18. ročník, úloha IV . 1 ... *atomový útok v roce 1985* *(4 body; průměr 2,23; řešilo 35 studentů)*

Sovětským generálům došla trpělivost. Už se nemohli dívat na provokace ze strany amerických imperialistů a stiskli červený knoflík na odpálení atomové bomby. Hned nato do řídicí místnosti přiběhl mladý poručík, který byl zodpovědný za propočítání dráhy letu, že si prý při výpočtech trochu přihnul ze stakanu vodky a důsledkem toho místo na New York míří raketa na spřátelenou Kubu.

Naštěstí je ale po ruce náhradní bomba, kterou by se ta původní dala sestřelit, čímž by se zamezilo rozkolu v socialistickém táboře. Původní raketa byla vystřelena rychlostí v pod úhlem α. Jak mají sovětští experti nastavit úhel odpálení β druhé rakety, aby tu první zasáhli, když mezi oběma odpaly je časová prodleva T?

Diskutujte, kdy se dá mír mezi spřátelenými zeměmi zachránit a kdy už ne. Odpor vzduchu zanedbejte. Všichni samozřejmě víte, že Země je placatá a její gravitační pole je homogenní.

Vymyslel Jarda Trnka v duchu 20. výročí roku 1985.

Nejprve zavedeme vhodnou soustavu souřadnic (počátek umístíme do místa startu raket, osa x bude vodorovná), pak lze popsat pohyb raket nasledujícími rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0(t+T)\cos\alpha\,, \\ y_1 &= v_0(t+T)\sin\alpha - \tfrac{1}{2}g(t+T)^2\,, \\ x_2 &= v_0 t\cos\beta\,, \\ y_2 &= v_0 t\sin\beta - \tfrac{1}{2}gt^2\,, \end{aligned}$$

kde x_1 a y_1 jsou souřadnice první rakety a x_2 a y_2 jsou souřadnice druhé rakety, t je čas uplynulý od vystřelení druhé rakety, v_0 je počáteční rychlost raket a g je tíhové zrychlení, zbylé veličiny jsou dle zadání. Pro srážku musí platit $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$, porovnáním příslušných rovnic získáme soustavu dvou rovnic s neznámými β a t. Z rovnic pro x-ové souřadnice vyjádříme

$$t = \frac{T\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}\,.$$

Upravujme dále rovnici y-ových souřadnic

$$v_0 t\sin\alpha + v_0 T\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gT^2 - gtT = v_0 t\sin\beta$$

po dosazení za t

$$\frac{v_0 T\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} + v_0 T\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gT^2 - \frac{gT^2\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{v_0 T\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}\,,$$

$$v_0 T\cos\alpha\sin\alpha + (v_0 T\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gT^2)(\cos\beta - \cos\alpha) - gT^2\cos\alpha = v_0 T\cos\alpha\sin\beta$$

dostaneme rovnici

$$(\tfrac{1}{2}gT^2 - v_0 T\sin\alpha)\cos\beta + v_0 T\cos\alpha\sin\beta + \tfrac{1}{2}gT^2\cos\alpha = 0\,.$$

Pro přehlednost v dalším textu označme $A = gT^2/2 - v_0 T\sin\alpha$, $B = v_0 T\cos\alpha$ a $C = gT^2\cos\alpha/2$. Protože $\beta \in (0, \pi/2)$, platí

$$B\sqrt{1-\cos^2\beta} = -(A\cos\beta + C)\,.$$

Rovnici umocníme na druhou (může tak přibýt neplatné řešení) a upravíme do tvaru kvadratické rovnice pro $\cos\beta$

$$(A^2+B^2)\cos^2\beta + 2CA\cos\beta + C^2 - B^2 = 0\,,$$

její řešení po odsubstituování a úpravě jsou

$$\cos\beta = \frac{2gTv_0\sin\alpha - g^2T^2 \pm 4v_0^2 \mp 2gTv_0\sin\alpha}{g^2T^2 - 4gTv_0\sin\alpha + 4v_0^2}\,\cos\alpha\,,$$

smysl má však jen $\cos\beta$ kladné

$$\cos\beta = \frac{4v_0^2 - g^2T^2}{g^2T^2 - 4gTv_0\sin\alpha + 4v_0^2}\,\cos\alpha\,,$$

což je hledaný výsledek.

Na konec najděme podmínku pro možnost sestřelení rakety. Je zřejmé, že mezí mezi sestřelením rakety za letu a nestihnutím sestřelit raketu je situace, kdy sestřelíme raketu právě při dopadu. Pro tuto situaci platí, že obě rakety musí mít stejnou vzdálenost dopadu, a tudíž vzhledem k tomu, že mají jinak stejné vlastnosti, musí platit $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. A protože obecně hledáme řešení pro $T \neq 0$, musí být $\beta = \pi/2 - \alpha$, tedy $\cos\alpha = \sin\beta$, přičemž aby mohla druhá raketa vyletět později a sestřelit první, musí být $\beta < \alpha$. Pro dobu letu rakety platí

$$t = 2v_0/g \cdot \sin\beta = 2v_0/g \cdot \sin\alpha\,.$$

Z rovnosti x-ových souřadnic $v_0t\cos\beta = v_0(t+T)\cos\alpha$ po dosazení vyjádříme podmínku pro T

$$T < \frac{2v_0}{g}(\sin\alpha - \cos\alpha)\,.$$

Milan Pečeňa
milan@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.