

18. ročník, úloha III. E ... hustota vzduchu (8 bodů; průměr 5,15; řešilo 27 studentů)

Změřte hustotu vzduchu. Provést to můžete libovolnou metodou, nezapomeňte k vaší metodě uvést potřebnou teorii. Správný experimentální výsledek nesmí také postrádat určení chyby změřené hodnoty.

Navrhl Pavel Augustinský.

Pro řešení problému využijeme dynamické metody určování hustoty plynů. Vyzkoušejme tedy pád tělesa ve vzduchu.

Teorie

Při měření budeme uvažovat ustálený stav, kdy těleso padá rovnoměrně přímočaře, tedy kdy je tíha působící na těleso vyrovnána odporovou silou vzduchu, jehož hustotu máme určit. Jak dobře víme, pro velikost odporové síly známe několik vztahů v závislosti na charakteru proudění a obtékání tělesa. Ve výpočtu použijeme Newtonův vzorec (zdůvodnění viz též Diskuse), kde hustota vzduchu ρ vystupuje, a tedy pro rovnováhu sil dostáváme

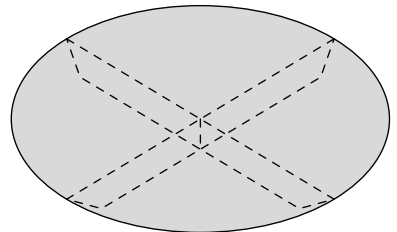
$$mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde m je hmotnost tělesa, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ velikost tíhového zrychlení, v velikost ustálené rychlosti, S plocha maximálního průřezu tělesa kolmého k rychlosti v a C součinitel odporu, jehož hodnoty jsou tabelované. Ze zjištěných hodnot těchto veličin vypočteme hledanou hustotu podle vztahu

$$\rho = \frac{2mg}{CS} \left(\frac{t}{s} \right)^2. \quad (1)$$

Postup měření

K měření jsme použili kruhovou desku o průměru d , tudíž ploše $S = \pi d^2/4$ a se součinitelem odporu $C = 1,11$, realizovanou velice tenkým papírem, který se užívá ve fotoalbech, aby se fotografie neslepily. Aby byly splněny podmínky pokusu (kolmost na směr rychlosti a rovnoměrný přímočarý pohyb), přilepili jsme zespodu křídélka vysoká 3 cm ve tvaru kříže, navíc udržující rovinu papíru (viz obr. 1). Budeme předpokládat, že koeficient C se touto úpravou nezměnil (viz Diskuse).



Obr. 1. Kruhová deska s „křídélky“

Toto těleso klesalo rovnoměrně na dráze $s = 1,15 \text{ m}$, poté se začalo výrazněji naklánět a uhýbat do stran, což dobře známe. Ustálené rychlosti bezpečně dosáhlo na dráze cca 10 cm. Celková hmotnost papírového tělesa m byla určena laboratorními rovnoramennými váhami. Měření průměru kruhu d milimetrovým měřítkem a doby pádu t (ruční měření) na dráze s bylo zpracováno statisticky.

Výsledky měření

Mnozí z vás pečlivě zpracování a vyhodnocení chyb vynechávají. Dovolte mi tedy shrnout základní body.

- a) Rozhodneme se, kde použijeme statistické zpracování. Např. hmotnost jednoho tělesa nebo délku určitého úseku nemá smysl měřit několikrát. Jiný případ je, použijeme-li jiná měřidla, abychom potlačili systematickou chybu měření, nebo kontrolujeme-li neměnnost veličiny v průběhu měření. Naopak rozměry tělesa a ruční měření času určitě zpracujeme statisticky! Zde např. statistická chyba měření průměru d (tj. standardní odchylka σ_d) vypovídá, jak

přesný kruh máme. V případě měření času statistika eliminuje zkreslení výsledků náhodnou chybou při měření. (Hrubou chybu odhalíme kritériem 3σ .)

- b) Veškeré hodnoty veličin X uvádíme ve tvaru $X = (x \pm \varepsilon_x)$ jednotka. Chyba ε_x (zaokrouhlená na maximálně dvě platné číslice) je možná chyba měření daná polovinou nejmenšího dílku stupnice nebo naším rozumným odhadem, případně spočtená z možné statistické chyby. Střední hodnotu x zaokroulíme ve stejném řádu, jako je chyba ε . Jako možnou chybu ručního měření času vezmeme reakční dobu člověka alespoň 0,2 s, kterou si sami můžeme změřit. Chyby sčítáme podle kvadratického zákona sčítání chyb

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2}.$$

- c) Chybu vypočtené veličiny určíme obecně pomocí parciálních derivací jakožto váhy v kvadratickém zákonu. Pokud však veličiny vystupují v součinu/podílu a jsou zatíženy malými relativními chybami, lze efektivně přímo sčítat relativní chyby. (Ten byl pro rychlý odhad chyby uplatněn v našem zpracování, i když chyby jsou již poměrně velké.)

Výsledky jsou tedy následující. Hodnoty z měření doby pádu a průměru kruhové desky jsou v následující tabulce.

t [s]	1,64	1,70	1,60	1,70	1,68	1,66	1,68	1,60	1,68	1,64
d [mm]	21,00	21,10	21,00	21,00	21,10	21,10	21,00	21,10	21,10	21,10

Spočítáme průměrnou hodnotu a standardní (střední kvadratickou) odchylku. Shrňme naměřené hodnoty

$$s = (1,15 \pm 0,05) \text{ m}, \quad t = (1,66 \pm 0,20) \text{ s}, \quad d = (0,2106 \pm 0,0006) \text{ m}, \quad m = (1,30 \pm 0,05) \text{ g}.$$

Ze vztahu (1) dostáváme $\rho = (1,37 \pm 0,29) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, správně zaokrouhlený výsledek měření tedy je

$$\rho = (1,4 \pm 0,3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

přičemž je vztažen na následující podmínky měření. Teplota vzduchu 22°C (určena kuchyňským teploměrem), tlak 1014 hPa (podle TV relace o počasí).

Diskuse

Nesmíme zapomenout na diskusi, kde posoudíme splnění podmínek pokusu a správnost výsledků a kde provedeme srovnání s tabelovanými hodnotami a zhodnotíme chyby měření. Případné odchylky se pokusíme zdůvodnit.

Výsledek koresponduje dobře s tabelovanou hodnotou $1,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ v rámci chyby měření, která je poměrně velká. Při prvním provedení (ve snaze snížit chybu měření) byl stejným způsobem zkoumán pád na dráze 2,2 m, který dal výsledek $1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, avšak v druhé polovině pádu objekt neletěl rovnoměrně a přímo dolů. Takový pohyb navyšuje dobu pádu t a mění podmínky měření a zřejmě vede k vyšší hodnotě hustoty vzduchu, než je skutečná. Ze stejného důvodu je i přesnější výsledek vychýlen nahoru od tabelované hodnoty.

Měření je zatíženo poměrně velkou chybou danou především nepřesným ručním měřením času, ale navýšenou také větším počtem nepřesně zjišťovaných veličin (tj. měření na krátké dráze a relativně malé hmotnosti).

Zbývá zhodnotit správnost úvah a rovnic, ze kterých jsme vycházeli. Charakter proudění lze určit podle Reynoldsova čísla, na základě jehož odhadnuté velikosti (ν je kinematická viskozita vzduchu)

$$Re = \frac{dv}{\nu} \approx \frac{0,21 \cdot 0,69}{1,4 \cdot 10^{-5}} \approx 10^4$$

lze konstatovat, že naše proudění je turbulentní a v tomto případě platí dostatečně přesně Newtonův vzorec (čili závislost na kvadrátu velikosti rychlosti v). Nezbytná úprava tělesa (doplnění svislými křídélky) může způsobit turbulence pod plochou desky. Příslušnou změnu tabelovaného součinitele C však neumíme odhadnout. Lokální ani časovou změnu hustoty vzduchu při měření (s ohledem na rychlost pohybu v) nepředpokládáme.

Pavel Brom

paja@fykos.mff.cuni.cz