení a zkrácení nabyde rovnice tvaru

$$(E_F^0)^{3/2} - E_F^{3/2} = \frac{3}{2} \frac{E_F^{-1/2}}{\beta^2} \int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} dx.$$

Integrál se dá spočítat, ovšem zde to dělat nebudeme. Počítač nám poradí, že se rovná $\pi^2/12$. Použijeme přibližný vzorec $(1+x)^r \approx 1+rx$ pro $E_F^{-1/2}$

$$E_F^{-1/2} = (E_F^0 + E_F - E_F^0)^{-1/2} \approx (E_F^0)^{-1/2} \left(1 - \frac{E_F - E_F^0}{2E_F} \right).$$

Druhý člen v závorce úměrný rozdílu $E_F - E_F^0$ můžeme zanedbat, protože tento výraz násobíme T^2 v čitateli zlomku před integrálem. Konečným výsledkem je

$$E_F = E_F^0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\pi^2}{12} \frac{k^2 T^2}{(E_F^0)^2} \right)^{2/3} \approx E_F^0 \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \frac{k^2 T^2}{(E_F^0)^2} \right).$$

Fermiho energie klesá s teplotou. Všimněme si, že změna E_F je až druhého řádu v teplotě, tj. při nízkých teplotách zanedbatelná proti efektům prvního řádu. Toho dále využijeme.

Nakonec odhadneme počet excitovaných elektronů N_E , to jest elektronů s energií větší než E_F . Pro něj můžeme snadno napsat přesný vzorec

$$N_E = \int_{E_F}^{\infty} \langle N \rangle g(E) dE.$$

Typická energie excitace se pohybuje kolem hodnoty kT , což je malé číslo ve srovnání s E_F . Čili příspěvek k integrálu pochází pouze z oblasti energií kT kolem Fermiho energie. V tomto intervalu se $g(E)$ prakticky nestihne změnit, pročež ji můžeme vytknout před integrál. Dostaneme

$$\begin{aligned} N_E &\approx g(E_F) \int_{E_F}^{\infty} \langle N \rangle dE = g(E_F) \int_{E_F}^{\infty} \frac{dE}{e^{\beta(E-E_F)} + 1} = \\ &= g(E_F) \int_0^{\infty} \frac{d(x/\beta)}{e^x + 1} = kT \cdot g(E_F) \ln 2. \end{aligned}$$

Počet excitovaných elektronů je přímo úměrný teplotě. Každý z nich si nese dodatečnou energii řádu kT , jejich energie je úměrná $(kT)^2$. Tepelná kapacita (derivace energie podle teploty) je proto úměrná T . Při nízkých teplotách tedy u kovů nepozorujeme tak rychlý pokles, jaký předpovídá Einsteinova či Debyeova teorie, neboť tyto neuvažují volné elektrony.

- b) U bosonů je situace podstatně jednodušší než u fermionů. V seriálu jsme se dozvěděli, že bosony mají při nízkých teplotách tendenci soustředit se v základním stavu. Při nulové teplotě je základní stav zcela obsazen a ostatní jsou zcela prázdné. Při popisu excitací se poté můžeme při nízkých teplotách omezit pouze základním a prvním excitovaným stavem. Dále budeme uvažovat základní stav s energií E_0 a první excitovaný s energií E_1 . Počet stavů s energií E_1 označíme g .

Při velice malé teplotě je obsazen prakticky jen základní stav. Toho využijeme k nalezení μ při malých teplotách. Pro počet částic N totiž podle Boseho-Einsteinova rozdělení platí

$$N = \frac{1}{\exp(\beta(E_0 - \mu)) - 1}.$$

Odtud plyne $\mu = E_0 - kT \cdot \ln(1 + 1/N)$.

Počet excitovaných bosonů je za malé teploty dán v podstatě jen počtem bosonů v prvním excitovaném stavu (změnu μ můžeme přitom zanedbat). Přímou z Boseho-Einsteinova rozdělení plyne

$$N_E \approx \frac{g}{\exp(\beta(E_1 - \mu)) - 1} = \frac{g}{\exp(\beta(E_1 - E_0)) \cdot (1 + 1/N) - 1}.$$

Analýza se zesložití, pokud jsou vzdálenosti mezi několika prvními stavy infinitezimálně malé. Potom se částice rozdělí do více stavů. Tento problém však nebudeme dále rozebírat.

Úloha VI. S ... kritická teplota

(8 bodů; průměr 4,50; řešilo 6 studentů)

- a) Kvalitativně popište, jak se chová tepelná kapacita Isingova modelu s nulovým vnějším magnetickým polem v okolí kritické teploty.
- b) Podobným postupem, jako jsme vypočítali chování magnetizace m v okolí kritického bodu, určete chování susceptibility χ a závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě.
- c) Ukažte, že model mřížového plynu vede ke kondenzaci, a určete kritickou teplotu.
- d) Prozkoumejte model binární slitiny.

- a) Ke správnému kvalitativnímu řešení si stačilo uvědomit, že energie při nulovém vnějším poli v přiblížení středního pole závisí pouze na magnetizaci m . Nad kritickou teplotou je magnetizace nulová a vnitřní energie se nemění. Zato pod kritickou teplotou ano, ale pouze pomalu, neboť i m se mění pomalu. Tepelná kapacita tedy rozhodně nemůže divergovat a pouze skočí z nulové na nenulovou hodnotu.

Pro jistotu provedeme i výpočet. K určení chování tepelné kapacity potřebujeme znát chování vnitřní energie. Energii určité konfigurace spinů známe ze seriálu

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - B \sum_i s_i;$$

magnetické pole B dále položíme rovno nule. Jak víme ze seriálu, model s těmito energiemi lze aproximovat modelem středního pole, kde interakci sousedních spinů nahradíme interakcí každého spinu zvlášť s jakýmsi umělým magnetickým polem. V této aproximaci pro energii platí vzorec (42) $E = -Jqm \sum_i s_i$, kde m je střední hodnota magnetizace jednoho spinu, $m = \langle s_i \rangle$. Vnitřní energii jsme dříve definovali jako střední hodnotu energie E , již můžeme snadno vypočítat

$$U = \langle E \rangle = -Jqm \langle \sum_i s_i \rangle = -Jqm \sum_i \langle s_i \rangle = -Jqm \cdot Nm = -NJq \cdot m^2.$$

Nad kritickou teplotou je ovšem střední magnetizace m nulová, pročež i vnitřní energie musí být v této aproximaci nulová. V oblasti těsně pod kritickou teplotou jsme v seriálu odvodili závislost $m = \varepsilon^{1/2} \cdot \sqrt{3}$, kde $\varepsilon = (T_C - T)/T_C$. Vnitřní energie tedy závisí lineárně na teplotě, čili tepelná kapacita vychází konstantní a nenulová. Tepelná kapacita tedy v kritické teplotě vykazuje skok, nediverguje.

Nakonec jsme si nechali malé překvapení. Tepelná kapacita totiž ve skutečnosti diverguje, a to logaritmicky. To je v rozporu s teorií středního pole. Příčinu rozporu snadno identifikujeme. Při použití středního pole jsme zanedbali korelace mezi sousedními spiny, tj. veličinu $\langle s_i \cdot s_j \rangle$. Nahradili jsme ji interakcí se středním polem, které je ovšem nenulové, pouze pokud střední hodnota spinu vychází nenulová. Nicméně korelace je obecně zcela jistě nenulová i tehdy, když střední hodnota je nulová, přispívá tedy k energii.

- b) Jako první krok řešení zde zopakujeme rovnici (43) pro m ze seriálu $m = \tanh \beta(Jqm + B)$. Na straně 119 jsme dále použili aproximaci $\tanh x \approx x - x^3/3$. Navíc si vzpomeneme, že pro kritickou teplotu jsme našli $\beta_C Jq = 1$.

Nyní již můžeme snadno určit závislost susceptibility χ na teplotě. Z aproximace $tgh x$ si vezmeme jenom první člen. Dostaneme tak rovnici $m = \beta(Jqm + B)$. Tuto rovnici jednoduše zderivujeme podle B

$$\frac{\partial m}{\partial B} = \beta Jq \frac{\partial m}{\partial B} + \beta,$$

odkud

$$\begin{aligned} \chi &= \lim_{B \rightarrow 0} \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{\partial m}{\partial B} = \frac{\beta}{1 - \beta Jq} = \frac{1}{Jq} \frac{1}{1/\beta Jq - 1} = \\ &= \frac{1}{Jq} \frac{1}{\beta_C/\beta - 1} = -\frac{1}{Jq} \cdot \varepsilon^{-1}. \end{aligned}$$

Takto jsme zjistili, že susceptibilita diverguje, a to nepřímo úměrně vzdálenosti od kritického bodu. Pro úplnost dodejme, že přesné řešení Isingova modelu dává místo minus jedničky hodnotu $-7/4$.

Podobně určíme závislost magnetizace na magnetickém poli při kritické teplotě. Jak se však ukáže, nestačí vzít pouze první člen z rozvoje $tgh x$, neboť bychom dostali rovnici, již nelze splnit pro nenulové B . Druhá nejjednodušší možnost je vzít první dva členy, což také provedeme. Napíšeme rovnici pro m v kritickém bodě, tj. s $\beta Jq = 1$. Rovnice zní

$$m \approx \beta(Jqm + B) - \frac{1}{3}(\beta Jqm + \beta B)^3 = m + \beta B - \frac{1}{3}(m + \beta B)^3.$$

Při zanedbání členu s třetí mocninou bychom dostali rovnici $B = 0$, nyní jsme ovšem předpokládali pravý opak. Člen s třetí mocninou situaci zachrání, dostáváme rovnici

$$3\beta B = (m + \beta B)^3,$$

jež nám umožní určit relativní velikost členů m a βB . Předpokládáme, že pole B je slabé, tj. $\beta B \ll 1$. Odtud $(\beta B)^3 \ll \beta B$. Aby šla rovnice splnit, musí na pravé straně dominovat m , vůči kterému pak v závorce můžeme zanedbat βB . Závislost m na B pak vyjde

$$m = (3\beta B)^{1/3} \sim B^{1/3}.$$

Exaktním výpočtem bychom přišli k exponentu $1/15$ místo $1/3$.

- c) Model mřížového plynu je definován energií $E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j$. V textu seriálu jsme naznačili, že se tento model dá převést na model Isingův. V něm pracujeme s proměnnými $s_i = \pm 1$, zatímco zde máme $n_i = 0, 1$. Samozřejmým klíčem k řešení je přepsat si n_i pomocí s_i

$$n_i = \frac{1}{2}(1 + s_i).$$

Energii pak přepíšeme na

$$\begin{aligned} E &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} n_i \cdot n_j = -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} (s_i + 1) \cdot (s_j + 1) = \\ &= -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - \frac{1}{2}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i - \frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} 1. \end{aligned}$$

Přitom poslední člen (suma jedniček přes všechny sousedy) je konstanta úměrná qN (N je počet buněk) a můžeme ji vypustit; změníme tím pouze polohu počátku energie, což vždy můžeme. V předposlední sumě $\sum_{\langle i,j \rangle} s_i$ sčítance závisí pouze na indexu i , můžeme proto přesčítat přes všechny sousedy uzlu i ; těch je právě q . Přitom však každý pár sousedů započítáme dvakrát, sumu proto musíme podělit dvěma. Celkem dostaneme

$$E = -\frac{1}{4}J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i \cdot s_j - \frac{1}{4}qJ \sum_i s_i.$$

To je energie Isingova modelu s vazbovou konstantou $\tilde{J} = J/4$ v magnetickém poli $\tilde{B} = qJ/4$.

Úkolem bylo ještě určit kritickou teplotu, nad kterou nastává kondenzace. Jak však pečliví řešitelé zjistili, šlo o chyták. Např. již v přiblížení středního pole z rovnice pro magnetizaci $m = \tanh \beta(\tilde{J}qm + \tilde{B})$ vidíme, že m je při *nenulovém* \tilde{B} nenulové při libovolné teplotě a mění se pozvolně – k fázovému přechodu tedy nedochází. Střední obsazení buňky můžeme z m zjistit transformací $\langle n \rangle = (1 + m)/2$. Ježto \tilde{B} je kladné, je kladné i m , tedy střední obsazení buňky je vždy větší než $1/2$.

Popsané řešení je ovšem fyzikálně špatné, neboť nerespektuje konstantní počet částic plynu umístěného v daném objemu. Abychom dostali fyzikálně správný výsledek, je třeba správným způsobem vzít v úvahu proměnný počet částic. Lze postupovat stejně jako v kapitole 4 na straně 111 při odvození Fermiho-Diracova a Boseho-Einsteinova rozdělení. Tam jsme našli, že partiční suma systému s proměnným počtem částic je dána v zásadě tím samým vzorcem jako při konstantním počtu částic, avšak s novými energetickými hladinami $E_i - \mu$, kde μ je chemický potenciál (důrazně doporučujeme nalistovat si inkriminované místo). Modifikace získaných vztahů však nebude velká. Do energie přibude veličina $-\mu P$, kde P je počet částic v dané konfiguraci. Ten je ovšem roven $\sum n_i$ a vede ke změně magnetického pole \tilde{B} . Model se pak chová stejně jako Isingův model s polem $\bar{B} = \tilde{B} + \mu/2$. Správný počet částic lze nastavit vhodnou volbou chemického potenciálu μ . Vidíme, že díky přípustnosti $\bar{B} = 0$ může při vhodných podmínkách nastat fázový přechod.

V reálné situaci částic v nádobě umístěné v gravitačním poli přibude další nový jev. Těžší (kondenzovaná) fáze se totiž bude soustřeďovat v spodní části nádoby a naopak. Uprostřed nádoby vznikne fázové rozhraní. Pokusíme se popsat rovnovážný stav.

Podmínkou rovnovážné koexistence dvou fází je rovnost jejich chemických potenciálů $\mu_1 = \mu_2$. To zde dokazovat nebudeme, něco si přeci musíte nechat na později, abyste se na vysoké škole vůbec dozvěděli něco nového. Rovnice pro střední magnetizaci v přiblížení středního pole zní

$$m = \tanh \beta(\tilde{J}qm + (\tilde{B} + \mu/2)).$$

Tato rovnice má obecně právě jedno řešení (nakreslete si přímku a posunutý \tanh). Právě v jednom případě, když $\mu = -2\tilde{B}$ a zároveň $\beta\tilde{J}q > 1$ (pod kritickou teplotou), však existují řešení dvě ($\pm m$). Předpokládejme, že na začátku je teplota

nižší než kritická a v nádobě máme dvě prostorově oddělené fáze v rovnováze. Zmiňovaná dvě řešení odpovídají stejnému chemickému potenciálu, mohou proto popisovat dvě koexistující fáze. Střední počet částic v jedné buňce (je to veličina úměrná hustotě, takže si ji také tak označíme) je dán vztahem $\rho = \langle n \rangle = (1 + m)/2$. Zápornému m odpovídá málo koncentrovaná fáze – pára – kladnému m naopak kondenzovaná fáze – kapalina.

Pokud budeme teplotu zvětšovat, bude se měnit m , tedy i ρ , a to až do hodnot $m = 0$, $\rho = 1/2$. Přitom chemický potenciál zůstává konstantní; konstantní počet částic se udržuje vhodným posouváním fázového rozhraní (změnou poměru množství páry a kapaliny). Jakmile dojdeme do krajního bodu $m = 0$, $\rho = 1/2$, nebude již žádný rozdíl mezi fázemi a při dalším zvětšování teploty již bude existovat pouze jedna fáze, přičemž konstantní počet částic se nadále udržuje vhodnou volbou μ . Tento krajní bod se nazývá kritickým bodem a znáte jej ze školy.

Obyčejná voda v kritickém bodě má skutečně zajímavé vlastnosti. Její tepelná kapacita diverguje. Divergence korelační délky mezi částicemi (zmiňovaná v seriálu) vede k jevu nazvanému kritická opalescence – voda se v blízkosti kritického bodu mléčně zakalí až do neprůhlednosti. To potvrzuje naše předchozí vývody.

- d) Energie modelu binární slitiny je dána následujícím předpisem. Jestliže spolu sousedí dva atomy A , přispívají k energii hodnotou E_{AA} , pokud dva atomy B , přispívají E_{BB} . Pokud sousedí atom A s atomem B , k energii přispěje energie E_{AB} . Zopakujeme ideu předchozího příkladu a pokusíme se tento model přepsat na model Isingův. Spin 1 nechť znamená atom B a spin -1 nechť znamená atom A . Přepis najdeme jednoduše tak, že sestrojíme kombinace dvojic spinu takové, že jsou nenulové, právě když nastává právě jedna z možností sousedění. Tak například kombinace $(s_i + 1)(s_j + 1)$ je nenulová, pouze když $s_i = s_j = 1$, tedy když spolu sousedí dva atomy B . Podobně $(s_i - 1)(s_j - 1)$ vypadne, pokud spolu nesousedí dva atomy A . Nakonec kombinace $(s_i - 1)(s_j + 1) + (s_i + 1)(s_j - 1)$ bude nulová, pokud budou sousedé stejného typu. Zde jsme museli vzít symetrickou kombinaci, protože jsou přípustné varianty AB i BA . Z těchto primitiv pak snadno sestrojíme výraz pro energii

$$E = \sum_{\langle i,j \rangle} \left[\frac{1}{4} E_{AA} (s_i - 1)(s_j - 1) + \frac{1}{4} E_{BB} (s_i + 1)(s_j + 1) - \frac{1}{4} E_{AB} ((s_i - 1)(s_j + 1) + (s_i + 1)(s_j - 1)) \right] .$$

Pouhým přeuspořádáním členů převedeme tuto energii na Isingův tvar, čímž jsme úlohu vyřešili, neboť chování Isinga je známé.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Jablonci nad Jizerou

Soustředění se konalo od 15. do 22. října 2005 v Jablonci nad Jizerou v Krkonoších.

Organizátoři

Brom Pavel, Komm Michael, Lipovský Jiří, Prachař Jan, Ringel Matouš, Suková Petra, Trnka Jaroslav, Tůma Karel.

Účastníci

Bednárik Tomáš, Bednář „Béda“ Jan, Benda Jakub, Dvořák „Bezi“ Petr, Formánek Martin, Hergelová Beáta, Hrubý Miroslav, Jirotko Tomáš, Josieková Monika, Jungrová Zuzana, Kocourková Iva, Konečný Martin, Lavková Jaroslava, Lochmanová Jana, Malina Lukáš, Molda Vojtěch, Motloch Pavel, Navrátilová Petra, Pechal Radim, Pôbišová Zuzana, Podolník Aleš, Pospíšilová Lucie, Prouza Jakub, Przczková Jana, Scholz Marek, Šachl Libor, Šimsa Daniel, Vais Zdeněk.

Seznámení se Stínadly

Účastníci vzrušeně roklují. Stojí u zdi, na které je nakreslený Ježek v kleci, jak se o jeho vzhledu vyprávělo. Z úryvků jejich hovorů lze poznat, že se baví právě o něm.

Hoch 1: A nevíte, kdo to tady namaloval?

Hoch 2: *Útrpně se podívá na Hocha 1.*

Hoch 3: Taky bychom to rádi věděli... To má být ten ježek v kleci – víte? Včera to tu ještě nebylo. Je to nějaké znamení. A ve Stínadlech se něco děje! Tam je teď líp nejt!

Hoch 1: Nikdo mně nemůže zabránit, abych nešel tam, kam chci.

Hoch 4: Ale říkalo se, že se prý ježek tady někde objevil! Kde to bylo? U koho?

Marynčák: *Posměšně se zasměje.* Snad sis, človče, nemyslel, že tu ježka nosili v ulicích na talíři! Ten už se asi neobjeví nikdy! Ale tady se ukázal – na zdi! Tři roky nebo jak dlouho si na něj nikdo nevzpomněl – a najednou je tu jeho podobizna. To něco znamená!

Hoch 4: *Ptá se Marynčáka.* Ty jsi někdy ježka viděl?

Marynčák: Ne, nikdy a neznám nikoho, kdo by ho viděl.

Hoch 5: Kdysi, prý před mnoha lety, žil v městě podivný hoch, jemuž ježek v kleci patřil. Ten hoch se myslím jmenoval Jan Tleskač a ten jediný prý uměl dostat hvězdičky z pouzdra ven. I někteří otcové nynějších hochů o tom vyprávěli.

Děvče: Otec mi jednou vyprávěl, že si Jan Tleskač přivydělával jako zvoník u sv. Jakuba a jednou nešťastnou náhodou, když se houpal na laně, spadl ze zvonice a zabil se. A s ním zmizel i hlavolam.

Hoch 5: Potom se prý po letech ježek v kleci ještě někde objevil, snad ho vykopali v zemi při přestavbě nějakého dvorku a bylo o něj svedeno několik velkých bitev mezi tehdejšími Druhostraníky a hochy ze Stínadel, kteří si říkali a dodnes říkají Vontové.

A ježek v kleci zmizel zase. Na tajemný hlavolam, po kterém kdysi toužili všichni hoši a děvčata z města, se pomalu zapomínalo.

Hoch 3: A zapomnělo by se snad docela, kdyby někdy občas některý chlubil, když chtěl na sebe upozornit, nezpůsobil planý poplach zprávou, že někde u někoho ježka v kleci zahlédl.

Hoch 2: Nejhuř při tom dopadl tady Marynčák. *Pokyne hlavou k Marynčákovi.* Roztroubil do světa, že o ježku v kleci ví, a dokonce dělal takové všelijaké narážky, jako kdyby hlavolam měl u sebe. To už jsou tři roky. Celé město bylo tenkrát vzhůru a o Marynčákovi i jeho nálezu se mluvilo od rána do večera.

Hoch 4: *Dychtivě.* A měl Marynčák ježka opravdu?

Hoch 2: *Zavrtí hlavou.* Starou bačkoru měl a žádného ježka! Vontové by ho od něj dostali, kdyby byl u něj!

Marynčák: Přišli ke mně a žádali, abych jim ježka vydal dobrovolně. Patří prý do Stínadel, kde se poprvé objevil. Měl jsem strach, Vontové jsou zvláštní kasa a není radno si s nimi začínat. Tak jsem se začal vykrucovat a pak to začlo. Vontové za mnou chodili jako stín, domů jsem se vracel s modřinami a potlučený. Přepadali mě na cestě do školy, vyrazili na mě často, když jsem vycházel ze vrat domu. Vyzývali mě, abych jim ježka odevzdal, jinak že moje utrpení neskončí. Marně jsem se zapřisahal, že hlavolam nemám, že jsem to rozhlásil jenom žertem. Vontové mi nevěřili!

Trvalo to hrozně dlouho, snad čtrnáct dní, pak se to dozvěděl můj otec a vyhrožoval Vontům policií. O dva z nich přerazil tenkrát hůl, když si na mě troufli v jeho doprovodu. Tatínek celou věc skutečně udal. Přechody ulic ze Stínadel obsadily policejní hlídky a sám jsem chodil do školy a ze školy pod dohledem policisty. Směrem ke Stínadlům jsem se neodvážil ani pohlédnout!
Odmílí se.

Hoch 4: A jak to dopadlo? Co se pak stalo?

Hoch 2: No – to už pak bylo všechno. Vontové zase zmizeli ve svých stínadelských uličkách. Marynčák měl pokoj a žlutý špendlík Druhá strana nespatriła snad půl roku.

Hoch 1: *Po chvíli ticha.* Snad bychom se mohli o ježkovi ještě něco dozvědět. To by bylo, aby někdo ze zdejších starých lidí o tom něco nevěděl!

Hoši a dívky se od sebe navzájem dozvídají další informace. Ježek v kleci bylo neotvratelné kovové pouzdro, které mělo uvnitř rovněž kovovou hvězdičku s rohy na všechny strany. Hvězdičku z pouzdra uměl dostat jen Jan Tleskač, aniž se pouzdro či hvězdička poškodila.

Odznakem Vontů je žlutý špendlík. Svůj název „Vontové“ dostali stínadelští hoši podle Vojtěcha Vonta, který před mnoha a mnoha lety sdružil všechny hochy ze Stínadel do společného zápasu proti všem nactiutrhačům z jiných čtvrtí města. Vždycky, když ten, kdo stojí v čele Stínadel, doroste, vzdá se svého náčelnického místa, tak jako to kdysi udělal Vojtěch Vont. Když ani slovo odstupujícího Velkého Vonta nerozhodlo o nástupci, pak zpravidla nastával boj mezi hochy, dychtícími po náčelnictví. Způsob a předpisy boje o místo Velkého Vonta znají jenom nejbližší spolupracovníci Velkého Vonta. Ostatní se o nich spíše jen dohadují, kombinují z kusých a neochotných narážek těch, kteří byli při tom. O odznaku a symbolu, jež si Velcí

Vontové při svém střídání předávají jako doklad toho, že jedině oni dva jsou Velcí Vontové, jeden odstupující, druhý přicházející, není mnoho určitých zpráv. Stínadelští mají tuhou kázeň a střeží svou tajuplnost proti všem ostatním čtvrtím měst dokonale.

Ve Stínadlech je těžké se vyznat. Každá ulička se tam točí jako šnek, samé schůdky, kouty, plácky a zase průchody. Některá zákoutí ve Stínadlech nejsou ani na plánech města. Do Stínadel nikdo z hochů jiných čtvrtí nechodil, vždy tam cíhalo nebezpečí ze strany Vontů. Vniknout do Stínadel je odvážný počín.

Účastníci se rozdělí na skupiny: dvě skupiny Vontů (Mažňákovci a Losnovci), dvě skupiny druhostraníků (Rychlé šípy a Bratrstvo kočičí pracky). Zvolí si své náčelníky.

První výprava do Stínadel – do kostela sv. Jakuba

Účastníci vědí, že se mají ptát zdejších starých lidí – organizátorů, jestli něco nevědí o ježkovi v kleci. Organizátoři je odmítavě odbývají nebo nevědí, co to je: „Nějaká hračka, o kterou se kdysi kluci prali.“ Jediný, kdo jim vřele odpoví, bude starý kostelník od sv. Jakuba.

Z vyprávění starého kostelníka pochopí, že je pravý čas vypravit se do Stínadel – do kostela sv. Jakuba, neboť jedině tam musel zůstat Tleskačův deník před tím, než Tleskač přepadl přes zábradlí ve zvonici kostela. Do kostela se dostávají tak, že jdou za světlem z baterek. Na konci cesty je Tleskačův deník. Tam možná najdou odpověď na spoustu otázek.

Na jaké tajemné věci pracoval ve své kůlně Tleskač? Kdo jej pronásledoval? Koho se Tleskač bál? Co skrýval Tleskač v plechovce pod kůlnou? Kdo byl tajemný Em a proč tak toužil po Tleskačově hlavolamu? Co měl Em společného se zmizením hlavolamu a opět jeho nalezením v železe před dílnou, kde se Tleskač učil? Jak se dostane ježek z klece ven? Co je tajemného na ježkovi v kleci? Co předcházelo Tleskačově smrti a proč Tleskač zemřel?

Hledání plechovky v Tleskačově kůlně

V deníku se účastníci dočítají, kde byla Tleskačova bouda a že pod podlahou byla schovaná plechovka, ve které Tleskač ukrýval plány létajícího kola. Ve volném čase se tam můžou vydat a zkusit plechovku vykopat.

Velká rada Vontů

Vedle sebe stojí v půlkruhu postavená řada židlí či něčeho podobného. Uprostřed proti půlkruhu pak je jeden stolek. Ze tmy přichází zvolna a slavnostně hlouček starších Vontů. Mezi nimi kráčí Vont výrazné tváře a skoro již mladý muž. Zdá se, že obklopující Vontové mu prokazují jakousi úctu – byl to sám Velký Vont se svou šestičlennou Vontskou radou. Začíná Vontská rada. Vontové se usadí na svá místa.

Velký Vont: *V těžkém zamýšlení se probírá nějakými papíry a členové rady na něj upřeně hledí. Potom povstane. Budme svorní!*

Vontská rada: *Naráz povstanou. Žlutá je barva naše.*

Velký Vont: *Nevyzradme nic, co víme!*

Vontská rada: *Mlčenlivost chrání nás! Všichni usednou.*

Velký Vont: *Usedne. Přátelé a kamarádi, doba mého vedení Stínadel se chýlí ke konci. Vontská tradice žádá, aby v jejich čele stál někdo mladší, než jsem já. Ustane v řeči a zadívá se do knihy na stole.*

Vont 1: A vedl jsi nás dobře. Byla to jen tvoje silná vůle, která způsobila například smíření Černé ulice s Ohradami, byl jsi to ty, kdo zavedl pořádek mezi náčelníky východních ulic kolem Dlouhých schodů. Nikdy dřív tam nebyl klid. Udělal jsi hodně!

Vont 2: Anebo ta fotbalová liga! To byl přece nápad!

Velký Vont: Nevkládejte vše jen na mou hlavu. Vždyť jsem dělal vše s vaší pomocí. Ale naším úkolem dnes není vzájemně si zde říkat pochvaly a lichotky. Musíme vykonat ještě hodně práce, než tohle místo obsadí někdo jiný. A čas spěchá!

Vont 4: Myslím, že velkému boji se nevyhneme. Celé Zákostelí i Ohrady a Modré ulice jsou pro Losnu. Ale všechny ulice směrem na Druhou stranu i pořiční části Stínadel a Rybí trh, to všechno chce jen a jen Mažňáka!

Vont 5: Nevím dobře, co na tom Mažňákovi vidí, co od něho očekávají. Já sám bych k němu nikdy nemohl mít důvěru.

Velký Vont: Nediv se, zlákal je to, co dělá! Několika ulicím u Rybího trhu a na pořičních pláccích koupil docela nové kopací míče. Za Úzkou uličku zaplatil nějaká rozbitá okna. Je záhadné, kde na to bere, ale rozdává plnými rukama. A tím si některé bláhovce kupuje. A rozkřiklo se to, co je to platné, a teď mu přeje už i hodně ulic, které od něj nedostaly a nedostanou nic.

Vont 6: *Rozhodně.* A to se mně nezdá správné. Vždycky jsme své Velké Vonty volili podle toho, jakými byli, co uměli, a ne podle toho, co kde komu dali!

Velký Vont: Je těžké tomu zabránit. Ale nic není vlastně ztraceno – o Velkém Vontství rozhodne boj mezi Losnou a Mažňákem. A já věřím, že Losna z něho vyjde jako vítěz!

Vont 3: Bude boj zase takový jako poslední před šesti lety?

Velký Vont: Raději bych nějaký bod k dřívějším bodům ještě přidal, víte, takový nějaký, který by kladl velký požadavek na znalost stínadelské minulosti. Každý Vont musí vědět, kdo byl prvním Velkým Vontem, všichni musí mít v úctě žlutý špendlík na klopě svého kabátu, být na něj hrdi a vědět, proč ho nosí i kdy a proč byl zvolen za vontský odznak.

Prvním bodem boje bude zkouška chytrosti, tu připraví Matouš – ano?

Vont 5: *Povstane a usměje se.* Ano!

Velký Vont: Pak provedeme zkoušku znalosti Stínadel. Jako třetí bod bude osobní zápas mezi Losnou a Mažňákem. A potom přidáme bod nový, velmi těžký: každý z obou soupeřů bude muset donést nějakou zajímavost, která se váže ke Stínadlům či Vontskému hnutí vůbec – a kterou nikdo dosud nezná. Je úplně lhostejné, čeho se bude týkat. Ale čím bude zpráva zajímavější, tím líp pro toho, kdo ji přinese.

Členové rady si zaznamenají něco do papíru, rozloučí se. V tu chvíli se ve dveřích objeví cizí hoch. Lekne se a začne couvat. Všichni Vontové z Vontské rady se rozeběhnou za ním a ještě, než vezme nohy na ramena, ho dostihnou a přivážou na židli.

Velký Vont se usadí na židli a ostatní Vontové se postaví kolem něj.

Velký Vont: Já jsem Velký Vont, jestli to náhodou nevíš! Kdo jsi ty a jak jsi se sem dostal?

Rychlonožka: Parníkem!

Vont 2 a Vont 5: *Zachechtají se.*

Velký Vont: *Zrudne zlostí. Zdá se mně, že máš nějakou dobrou náladu! Jak se jmenuješ?*

Rychlonožka: *To kdybych věděl! Já si zrovna nevzpomenu! A mám to jméno na jazyku – podívej se! Vyplázne jazyk a zase se tváří nevinně.*

Velký Vont: *Napřáhne ruku, ale pak ji nechá klesnout. Křičí. Cos' tady chtěl? Proč jsi sem šel?*

Rychlonožka: *Klidně. Měl jsem dlouhou chvíli, tak jsem tu procházel.*

Velký Vont: *Jsi tady sám?*

Rychlonožka: *Jo.*

Velký Vont: *A tohle ti mám věřit, jo? Tak buď budeš mluvit, nebo...*

Tak mluv, no tak! Kdo tě sem poslal? S kým jsi přišel?

Rychlonožka: *Mlčí.*

Velký Vont: *Řekni to a nic se ti nestane.*

Rychlonožka: *Fakt nic nevím a koukejte mě pustit.*

Velký Vont: *'Si to ještě rozmyslíš.*

Velký Vont pokyne Vontům a ti ho odvedou pryč.

První souboj o Velké Vontství – chytrost

Před soubojem se Losna a Mažňák potají dozví, že tajným symbolem a odznakem Velkého Vonta je ježek v kleci. Je to tajemství, které zná jen Velký Vont a Vontská rada, nesmí ho nikomu prozradit.

Prvním soubojem je zkouška chytrosti – náboj, účastníci řeší fyzikální a matematické úlohy.

Druhý souboj o Velké Vontství – znalosti Stínadel

Jednotlivé skupiny budou odpovídat na otázky, týkající se minulosti Stínadel.

Komu patřil ježek v kleci? Kde pracoval Jan Tleskač? Čím se učil Jan Tleskač? Jak zemřel Jan Tleskač? Kdo byl nejdéle sloužícím Velkým Vontem? Kdo byl prvním Velkým Vontem? Co je odznakem Vontů? Kdo se může stát Vontem? Kde vyrůstal Jan Tleskač? Kolik členů má Vontská rada?

Třetí souboj o Velké Vontství – zápas

Mažňák a Losna se dohodnou na způsobu fyzického souboje, u kterého musí použít sílu.

Čtvrtý souboj o Velké Vontství – zajímavost ze Stínadel

Rychlé šípy se spojí s Losnovci a Bratrstvo s Mažňákovci. Tyto dvě skupiny absolvují poslední souboj. Budou muset předvést nějakou znalost ze Stínadel (Hřbitovní chodba, schopnost vyndat ježka z klece), kterou lze ověřit. Tento souboj rozhodne o nastávajícím Velkém Vontovi.

Po souboji dostane zvolený Velký Vont ježka v kleci a složí přísahu.

Jmenování nového Velkého Vonta

Losna dokázal vyndat ježka z klece ven. Poté, co nastávající Velký Vont vrátí zpět ježka do klece, Velký Vont vstane a pokyne Vontské radě, aby i ona povstala. Všichni jásají a tleskají.

Velký Vont: *Když se jásoť utiší.* U nikoho z nás nebude ježek v kleci líp uschovaný než u toho, kdo s ním umí tak zacházet! A nikdo si nezaslouží Velkého Vontství více než ten, kdo tak dlouho hledané tajemství ovládá. Předávám ti Velké Vontství i s jeho symbolem! *Podává mu obřadně hlavolam a společně hlavolam drží.*

Veď Stínadla, jak nejlíp umíš, vymyť z nich špatnost a nízkost! Nedopusť, aby se, byť i jednomu Vontovi, stalo bezpráví! Snaž se, aby svornost a kamarádství zavládlo ve vontských řadách, potlačuj každou špatnou myšlenku!

Vontská rada zpívá svou stínadelskou píseň, nadšeně, halasně. A v tom zpěvu mihne se ztemnělými prostorami jakýsi černý stín a vzápětí nato vřítí se do okruhu záře lampiónů divoce vyhlížející muž.

Em: Nikdy! *Volá zuřivě.* Jedině můj syn bude Velkým Vontem! Celá Stínadla si to přejí, rozumíte Štěpán Mažňák musí být Velkým Vontem! Jedině on má právo držet ve svém majetku hlavolam mého bývalého učně!

Vyrve Velkému Vontovi z ruky hlavolam dřívě, než mu v tom může někdo zabránit, a zmizí ve tmě. Em uteče do sklepa kostela a tam spadne do stoky. Topí se.

Velký Vont: *Křičí.* Kde máte hlavolam!?

Em: *Namáhavě.* Nemám. Tam – ve vodě... je tam... upustil jsem ho... někde tam je...

Za Jirkou Rymáněm do Stínadel

Stínadla! Tajuplná, nebezpečná čtvrť, do které se teď už zase po několik týdnů neodvážil ani jeden chlapec z Druhé strany. Čtvrť, propletená křivolakými uličkami s nesčetnými schůdky a zábradlíčky, uličkami škrábajícími se vzhůru do kopců a zase řítícími se jako do hlubiny, plná průchodů s nezbádanými tajemnými zákoutími a záhadnými dvorečky za zdmi domů.

Dlouho byl pokoj. Téměř rok. Od té doby, kdy v bahně stoky zrušeného svatojakubského kostela ve Stínadlech navždy zmizel hlavolam „ježek v kleci“, talisman a symbol všeho, co hochy ze Stínadel spojovalo ve velikou organizaci Vontů.

Když tehdy Vontové ztratili tento svůj talisman, ztratili zájem o vše vontské. Jejich mocná organizace, ovládající celá Stínadla, se tehdy rozpadla v několika hodinách a Vontové přestali být nebezpečím pro hochy z ostatních čtvrtí.

Ustaly jejich výpady do sousedních částí města, ba i do Stínadel se mohli ostatní hoši beztrestně odvážit. Ta tam byla moc Vontů i jejich útočnost!

Až zase teď!

Za tichých večerů byla slyšet ze Stínadel docela zřetelně válečná píseň Vontů. A teď dokonce Vontové začínají zase i své výpady, stávají se výbojnými a smělymi.

Něco se tam děje! Něco se tam děje!

A Jiří Rymáň, bezvýznamný chlapec z Druhé strany, podrážděn tajemným kouzlem večera, se rozhodl, že se tam odváží, aby zjistil *co!*

Rychle! Proboha rychle! Jirku Rymáně odtáhli Vontové do Stínadel! Jenom vy ho můžete zachránit! Jenom vy mu můžete pomoci!

Do Myší pasti

Účastníci zaslechli, že Jirka Rymáň byl spatřen v Myší pasti. Musí se dostat hluboko do Stínadel, na náměstíčko Myší past, kde se dozví další informace o Jirkovi

Rymáňovi. Tam teprve budou moci začít hledat odvedeného Jirku Rymáně. První část výpravy nebude snadná. Nikdo z Vontů nesmí poznat, že patří na Druhou stranu. Špendlík připíchnutý na klopu kabátu stačit nemusí. Vůbec ani netuší, kde se Myší past nachází, situaci komplikuje to, že na náměstíčko vede pouze jedna ulice.

Úspěšné proniknutí do Myší pasti do Stínadel v následující hře symbolicky představuje přesunutí klubové vlajky do Myší pasti.

Účastníci se rozdělí na dvě skupiny. Každé družstvo bude mít: 1 hlídkující Vonta, 1 Vonta rváče, 7 Druhostraníků, 5 Vontů a navíc jednoho z organizátorů představujícího pro to družstvo Myší past.

Rozdělovací třída

Rozdělovací třída je hraniční ulice mezi Stínadly a Druhou stranou. Sem se vrací pro obnovení života všichni, které zastavil hlídkující Vont. Sem odchází ty dvojice, které „se porvaly“ po kontaktu s Vontem rváčem. Pouze na tomto místě může docházet ke změnám funkcí mezi Vonty.

Klubová vlajka

Do Stínadel se umístí dvě vlajky. Každé družstvo má svoji příslušnou vlajku a musí hledat jenom tu. Na vlajku nesmí sáhnout ani ji jakkoliv přenášet Vont. Může ji však pomáhat najít.

Druhostraník

Jeho úkolem je především najít vlajku a dostat se s ní až do Myší pasti. Pakliže je Druhostraník chycen s vlajkou, pokládá ji na místo a odbíhá na Rozdělovací třídu.

Vont

Úkolem je chytat cizí Druhostraníky. Pakliže se Vont dotkne nějakého Druhostraníka, chycený Druhostraník se musí odebrat na Rozdělovací třídu, odkud zase pokračuje dál ve hře. Vonta může zastavit pouze hlídkující Vont nebo se může porvat s Vontem rváčem.

Vont rváč

Má funkci živé miny. Může se kdykoliv v průběhu hry dotknout libovolného cizího hráče, pak se oba dva „porvou“ a hra pro ně končí. Oba definitivně odchází ze Stínadel pryč. Rvačka nastává i tehdy, pakliže se libovolný protihráč dotkne rváče. Je strategické postavit rváče do blízkosti Myší pasti a nechat ho porvat se s cizím hráčem, který nese vlajku.

Hlídkující Vont

Na začátku hry si do někde do Stínadel stoupne Vont a ten představuje hlídkujícího Vonta. Hlídkující Vont stojí neustále na jednom místě a pozoruje terén okolo. Spatří-li libovolného cizího hráče, zakřičí jeho jméno a vykáže ho zpět na Rozdělovací třídu. Hráče svého družstva hlídkující Vont volně pouští. Hlídkující Vont je plnohodnotným členem hrajícího družstva – může tedy pro ostatní hráče shromažďovat informace důležité ke hře (kam odešla Myší past, kde jsou schovaní protivníci apod.). Hlídkující Vonty není možné v průběhu hry vyměňovat.

Myší past

Organizátor představuje Myší past, kam musí Druhostraníci svoji vlajkou dostat. Člověk představující Myší past pro dané družstvo je jim na začátku hry ukázán, aby hráči věděli, koho mají honit a koho ne. Hra pro družstvo končí tehdy, když se nějaký Druhostraník s vlajkou dotkne příslušné osoby představující Myší past. Myší past

se však v průběhu hry může volně pohybovat po Stínadlech. Hráči ji tedy nejlépe musí hlídat, kam se pohybuje. Není možné jakkoliv zamezovat Myší pasti v pohybu, ani ji „stopnout“, porvat se s ní, zastavit hlídkujícím Vontem.

Vysvobození Jirky Rymáně

Jirku Rymáně představuje soška, která je ukrytá ve Stínadlech. Rymánův kamarád vysílá ze zajetí morseovku, kde je Jirka zadržován. Morseovku vysílá baterkou do Myší pasti, protože ví, že tam jsou jeho osvoboditelé. A podle toho jsou konány osvobozující výpravy. Zprávu ale chytají i stínadelští, protože neví, kde je Jirka ukrytý.

Dále je po Stínadlech dvacet listů papíru (na nich jsou důležité nápovědy^{45,46}). Jestliže druhostraniční hoši ukořistí třináct z nich, osvobodí tím Jirku, i když jeho úkryt nenajdou.

Na sošce Jirky Rymáně je zpráva o tom, co Jirka ve Stínadlech zažil. Byl ježek v kleci nalezen a vlastní ho někdo ze Stínadel? Kdo to jsou Dabinelovci?

Mažňák je v čele Uctívačů ginga, to však ví jen několik členů v jeho okolí. Svoji „svatyni“ mají v opuštěné zahradě, kde je starobylý strom jinan dvouláčkový. Odznakem Uctívačů je list ginga, ten vlastní každý jejich člen a pokud se jím někomu prokáže, musí mu jiný gingař pomoci nebo poslechnout jeho příkazu. Mají nejvíce přívrženců hned po Dabinelovcích.

Losna už nechce být Velkým Vontem. Zná ale slepého chlapce Vládu Dratuše, o kterém ví, že by byl tím nejschopnějším a nejspravedlivějším náčelníkem, toho si zvolili do svého čela. Říkají si Žlutý květ, název má připomínat dobu svornosti celých Stínadel. Mají čtvrtý největší počet přívrženců – 70 (Tmavý průchod, Opuštěný kout, Hrnčířská ulice).

V zajetí

Při osvobozování Jirky Rymáně jsou Rychlé šípy prozrazeny a Mirek s Jindrou se dostávají do zajetí Vontů. Vontové dovlečou Mirka a Jindru do jakéhosi výklenku na konci průjezdu. Oba jsou nerovným zápasem tak vysílení, že jsou rádi, že už se nemusí vzpírat a rvát.

Vont 1: *Poručí.* Tak, tady teď počkáte, až přijdou ostatní! Pak budete muset všechno vyklopit, odkud jste a co jste tady slídili. Naši nejste, to víme! Bude vás vyslýchat náčelník naší ulice. Jestli vám můžeme radit, řekněte mu všechno hned, nebo se vám povede ještě hůř.

Uplivne si. Však ona vám už přejde chuť tady slídit! Teď si hledejte ježka v kleci, vy čmuchalové! Hledejte! Hledejte!

Mirek: *Lhostejně.* Proč bychom ho hledali! Pokud víme, Tleskačův hlavolam je navždy ztracen ve svatojakubské stoce...

Vont 1: *Povýšeně se ušklíbne.* Pcháá – navždy ztracen! Jak málo toho víte! To jste tedy moc nevyptárali, hehehe! To věřím, že by se vám hodilo, aby byl ježek

⁴⁵⁾ Na výkladní skříní jednoho obchodu jste objevili inzerát: „Zánovní motorku dám tomu, kdo mi zaopatří nalezený hlavolam, zvaný ježek v kleci. Bližší zde v obchodě.“

⁴⁶⁾ Na jakýchsi pouličních schodech, kterými jste sbíhali dolů do hlubin nových ulic a uliček, jste potkali tři malé Vonty. Jeden z nich zoufale naříkal, prohledával malý notýsek, strčil jej do kapsy a opět vytáhl. Druzí dva, kteří šli s ním, ho utěšovali.

v kleci navždy ztracen. A aby se už Vontové nikdy nezvedli – co? To věřím! Tak abys věděl, chlapečku, ježek tady někde je, někde tady běhá! *Tajemně.* A Vontská rada už taky je a čeká se jen na volbu Velkého Vonta! A to se ví, kdo přinese ježka, ten Velkým Vontem bude!

Mirek: Vidím, že tady ve Stínadlech zastáváš nějaké velmi důležité místo, když víš tolik věcí! Přál bych si, abys hlavolam našel ty sám, a tak se stal Velkým Vontem!

Vont 1: *Samolibě.* No, možné je všechno, zrovna tady pátráme po jednom klukovi, který prý s kýmsi ježka v kleci ze stoky vylovil. Napsal o tom celé doznání. A to právě hledáme.

Vont 2: *Udýchaně příběhne spolu s několika dalšími Vonty.* Snad jsi nemluvil o Hačičíkovi? Přiznej se – žes o něm mluvil, vid? *Výhružně.*

Vont 1: *Tváří se poděšeně.*

Vont 2: *Na Mirka.* O čem ti tady povídal? Mluv! Mluv, nebo to z tebe vytlučeme!

Mirek: *Mlčí.*

Vont 2: *Poroučí.* Tak rychle, rychle! *Napřáhne pravou ruku.*

Mirek: *Váhavě a tiše.* Vyhržoval nám, že až přijdeš, všechno ti budeme muset . . . *Zhroutí se na zem a zůstane ležet.*

Jindra: *Vykřikne.* Mirku! Proboha, Mirku! *Vrhne se k němu.* Co to děláš, Mirku!? Mirku slyšíš mě? *Zatřese s ním. Začne vzlykat.* Mirku!, slyšíš? To jsem já, Jindra, u tebe! Ozvi se přece! Otevři oči! Tolik tě prosím, Mirku! Tak Mirku!

Vontové: *Zaraženi ustupují a utíkají.*

Mirek pak vstane. Byla to lest. Omlouvá se Jindrovi a spolu utíkají.

Boj s Rezavými klíči

Účastníci se vypravili do Stínadel a zde se dozvídají od mladého děvčete, že o Emilovi Hačičíkovi zjistí více v klubovně Rezavých klíčů. Dostat se do jejich klubovny není snadné, protože Rezavé klíče si své tajemství střeží. Budou s nimi bojovat. Vítězný tým najde v klubovně Rezavých klíčů doznání Emila Hačičíka. Tam se dozví překvapující informace.

Kdo je to Široko? Co Emil Hačičík dělal po nocích ve svatojakubském kostele? Kde je ježek v kleci?

Železná dvířka ve svatyni Uctívačů ginga

Čtvrtí velikých tajemství bychom mohli nazvat Stínadla. Co vše se v nich skrývá, co všechno je pohřbeno v jejich uličkách, domech, sklepích a dvorech, na povrchu i pod zemí!

Účastníci pomohou Rezavým klíčům hledat ježka v kleci. Oni se svěří, že vědí o tajemných železných dvířkách, které se nacházejí ve svatyni Uctívačů ginga. Nikdo by se tam neodvážil jít, ani Rezavé klíče. Rezavé klíče jim vypůjčí čtyři klíče od těchto dveří a zavedou je ke zdi, která ohraničuje zahradu se svatyní. Klíče sehnal a dveře objevil Emil Hačičík, bývalý člen klubu Rezavých klíčů. Emil nedávno zemřel na zápal plic, který dostal, když na Kropenatce spadl do Černé vody. Byl to podnikavý chlapec. Za železnými dvířky by mohla být nějaká indicie důležitá k nalezení ježka v kleci.

Hrají dvě družstva, obránci a útočníci (2:1). Brání Uctívači ginga (k nim se asi připojí někteří zrádci od Žlutého květu), útočí ostatní. Hra probíhá v noci při-

blízně dvě hodiny. Na začátku hry si gingaři postaví věžičku (jejich svatyně). Cílem útočníků je věžičku rozbourat. Úspěšné rozbourání věžičky znamená vniknutí do zahrady, kde se nachází svatyně Uctívačů ginga. Cílem gingařů je zabránit rozbourání věžičky. Obrana probíhá tak, že se obránci pohybují a chytají útočníky. Útočník umírá dotykem. Útočníci se proti obráncům mohou bránit pouze útekem. Výchozí bod útočníků musí být dostatečně daleko od svatyně. Při hře se nesmí mluvit, používat baterka, vydávat jakékoliv zvuky, které by nevydával noční les. Hra končí zbouráním věžičky nebo likvidací všech útočníků.

Během hry se ve Stínadlech objeví Široko. Bude se vyptávat, co tam dělají. Bude se je snažit vylekat při jejich plížení. Pak se zeptá, jestli nechtějí tohle a posvítí si baterkou na obličej a na ježka v kleci v ruce. Nesmí se nechat chytit!

Vítězné družstvo zjistí, kde jsou železná dvířka se zámkem. Budou si muset poradit, po otevření zámku objeví vzkaz od Vrány napsaný na útržku papíru.

Kdo je to Dymour a co se s ním stalo? Kdo je to Vrána? Co Vrána zakopal pod pětiboký kámen? Kde se nachází pětiboký kámen? Na tyto otázky najdou ve vzkazu odpověď.

Hledání pětibokého kamene

V klubovně Rychlých šípů.

Jindra: *Vykřikne.* A teď nějaký plán! Co zařídit nejdřív?

Mirek: Myslím, že je dost těžké dělat si v takové motanici nějaké přesné plány.

Víte, jak to vypadá, když do Stínadel jdeme! Nikdy nemůžeme napřed určitě říci, kam až se dostaneme, co nás tam potká a jak se z toho dostaneme.

Na chvíli se odmlčí. Všichni jej sledují. Něco mě přece jen napadá. Můžeme-li vůbec dělat nějaké plány, tak jako první a nejdůležitější, co vůbec uděláme, je nalezení toho pětibokého kamene s ukrytými vontskými věcmi. Budou mít pro nás nesmírnou cenu. S jejich pomocí můžeme mnoho získat!

Červenáček: Nerozumím ti dobře! Co můžeme získat?

Mirek: Velmi mnoho. *Usměje se.* Představ si, že budeme mít v ruce starobylé památky po prvních Vontech. Co by dnešní Vontové za ně dali! Víš přece, jak má vše, co s jejich minulostí souvisí, pro ně úžasný význam. Vzpomeň si jen na ježka v kleci. A teď my s těmito všemi veledůležitými a cennými věcmi přijdeme a nabídneme je tomu, kdo nám půjčí na pět minut do rukou ježka v kleci.

Ostatní: Ach – ano! Už chápu! To je přece plán! Báječné! Jedinečné!

Jindra: Ano, netrvá to opravdu déle než pět minut, vyjmout ježka z klece. Vzpomínáte si na ten recept? Víte, jak se ježek vyndával? Dodnes si to pamatuju! Když natočíme nejdelsí osten ježka tak, aby vyčníval z klece nejširším jejím otvorem, posuneme ježka do poloviny výšky klece. Pak...

Červenáček: Dost! Dost! *Zakryje si uši rukama.* Vždycky mně až mráz po zádech běhal z těch podivných slov – a ještě dnes to na mne působí. Přestaň s tím, přestaň!

Mirek: Kdo můžete přinést nějaký rýč nebo kramle? S holýma rukama tam kámen na Červených schodech vykopat nemůžeme!

Rychlonožka: *Hlásí se.* Já bych vzal kramlí! S tou se pěkně hrabe!

Jarka: A vezmeme naše dvě polní lopatky. Na kámen se s nimi jít ovšem nemůže, ale při vybírání hlíny nám udělají velkou službu!

Rychlonožka: Pokusím si vypůjčit od sousedů malý rýč. Mají prý něco takového ve sklepě. Sundal bych ho z dlouhé násady a nasadil na kratší, aby nebyl tak nápadný, až jej ponese do Stínadel.

Mirek: Bude to vůbec těžká a nebezpečná výprava. S takovým nářadím se nám nebude moc dobře utíkat, to si můžete myslet! A než jenom najdeme ty Červené schody! A pak na nich ten pětiboký kámen – o tom jeho vykopání už ani nemluví.

Jindra: *Podívá se z okna.* Takovýhle večer přesně potřebujeme. Tmavý, větrný a nevlídný! To nebude venku ani noha!

Jarka: Doufejme, že nám příroda bude přízniva! Škoda jen, že nevíme, jak to místo vypadá.

Na účastníky čeká v lese noční labyrint pražských ulic s cílem na Červených schodech. Pod pětibokým kamenem nacházejí zakopanou První Vontskou kroniku (jen jeden exemplář!). Opět se může objevit tajuplný Široko.

Bublina ve Vontském držení

Při poslední výpravě do Stínadel byly Rychlé šípy vystopovány klubovým psem Bublínou. Bublina za svou věrnost draze zaplatil, upadl do zajetí Uctívačů ginga. Rychlé šípy mohou Bublínu získat výměnou za Vontskou kroniku. Ta je ovšem natolik cenná (nebo ji nemají), že se rozhodnou vysvobodit Bublínu silou.

Rychlé šípy oknem do sklepa domu, ve kterém je Bublina vězněn, zahlédly dřevěnou bednu. Myslí si, že v ní je Bublina, a bednu chtějí za každou cenu ukrást.

Na lesní mýtině leží krabice, která v následující hře představuje Bublínu v bedně. Mýtinku střeží Vonti střelci vyzbrojení papírovými koulemi. Stojí rozestavení na obvodu kruhové mýtinky a nesmějí opouštět svoje místo.

Kromě těchto střelců je sklep chráněn ještě běžajícími Vonty, kteří nemají koule, ale běhají po celém lese (Stínadlech) až k Rozdělovací třídě. Druhostraníci podnikají výpady do Stínadel, snaží se uniknout běžajícím Vontům a probít se do sklepa (tj. na střeženou mýtinku) a z ní pak v příhodné chvíli vynést krabici za Rozdělovací třídu do svého území.

Střelci ani běžci nesmějí Druhostraníky pronásledovat na mýtinku, tam jsou útočníci bezpečí. Střelci mohou začít pálit na vetřelce teprve tehdy, když se pokoušejí utéci z mýtinky s krabicí.

Jestliže je přítom Druhostraníček zasažen, musí krabici vrátit na původní místo a zůstane na mýtině jako zajatec. Do zajetí tam putují i Druhostraníci, kteří dostanou od běžajících Vontů babu.

Zajatec je osvobozen, když se jeho volný spoluhráč přiblíží a zasáhne papírovou koulí některého střelce. Po každém zásahu je vysvobozen jeden zajatec. Odejde se vztyčenýma rukama na Druhou stranu, teprve tam se stává opět plnoprávným účastníkem hry. Druhostraníci jinak papírovými koulemi nikdy nestřílejí.

Krabice (Bublina) smí být předávána jen z ruky do ruky, není dovoleno ji házet.

Pokud vyhrají Vontové, je vše v pořádku. V opačném případě se Druhostraníci dozvědí, že byli obelstěni a že v bedně Bublina není.

Zásobování trpícího Bublíny

Po neúspěšném pokusu o záchranu se Rychlé šípy rozhodly, že další pokus vysvobodit Bublínu ze zajetí Vontů podniknou večer. Bublina je však v zajetí už dost

dlouho a potřebují, aby měl večer sílu běžet. Musí ho nakrmit, aby doplnil energii po tolika dnech strádání.

Někde na kopci bude asi třímetrový kruh, ve kterém bude sedět jeden hráč, který představuje Bublina. Tento kruh bude obklopen ještě osmimetrovým kruhem, označující sklep, ve kterém je Bublina držen. Bublina drží v ruce hodinky a každých pět minut mu sem má dopadnout aspoň jedna potravinová zásilka, kterou symbolizuje papírový míček.

Celý sklep je obležen Vonty. Každý zachránce dostane na Druhé straně, kde je v bezpečí, jeden míček – jednu potravinovou dávku. Pak se s ní snaží proniknout ke sklepu ve Stínadlech mezi nepřátelskými Vonty. Zásilku může do malého kruhu hodit, pokud ji hráč nepředá z ruky do ruky Bublinovi.

Jestliže se zásilka potravin nedostane Bublinovi po celých pět minut, odumírá Bublinovi jeden ze dvanácti orgánů.

Zásobování je čím dál obtížnější. Když Vontové chytí některého zachránce (dají mu babu), vezmou mu papírový míček a tato potravinová zásilka se automaticky v té chvíli mění v střelu, kterou pak mohou být další zachránci zasaženi na dálku. Dokud nemá Vont v ruce míček, může zachránce zastavovat jedině osobním dotykem, což je mnohem těžší.

Do rukou Vontů se dostává stále více střel z potravinových zásilek, takže nakonec je opravdu zázrak, když se zachránce dostane do sklepa, kde je v bezpečí a kam za ním Vontové nemohou. Zachránce si tam odpočine a teprve pak se vydá na zpáteční cestu na Druhou stranu. Pokud je zachránce zasažen při návratu z úspěšného doručení zásilky a nemůže už zaplatit zásilkou, musí zůstat stát na místě padesát vteřin, a tak je skoro celou minutu vyřazen ze záchranné akce.

Družstva: 10 Vontů, 18 zachránců. Zachránci mají k dispozici konečný počet zásilek, tím je určen konec hry. Bublina musí přežít!

Pohřeb Bubliny

Podle pokynů ve zprávě od Uctívačů ginga se Rychlé šípy vydávají s modrou baterkou do Stínadel. Do sklepa je navádí organizátor také s modrým světlem.

„Rozsvítili jste světla, ve sklepech je ticho. Voláte na Bublina, neozývá se. V koutě vězení jste spatřili něco schouleného na troše shnilé slámy. Je to Bublina. Rozběhnete se k němu v neblahé předtuše.“

„Pes se nehýbe ani hlavu nepozvedne, a když položíte ruce na jeho tělo, shledáte, že je studené, ztuhlé. Bublina je mrtev.“

Účastníci pohřbí Bublina a uctí tak jeho památku.

Každé družstvo má za úkol zakopat Bublina. S každým družstvem však půjde vyzvědač, aby zjistil, kde ho pohřbívají. Místo hrobu potom slovy popíše ve zprávě na papír, který po pohřbu předá svému družstvu. Družstva potom potají půjdou Bublina vykopat podle zprávy, kterou dostali od svého zvěda.

Vítězné družstvo cestou ze Stínadel potká Losnu a dozví se od něho spoustu nových informací. Proč nechce být Losna Velkým Vontem? Jaký odznak mají Uctívači ginga? Kde se dá odznak Uctívačů sehnat? Kdo vede Uctívače ginga? Proč shánějí ježka v kleci Rezavé klíče? Kdo je autorem inzerátů ve výkladních skříních obchodů? Má Široko stále hlavolam, nebo mu ho někdo sebral?

Při této hře se opět objeví Široko, ale nenechá se s hlavolamem chytit.

Hon na Široka

V klubovně Rychlých šípů. Všichni jsou stále smutní ze smrti Bublíny.

Mírek: Musíme se ze špatné nálady po smrti Bublíny dostat za každou cenu! Narikáním a mračením nic nespravíme a Bublínovi už nepomůžeme! Čeká nás tolik důležité práce! Víte, že chceme získat ježka v kleci. Musíme do toho! Musíme! A dnes se poradíme, jak začneme. Dříve ale uklidíme tady to –
Kývne rukou k opuštěnému Bublínovu lůžku.

Rychlonožka: *Uklidí lůžko.*

Losna: *Nesměle zaklepe na dveře.*

Mírek: *Jde otevřít.*

Losna: *Vypadá rozdychtěně a radostně.*

Mírek: Pojď dále.

Losna: *Před vstupem se neklidně ohlédne. Je udýchaný. Nazdar, Rychlé šípy! Konečně jsem u vás! Ani nevíte, jak jsem rád! Snad mne nikdo neviděl! Utíkal jsem celou cestu a šli za mnou jako duchové krok co krok. Teprve u Rozdělovací třídy jsem se jim ztratil. Posadí se.*

Všichni: Kdo šel za tebou? A kdo tě tak hnal?

Losna: Gingaři! Uctívači ginga! Hlídají mne na každém kroku. Musíte jít do Stínadel, budeme vás potřebovat! Prosím vás, přijďte určitě!

Jindra: Právě jsme se zde radili, že se k vám vypravíme!

Mírek: Samozřejmě, že vám neodmítneme svou pomoc! Ale proč nás potřebujete zrovna dnes? Co připravujete?

Losna: Uctívači ginga podniknou na Široka lov! Chtějí ho dostat i s hlavolamem za každou cenu!

Jarka: Tak oni tu honičku na něj ještě neuskutečnili? Vždyť to už byla hotová věc!

Losna: Vím o tom, vím! Ale to byla právě chyba, že se to napřed prozradilo. Široko se stal tak opatrnějším a už si tak nezahrává. Mažňák se svými Uctívači si teď myslí, že jeho ostražitost už zase trochu polevila – a tak připravil proti němu veliké tažení.

Rychlonožka: Uctívači to mají určitě dobře vymyšleno!

Červenáček: *Na Rychlonožku.* Tím ale hůře pro nás. Co nám to pomůže, když Široka polapí Uctívači?

Jarka: Nic! Naopak, všechno bude ztraceno!

Losna: Nebude! Něco vymyslíme! Zmocníme se Široka sami!

Všichni: Ano! Jasně! To se ví! Chytíme ho!

Mírek: Pojďme vymyslet vlastní plán a vydat se po stopách Široka.

Skupinky se postupně spojí, pomocí indicií najdou Široka a přemůžou ho. Získají ježka v kleci, toho vyndají z klece podle návodu v deníku Jana Tleskače. Ježka rozšroubují a objeví tajemství...

Fotky



Na výletě



Tajemství Jana Tleskače

Jarní soustředění v Dobré Vodě u Třebíče

Soustředění se konalo od 1. do 8. dubna 2006 v Dobré Vodě v údolí stejnojmenné řeky.

Organizátoři

Brom Pavel, Kučka Zdeněk, Lipovský Jiří, Prachař Jan, Ringel Matouš, Suková Petra, Sýkora Petr, Trnka Jaroslav, Tůma Karel.

Účastníci

Baxová Katarína, Benda Jakub, Berta Peter, Boža „Usáma“ Vladimír, Bzdušek Tomáš, Cimpl „Reve“ Lukáš, Černeková Alžběta, Drápal Lukáš, Dvořák „Bezi“ Petr, Formánek Martin, Jirků Hana, Jirotko Tomáš, Kocourková Iva, Lochmanová Jana, Michálek Jakub, Molda Vojtěch, Nečada Marek, Podolník Aleš, Polma Richard, Pospíšilová Lucie, Przczková Jana, Pšeno „Semo“ Pavol, Scholz Marek, Strítěský Lukáš, Svobodová Helena, Šachl Libor, Šimsa Daniel, Vais Zdeněk, Valášek Jenda, Vítovec Lukáš.

Fotky



Výlet u přehrady Dalešice



Beziho zkušební let

Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je tradiční celodenní akce FYKOSu, kterou pořádáme pro naše řešitele, event. jejich přátele a pedagogický doprovod, a to samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži. Účastníci dostanou jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě. DSEF se uskutečnil 25. dubna 2006 a byl spojen s odjezdem vybraných řešitelů na výjezdní soustředění (s návštěvou CERNu) po skončení akce. Exkurzí se zúčastnilo celkem 61 osob včetně organizátorů, učitelů (2) a neřešitelů FYKOSu (11).

Po úspěšném loňském pokusu zavést exkurze mimo MFF letošní DSEF zavítal do Ústavu jaderného výzkumu a Ústavu jaderné fyziky AV ČR v Řeži u Prahy a odpolední program proběhl (rovněž poprvé) ve Fyzikálním ústavu UK na Karlově. Před zahájením odpoledních exkurzí všichni účastníci zhlédli výukové video s odborným komentářem o elektronové mikroskopii, aby lépe rozuměli při následné návštěvě místních zařízení. Dalšími zapojenými pracovišti byly nano a femtosekundová laserová laboratoř, růst krystalů z taveniny a interaktivní pokusy z mechaniky naživo, při nichž si účastníci přímo mohli osahat setrvačnick či akustické a mechanické vlnění.

Výjezdní soustředění s exkurzí do CERNu

Na jaře jsme pořádali netradiční soustředění. Naši účastníci měli možnost navštívit CERN, velké a proslulé vědecké středisko.

CERN

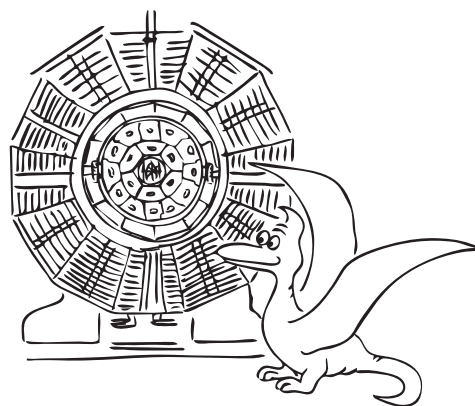
CERN – evropské centrum pro jaderný výzkum sídlící na švýcarsko-francouzské hranici – je zajímavé v mnoha směrech a pyšní se několika nej. Je to jedno z největších, nejdražších, nejmodernějších a nejmezinárodnějších vědeckých pracovišť, co na světě stojí. V obrovských podzemních urychlovačích dva vstříčné svazky protonů dosahují téměř rychlosti světla a při následné srážce těchto svazků vzniká spousta fyzikální „havěti“, tedy různé typy záření a hlavně další nově vzniklé částice. Vědci tuto havěť chytají a zkoumají. Dokonce se čas od času objeví dosud zcela neznámý a nepopsaný typ částice – to pak výzkumníci jásají a třeba se i udělují Nobelovy ceny.

Není bez zajímavosti, že v současné době mají fyzikové v CERNu spadeno na jedno obzvláště vypečené „zvířátko“ z mikrosvěta, a sice Higgsův boson, jehož objevení by pomohlo takřikajíc zalepit mnoho děr v našem současném fyzikálním chápání světa. To je sice pěkné, řeknete si možná, ale co z toho? Poznatky získané výzkumem mají obrovskou škálu praktického uplatnění například v chirurgii, materiálovém výzkumu, diagnostice, energetice. Kromě toho ale nové poznatky pomáhají hledat odpovědi na otázky filozofické: Je vesmír jednoduchý a elegantní? Co je to náhoda a existuje vůbec? Je člověk schopen pochopit fungování světa? Co je to hmota? A my si rádi klademe otázky, a proto jsme se vydali do Švýcarska podívat se na to, jak je třeba možné hledat odpovědi.

Exkurze na LHC

Se žlutými helmami na hlavě sjíždíme výtahem asi sto metrů pod povrch země. Tam se nám teprve otevírá opravdový pohled do této továrny na vědu. A skutečně, továrna na vědu je přiléhavý název – mohutné železné konstrukce, tlustá potrubí, spleť elektrické rozvody, jeřáby, ... a jako dominanta toho všeho stojí uprostřed podzemní haly obrovský detektor ve tvaru prstence. Detektor je právě jeden z klíčových článků celého výzkumného procesu, ve kterém se zmíněná fyzikální havěť chytá – odsud putuje ohromující množství informací do výpočetních středisek, kde se vše zpracuje a analyzuje. Teprve při pohledu zblízka poznáváme, že detektor je neuvěřitelně komplikovanou změť tenoučkých drátů, destiček a vůbec všeho možného a zůstává rozum stát nad tím, že tento kolos je schopen zachytit byť i jednu jedinou subatomární částici a ještě ke všemu nám jazykem elektřiny rozumně povědět, co že to bylo zač. Sympatický cernský technik nám také ukazuje další pozoruhodnou věc – kryotechnologie neboli mrazicí technologie, které zde při teplotách blízkých absolutní nule zajišťují supravodivost elektromagnetů sloužících k rozběhnutí svazků částic.

Kapitola sama pro sebe je samozřejmě již výše zmíněné výpočetní středisko. Ve spolupráci s mnoha počítači na celém světě se zde zpracovává více dat, než co v elektronické podobě produkuje celá střední Evropa. Zde si můžeme všimnout



zásadní věci. Svět je možné zkoumat hloubáním, dedukcí či indukcí, domýšlením se; v CERNu však vsadili na jiné karty. Takzvaná hrubá výpočetní síla a velmi mohutné technologie nám umožňují nahlédnout do těch nejtěsnějších rozměrů za hranice lidského poznání.

Technické muzeum v Mnichově

Ovšem cestou do CERNu nelze projet půlkou Evropy a nezastavit se aspoň na některých mimořádně zajímavých místech. Ve fyzikálním duchu naší výpravy první zastávka patřila muzeu v Mnichově, které je jedno z nejrozsáhlejších v Evropě. Číst v knize je dobré, prohlížet obrázky ještě lepší, ale skutečně vidět a vyzkoušet je nejlepší – motory, parní stroje, letadla, turbíny, těžební soupravy, transformátory, . . . I zarytému netechnikovi by zasvítily oči. K návštěvě Mnichova patřila samozřejmě i procházka městem.

Ženeva a Alpy

Městem, ve kterém jsme se zdrželi déle, bylo místo našeho ubytování, Ženeva. Ženeva má kouzlo přímořského lázeňského města a to je o to zajímavější, že u moře neleží. A samozřejmě nelze vynechat procházku po alpských kopcích a pokud možno poznat přírodu a podrobit se jejím rozmarům. Tak jsme také učinili a řádně skrz naskrz promokli, zanáčovali si a znovu promokli. Konečně každý z nás věděl, co je to alpské jaro.

Nádherným zážitkem byla návštěva masivu Mont Blanc. Z podmračeného deštivého údolí jsme lanovkou vyjeli na bezmála 4000 m vysoký vrchol Aiguille du Midi. Vymetená obloha, slunce zářivější než jindy, osamocené vrcholy majestátních hor a hluboká údolí všude pod námi. Kdo neviděl, neuvěří. Já jsem si připadal jako na střeše světa. Dalším příjemným zpestřením našeho programu byly zajímavé a poučné večerní besedy s panem doktorem Dolejším a studenty MFF UK na témata fyzikální i nefyzikální, ze života.

Naplno prožitých pět dní už je však za námi a mohu si dovolit krátké zhodnocení. Zájezd do CERNu považuji za cennou zkušenost. Za pět dní jsme se mnoho dozvěděli, mnoho viděli, rozšířili si obzory. Co je však důležitější, poznali jsme nové „zapálené“ lidi, získali jsme motivaci do dalšího studia a chuť dozvídat se nové věci.

Hymna soustředění

1. sloka

Když přijdu domu po náročném dnu,
na židli sednu, už se z ní nezvednu,
chci se vodreagovat, tak zapnu si bednu.
Přepínám programy a v tu chvíli jednu,
do jiného světa znenadání vpadnu.
Redaktor něco žvaní, div že z něho nezhebnu:
A nyní se podíváme do CERNu,
světového centra pro výzkum kernu.
A proto si vyjedeme do Ženevy do Švýcarska
s hlavním městem v Bernu.

2. sloka

Nato se mi naskytne jiný pohled milejší,
 když na scéně se objeví sám doktor Dolejší.
 Hned se s náma vypraví do světa atomu,
 kde nejdřív není nic, snad kromě pár leptonů
 a pak přijde jádro z protonů a neutronů.
 Potom ňáký up, down – jak to jmenujou – kvarky,
 vtom vejde fotr – jééé, k večeri zas škvarky . . .
 Po jeho odchodu do uší mě udeřil
 proud dalších částic, málem jsem z toho zmagořil.
 No, musíte mě přesvědčit, abych tomu uvěřil.

A proto chci, chci, chci jet do CERNu,
 světovýho centra pro výzkum kernu.
 Já chci, chci, chci jet do CERNu
 a prohlídnout si Ženevu a projít se v Bernu.

3. sloka

Z barevný tabulky už jsem trochu moudřejší,
 zoologii částic nás provází profesor Hořejší.
 Najednou mou mysl přepadne úplně jiná temnota,
 ve vesmíru existuje prej navíc antihmota.
 Fakt si dej pozor, kdyby ses zamiloval
 do ufonky z antisvěta, jak bys jí pusu dal,
 hned bys zanihiloval.
 Ten CERN musím vidět a do světa vyjet,
 stejně každou neděli doma sedím na pr**li.

Já chci, chci, chci jet do CERNu,
 světovýho centra pro výzkum kernu.
 Já chci, chci, chci jet do CERNu
 a ve stopách Einsteina projít se v Bernu.

4. sloka

Na řadu se dostala docela stará zpráva,
 že se spustí LHC, detektor jak kráva.
 Pohled na ten válec vzbudil moji ovaci,
 když jsem v TV zhlédl počítačovou simulaci.
 Nechají tam srážet vstřícný svazek částic,
 pak bum – ohňostroj!
 Ale účinnej průřez říká, že většina je na nic.
 Snad možná tenhle jet, co přiletět sem,
 obsahuje event s hledaným higgsem.
 Hej, doktoři, kdo z vás mě zasvěť,
 co je to za smetí, který z toho letí?

Já chci, chci, chci jet do CERNu,
 světovýho centra pro výzkum kernu.

Já chci, chci, chci jet do CERNU
a ve stopách Einsteina projít se v Bernu.

Já chci, chci, chci jet do CERNU,
podívat se na tu vobrovskou cisternu.
Já chci, chci, chci jet do CERNU,
projít si tu velkou částicovou hernu.

Já chci, chci, chci jet do CERNU,
světovýho centra pro výzkum kernu.
Já chci, chci, chci jet . . .

Fotky

Na skupinové fotografii jsou (odspodu a zleva):

1. řada – Jiří Lipovský, Ondrej Bogár, Hana Jirků, Martin Formánek, Katarína Baxová, Karel Havlíček, Radim Pechal, RNDr. Jiří Dolejší, Jan Prachař a ležící Petra Suková.
2. řada – Libor Šachl, Jiří Vajsejtl (řidič), Petra Malá, Pavel Brom, paní Vajsejtlová (řidička), Tomáš Bednárik, Daniel Šimsa, Jan Jelínek, Jan Váňa, Lukáš Stříteský, Iva Kocourková, Petr Dvořák, Lukáš Cimpl, Jakub Benda, Karel Tůma a Peter Berta.
3. řada – Juraj Hartman, Jaroslav Urbář, Lukáš Vítovec, Jaroslav Trnka, Daniel Scheirich, Lukáš Malina, Marek Pechal, Pavol Pšeno, Marek Nečada, Marek Scholz, Pavel Motloch, Lukáš Drápal a Jakub Michálek.





Exkurze v podzemí CERNu



Společná fotografie s masivem Mont Blanc (ve výšce 3 842 m n. m.)



SVĚT ENERGIE

Ukažte fyziku jako zajímavé dobrodružství vašim přátelům! Překvapte rodiče a sourozence fyzikálním vysvětlením běžných jevů! Vzdělávací program energetické společnosti ČEZ vám dává k dispozici materiály, ze kterých můžete načerpat další vědomosti.

Černý petr

Klasická karetní hra, oblíbená mezi dětmi i dospělými, tentokrát s motivy moderních a historických elektrospotřebičů a přístrojů. Dokážete si představit, jaký byl svět bez elektřiny?

Fyzika hrou

Vzdělávat se má hravou formou – proč si neobjednat stolní hru „Fyzika hrou“? Na principu *Člověče, nezlob se!* si zopakujete základní znalosti z fyziky aplikované na denní život. Budete překvapeni, jak se dají fyzikálně vysvětlit jevy z běžného života.

Domácí pokusy z jaderné fyziky

Nevěříte, že existují jevy spojené s jadernou fyzikou, které se dají lehce demonstrovat pomocí běžných pomůcek?

Jaderné hrátky

Volně navazuje na „Domácí pokusy z jaderné fyziky“, klade větší důraz na didaktiku a vysvětlení fyzikálních skutečností a souvislostí a je obohacený o řadu nových pokusů z jaderné fyziky. Např.: Jak velký je atom?, Hmotnost nového prvku – fazolia, Poločas rozpadu pivní pěny, Stopování částic aj.

Hrátky s obnovitelnými zdroji

Jednoduché pokusy a návody na sestavení zařízení demonstrujících základy funkce a využití obnovitelných zdrojů energie. Např.: turbínka poháněná vodou z vodovodu, anemometr, plašiče ptáků, solární vařiče aj.

Hrátky s transformátorem

Objasnění principů transformování elektrického napětí, významu pro přenos elektrické energie a dalších souvislostí. Např.: Vyroberte si cívku, Zkratujte transformátor, Co je tokamak aj.

Hrátky s magnetismem

Návody na známé i méně známé pokusy s magnetismem lépe objasní základní fyzikální zákony než dlouhý výklad. Např.: Kde všude slouží magnety, Plovoucí magnety, Může magnet železo odpuzovat?, Zapínání proudu magnetem, Diamagnetická levitace, Může magnet vydávat zvuky?, Tajemství vířivých proudů aj.

Encyklopedie energetiky

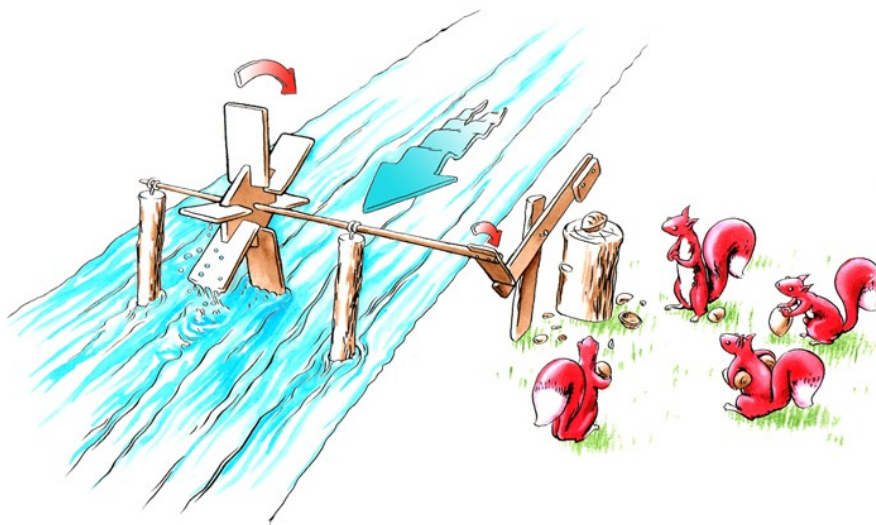
První česká obrázková encyklopedie energetiky, aktualizovaná a rozšířená. Přináší názorný a úplný přehled o energii v jejích nejrozmanitějších formách a je určena všem, kdo se zajímají o historii ovládnutí přírodních zdrojů energie lidstvem, vědecké a technické principy moderních energetických technologií, tajemství hmoty a tisíce dalších otázek, které nám klade moderní civilizace. Encyklopedie je rozdělena do šesti samostatných sešitů:

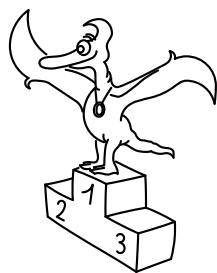
- **Energie a člověk** (Motor civilizace, Cesty blesků, Energetika živého, Co dokáže život, Vítězství a omyly, Energie a životní prostředí, Energie a město)
- **Energie z fosilních paliv** (Černé poklady, Energie z pravěku, Ve stínu komínů, Tepny civilizace, Vyčištěné megawatty, Rekultivace surovin)
- **Jaderná energie** (Tajemství atomů, Energie bez kouře, Trezor na tisíc let, Surovina nebo odpad, Podivuhodné paprsky, Tajemství energie hmoty, Bezpečnost jaderných elektráren, Jaderná syntéza)
- **Energie z obnovitelných zdrojů** (Na počátku bylo kolo, Energie řek a moří, S větrem o závod, Slunce a Země, Biomasa)
- **Elektrina** (Ebonitová tyč a liščí ohon, Žabí stehýnka, Začalo to v . . . , Elektrické zdroje, Drátěné cesty)
- **Energie ze všech stran** (Jak skladovat energii, Energie a její přeměny, Bydlení a energie, Energie a počasí, Elektrická doprava, Trh s elektřinou, Super novinky)

Vzdělávací program Svět energie obsahuje dále počítačové programy, internetové aplikace ke stažení, videofilmy, semináře a exkurze do elektráren.

Materiály jsou pro školy zdarma.

Informace získáte na www.cez.cz/vzdelavaciprogram nebo na tel. 211 042 681, popř. na adrese: ČEZ, a. s., sekce komunikace, Duhová 2, 140 53 Praha 4.





Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Marek Pechal</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	162
2. <i>Tomáš Bednárik</i>	Masarykovo G, Vsetín	111
3. <i>Libor Šachl</i>	G Terezy Novákové, Brno	85
4. <i>Lukáš Strítěský</i>	Masarykovo G, Vsetín	68
5. <i>Martin Konečný</i>	G Boskovice	64
6. <i>Marek Scholz</i>	G F. Palackého, Neratovice	61
7. <i>Jan Váňa</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	58
8. <i>Petra Malá</i>	G Moravský Krumlov	58
9. <i>Vojtěch Molda</i>	Masarykovo G, Vsetín	56
10. <i>Roman Derco</i>	G dukl. hrdinů, Svidník	48

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	175
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	141
3. <i>Daniel Šimsa</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	127
4. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	103
5. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova, Praha	99
6. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	90
7. <i>Tomáš Bzdušek</i>	G Piešťany	81
8. <i>Marek Kaleta</i>	G Terezy Novákové, Brno	68
9. <i>Peter Berta</i>	G Velké Kapušany	67
10. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	57
11. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	57
12. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. R.	55
13. <i>Hana Jirků</i>	G Terezy Novákové, Brno	53
14. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	44
15. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	35

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Jakub Michálek</i>	G Jana Keplera, Praha	179
2. <i>Lukáš Vítovec</i>	PČG Karlovy Vary	107
3. <i>Juraj Hartman</i>	G Náchod	70
4. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	70
5. <i>Lukáš Drápal</i>	G Ch. Dopplera, Praha	64
6. <i>Iva Kocourková</i>	G nám. TGM Zlín	62
7. <i>Vladimír Boža</i>	G D. Tatarku, Poprad	61
8. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	58
9. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	56
10. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	45
11. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	43
12. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	40

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	63
2. <i>Katarína Bazová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	50
3. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	43
4. <i>Richard Polma</i>	G Mladá Boleslav	36
5. <i>Alžběta Černeková</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	33
6. <i>Jan Šedek</i>	SPŠ Hronov	20
7. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	15

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XIX. ročník – 2005/06

Předmluva: Jan Prachař

Náměty úloh:

Matouš Ringel (I.4, III.3, III.4, IV.P, V.3, VI.1, VI.2, VI.3, VI.4, VI.P)
Jan Prachař (I.2, I.P, II.1, II.4, II.P, IV.2, V.4, VI.E)
Jaroslav Trnka (III.2, III.P, III.E, VI.E)
Pavel Brom (I.1, IV.E, V.I), Petr Sýkora (III.1, IV.1, IV.4)
Ján Lalinský (V.2, V.E), Karel Tůma (I.3, II.E)
Jiří Franta (II.2), Pavol Habuda (II.3), Jiří Lipovský (IV.3)
Marek Scholz (V.P), Lenka Zdeborová (I.E)

Autoři řešení úloh:

Matouš Ringel (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S)
Petr Sýkora (I.4, II.2, III.1, IV.4, V.1, VI.1)
Pavol Habuda (I.3, II.3, IV.2, VI.P)
Ján Lalinský (I.2, IV.1, V.E, VI.3)
Jan Prachař (I.P, II.4, V.3, VI.4)
Roman Fiala (I.1, II.1, IV.3), Jiří Lipovský (II.P, III.3, V.4)
Jaroslav Trnka (III.2, IV.P, VI.E), Karel Tůma (III.4, V.P, VI.2)
Peter Zalom (I.E, III.P, V.E), Peter Greškovič (I.1, II.E)
Zdeněk Kučka (I.1, IV.3), Petra Suková (III.4, V.2)
Daniel Božík (I.2), Pavel Brom (IV.E), Michael Komm (III.E)
Zuzana Safernová (IV.2)

Planeta Balónků: Jaroslav Trnka, Petra Suková (obrázky)

Seriál o statistické fyzice: Matouš Ringel

Legenda podzimního soustředění:

Jan Prachař

(inspirace romány Jaroslava Foglara: Záhada hlavolamu, Stínadla se bouří)

Den s experimentální fyzikou: Pavel Brom

Výjezdní soustředění s exkurzí do CERNu: Marek Scholz

Hymna soustředění s exkurzí do CERNu: Pavel Brom

Sazba: Jan Prachař

Obrázky a grafy:

Jan Prachař, Matouš Ringel, Karel Tůma, Jiří Lipovský, Petr Sýkora

Recenzoval: Jan Prachař

Jazykové korektury: Pavel Brom, Jiří Lipovský, Zuzana Safernová

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.