

18. ročník, úloha VI.2 ... jak vyrobit černou díru (4 body; průměr 3,83; řešilo 41 studentů)

Pokud stlačíme hvězdu (či jakékoli jiné těleso) na kouli o poloměru r_g , zhroutí se nenávratně do černé díry. Tzv. Schwarzschildův poloměr r_g si lze v klasické analogii představit jako poloměr tělesa o hmotnosti M , z jehož povrchu lze uniknout pouze rychlostí světla (úniková rychlost je c).

Na základě znalosti hmotnosti hvězdy M určete Schwarzschildův poloměr r_g a kritickou hustotu hvězdy ρ , při které se přemění v černou díru. Příklad řešte obecně a poté konkrétně pro Zemi, Slunce a jádro galaxie o hmotnosti 100 miliard Sluncí.

Úlohu vymyslel Jarda Trnka na přednáškách z relativistické fyziky.

Schwarzschildův poloměr určíme ze zákona zachování energie. Na povrchu hvězdy má těleso energii

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Dle zadání dosadíme $v = c$, $r = r_g$. Úniková rychlost je taková nejmenší rychlost, že s ní těleso unikne do nekonečna. V nekonečnu je potenciální energie od hvězdy nulová, tedy i celková energie je nulová, $E = 0$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r_g} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Kritickou hustotu dopočteme snadno

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}.$$

Pro Zemi je kritický poloměr $r_g \approx 9$ mm a hustota je neuvěřitelně velká $\rho \approx 2 \cdot 10^{30}$ kg·m⁻³. U Slunce vychází kritický poloměr na $r_g \approx 3$ km a hustota $\rho \approx 2 \cdot 10^{19}$ kg·m⁻³. U jádra galaxie je poloměr $r_g \approx 3 \cdot 10^{14}$ m a hustota $\rho = 2 \cdot 10^{-3}$ kg·m⁻³.

Co tyto výsledky znamenají? Abychom ze Země vytvořili černou díru, museli bychom ji stlačit na kuličku o poloměru 9 mm, což asi v našich silách není. Naopak aby se přeměnilo jádro galaxie na černou díru, stačí, aby jeho hustota byla 0,002 kg·m⁻³, což je ve srovnání s hustotou vzduchu asi tisícina. To se zdá jako docela reálné. Musíme si však uvědomit, že většina vesmíru je vyplněna vakuem a jeho průměrná hustota je ještě o mnoho řádů nižší.

Čím jsou tělesa těžší, tím větší je jejich Schwarzschildův poloměr (logicky) a tím menší je kritická hustota (možná trochu překvapivě).

Je zajímavé, že tento klasický přístup je kvantitativně téměř shodný s přístupem obecně relativistickým. Proto námi vypočítané výsledky odpovídají přibližně realitě.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz