

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV

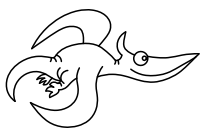
Fyzikální korespondenční seminář

XVIII. ročník – 2004/05



matfyzpress

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	54
Řešení experimentálních úloh	55
Seriál o teoretické mechanice	67
1. Newtonovská mechanika	67
2. Lagrangeovská formulace mechaniky	76
3. Použití Lagrangeova formalismu, příklady	85
4. Hamiltonovská formulace mechaniky	89
5. Hamiltonův variační princip	93
Řešení úloh ze seriálu	96
Akce FYKOSu	112
Pořadí nejlepších řešitelů	120



Předmluva

Milý čtenáři,

v rukou držíš ročenku XVIII. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře (FYKOSu) MFF UK, který proběhl ve školním roce 2004/05.

FYKOS je nejstarší a největší fyzikální korespondenční soutěž pro střední školy u nás. Seminář organizují studenti a zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Cílem FYKOSu je rozvíjet fyzikální myšlení, protože člověk, který se umí nad (nejen fyzikálními) problémy zamyslet a cítí touhu se dobrat k nějakému řešení, se uplatní všude, kde si schopností lidského mozku cení.

V průběhu roku řešitelé pravidelně obdrží zadání sedmi úloh, z nichž je pět teoretických, jedna experimentální a poslední se tematicky váže k *seriálu na pokračování*, který zadání doprovází (letos byl věnován teoretické mechanice). Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (někteří i všechny) a svá řešení posílají běžnou poštou či elektronicky organizátorům semináře. Ti úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Na základě bodování je sestavována průběžná výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě zasilání zadání a řešení pořádá seminář řadu dalších akcí. Zejména to jsou dvě týdenní *soustředění*, bez kterých si FYKOS snad nelze ani představit. Probíhají vždy na jaře a na podzim, zúčastní se jich asi 30 nejlepších řešitelů. Další akcí je *Den s experimentální fyzikou*, na kterém ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF UK a Akademií věd ČR umožňujeme našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá opravdová fyzika.

Na našich [www stránkách](http://fykos.mff.cuni.cz) <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé semináře sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých ročníků zde naleznete průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a reportáže ze soustředění, diskusní fórum, podrobné informace a pravidla pro připojení se k semináři a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání a řešení teoretických i experimentálních úloh. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím apelovat na každého čtenáře, aby před nalistováním stránky s řešením strávil alespoň chvíli nad zadáním a rozmyslel si, jak by danou úlohu řešil on. Další částí je *Seriál o teoretické mechanice*, který je doplňován příklady a úlohami. Na konci se nachází krátké povídky o soustředěních, které pořádáme na jaře a na podzim, a seznam nejlepších řešitelů tohoto ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na e-mailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu níže.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 504 (Mgr. Pavel Krtouš, Ph.D.)

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

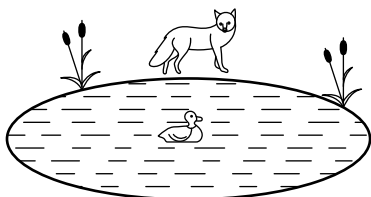
Na závěr předmluvy trocha statistiky – XVIII. ročníku FYKOSu se zúčastnilo 128 řešitelů z 87 středních a základních škol. Přehled nejúspěšnějších škol uvádíme níže.

Pořadí škol

Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Ludovíta Štúra, Trenčín	7	37,4	262
G Boskovice	2	94,5	189
Masarykovo G, Vsetín	2	94,5	189
Masarykovo G, Plzeň	2	91	182
G Jablonec nad Nisou	1	173	173
G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	1	171	171
COP Hronov	11	13,5	148
G Zborovská, Praha	3	47,3	142
G Jana Nerudy, Praha	1	128	128
G Sv. Mikuláša, Prešov	1	125	125
G Kapitána Jaroše, Brno	2	61	122
G a SPgŠ Liberec	3	35,7	107
G J. G. Tajovského, Banská Bystrica	2	52	104
SPŠ Jihlava	1	89	89
G Terezy Novákové, Brno	2	44,5	89
Biskupské G, Brno	1	88	88
G Uherské Hradiště	1	85	85
G Český Těšín	1	82	82
G Komenského, Havířov	2	37,5	75
G Lesní čtvrť, Zlín	2	37	74
G M. Koperníka, Bílovec	2	32,5	65
G J. Vrchlického, Klatovy	2	30	60
G F. Palackého, Neratovice	1	57	57
G Svidník	2	25,5	51
G Chodovická, Praha	1	50	50
G Pelhřimov	1	50	50
G Moravský Krumlov	1	49	49
G Broumov	1	48	48
VOŠ a SPŠE Plzeň	1	48	48
SPŠE Rožnov p. R.	1	44	44
G B. S. Timravy, Lučenec	1	43	43
Masarykova SŠ chemická, Praha	1	42	42
G J. Jungmanna, Litoměřice	1	41	41
G Matyáše Lercha, Brno	3	13,3	40



Zadání teoretických úloh

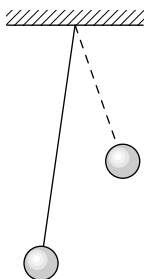


Obr. 1. Kačátko na rybníku

Úloha I. 1 ... ošklivé kačátko

Opuštěné ošklivé kačátko zůstalo osamocené uprostřed kruhového rybníku. Chce se dostat za svými sourozenci a matkou kachnou, ale na břehu rybníka na něj číhá liška. Kačátko je ještě mladé, proto dokáže vzletnout pouze z pevné země. Určete maximální poměr rychlostí běhu lišky a plavání kačátka, aby stihlo doplatit na břeh a z něj lišce uletět. Poradte také kačátku, jakou strategii má zvolit.

(řešení str. 14)



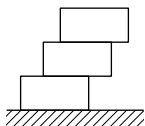
Obr. 2

Úloha I. 2 ... přistřižené kyvadlo

Malá hmotná kulička visí na konci nehmotného provázku a kmitá svojí vlastní frekvencí f kolem rovnovážné polohy (viz obr. 2). Jaká bude vlastní frekvence f' , pokud zkrátíme provázek na polovinu? (řešení str. 16)

Úloha I. 3 ... mistr zedník

Zedník staví cihly na sebe do výšky jako schody podobně jako na obr. 3. Snaží se je postavit co nejvíce do dálky a ví, že jich může použít, kolik chce. Poradte mu, jak to má provést, aby se „dostal“ co možná nejdále, i když nesmí používat maltu. (řešení str. 17)



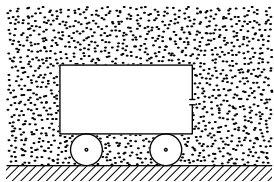
Obr. 3

Úloha I. 4 ... vodník Děsílko poznává svět

Vodník sedí na dně v čisté klidné vodě svého rybníka a dívá se vzhůru, jeho oči jsou v hloubce $h = 1,5\text{ m}$ pod povrchem vody. Jak se Děsílkovi jeví prostor nad povrchem vody? Předpokládejte, že index lomu oka je stejný jako index lomu vody. (řešení str. 18)

Úloha I. P ... antiraketa

Uvažme nádobu na kolečkách s otvorem dle obr. 4. Uniká-li stlačený vzduch z nádoby ven, nádoba se pohybuje. Jde o princip analogický raketovým motorům. Představme si nyní opačnou situaci – nádobu, v níž bylo vakuum, umístěnou ve vzduchu, který do nádoby proudí malým otvorem. Jak se bude nádoba pohybovat? Předpokládejte, že se nádoba může po zemi pohybovat bez odporu. (řešení str. 19)



Obr. 4. Antiraketa

Úloha II. 1 ... Mojžíšův zázrak

Mojžíš přistoupil k Rudému moři zvolav: „Rozevři se mořská hladino a nech národ vyvolených projít suchou nohou do zemi zaslíbené.“ Poté vstoupil do mořských vln a ty se rozestoupily. Určete, jak velkou silou byl obdařen Mojžíš, aby mohl převést Židy přes Rudé moře. Předpokládejte, že moře je široké 1 km a hluboké 20 m. (řešení str. 20)

Úloha II. 2 ... kolik drátů na sloupech?

Kolikafázové napětí bychom museli používat, aby efektivní hodnota napětí fáze–zem byla stejná jako efektivní hodnota napětí mezi dvěma sousedními fázemi? (řešení str. 21)

Úloha II.3 ... vrtulník

Abyste helikoptéra mohla vznášet, musí mít její motor výkon P . Jaký výkon P' by musela mít helikoptéra, která je přesnou poloviční kopií původní helikoptéry, aby se také vznášela? Předpokládejte, že rotor má 100% účinnost. (řešení str. 22)

Úloha II.4 ... zoufalí trosečníci

Trosečníci na severním pólu si chtějí zpříjemnit chvíli před blížící se smrtí posledním šálkem kávy. Poradte jim, jak si mají ohřát vodu, aby se jí dostalo na co nejvíce z nich. Se svými skromnými technickými prostředky mohou ohřev realizovat následujícími způsoby:

- Akumulátor o vnitřním odporu $2R$ přímo připojí k topné spirále o odporu R .
- Tentýž akumulátor připojí do série s topnou spirálou a kondenzátorem. Pokaždé, když se kondenzátor nabije, jej z obvodu vytáhnou a připojí obráceně.
- Tímtéž akumulátorem budou střídavě nabíjet kondenzátor a vybíjet ho přes topnou spirálu. (řešení str. 23)

Úloha II.P ... nečekaná překážka

Řidič automobilu jedoucího rychlostí v náhle spatří, že jeho vůz směřuje doprostřed betonové zdi šířky $2d$ ve vzdálenosti l . Součinitel klidového tření mezi pneumatikami a vozovkou je f . Poradte řidiči, co má dělat, aby se vyhnul srážce se zdí. Rozhodněte, pro jakou velikost rychlosti je to ještě možné. (řešení str. 24)

Úloha III.1 ... teplota na Zemi

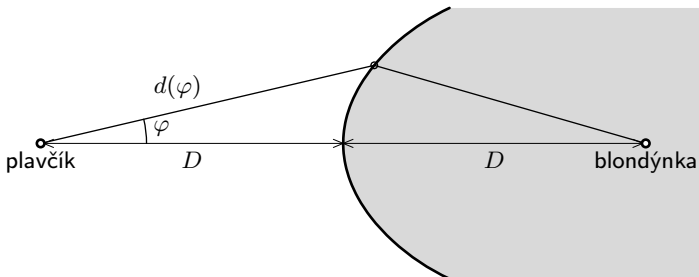
Průměrná teplota na povrchu Země je $T = 287$ K. Jaká bude nová průměrná teplota T' , pokud se střední vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zkrátí o 1%? (řešení str. 28)

Úloha III.2 ... pobřežní hlídka

Plavčík stojící ve vzdálenosti D od břehu moře náhle spatří topící se bujnou blondýnku, která doplávala do vzdálenosti D od břehu (viz obr. 5). Poradte mu, jak se k ní má co nejrychleji dostat, pokud rychlost jeho běhu je v a rychlost plavání $v/2$. Vzdálenost okraje moře od plavčíka závisí na úhlu φ následujícím předpisem

$$d(\varphi) = \frac{1}{3}D(8 \cos \varphi - 2 \sqrt{16 \cos^2 \varphi - 12 \cos \varphi - 3} - 3).$$

(řešení str. 28)



Obr. 5. Na pláži

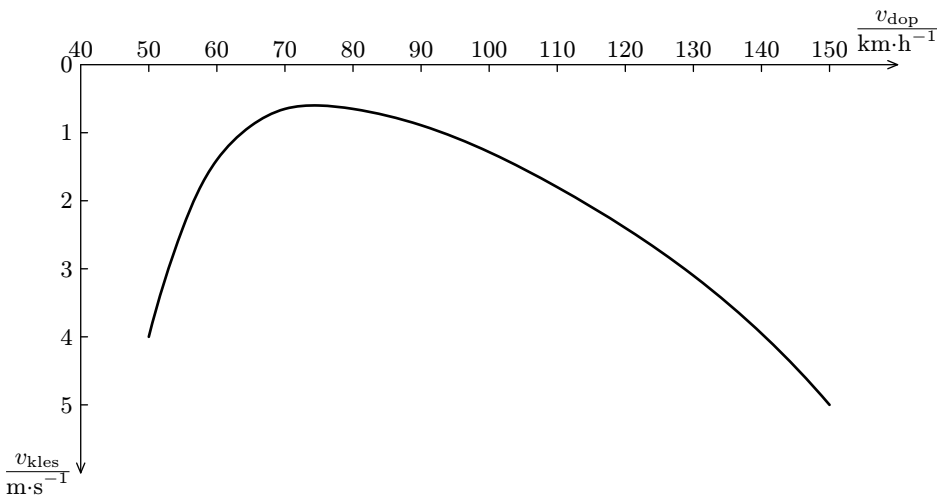
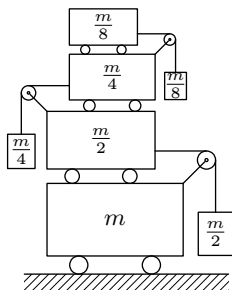
Úloha III.3 ... nabitá krychle

Jaký je poměr hodnot elektrostatičeského potenciálu ve vrcholu a ve středu nevodivé rovnoměrně nabitě krychle? Celkový náboj na krychli je Q a délka strany krychle je a . Předpokládejte, že elektrický potenciál v nekonečnu je nulový. (řešení str. 29)

Úloha III.4 ... s větroněm přes kanál

Jeden známý letec se rozhodl ve větroni přeletět kanál La Manche. V Calais se nechal vyvléci do výšky $h = 3$ km a z této výšky se přímým klouzavým letem vypravil do Anglie. Jako dobrý pilot ví, kterak při ustáleném letu vypadá závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} (viz graf na obr. 6). Poradte mu, jak rychle má letět, aby doletěl co nejdál.

Když je ve třech čtvrtinách cesty do Anglie, začne od ostrovů fučet silný vítr o rychlosti $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rozhodněte, jak rychle má letět nyní, aby se dostal co nejdál. Jaká by musela být rychlost větru, aby mu znemožnila přistát na pevnině, případně aby mu umožnila návrat do Francie? (řešení str. 30)


 Obr. 6. Závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} .


Obr. 7. Vozíčky

Úloha III.P ... věž z vozíčků

Určete zrychlení prvního a stého vozíčku (počítáno od země) na obrázku 7. Vozíčků je nekonečně mnoho, na obrázku jsou zakresleny jen první čtyři. Spodní vozíček má hmotnost m , další vozíček, který po něm jezdí, a závaží, se kterým je spojen, má hmotnost $m/2$. Podobně další vozíček a závaží má hmotnost $m/4$ atd. Předpokládejte, že závaží jsou připevněná k vozíčkům, tj. že se ve svislém směru neodchylují. Tření mezi jednotlivými vozíčky zanedbejte. (řešení str. 32)

Úloha IV.1 ... atomový útok v roce 1985

Sovětským generálům došla trpělivost. Už se nemohli dívat na provokace ze strany amerických imperialistů a stiskli červený knoflík na odpálení atomové bomby. Hned nato do řídicí místnosti přiběhl mladý poručík, který byl zodpovědný za propočítání dráhy letu, že si prý při výpočtech trochu přihnul ze stakanu vodky a důsledkem toho místo na New York míří raketa na spřátelenou Kubu.

Naštěstí je ale po ruce náhradní bomba, kterou by se ta původní dala sestřelit, čímž by se zamezilo rozkolu v socialistickém táboře. Původní raketa byla vystřelena rychlostí v pod úhlem α . Jaký úhel odpálení β druhé rakety mají sovětské experty nastavit, aby tu první zasáhli, když mezi oběma odpaly je časová prodleva T ?

Diskutujte, kdy se dá mír mezi spřátelenými zeměmi zachránit a kdy už ne. Odpor vzduchu zanedbejte. Všichni samozřejmě víte, že Země je placatá a její gravitační pole je homogenní.

(řešení str. 34)

Úloha IV.2 ... za nití

Váleček o malém poloměru r a hmotnosti m se kutálí z nakloněné roviny a na jejím konci přejde hladce do vodorovného pohybu po podložce. Přitom na sebe namotáva nit o délkové hustotě ρ . V jaké vzdálenosti od konce nakloněné roviny se váleček zastaví? Dále znáte výšku nakloněné roviny h a její sklon α . Tření zanedbávejte.

(řešení str. 36)

Úloha IV.3 ... limuzína v garáži

Jeden z vítězů Superstar narazil na problém. Jeho nová limuzína je příliš dlouhá na to, aby se vešla do jeho staré garáže. Kamarád této Superstar, který studuje fyziku, si však věděl rady. Jelikož dobře zná práci Alberta Einsteina, uvědomil si, že pokud se limuzína rozjede dostatečně rychle, zkrátí se její délka z pohledu stojícího pozorovatele natolik, že se jí do garáže vejde.

Na začátku a na konci garáže jsou umístěny padací dveře, které se spustí ve chvíli, kdy celá limuzína bude uvnitř. Z pohledu superstar v limuzíně se však naopak v důsledku kontrakce délek zkrátí garáž a vůz se do ní určitě nevejde. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem limuzínu do této garáže zaparkovat.

(řešení str. 37)

Úloha IV.4 ... Mössbauerův jev

Frekvence fotonu vyzářeného jádrem radioaktivního železa není vždy stejná, ale při rozpadě různých jader se nepatrně liší (to platí i pro jiná jádra). Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnota energie fotonu v klidové soustavě jádra železa leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$, kde $E_0 = 14,4 \text{ keV}$ ($\text{keV} = \text{kiloelektronvolt}$), $\Delta E \approx 10^{-8} \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

- Vyzáří-li volný nehybný atom železa foton, musí mít tento atom podle zákona zachování hybnosti opačnou hybnost než vyzářený foton. Vypočítejte kinetickou energii takového atomu a porovnejte ji s veličinou ΔE .
- Takzvaný Mössbauerův jev spočívá v tom, že je-li foton vyzářen atomem železa vázaným v krystalu, může se hybnost „zpětného rázu“ předat celému krystalu. Vypočítejte kinetickou energii krystalu (posun energie fotonu) v tomto případě za předpokladu, že krystal je složen z řádově 10^{23} atomů.

Stejně jako emise fotonu může probíhat i jeho absorpce. Foton však může být absorbován jen tehdy, když jeho energie v klidové soustavě jádra leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$.

- Rozhodněte, zda může nehybný atom železa absorbovat foton vyzářený jiným nehybným atomem.
- Vypočítejte, jak rychle se vůči sobě musí pohybovat dva kusy železa, aby už první kus nemohl kvůli Dopplerovu jevu absorbovat fotony vyzářené druhým kusem. Dopplerovým jevem myslíme to, že frekvence záření f , kterou vyzařuje zdroj přibližující se rychlostí v , se v naší soustavě změní na

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f.$$

Předpokládejte, že při emisi i absorpci se uplatňuje výše zmíněný Mössbauerův jev.

Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

(řešení str. 38)

Úloha IV.P ... rezonující sklenička

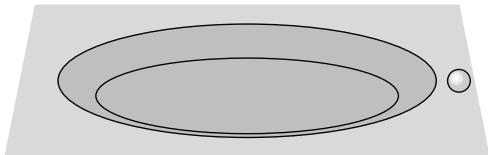
Kroužením mokřým prstem po hraně broušené skleničky (například na víno) lze vyloudit poměrně intenzivní zvuk. Pokud se do skleničky nalije voda, pak frekvence vyluzovaného tónu klesá se vzrůstající výškou hladiny. Sami si to vyzkoušejte a pokuste se tento jev vysvětlit.

(řešení str. 40)

Úloha V.1 ... dáreček od Buffala

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessiego Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit?“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v $9/10$ výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je zanedbatelná, a tření rovněž zanedbejte. Zamyslete se nad dalšími zajímavými okolnostmi tohoto souboje. (řešení str. 41)



Obr. 8

Úloha V.2 ... pád ze schodů

Malý Karlík si hraje s kuličkou. Při cvrnkání je však neopatrný, kulička se mu odkutálí k nakloněné rovině, kterou doma mají místo schodiště, a začne po ní klouzat dolů. Kulička se pohybuje tak, že vektor její rychlosti \mathbf{v} svírá s horní hranou nakloněné roviny úhel φ . Vypočítejte

vektor rychlosti \mathbf{v}' kuličky (tj. jeho velikost a také *směr*) pod nakloněnou rovinou, jejíž výška je h . Tření mezi kuličkou a zemí je malé, proto ho zanedbejte. Předpokládejte, že horní a dolní hrana nakloněné roviny je zaoblená, takže se kulička neodlepí od podlahy.

Jako bonus můžete vypočítat, jak se změní směr rychlosti kuličky, která proletí válcovou jamkou o poloměru R a hloubce h se zkosenými hranami (viz obr. 8). Délku zkosení můžete vzhledem k poloměru jamky zanedbat. (řešení str. 42)

Úloha V.3 ... beta rozpad

Při měření rozpadu neutronu na elektron a proton proměřovali čeští vědci energii vylétávajícího elektronu. Jak mohou pouze na základě údajů z tohoto měření poznat, zda nevzniká při tomto rozpadu ještě jiná částice? Uvažujte, že neutron je před rozpadem v klidu. (řešení str. 43)

Úloha V.4 ... neposlušná gravitace

Při dlouhodobém pozorování zákrytů Jupiterova měsíce Io bylo zjištěno, že naměřená doba oběhů měsíčku kolem planety (např. od předchozího do následného začátku zákrytu) pravidelně kolísá mezi hodnotami 42 h 28 min 21 s a 42 h 28 min 51 s (s chybou měření 2 s).

Pokuste se jak kvalitativně, tak kvantitativně vysvětlit pozorované změny. Kvantitou rozumíme určení „velikosti této příčiny“ na základě měření samozřejmě s odhadem chyby!

(řešení str. 44)

Úloha V.P ... rychlejší než voda

Zamyslete se nad tím, zda se může lodička bez motoru na řece pohybovat rychleji než samotná voda. Svou odpověď zdůvodněte a předpokládejte, že proudění vody je laminární.

(řešení str. 46)

Jelikož OSN vyhlásila rok 2005 za **Světový rok fyziky**, rozhodli jsme se, že tomu přizpůsobíme šestou sérii našeho semináře. Nejprve trochu historie.

Uplynulo sto let od roku 1905, který se stal jakýmsi zlomem mezi klasickou a současnou fyzikou. V roce 1905 Albert Einstein vysvětlil *fotoelektrický jev* a v červnu 1905 publikoval *speciální teorii relativity*. Oba objevy odstartovaly revoluci ve fyzice. Vysvětlení fotoelektrického jevu bylo jedním ze startovních mechanismů kvantové teorie.

Speciální relativita vyústila v roce 1915 v *obecnou relativitu*, moderní teorii gravitace. Tělesa svou přítomností zakřivují čas a prostor kolem sebe. Každé těleso, na které působí jen gravitační síla, se v tomto zakřiveném prostoročase pohybuje po nejrovnějších možných drahách, tzv. geodetikách.

Einstein tedy v roce 1905 odstartoval dvojí nazírání na svět. Obecná relativita je vynikající teorií gravitace, kvantová teorie vynikající teorií ostatních tří interakcí (elektromagnetické, slabé a silné). V současné době probíhají intenzivní snahy o sjednocení obou pohledů na svět. Většina snah vede na fascinující teorii strun ve vícerozměrném prostoročase.

Následujících pět úloh poslední série je z oblasti fyziky, kterou Einstein sám studoval.



Úloha VI.1 ... fotoefekt

Na katodu fotočlánku dopadá ze rtuťové výbojky světlo o vlnové délce 546,1 nm a k potlačení proudu vznikajícího díky *fotoelektrickému jevu* je potřeba napětí $U_1 = 1,563$ V. Dopadá-li na katodu světlo o vlnové délce 404,7 nm, je potřeba napětí $U_2 = 2,356$ V. Vypočítejte hodnotu Planckovy konstanty h . (řešení str. 46)

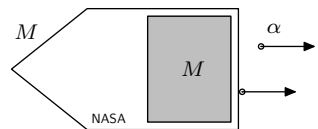
Úloha VI.2 ... jak vyrobit černou díru

Pokud stlačíme hvězdu (či jakékoli jiné těleso) na kouli o poloměru r_g , zhroutlí se nenávratně do černé díry. Tzv. *Schwarzschildův poloměr* r_g si lze v klasické analogii představit jako poloměr tělesa o hmotnosti M , z jehož povrchu lze uniknout pouze rychlostí světla (úniková rychlost je c).

Na základě znalosti hmotnosti hvězdy M určete Schwarzschildův poloměr r_g a kritickou hustotu hvězdy ρ , při které se přemění v černou díru. Příklad řešte obecně a poté konkrétně pro Zemi, Slunce a jádro galaxie o hmotnosti 100 miliard Sluncí. (řešení str. 47)

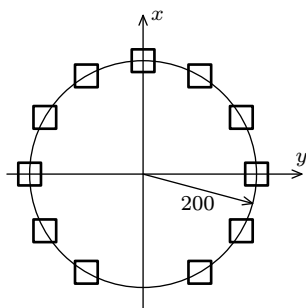
Úloha VI.3 ... sonda NASA

Jet Propulsion Laboratory v Kalifornii vyvíjí pro NASA nový typ raketových pohonů. Pohonná jednotka využívá hybnost α -částic při rozpadu nuklidu fermia ${}_{100}^{257}\text{Fm}_{157}$, jehož hmotnost je m_{Fm} a poločas rozpadu T . Druhým produktem přeměny je nuklid kalifornia ${}_{98}^{253}\text{Cf}_{155}$. Hmotnost α -částice je m_α , hmotnost nuklidu kalifornia je m_{Cf} , přeměnou se uvolní energie E . Předpokládejte, že každá α -částice opouští raketu ve stejném směru.



Obr. 9

Vesmírná sonda s popsáním pohonem je na počátku v klidu, její hmotnost je M , hmotnost pohonné látky je také M . Určete rychlost sondy v po přeměně poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Výslednou hodnotu dopočítejte i číselně pro hodnoty $E = 1,106 \cdot 10^{-12}$ J, $M = 4$ kg a $T = 100,5$ dní, ostatní hodnoty najdete v tabulkách. (řešení str. 48)



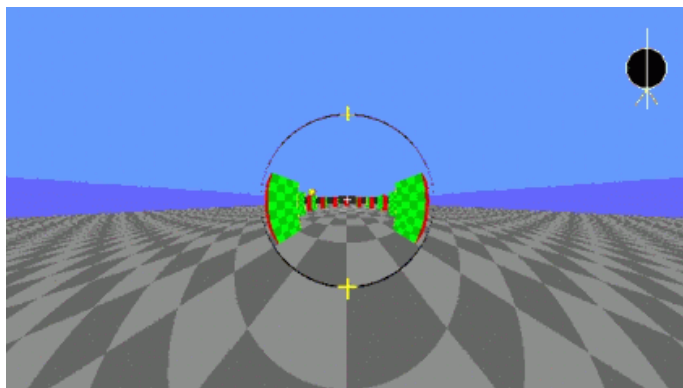
Obr. 10

Úloha VI.4 ... nezastavitelný chodec

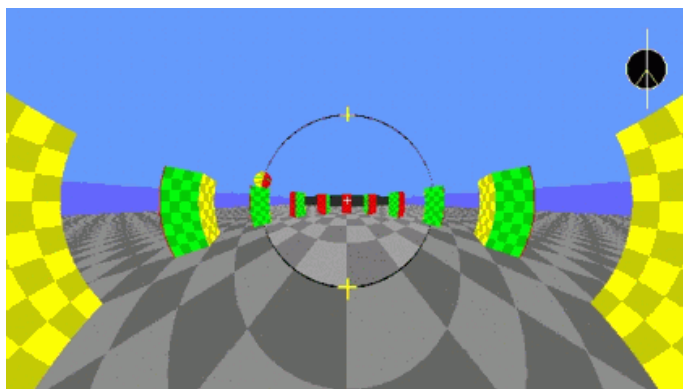
Vraťte se na chvíli do Atén na loňské olympijské hry a určete, jaká je teoretická maximální rychlost chodce. Chodec nebude diskvalifikován, pokud se každý rozhodčí (pozorovatel) shodne na tom, že alespoň jedna noha chodce stojí v každém okamžiku na zemi. (řešení str. 50)

Úloha VI. P ... výlet na Stonehenge

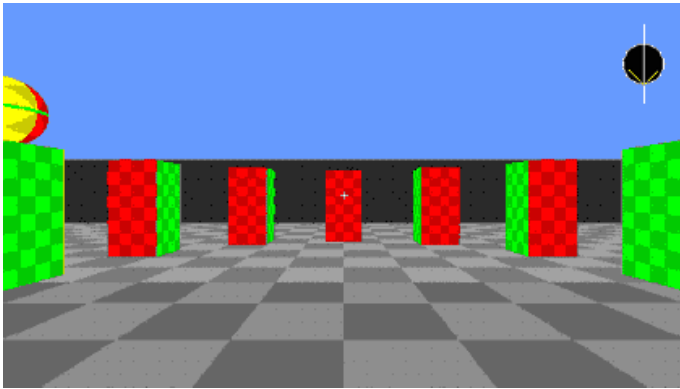
Představte si, že v raketě prolétáváte nad Stonehenge. Ten je tvořen kameny ve tvaru kvádrů rozmístěných do vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku (viz obrázek 10) o poloměru 200. Letíte nad osou x ve výšce $z = 50$ a díváte se vodorovným směrem. Když jste v bodě o souřadnicích $(-200, 0)$, resp. $(0, 0)$, uvidíte svět přesně tak, jak je zobrazen na obrázku 11, resp. 12. Váš stojící kamarád jej ovšem uvidí jinak, a sice jako na obrázku 13, resp. 14, přičemž oba máte shodné oči (tzn. např. stejný zorný úhel). Z obrázků přibližně určete poměr rychlosti rakety a rychlosti světla. (řešení str. 51)



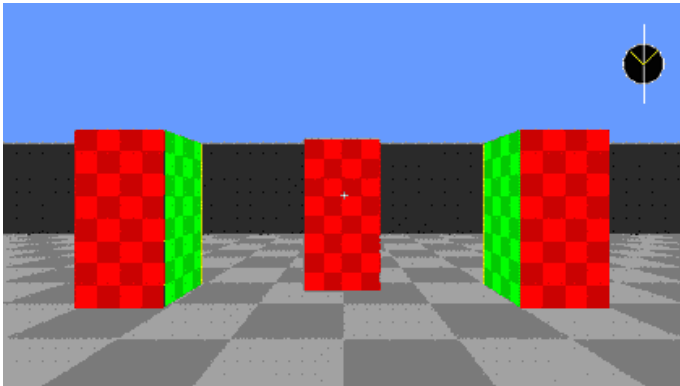
Obr. 11



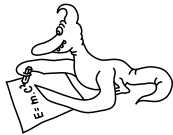
Obr. 12



Obr. 13



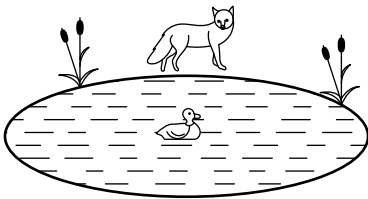
Obr. 14



Řešení teoretických úloh

Úloha I. 1 ... ošklivé kačátko (4 body; průměr 1,30; řešilo 99 studentů)

Opuštěné ošklivé kačátko zůstalo osamocené uprostřed kruhového rybníku. Chce se dostat za svými sourozenci a matkou kachnou, ale na břehu rybníka na něj číhá liška. Kačátko je ještě mladé, proto dokáže vzlétnout pouze z pevné země. Určete maximální poměr rychlostí běhu lišky a plavání kačátka, aby stihlo doplatvat na břeh a z něj lišce uletět. Poradte také kačátku, jakou strategii má zvolit.



Obr. 15. Kačátko na rybníku

Mějme kačátko, nechť jeho rychlost je 1 a rychlost lišky v (bude pak rovna přímo hledanému poměru). Není obtížné nahlédnout, že je-li kačátko dostatečně blízko středu rybníku, může dosáhnout stejně či větší úhlové rychlosti rotace kolem středu než liška obíhající po břehu. Skutečně, je-li kachnička ve vhodné vzdálenosti r a liška ve vzdálenosti R od středu, úhlová rychlost kačátka je

$$\omega_K = \frac{v_K}{r} = \frac{1}{r} > \frac{v}{R} = \frac{v_L}{R} = \omega_L.$$

Nerovnost platí pro $r/R < 1/v$. Odtud již přímo plyne, že se kačátko může dostat do situace, kdy je ve vzdálenosti $r = R/v$ od středu a liška se nachází na přesně opačné straně rybníku, tj. spojnice liška–oběť prochází středem kružnice. Velká část řešitelů se probojovala až sem.

Ovšem ihned vyvstává otázka: „Co dál?“ Nejjednodušší odpověď může znít: „Kačátko by mělo plavat po co nejkratší cestě ke břehu.“ Přinejmenším bude na břehu za nejkratší čas. Nicméně toto je jen jedna strana mince! Druhá říká: „Podívej se na lišku.“ Ona totiž nezahálí, nýbrž usilovně sprintuje směrem k očekávanému přístavišti zvířátka. Měli bychom tedy alespoň popřemýšlet, zda by nebylo lepší, aby kachnička plavala poněkud od lišky.

Mimochodem, největší část řešitelů tvrdila, že kachnička má plavat ze středu přímo rovně k okraji. Zde je vidět, že se mýlí, neboť je-li kachnička na obvodu našeho pomyslného kruhu, je blíže okraji než předtím a liška je stejně jako předtím na opačné straně kruhu.

Vraťme se k pohybu lišky. Ta vidí kačátko na opačné straně a nyní se musí rozhodnout, kam poběží. Samozřejmě se nezastaví, to by kačátku poskytla náskok. Liška se může rozběhnout, kam chce (ze symetrie). Nyní určíme, jak se zachová kačátko.

Pochopitelně, poplave více méně na druhou stranu než liška (otáčí se ve stejném smyslu). Poplave po přímce, neboť kdyby plavalo po křivce z bodu A do B, mohlo by plavat přímo z A do B, čímž by ušetřilo čas. Budeme předpokládat, že liška jednou se rozběhne již neotočí, což zdůvodníme později.

Z obrázku 16 určíme dráhu lišky $R(\pi + \vartheta)$ a dráhu kačátka $\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta}$. V mezním případě se budou rovnat doby, za které liška a kačátko tyto dráhy urazily. To nám poskytne závislost v na ϑ . Nám zbývá najít maximum této funkce. Při úpravě využijeme vztah uvedený výše ($R/r = v$).

$$R(\pi + \vartheta) = v \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta},$$

$$\begin{aligned}\pi + \vartheta &= v \sqrt{1 + (r/R)^2 - 2(r/R) \cos \vartheta}, \\ \pi + \vartheta &= \sqrt{1 + v^2 - 2v \cos \vartheta}, \\ 0 &= v^2 - 2v \cos \vartheta + 1 - (\pi + \vartheta)^2.\end{aligned}$$

Odtud určíme

$$v = \cos \vartheta + \sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta}, \quad (1)$$

přičemž znaménko plus použijeme, aby bylo v kladné. Zbývá určit polohu maxima, tj. vztah derivovat podle ϑ a položit derivaci rovnu nule

$$\frac{dv}{d\vartheta} = -\sin \vartheta + \frac{\pi + \vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta}} = 0.$$

Po několika přímočarých úpravách se radostně dobereme stavu

$$1 - 2 \frac{\pi + \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta} + \left(\frac{\pi + \vartheta}{\operatorname{tg} \vartheta} \right)^2 = 0,$$

odkud přímo plyne

$$\operatorname{tg} \vartheta = \pi + \vartheta. \quad (2)$$

Tuto rovnici nelze řešit analyticky.

Tímto postesknutím práce fyzika nesmí skončit! Samozřejmě neočekáváme, že by student střední školy měl v malíčku numerické metody. Ale každý má počítač, který takové věci umí provádět. Stačí najít vhodný software (např. Excel), jenž řeší rovnice či kreslí grafy. A dokonce i když člověk s počítačem nekamarádí, nemusí se vzdát, má-li chytrou hlavu. Co třeba následující úvaha. Když se mi podaří najít ϑ tak, že $\operatorname{tg} \vartheta < \pi + \vartheta$ a vzápětí jiné ϑ , ovšem splňující $\operatorname{tg} \vartheta > \pi + \vartheta$, zjistil jsem, v kterém intervalu leží správné ϑ , splňující rovnici (2). Je-li tento interval příliš široký, provedu hledání znovu, ϑ budu ale vybírat z tohoto nového intervalu. Intervaly zužuji tak dlouho, dokud nejsou dostatečně úzké. Je to sice poněkud pracné, ale najdu alespoň přibližnou hodnotu ϑ .

Prakticky je nejlépe rovnici upravit na tvar $\operatorname{tg} \vartheta - \pi - \vartheta = 0$ a sledovat znaménko nové levé strany. Vyberu na začátku interval, pro který platí, že vlevo je levá strana záporná a vpravo kladná (nebo naopak). Pak se podívám na hodnotu levé strany uprostřed intervalu. Je-li kladná, vezmu za nový interval levou polovinu, je-li záporná, vezmu pravou polovinu, a postup opakuji tak dlouho, dokud není interval pro mé účely dostatečně úzký. V každém kroku se zmenší na polovinu, tj. konvergence je rychlá.

Touto metodou se dá získat odhad

$$\vartheta \approx 1,352 \quad \Rightarrow \quad v \approx 4,601,$$

ktej je správným řešením úlohy.

Bylo by dobré se ještě podívat, co to znamená geometricky. Dokážeme, že se vlastně jedná o tečnu k malé kružnici! Je-li totiž onen trojúhelník pravoúhlý (tedy jde-li o tečnu), musí pro něj platit Pythagorova věta. Vyjádřeno rovnicí

$$R^2 = r^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\cos \vartheta} = \frac{R}{r} = v.$$

Nicméně dosadíme-li do našeho výrazu (1) pro v podmínku nulové derivace (2), zjistíme totéž

$$v = \cos \vartheta + \sqrt{(\pi + \vartheta)^2 - \sin^2 \vartheta} = \cos \vartheta + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta} = \cos \vartheta + \sin \vartheta \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \frac{1}{\cos \vartheta}.$$

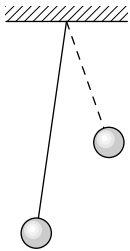
Tedy trojúhelník je pravoúhlý.

Zbývá nám malý restík, totiž diskutovat, co se stane, otočí-li se liška. Liška se nejdřív musí vrátit do své původní pozice. Když je vpravo od ní a kačátko plavalo po tečně, přímkou střed-liška leží vlevo od kačátka. Bude-li se liška vracet, pak kačátko tuto přímkou protne. Máme situaci jako na začátku, jenže kačátko je nyní dále od středu než předtím. Čili liška si uškodila.

Úloha I. 2 ... přistřižené kyvadlo (3 body; průměr 2,43; řešilo 105 studentů)

Malá hmotná kulička visí na konci nehmotného provázku a kmitá svojí vlastní frekvencí f kolem rovnovážné polohy (viz obr. 17). Jaká bude vlastní frekvence f' , pokud zkrátíme provázek na polovinu?

Řešení této úlohy je opravdu jednoduché. Malou hmotnou kuličku na nehmotném závěsu lze v dobrém přiblížení považovat za matematické kyvadlo (poloměr kuličky je malý v porovnání s délkou závěsu, závěs je nehmotný, výchylka je do 5°). Stačilo tedy použít vztah pro frekvenci matematického kyvadla



Obr. 17

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (3)$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu délku zkráceného kyvadla, získáme

$$f' = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l/2}}.$$

Rovnice podělíme

$$\frac{f'}{f} = \frac{1/2\pi \cdot \sqrt{2g/l}}{1/2\pi \cdot \sqrt{g/l}} \Rightarrow f' = f \sqrt{2},$$

čímž získáme hledaný vztah mezi původní a novou frekvencí.

Chceme-li si odvodit (3), rozebereme síly působící na kuličku. Tíhovou sílu rozložíme do směru tečného ke směru pohybu a do směru kolmého na směr pohybu. Normálová složka tíhové síly je kompenzována silou závěsu, takže výslednice sil má nenulovou složku pouze ve směru pohybu kuličky. Druhá impulzová věta říká

$$J\ddot{\varphi} = M,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vzhledem k závěsu ($J = ml^2$) a M je velikost momentu sil působících na kuličku

$$M = mgl \sin \varphi.$$

Dosazením do rovnice druhé impulzové věty získáme (moment dosazujeme se záporným znaménkem, protože působí proti směru pohybu)

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} &= -mgl \sin \varphi, \\ \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Tato rovnice nejde analyticky vyřešit. Uvažujeme-li výchylku malou, je

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

a rovnice (4) získá mnohem jednodušší tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (5)$$

Toto je rovnice harmonických kmitů, jejímž řešením je

$$\varphi = A \cos(\omega t + \alpha_0),$$

kde A je amplituda, α_0 je počáteční fáze a ω úhlová frekvence harmonických kmitů. Abychom zjistili hodnotu ω , dosadíme φ z této rovnice do (5).

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha_0) + \frac{g}{l} A \cos(\omega t + \alpha_0) = 0.$$

Má-li tato rovnice platit pro všechna t , okamžitě dostáváme

$$A\omega^2 = A \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Pro frekvenci platí

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

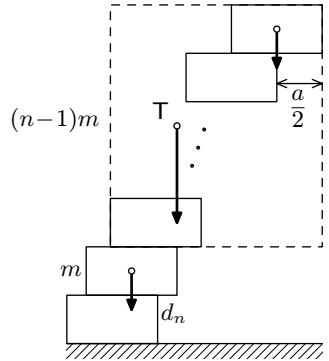
dostali jsme tedy výsledek (3).

Úloha I. 3 ... mistr zedník (4 body; průměr 2,33; řešilo 75 studentů)

Zedník staví cihly na sebe do výšky jako schody. Snaží se je postavit co nejvíce do dálky a ví, že jich může použít, kolik chce. Poradte mu, jak to má provést, aby se „dostal“ co možná nejdále, i když nesmí používat maltu.

Aby soustava cihel nespadla, musí platit, že část soustavy nad libovolnou cihlou musí mít těžiště nad podstavou této cihly. Chceme-li se dostat s cihlami co nejdále, jsme nuceni toto těžiště umístit právě nad boční hranu (ve směru stavění) této cihly.

Vzhledem k výše uvedeným úvahám bude nejhodnější určovat polohy cihel seshora dolů. Máme-li dvojici cihel, budou předcházející úvahy naplněny v případě, že horní cihla bude přecházet právě o $a/2$, je-li a délka hrany podstavy (viz obrázek 18). Nyní uvažme situaci pro $(n+1)$ -ní cihlu shora. Část soustavy nad touto cihlou můžeme rozdělit na cihlu bezprostředně nad ní (tedy n -tou shora) a na zbylou část obsahující $n-1$ cihel. Podle výše zmíněné úvahy jsme soustavu nad n -tou cihlou umístili tak, že její těžiště je nad boční hranou n -té cihly a její hmotnost je $m(n-1)$, kde m je hmotnost jedné cihly. Označme d_n délku, o jakou přechází n -tá cihla přes $(n+1)$ -ní. Má-li být těžiště prvních n cihel nad boční hranou $(n+1)$ -ní cihly, platí



Obr. 18

$$\frac{1}{nm} \left[-m \left(\frac{a}{2} - d_n \right) + m(n-1)d_n \right] = 0 \Rightarrow d_n = \frac{a}{2n}.$$

Budeme-li takto stavět cihly na sebe, dostaneme se do vzdálenosti rovné součtu všech posunutí d_n

$$d = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{6} + \dots + \frac{a}{2n} + \dots = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right).$$

Součet řady v závorce je nekonečně veliký. To lze nahlédnout tak, že si členy řady vhodně uzávorkujeme

$$d = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \right].$$

Součet členů v závorce odhadneme nejnižším členem skupiny

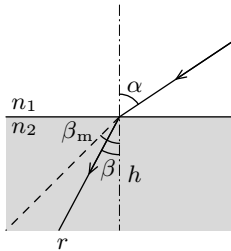
$$d \geq \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{a}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right).$$

Protože těchto skupin můžeme vytvořit nekonečně mnoho, sčítáme nekonečně mnohokrát $1/2$, součet řady je nekonečný. Zedník se tedy může dostat do libovolné vzdálenosti.

Úloha I. 4 ... vodník Děsilko poznává svět (4 body; průměr 1,67; řešilo 69 studentů)

Vodník sedí na dně v čisté klidné vodě svého rybníka a dívá se vzhůru, jeho oči jsou v hloubce $h = 1,5$ m pod povrchem vody. Jak se Děsilkovi jeví prostor nad hladinou? Předpokládejte, že index lomu oka je stejný jako index lomu vody.

Vodník Děsilko uvidí svět podstatně jinak, než kdyby se díval z hladiny. Je to způsobeno lomem světla, ke kterému dochází na rozhraní vzduch-voda. Pro paprsek procházející rozhraním platí Snellův zákon lomu

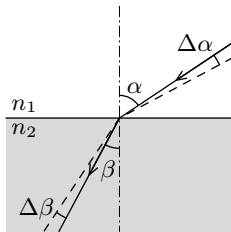


Obr. 19

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta. \tag{6}$$

V tomto případě $n_1 < n_2$, proto se bude paprsek lomit ke kolmici. Z této nerovnosti a Snellova zákona je zřejmé, že existuje určitý kritický úhel β_m , pod kterým se lomí paprsky dopadající na hladinu pod úhlem $\alpha = 90^\circ$. Pokud $\beta > \beta_m$, nastává totální odraz (může se chápat i tak, že paprsky už by se neměly kam lomit, a proto se všechny odrazí). V našem případě $n_1 \doteq 1$ a $n_2 \doteq 1,33$, proto

$$\sin \beta_m = \frac{1}{1,33} \sin 90^\circ \Rightarrow \beta_m \doteq 49^\circ.$$



Obr. 20

Pokud se Děsilko bude dívat pod menším úhlem než $90^\circ - \beta_m$ (měřeno od hladiny), uvidí odraz dna od hladiny, pod větším úhlem uvidí nad hladinu. Svět nad hladinou se mu bude jevit v kruhové okně o poloměru

$$r = h \operatorname{tg} \beta_m \Rightarrow r \doteq 1,7 \text{ m}.$$

Nyní se zamysleme nad tím, jak deformovaný se mu bude jevit svět nad hladinou. Rozumnější a hlavně elegantnější je řešit to pomocí úhlů než pomocí vzdáleností. Člověk (i vodník) totiž vnímá věci jak je daleko.

Kdyby byl Děsilko na hladině, viděl by předmět ve směru úhlu α pod úhlem $\Delta\alpha$ (můžeme ho nazvat úhlovou velikostí). Pod hladinou jej uvidí ve směru úhlu β pod úhlem $\Delta\beta$. Zjevně platí vztah

$$\begin{aligned} n_1 \sin(\alpha + \Delta\alpha) &= n_2 \sin(\beta + \Delta\beta), \\ n_1 (\sin \alpha \cos \Delta\alpha + \cos \alpha \sin \Delta\alpha) &= n_2 (\sin \beta \cos \Delta\beta + \cos \beta \sin \Delta\beta). \end{aligned}$$

Pro malé úhly $\Delta\alpha, \Delta\beta$ platí přibližně $\sin \Delta\alpha = \Delta\alpha$ a $\cos \Delta\alpha = 1$, dostáváme tedy

$$n_1 (\sin \alpha + \Delta\alpha \cos \alpha) = n_2 (\sin \beta + \Delta\beta \cos \beta).$$

Pomocí (6) a vztahu

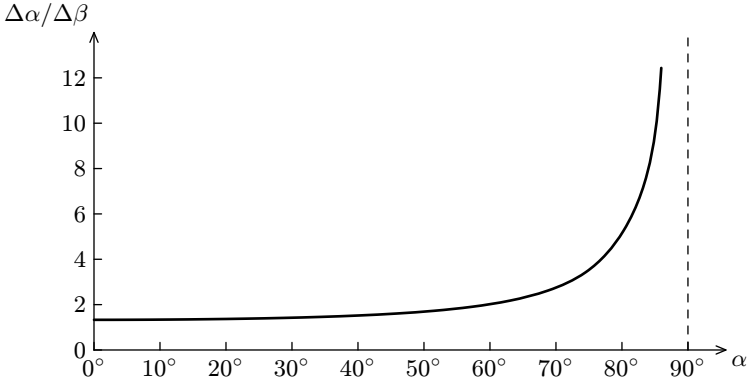
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}$$

můžeme rovnici upravit na tvar

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - n_1^2/n_2^2 \cdot \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Výraz na levé straně je poměr mezi úhly $\Delta\alpha$ a $\Delta\beta$ a zjevně má význam relativní vertikální změny úhlové velikosti předmětu při přechodu z prostředí o indexu lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2 v závislosti na úhlu, pod kterým bychom jej pozorovali bez optického rozhraní. Z výrazu na pravé straně lze vyčíst nejen vlastní zvětšení, ale při hlubším rozboru z něj lze vyčíst i vlastnosti kritického úhlu a vůbec charakteristiku celého lomu.

V našem případě bude docházet ke zmenšení, což se dalo určit i z obrázku. Pro α jdoucí k 90° poroste zmenšení nade všechny meze. Není bez zajímavosti prozkoumat, jak se tato funkce na intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ chová (viz obr. 21).

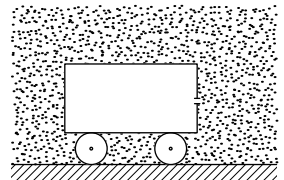


Obr. 21

Úloha I. P ... antiraketa (4 body; průměr 1,60; řešilo 82 studentů)

Uvažme nádobu na kolečkách s otvorem dle obr. 22. Uniká-li stlačený vzduch z nádoby ven, nádoba se pohybuje. Jde o princip analogický raketovým motorům. Představme si nyní opačnou situaci – nádobu, v níž bylo vakuum, umístěnou ve vzduchu, který do nádoby proudí malým otvorem. Jak se bude nádoba pohybovat? Předpokládejte, že se nádoba může po zemi pohybovat bez odporu.

Ujasníme si nejdříve počáteční stav. Molekuly plynu obklopují antiraketu, uvnitř se však nenachází žádná molekula. Jedná se tedy o značně uspořádaný stav, který se určitě nezachová a přejde do konečného, co nejvíce neuspořádaného stavu. Molekuly v něm budou vyplňovat celý prostor okolo a uvnitř antirakety. Takže nás už zajímá jen to, co se děje mezi těmito stavy s antiraketou.



Obr. 22. Antiraketa

Můžeme zvolit různé přístupy k tomuto problému (dohodneme se však, že bez větší chyby můžeme zanedbat případný odpor plynu vůči raketě, protože se bude pohybovat velmi pomalu). O tlaku před otvorem můžeme říci, že je jen nepodstatně menší než tlak v okolí, protože okolí je neohrazené a tlaky se velmi rychle vyrovnávají. Jedná se tedy o kvazistacionární děj.

Tlak plynu

Dohodli jsme se na předpokladu, že antiraketa se bude pohybovat pomalu. To znamená, že tlak před a za antiraketou je bez větší chyby stejně velký, označme ho $p_1(t)$ (tlak v čase t). Zevnitř působí na zadní stěnu tlak $p_2(t)$, na přední stěnu tlak $p_3(t)$, který určitě nebude menší než tlak $p_2(t)$, pokud přední stěnou vlétávají molekuly. V konečném stavu jsou samozřejmě stejně velké, platí $p_2(t) \leq p_3(t)$. Na zadní stěnu působí tedy síla

$$F_z = S[p_1(t) - p_2(t)],$$

v přední stěně je otvor o ploše ΔS , takže výsledná síla je

$$F_p = (S - \Delta S)[p_1(t) - p_3(t)].$$

Porovnáním sil zjišťujeme $F_z > F_p$, protože $S > S - \Delta S$ a

$$p_1(t) - p_2(t) \geq p_1(t) - p_3(t).$$

To znamená, že výsledná síla má směr \mathbf{F}_z a velikost $F(t) = |F_z - F_p|$. Antiraketa se pohybuje otvorem směrem dopředu. Vzhledem k tomu, že tlaky se vyrovnávají, se tato síla s časem zmenšuje. Antiraketa se pohybuje se stále se zmenšujícím zrychlením.

Někteří řešitelé si situaci zjednodušili tvrzením, že před otvorem vzniká podtlak, který antiraketu „vcucává“, což je, jak už víte, zanedbatelné.

Zákon zachování hybnosti

Předpokládáme, že plyn v okolí se nachází v kvazistacionárním stavu, celková jeho hybnost je tedy nulová. Otvorem můžou vyletovat jen molekuly, které mají nenulovou vodorovnou složku hybnosti ve směru k otvoru. Je jich však méně než molekul, které do antirakety vletují, protože uvnitř antirakety je menší koncentrace molekul. Vyletující molekuly mají proto menší hybnost než vletující molekuly. Aby platil zákon zachování hybnosti, musí se antiraketa pohybovat ve směru opačném než vletávající molekuly, to znamená otvorem dopředu.

Postupně se hybnosti molekul, které prolétávají otvorem opačným směrem, vyrovnávají, protože se tlaky postupně vyrovnávají. Antiraketa proto zvyšuje svou hybnost stále méně, zrychlení je stále menší, dokud se tlaky nevyrovnají. Tehdy je rovné nule.

V každém případě je výsledný pohyb antirakety téměř nepostřehnutelný.

Úloha II. 1 ... Mojžíšův zázrak (4 body; průměr 3,60; řešilo 75 studentů)

Mojžíš přistoupil k Rudému moři zvolav: „Rozevři se mořská hladina a nech národ vyvolených projít suchou nohou do zemi zaslíbené.“ Poté vstoupil do mořských vln a ty se rozestoupily. Urcete, jak velkou silou byl obdařen Mojžíš, aby mohl převést Židy přes Rudé moře. Předpokládejte, že moře je široké 1 km a hluboké 20 m.

Hospodin řekl Mojžíšovi: „Proč ke mně úpíš? Pobídní Izraelce, ať táhnou dál. Ty pak pozvedni svou hůl, vztáhni ruku nad moře a rozpoltíš je, a tak Izraelci půjdou prostředkem po suchu.“

Abys mohl Mojžíš vyvést svůj lid z egyptského otroctví, musí jednak rozevřít hladinu Rudého moře a poté ji také udržet. Tím prvním se zabývat nebudeme, předpokládejme, že to provedl velmi rychle a bude nás tudíž zajímat pouze statický případ. Aby se hladina nad nebohými Židy neuzavřela, musí Mojžíš udržet vodní stěny, tj. vyrovnat hydrostatický tlak. Ten má v hloubce x velikost $p = \rho g x$. Síla, kterou je nutné působit na malou část stěny v hloubce x , je

$$dF = p dS = \rho g x l dx,$$

kde l je šířka moře. Po integraci dostaneme

$$F = \rho g l \int_0^h x dx = \frac{1}{2} \rho g l h^2,$$

kde h je hloubka moře. Mojžíšovy paže jsou namáhány silou F .

Pokud nechceme či neumíme integrovat, můžeme říci, že průměrný hydrostatický tlak je $\bar{p} = \rho g h / 2$, a dosadit do

$$F = \bar{p} S = \frac{1}{2} \rho g h l = \frac{1}{2} \rho g l h^2.$$

Číselně vychází asi $F = 2 \text{ GN}$. To odpovídá tíze 3 letadlových lodí USS Enterprise či 5 000 tanků T-34.

Tomáš Bednárik v tom vidí Mojžíšovy svaly, naopak Standa Vosolobě to připisuje duchovní síle, která je nezměřitelná. Jakub Benda a Petr Morávek se pak domnívají, že Mojžíš vlastně sám nic nevykonal, protože jeho ruce vedl Bůh. Hanka Vítová se těž zabývala otázkou, kolik místa zabere jeden Žid, čímž předznamenala jiné temné období národa Davidova.

Úloha II.2 ... kolik drátů na sloupech? (4 body; průměr 3,32; řešilo 47 studentů)

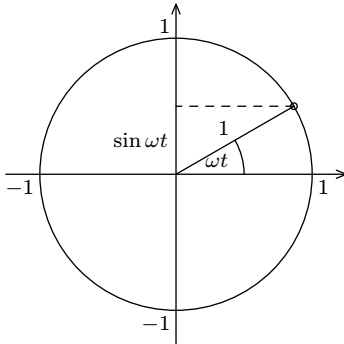
Kolikfázové napětí bychom museli používat, aby efektivní hodnota napětí fáze-zem byla stejná jako efektivní hodnota napětí mezi dvěma sousedními fázemi?

Úloha se dala řešit více způsoby, ukažme si nejprve jeden z těch složitějších.

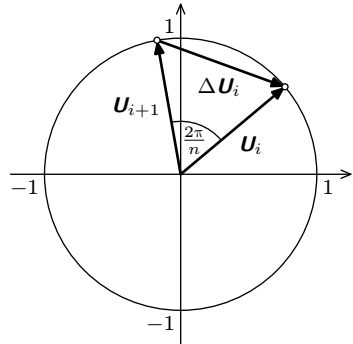
Napětí v síti má sinusový průběh

$$U(t) = U_0 \sin(\varphi + \omega t), \quad \text{kde } \omega = 2\pi f.$$

Funkci sinus však můžeme definovat na jednotkové kružnici (viz obr. 23), proto lze vztahy mezi napětími jednotlivých fází vyjádřit pomocí tzv. fázorového diagramu, což není v podstatě nic jiného než znázornění sinů, které určují časový průběh napětí, na kružnici.



Obr. 23



Obr. 24

Umístíme tedy na kružnici n fázorů tak, aby sousední fázory svíraly úhel $2\pi/n$. Amplituda, popřípadě efektivní hodnota napětí mezi sousedními fázemi je znázorněna fázorem odpovídajícím vektorovému rozdílu $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1}$. Z obrázku 24 plyne, že

$$\Delta U = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Sdružené napětí (napětí mezi sousedními fázemi) je

$$U_s = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Fázové napětí (napětí fáze vzhledem k zemi) je

$$U_f = U_0.$$

(Stále je řeč o amplitudách, resp. efektivních hodnotách napětí.)

Chceme, aby se obě tato napětí rovnala $U_f = U_s$.

$$U_0 = 2U_0 \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Z poslední rovnice dostáváme $n = 6$. Požadavek $n \in \mathbb{N}$ musí být splněn, jinak bychom mohli získat např. něco takového jako $6/5$ -fázové napětí, které sice splňuje rovnici, ale bohužel (nebo naštěstí) neexistuje.

Úloha se dala řešit i jednodušeji. Stačilo si uvědomit, že aby se příslušná napětí rovnala, musí fázory na obrázku výše tvořit rovnostranný trojúhelník. Z toho ale plyne, že fázový posun mezi \mathbf{U}_i a \mathbf{U}_{i+1} (odpovídající úhlu svíranému fázory) musí být 60° neboli $\pi/3$. Do kružnice se tedy vejde 6 fázorů, a proto musíme mít 6 fází. Drátů musí být samozřejmě o 1 víc, neboť potřebujeme ještě „nulák“.

Úloha II.3 ... vrtulník (4 body; průměr 1,32; řešilo 66 studentů)

Abyste se helikoptéra mohla vznášet, musí mít její motor výkon P . Jaký výkon P' by musela mít helikoptéra, která je přesnou poloviční kopií původní helikoptéry, aby se také vznášela? Předpokládejte, že rotor má 100% účinnost.

Jelikož menší vrtulník je poloviční kopií původního vrtulníku, zmenší se všechny jeho rozměry na polovinu. To znamená, že plocha rotoru bude čtvrtinová a objem osminový. Protože je kopie vyrobená ze stejného materiálu, je její hustota stejná jako hustota originálu a pro hmotnost platí

$$m' = \rho V' = \frac{1}{8} \rho V = \frac{1}{8} m.$$

Abyste se vrtulník vznášel, musí motor vynakládat sílu, jejíž svislá složka vykompenzuje gravitační sílu. Menšímu vrtulníku tedy stačí vynaložit osminovou sílu ve srovnání s větším.

Otáčející se listy rotoru vrtulníku překonávají odpor vzduchu a mají takový tvar, aby vzduch odtlačovaly pod sebe. Tím mění hybnost vzduchu – působí tedy na vzduch silou. Vzduch bude podle zákona akce a reakce působit stejně velkou silou opačného směru na listy rotoru. Na úzký proužek listu dS , který má vzdálenost r od středu vrtule, šířku dr a výšku a , tedy vzduch působí silou o velikosti

$$dF = \frac{1}{2} C dS \rho v^2 = \frac{1}{2} C \rho \omega^2 r^2 a dr, \quad (7)$$

kde ρ je hustota vzduchu a ω úhlová rychlost otáčení vrtule. Celková síla působící na vrtuli je pak integrál z (7)

$$F = \frac{1}{6} C \rho a \omega^2 R^3 \sim a \omega^2 R^3, \quad (8)$$

kde R je délka listu vrtule.

Jak jsme si řekli výše, svislá složka této síly působící na malý vrtulník, musí být osminová vzhledem k síle působící na velký vrtulník. Protože je úhel naklonění listů u obou rotorů stejný, znamená to, že i velikost této síly musí být osminová. Bohužel rovnost

$$F' = \frac{1}{8} F \quad (9)$$

neplatí. Jelikož jsou všechny parametry až na ω určeny poměrem zmenšení, vidíme, že menší vrtulník bude muset mít jinou úhlovou rychlost otáčení vrtule. Tu nyní vypočteme dosazením (8) do (9) (za čárkované veličiny rovnou dosadíme jejich vyjádření nečárkovanými).

$$\frac{a}{2} \omega'^2 \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} a \omega^2 R^3 \Rightarrow \omega' = \omega \sqrt{2}.$$

Menší vrtulník se udrží ve vzduchu, pouze když bude $\sqrt{2}$ krát rychleji otáčet vrtulí. Nyní, když známe potřebnou rychlost otáčení rotoru, můžeme spočítat výkon rotorů obou vrtulníků a porovnat je.

$$dP = dFv = \frac{1}{2} C dS \rho v^3 \sim \omega^3 r^3 a dr \Rightarrow P \sim a \omega^3 R^4,$$

pro poměr dostáváme

$$\frac{P'}{P} = \frac{a/2 \cdot 2\sqrt{2} \omega^3 \cdot (R/2)^4}{a \omega^3 R^4} = \frac{\sqrt{2}}{16} = 2^{-7/2}.$$

Vidíme, že menšímu vrtulníku stačí ke vznášení výkon, který je $2^{7/2}$ krát menší než výkon většího vrtulníku.

Úlohu jsme řešili za předpokladu, že Reynoldsovo číslo, které určuje typ proudění, je stejné i pro poloviční model helikoptéry. Koeficient odporu C však na Reynoldsovu číslu závisí, při některých hodnotách dosti významně.

Úloha II.4 ... zoufalí trosečníci (4 body; průměr 1,32; řešilo 31 studentů)

Trosečníci na severním pólu si chtějí zpříjemnit chvíli před blížící se smrtí posledním šálkem kávy. Poradte jim, jak si mají ohřát vodu, aby se jí dostalo na co nejlvíce z nich. Se svými skromnými technickými prostředky mohou ohřev realizovat následujícími způsoby:

- Akumulátor o vnitřním odporu $2R$ přímo připojí k topné spirále o odporu R .
- Tentýž akumulátor připojí do série s topnou spirálou a kondenzátorem. Pokaždé, když se kondenzátor nabije, jej z obvodu vytáhnou a připojí obráceně.
- Tímtež akumulátorem budou střídavě nabíjet kondenzátor a vybijet ho přes topnou spirálu.

Naši trosečníci si na severní pól dovezli vskutku nadstandardní vybavení – mají akumulátor, kondenzátor a topnou spirálu. Jako nejjednodušší způsob, jak ohřát vodu, se jeví využít pouze akumulátor a topnou spirálu. Ale bude tento způsob neúčinnější? Účinnosti ve třech možných zapojeních si rozeberme podrobně. Počítáme přitom teoretické účinnosti, tzn. skutečné účinnosti zahrnující ztráty na jednotlivých spotřebičích jsou ještě menší.

- Energie zdroje se spotřebuje na zahřátí zdroje o odporu $2R$ a topné spirály o odporu R . Akumulátor a spirála jsou zapojeny do série. Oběma tak prochází stejný proud a toto zapojení funguje jako napěťový dělič. Napětí se rozdělí v poměru odporů. Na akumulátoru bude napětí $2U/3$ a na spirále $U/3$. Výkon se rozdělí ve stejném poměru. U tohoto zapojení jsou tedy trosečníci schopni využít $1/3$ možného výkonu.
- Projdeme si společně jeden cyklus od okamžiku, kdy je na kondenzátoru nulové napětí, do okamžiku, kdy je opět téměř vybitý. Po připojení napájení bude obvodem procházet proud $I = U/3R$ až do chvíle, než se kondenzátor nabije na napětí U . Zdroj vykonal práci CU^2 . Z toho energii $CU^2/2$ získal kondenzátor a zbylá $CU^2/2$ se rozdělila v poměru 2:1 mezi akumulátor a topnou spirálu. Na spirálu tedy připadá $CU^2/6$.

Poté kondenzátor z obvodu vytáhneme a připojíme obráceně. Nyní kondenzátor podporuje zdroj ve vykonání práce CU^2 . V obvodu je celková energie $3CU^2/2$, protože do celkové energie musíme započítat i energii nabitého kondenzátoru $CU^2/2$. Po skončení cyklu je kondenzátor vybitý, tj. jeho energie je nulová. Všechna energie se podle zákona zachování energie musela rozdělit mezi akumulátor a spirálu. Obdobně jako v a) v poměru 2:1. V této části cyklu získala topná spirála energii $CU^2/2$.

Celková energetická bilance nám říká, že během jednoho cyklu zdroj dodá energii $2CU^2$ a spirála přijme $2CU^2/3$. Výkon je tedy stejný jako v části a), a to $1/3$ celkového výkonu. Samozřejmě bychom měli vzít v úvahu, že při tomto zapojení budou ztráty větší než při zapojení a).

- Nejdříve zapojíme do obvodu pouze akumulátor a kondenzátor. Z energie odebrané z akumulátoru získá kondenzátor energii $CU^2/2$. Po nabití kondenzátor odpojíme a necháme jej vybijet přes topnou spirálu. Té předá kondenzátor svou energii. Tento způsob je neúčinnější, protože se při něm na spirále $1/2$ možné energie přemění na teplo.

Úloha II. P ... nečekaná překážka (5 bodů; průměr 1,63; řešilo 51 studentů)

Řidič automobilu jedoucího rychlostí v náhle spatří, že jeho vůz směřuje doprostřed betonové zdi šířky $2d$ ve vzdálenosti l . Součinitel klidového tření mezi pneumatikami a vozovkou je f . Poradte řidiči, co má dělat, aby se vyhnul srážce se zdi. Rozhodněte, pro jakou velikost rychlosti je to ještě možné.

Podobně jako u minulých úloh (např. ošklivé kačátko) šlo v této úloze o nalezení nějaké „optimální“ trajektorie. V praxi bychom často rádi znali skutečně optimální řešení, ale mnohdy se spokojíme i s řešením, které je pouze lepší než ostatní. To je základem rozmanitých přibližných metod, se kterými se určitě setkáte coby fyzici či inženýři. Hledání nejlepšího řešení je obecně pracné, musíme si vždy rozvážit, zda nám zlepšení výsledku stojí za vynaloženou námahu.

Podívejme se nejprve, kterak se může auto pohybovat. Ze zadání víme, že koeficient tření mezi pneumatikami a zemí je roven f . Proto největší přípustné zrychlení (zpomalení) získáme z rovnice $ma = mgf$, tj.

$$a = fg.$$

Auto může brzdit, zrychlovat či zatáčet libovolně, ovšem nejvýše s tímto zrychlením.

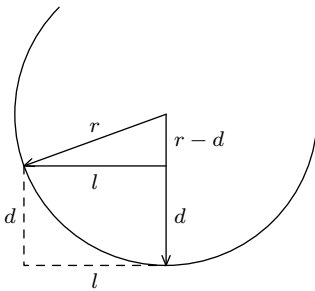
Dále je jasné, že stihne-li auto zabrzdit dřív, než narazí do zdi, může objet libovolnou zeď. To nastane, platí-li $l > vt - at^2/2$, kde čas t odpovídá úplnému zabrzdění, čili $v = at$. Odtud $l > v^2/2a$ znamená pro řidiče jistou záchranu.

Abychom potěšili ty, kteří řešili i pohyb po kružnici, rozebereme jej také. Zřejmě nejmenší poloměr takové kružnice se dostane z maximální velikosti třecí síly, která je zároveň silou dostředivou. Odtud

$$\frac{v^2}{r} = fg.$$

Největší přípustný poloměr kružnice odpovídá kružnici, která se zdi právě dotkne. Z obrázku a Pythagorovy věty vidíme vztah $r^2 = l^2 + (r - d)^2$, tedy

$$r = \frac{l^2 + d^2}{2d}.$$



Obr. 25

Po kružnici má smysl jet jen tehdy, když rychlost, odpovídající tomuto poloměru, je větší než maximální rychlost, kdy je auto ještě schopno zabrzdit. Poněvadž poloměr je při stejné rychlosti roven dvojnásobku brzdné dráhy, odpovídá to podmínce $r > 2l$. Tímto získáváme kvadratickou nerovnici

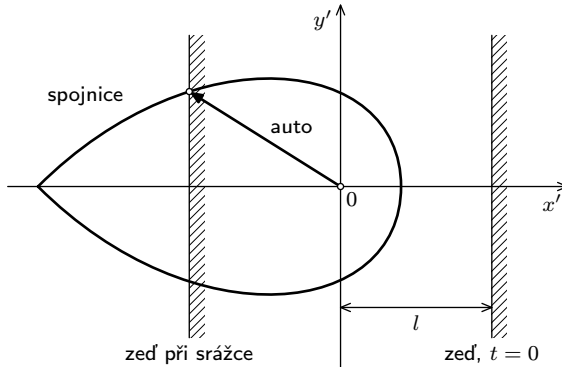
$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 - 4\frac{l}{d} + 1 > 0,$$

která je splněna pro $l/d > 2 + \sqrt{3}$ a $l/d < 2 - \sqrt{3}$. Zde si však musíme uvědomit, že druhé řešení jest irelevantní, což většina z vás, kteří jste se dostali až sem, neudělala. Pak totiž pro šířku zdi platí $d > r$, tedy kružnice kraj zdi protne až na „zpáteční cestě“; předtím už jednou zeď protla.

Nyní prozkoumáme, jaká je nejlepší možná strategie. Použijeme trik motivovaný následující úvahou. V souřadnicové soustavě spojené se zemí se nám pohyb auta komplikuje tím, že v ní má auto určitou počáteční rychlost, přičemž není geometricky jasné, jak přesně k pohybu přispělo zrychlování a jak původní rychlost. Trik spočívá ve sledování pohybu ze souřadnicové soustavy, kde je auto na počátku v klidu. V této soustavě je situace jednodušší, například rovnoměrnému zrychlení v jednom směru odpovídá přímka, což je příjemné. Zeď se tam pohybuje rovnoměrně směrem k autu. Nechť se zeď pohybuje doleva, na začátku měla x -ovou souřadnici rovnou l a v čase t bude tato souřadnice rovna $l - vt$. Předpokládejme, že zeď je velmi velká (tedy že určitě najde objekt).

Zkoumejme pohyby auta s konstantním zrychlením v jednom směru, tj. po přímkách, jak už bylo řečeno. Když se auto po nějaké přímce pohybuje, někde se s tou velkou zdí srazí. V naší rovině si tento bod označme tečkou. Když budeme měnit směr přímky, budeme dostávat různé tečky, jejichž spojením vznikne uzavřená spojitá křivka („kapka“). Spojitost plyne z očekávání, že když malinko změním směr, posune se příslušný průsečík taky o malinko (bez skoků). Kdybychom přímku otočili o 360° , vrátíme se do původního průsečíku, což představuje uzavřenost křivky tvořené průsečíky.

Úlohu máme vyřešenou, když si uvědomíme, že autíčko nemůže bez srážky se zdí protnout tuto křivku. Když se totiž autíčko pohybovalo jinak než přímo, do příslušného bodu křivky se nutně dostane později, ale v tu dobu tam už byla zeď. Proč později? Přímka odpovídá veškerému úsilí vynaloženému na zrychlování v daném směru. Po obecné křivce se zrychlení vynakládá i do jiných směrů, takže na náš směr zbyde méně. Nyní nám bude zřejmé následující tvrzení. Největší zeď, kterou jde objet, odpovídá maximu průsečíkové křivky.



Obr. 26

Shrňme nabyté poznatky: dokázali jsme, že nejvýhodnější je zrychlovat s konstantním zrychlením v nějakém pevném směru a že tento směr odpovídá maximu té křivky. Nyní zbývá najít jeho polohu. To lze provést standardními metodami (anulováním derivace). Má to ovšem jeden drobný háček, a sice pro polohu maxima obdržíme rovnici 4. stupně, kterou sice jde vyřešit v uzavřeném tvaru (tj. pomocí odmocnin narozdíl od rovnic vyšších stupňů), ale dost složitě. Nicméně existuje i průchodnější postup.

Vrátíme se zpátky na zem, kde zeď stojí a auto brzdí. Teď jsme bohatší o informaci, jak máme jet, ještě však nevíme, kam máme jet. Za tím účelem musíme vysledovat, co v této soustavě představují přínky v předchozí soustavě. Už v prvním ročníku jste se dozvěděli o vrhu šikmém, kde zrychlení má konstantní směr dolů. Trajektorií je parabola se všílou osou. Analogicky v naší situaci bude trajektorií parabola s osou ve směru zrychlení. Když budeme měnit směr, budeme dostávat různé paraboly. Parametrická rovnice takové paraboly je

$$x = vt - \frac{1}{2}a \cos \varphi t^2, \\ y = \frac{1}{2}a \sin \varphi t^2.$$

Nyní použijeme myšlenku hledání maxim pomocí derivací. Jak víte, extrémů odpovídá nulová derivace. To ale znamená, že při malém posunutí od výchozího bodu se hodnota funkce v prvním přiblížení nezmění, neboť tečna grafu, jež jej aproximuje v okolí tohoto bodu, má nulový sklon. Tuto myšlenku použijeme následujícím způsobem. Nechť překážka stojí ve vzdálenosti x . Chceme najít parabolu, která je pro toto x nejvýše, přičemž různé paraboly dostáváme různou volbou úhlu φ – směru zrychlení. Máme-li takovou parabolu, pak při malé změně úhlu φ

o $d\varphi$ se podle úvahy výše výška paraboly v prvním přiblížení nesmí změnit. Můžeme změnu výšky explicitně spočítat a položit ji rovnou nule.

Malá potíž spočívá v tom, že aby zůstalo x pevné, musí se změnit čas. Nechť se úhel změní o $d\varphi$ a čas, kdy má autíčko souřadnici x , z t na $t + dt$. Nyní napíšeme rovnici, která vyjadřuje, že se x nezměnilo, tedy rovnici pro x -ovou složku změny paraboly. Platí

$$\begin{aligned} dx &= v(t + dt) - \frac{1}{2}a(\cos \varphi + d \cos \varphi)(t + dt)^2 - vt + \frac{1}{2}a \cos \varphi t^2 = \\ &= (v - at \cos \varphi) dt + \frac{1}{2}a \sin \varphi t^2 d\varphi, \end{aligned}$$

neboť $d \cos \varphi = -\sin \varphi d\varphi$. Požadujeme $dx = 0$, což nám dává vztah mezi dt a $d\varphi$

$$dt = \frac{\frac{1}{2}a \sin \varphi t^2}{at \cos \varphi - v} d\varphi.$$

Napišeme rovnici pro změnu y , kam posléze dosadíme za dt z právě získaného vztahu

$$dy = \frac{1}{2}a (\sin \varphi + d \sin \varphi) (t + dt)^2 - \frac{1}{2}a \sin \varphi t^2 = a \sin \varphi t dt + \frac{1}{2}a \cos \varphi t^2 d\varphi,$$

neboť $d \sin \varphi = \cos \varphi d\varphi$. Podmínka maxima je $dy = 0$, což po dosazení představuje rovnost

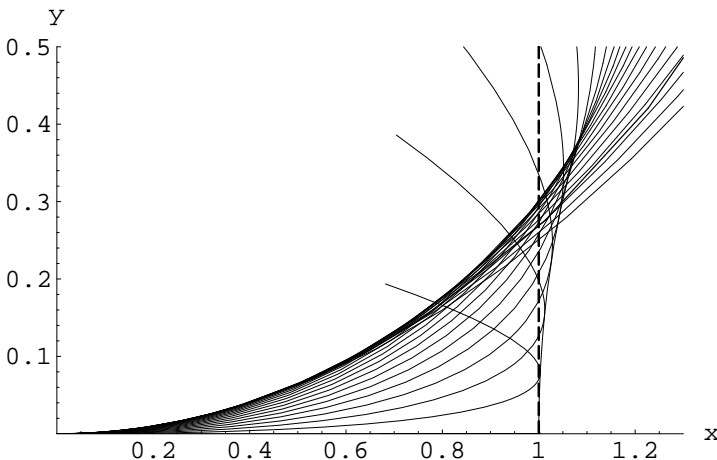
$$v \cos \varphi = at.$$

Všimněte si, že tato podmínka je ekvivalentní tvrzení, že nejvyšší bod je roven vrcholu nějaké paraboly, kde je rychlost kolmá na zrychlení.

Získali jsme možnost napsat parametrickou rovnici křivky, která je pro každé x stejně vysoká jako nejvyšší parabola (tzv. obalová křivka). Můžete ji vidět na obrázku 27 (silně vytažená křivka). Parametrickou rovnici této křivky získáme dosazením posledního vztahu do rovnic paraboly

$$\begin{aligned} x &= \frac{v^2}{a} \cos \varphi - \frac{v^2}{2a} \cos^3 \varphi, \\ y &= \frac{v^2}{2a} \sin \varphi \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Označíme-li $v^2/2a$ (což, jak víme, je brzdná dráha) jako p , pak vidíme, že pro danou překážku vše závisí pouze na tomto parametru a nikoliv na rychlosti a zrychlení odděleně.



Obr. 27

Je-li vzdálenost zdi od počátku l , pak, lze-li ji objet, musí platit $y > d$. Chceme najít maximální možný parametr p , pro který danou zeď lze objet. To odpovídá maximální možné počáteční rychlosti, případně minimálnímu možnému zrychlení. Naše křivka se bude při zvětšování p evidentně „přimačkávat“ k ose x . Při takovém pohybu někdy protne okraj zdi a to odpovídá hledanému maximálnímu p . Zbývá jej najít z rovnice křivky, kde položíme $x = l$ a $y = d$. Podělíme-li rovnice, získáme

$$\frac{d}{l} = \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{2 \cos \varphi - \cos^3 \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

jak plyne z vyjádření $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi$. Ekvivalentně $1 / \cos^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$,

$$2 \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{l}{d} \operatorname{tg} \varphi + 1 = 0.$$

Má-li tato rovnice kladné řešení, lze zeď ještě objet. Bude tomu tak zřejmě pro

$$D = \frac{l^2}{d^2} - 8 \geq 0,$$

alespoň jeden kořen pak musí vyjít větší než nula, neboť u $\operatorname{tg} \varphi$ stojí záporné číslo. Přicházíme k závěru, že danou překážku lze objet, když je poměr její pološířky ku vzdálenosti od autíčka menší než $1/\sqrt{8}$.

Podotýkám, že jsme požadovali $l < p$. Měli bychom tedy ověřit, platí-li právě odvozená podmínka, dostaneme-li doopravdy $p > l$. Za tím účelem přepíšeme rovnici pro l do tvaru

$$\frac{l}{p} = \frac{l}{d} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Levá, a tedy i pravá strana má být menší než 1. Dosadíme za $\operatorname{tg} \varphi$ z výše uvedené kvadratické rovnice, kde volíme znaménko + (znaménko – odpovídá protnutí sestupné části obalové křivky a nás nezajímá) a analyzujeme pravou stranu. Takto bychom, nejspíše numericky, zjistili, že musí platit $l/d > 2,844$, zatímco naše původní kritérium říká $l/d > \sqrt{8} \approx 2,828$.

Shrňme vše, co jsme vydedukovali. Nechť máme nějakou překážku v nějaké vzdálenosti. Objekt ji, aniž bychom museli být schopni zastavit, lze pouze, pokud je splněna výše uvedená podmínka, respektive její zpřesněná varianta. Pak můžeme dopočítat maximální možný parametr p , tedy maximální možnou vstupní rychlost pro dané zrychlení anebo minimální potřebné zrychlení pro danou rychlost. V opačném případě se jednoznačně vyplatí jet přímo ke zdi a brzdit. Následky srážky totiž určuje hybnost ve směru kolmém na zeď a tu v okamžiku srážky učiníme nejmenší, budeme-li v tomto směru brzdit.

Zde je již možné přestat s řešením. Splnili jsme to, co jsme si na začátku předsevzali; nemáme sice přesný vzoreček, který by nám pro danou překážku umožnil rozhodnout, lze-li ji objet, ale máme dobrý odhad a jsme případně schopni numericky ověřit, jestli se nemýlíme.

Úloha III. 1 ... teplota na Zemi (4 body; průměr 2,62; řešilo 53 studentů)

Průměrná teplota na povrchu Země je $T = 287\text{ K}$. Jaká bude nová průměrná teplota T' , pokud se střední vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zkrátí o 1 %?

Předpokládejme, že Slunce izotropně vyzařuje energii, což způsobuje, že na Zemi je větší teplota, než je teplota vakua (asi 2,7 K). Má-li Slunce celkový zářivý výkon Q , je ve vzdálenosti r příslušná intenzita

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Výkon připadající na povrch Země je potom $P = ES$, kde S je plošný obsah řezu Zemí. Pokud se vzdálenost mezi Zemí a Sluncem zmenší o 1 %, zvětší se příslušný výkon

$$P' = E'S = \frac{Q}{4\pi r'^2} S = \frac{Q}{4\pi(0,99r)^2} S \doteq 1,02P.$$

Abychom zjistili, jak se změní teplota na Zemi, musíme znát vztah mezi zářivým výkonem a teplotou. Ve stacionárním stavu (teplota na Zemi se nemění) se musí přijatá energie od Slunce rovnat vyzařené energii. Pro zjednodušení předpokládejme, že se Země chová jako černé těleso. Pro zářivý výkon potom platí Stefanův-Boltzmannův vztah $P = \sigma T^4$, kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta. Z toho již snadno dopočítáme novou teplotu T' .

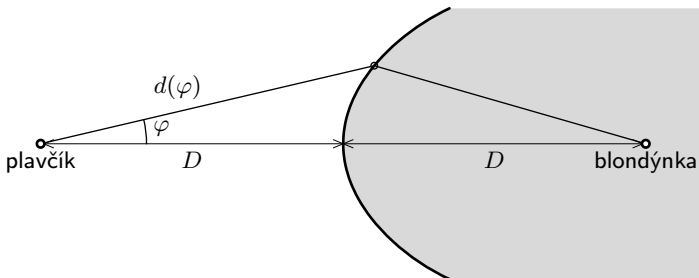
$$\frac{P'}{P} = \frac{T'^4}{T^4} \doteq 1,02 \quad \Rightarrow \quad T' \doteq \sqrt[4]{1,02} T \doteq 1,005T.$$

Pro dosažení dostaneme $T' = 288,4\text{ K}$, což je změna asi o 1,4 K.

Úloha III. 2 ... pobřežní hlídka (4 body; průměr 2,50; řešilo 32 studentů)

Plavčík stojící ve vzdálenosti D od břehu moře náhle spatří topící se bujnou blondýnku, která doplávala do vzdálenosti D od břehu (viz obr. 28). Poradte mu, jak se k ní má co nejrychleji dostat, pokud rychlost jeho běhu je v a rychlost plavání $v/2$. Vzdálenost okraje moře od plavčíka závisí na úhlu φ následujícím předpisem

$$d(\varphi) = \frac{1}{3}D(8 \cos \varphi - 2 \sqrt{16 \cos^2 \varphi - 12 \cos \varphi - 3} - 3).$$



Obr. 28. Na pláži

Ujasněme si nejdříve, pro jaké úhly má daný tvar pobřeží smysl. Zavedme substituci $x = 8 \cos \varphi - 3$, vztah ze zadání se zjednoduší na

$$d = \frac{D}{3}(x - \sqrt{x^2 - 21}). \quad (10)$$

Řešení můžeme tedy hledat pro $x \geq \sqrt{21}$, což odpovídá podmínce $\cos \varphi \geq (3 + \sqrt{21})/8$. Úhel φ se tedy může pohybovat v intervalu $(-18^\circ 35'; +18^\circ 35')$.

Je zřejmé, že se ideální dráha plavčíka bude skládat ze dvou úseček – nejdříve uběhne dráhu d po souši a poté uplave dráhu l k blondýnce. Vzdálenost l můžeme vyjádřit z kosinové věty

$$l = \sqrt{d^2 + 4D^2 - 4Dd \cos \varphi}.$$

Vytkneme d a za $\cos \varphi$ dosadíme z uvedené substituce.

$$l = d \sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{D(x+3)}{2d}}.$$

Vztah (10) upravíme

$$\left(x - \frac{3d}{D}\right)^2 = x^2 - 21 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3d}{2D} + \frac{7D}{2d}$$

a dosadíme do předchozí rovnice

$$l = d \sqrt{1 + \frac{4D^2}{d^2} - \frac{3}{4} - \frac{7D^2}{4d^2} - \frac{3D}{2d}} \quad \Rightarrow \quad 2l = d \sqrt{\left(\frac{3D}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{3D}{d}\right) + 1}.$$

V posledním výrazu uvidíme dobře známý trojčlen $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$, a protože $3D/d > 1$, můžeme jej odmocnit.

$$2l = 3D - d.$$

Běží-li plavčík rychlostí v a plave-li rychlostí $v/2$, bude celková doba nutná k záchraně blondýnky

$$t = \frac{d}{v} + \frac{2l}{v} = \frac{d + 3D - d}{v} = \frac{3D}{v}.$$

Dokázali jsme tedy, že výsledná doba na úhlu φ vůbec nezávisí, plavčík může vystartovat pod libovolným úhlem ze zmíněného intervalu.

Úloha III. 3 ... nabitá krychle (4 body; průměr 2,40; řešilo 5 studentů)

Jaký je poměr hodnot elektrostatického potenciálu ve vrcholu a ve středu nevodivé rovnoměrně nabitě krychle? Celkový náboj na krychli je Q a délka strany krychle je a . Předpokládejte, že elektrický potenciál v nekonečnu je nulový.

Je jasné, že vypočítat potenciály od tak složitého (rozuměj nikoliv sféricky symetrického) tělesa, jako je krychle, přímým výpočtem není jednoduché. Pokusíme se proto vymyslet nějaký trik, kterým bychom mohli úlohu vyřešit na jeden řádek.

Jak známo, potenciál je aditivní veličina, což znamená, že máme-li nějaké náboje, které nám vytvoří potenciál φ_1 , a nějaké jiné náboje, jež vytvoří potenciál φ_2 , všechny náboje dohromady vytvoří potenciál $\varphi_1 + \varphi_2$. Klíč k řešení je představit si krychli jakožto objekt složený z osmi menších krychlí. Tyto krychle se dotýkají vrcholy uprostřed „velké“ krychle. Teď je již zřejmé, že stačí vypočítat, kterak závisí potenciál v rohu krychle na velikosti krychle. Doopravdy, potenciál uprostřed velké krychle si představíme jako sumu potenciálů v rozích malých krychlí (těch je osm). Zapsáno rovnicí

$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}}$$

Provedeme následující úvahu. Náboje na krychli se v podstatě rozmístí do uzlů krystalové mřížky a potenciál můžeme napsat jako součet potenciálů od jednotlivých nábojů. Potenciál

od jednoho náboje je, jak známo, $\varphi \sim 1/r$ (znak \sim značí úměrnost, vystupuje tam totiž ještě nepodstatný faktor $1/4\pi\epsilon_0$). Sčítat budeme přes uzly mřížky

$$\varphi \sim \sum \frac{q_i}{r_i}.$$

Nyní tuto krychli roztáhneme do všech stran, dokud strany nebudou měřit dvakrát tolik. Všechny vzdálenosti se dvakrát zvětší. V rohu nyní bude potenciál dvakrát větší krychle, ovšem s osminovou nábojovou hustotou, neboť celkový náboj na krychli při roztahování zůstal zachován a musel se rozdělit mezi osm malých krychlí. Nedostatek vyřešíme jednoduše tak, že do uzlů nové mřížky posadíme náboj osmkrát větší. Vzorec pro potenciál dvakrát větší krychle jest tudíž

$$\varphi_{2x} \sim \sum \frac{q'_i}{r'_i} = \sum \frac{8q_i}{2r_i} = 4 \cdot \sum \frac{q_i}{r_i} \sim 4\varphi.$$

Potenciál dvakrát větší krychle je čtyřikrát větší. Všimněme si, že celý postup nezávisí na konkrétním tvaru tělesa (pro potenciál uprostřed galaxie a uprostřed dvakrát větší galaxie (obecně pro geometricky podobné situace) by nám vyšlo to samé). Dále si uvědomme, že za relevantnost triku vděčíme malé mřížkové konstantě — pouze při malých vzdálenostech sousedů můžeme nahradit hustou mřížku s náboji q řídkou mřížkou s náboji $8q$. Ti, co umějí integrovat, si jistě dosadí do příslušného integrálu

$$\varphi \sim \int \frac{\rho}{r} dV$$

a vyjde jim to samé; jejich mřížka je nekonečně hustá, mají tzv. kontinuum.

Nyní již můžeme napsat výsledek

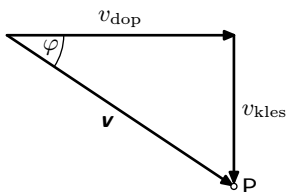
$$\varphi_{\text{krychle střed}} = 8 \cdot \varphi_{\text{poloviční krychle vrchol}} = 2 \cdot \varphi_{\text{krychle vrchol}},$$

což bylo spočítat.

Úloha III. 4 ... s větroněm přes kanál (4 body; průměr 2,33; řešilo 33 studentů)

Jeden známý letec se rozhodl ve větroni přeletět kanál La Manche. V Calais se nechal vyléci do výšky $h = 3$ km a z této výšky se přímým klouzavým letem vypravil do Anglie. Jako dobrý pilot ví, kterak při ustáleném letu vypadá závislost klesací rychlosti v_{kles} na dopředné rychlosti v_{dop} (viz graf na obr. 6). Poradte mu, jak rychle má letět, aby doletěl co nejdál.

Když je ve třech čtvrtinách cesty do Anglie, začne od ostrovů fučet silný vítr o rychlosti $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Rozhodněte, jak rychle má letět nyní, aby se dostal co nejdál. Jaká by musela být rychlost větru, aby mu znemožnila přistát na pevnině, případně aby mu umožnila návrat do Francie?



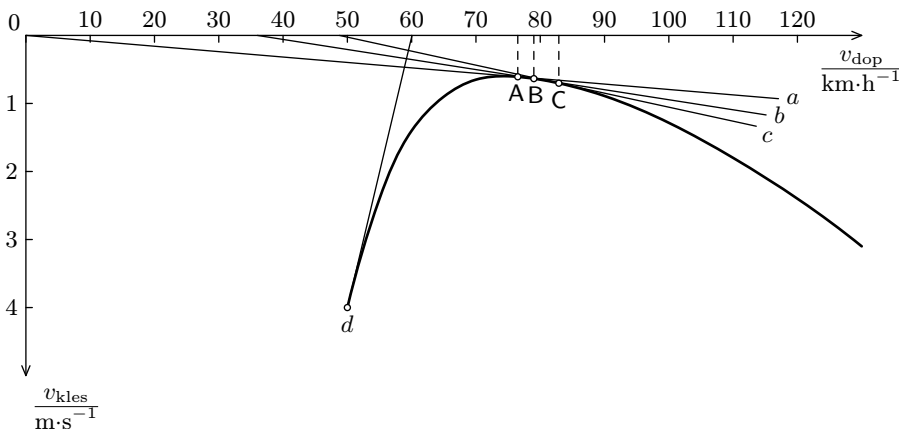
Obr. 29

Řešení této úlohy je založeno na pozorování, jež mnoho z vás skutečně zpozorovalo, a sice že bodu $P = (v_{\text{dop}}, v_{\text{kles}})$ křivky odpovídá klesací úhel φ , jež splňuje rovnici $\text{tg } \varphi = v_{\text{kles}}/v_{\text{dop}}$. Chceme-li z dané výšky doletět co nejdál, je zřejmé nutné klesat pod co možná nejmenším úhlem. Jak si lze snadno uvědomit, vedeme-li přímkou z počátku souřadnic (toho skutečného počátku, tj. $(0, 0)$, na obrázku není), pak úhel, jenž svírá s osou x , je roven právě φ (pohledte na obrázek 29).

Proto chceme najít přímkou s co možná nejmenším sklonem, ovšem protínající křivku. Vezmeme nějakou přímkou procházející počátkem a budeme ji otáčet. Nejprve bude protínat křivku ve dvou bodech, pak v jednom a nakonec vůbec. (Toto obecně

neplatí. Je nutné, aby se křivka „zatačela“ pořád na stejnou stranu.) Správná volba je tudíž přímka protínající křivku v jednom bodě – tečna. Na následujícím obrázku se jedná o přímku a .

Měli jsme za úkol zjistit, jakou rychlostí v takovém případě poletíme. Jednoduše odečteme x -ovou souřadnici průsečíku. Najdeme $v \approx v_{\text{dop}} \approx 76 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ (zanedbáváme malý úhel klesání). V dalším budeme potřebovat znát i tangens úhlu klesání. Ten odměříme nejlépe tak, že zvolíme bod na příslušné přímce, odečteme jeho souřadnice, a vypočítáme $\text{tg } \varphi$ podle vzorce výše. Nalezneme $\text{tg } \varphi \approx 0,0273$.



Obr. 30

Rozmysleme si, co se stane, když začne foukat protivítr. Naše křivka udává do souvislosti složky rychlosti vůči proudícímu vzduchu. Za bezvětří je křivka platná i vůči zemi, avšak při protivětru ji musíme upravit. Zřejmě nezmění svůj tvar, celá změna se redukuje na posunutí počátku souřadnic ve směru v_{dop} o rychlost větru, neboť letadlo letící stejnou rychlostí vůči vzduchu letí pomaleji vůči zemi. Nyní provedeme úplně stejnou proceduru jako v předchozím bodě, pouze tečnu povedeme z nového počátku souřadnic. Na obrázku tečně odpovídá přímka b . Nejvýhodnější rychlost odečteme rovnu asi $79 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Nyní vypočítáme, v jaké výšce se bude větroň nalézat ve třech čtvrtinách cesty do Anglie. Na mapě můžeme odměřit šířku Kanálu, jenž je okolo Calais široký asi 40 km . Odtud výška větroně 10 km od pobřeží Anglie bude $h' = 3 \text{ km} - \text{tg } \varphi \cdot 30 \text{ km} \approx 2,2 \text{ km}$. Má-li vítr zabránit větronci dosáhnout břehu, musí fučet tak rychle, aby úhel klesání letadla byl větší než úhel nutný k dosažení břehu. Tento označme α a platí pro něj vztah $\text{tg } \alpha = h'/10 \text{ km}$. Odtud $\text{tg } \alpha \approx 0,22$. Jak jsme již podotkli, úhlu klesání odpovídá úhel přímky vedené počátkem souřadnic a bodem křivky, ve kterém se letadlo nachází. Nejmenší úhel odpovídá tečně. Proto mezní rychlost větru bude taková, že tečna ke křivce vedená z nového počátku souřadnic bude mít právě nalezenou směrnicí. Jelikož směrnicí známe, musíme najít bod na křivce, ve kterém má tečna tutéž směrnici. To se snadno zkonstruuje podobně, jako kreslíme rovnoběžky pomocí dvou pravítek. Na obrázku situaci vyjadřuje přímka c . Rychlost větru je x -ová souřadnice průsečíku tečny s osou x , tedy $\approx 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Můžete si snadno ověřit, že se větroň může vrátit do Francie při libovolném větru, jinými slovy pilot nebyl zas až takový dobrodruh.

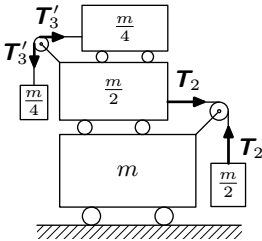
Jako bonus zjistíme, kdy větroň může ve vzduchu couvat. Po krátkém přemýšlení si uvědomíme, že větroň musí letět co nejpomaleji a protivítr musí být co nejrychlejší. Odtud už snadno odvodíme, že přímka d na obrázku, tedy tečna ke křivce v nejkrajnějším bodě, řeší úlohu.

Křivka v zadání byla dosti plochá – odtud plyne jen malý rozdíl v optimálních rychlostech. I když se od křivek výkonných větroňů příliš neliší, přeci jen jsme situaci podcenili, což vám ztížilo (znepřesnilo) konstrukci.

Úloha III. P ... věž z vozíčků (5 bodů; průměr 1,87; řešilo 23 studentů)

Určete zrychlení prvního a stého vozíčku (počítáno od země) na obrázku 31. Vozíčků je nekonečně mnoho, na obrázku jsou zakresleny jen první čtyři. Spodní vozíček má hmotnost m , další vozíček, který po něm jezdí, a závaží, se kterým je spojen, má hmotnost $m/2$. Podobně další vozíček a závaží má hmotnost $m/4$ atd. Předpokládejte, že závaží jsou připevněná k vozíčkům, tj. že se ve svislém směru neodchylují. Tření mezi jednotlivými vozíčky zanedbejte.

Pro každý vozíček ze soustavy (mimo první) bude platit stejná pohybová rovnice, tedy až na indexy, které nám říkají, o který vozíček, resp. zrychlení jde. Všechna zrychlení orientujeme tak, že jejich souřadnice a_n budou kladné.



Obr. 31

Zabývejme se nyní tím, jaké síly působí na n -tý vozíček o hmotnosti $m_n = m/2^{n-1}$ (vystupuje zde $n-1$, neboť chceme, aby první vozíček měl hmotnost dle zadání rovnu m). Souřadnici zrychlení tohoto vozíčku označme a_n . S tímto vozíčkem se zároveň pohybuje i závaží o hmotnosti $m_{n+1} = m/2^n$. Dále na n -tý vozíček působí dvě síly, tahová síla o velikosti T_n a síla o velikosti T'_{n+1} , která se přenáší přes kladku vozíčku. T'_{n+1} je reakcí na T_{n+1} a je stejně velká. Nadále budeme všude psát jen T_{n+1} namísto T'_{n+1} . Pohybovou rovnici můžeme prozatím zapsat takto

$$\left(\frac{m}{2^{n-1}} + \frac{m}{2^n}\right) a_n = T_n + T_{n+1}. \quad (11)$$

Nyní potřebujeme určit velikost tahové síly T_n . Na n -té těleso zavěšené na laně působí jen tíhová síla o velikosti $m_n g$. Toto těleso je však navíc pohybuje se zrychlením $a_n + a_{n-1}$ dolů, kde zrychlení a_n je způsobeno vazbou lana a zrychlení a_{n-1} faktem, že vozíček držící kladku s ní ujíždí tímto zrychlením opačným směrem pryč. Tím pádem platí následující pohybová rovnice pro zavěšené těleso

$$\frac{m}{2^{n-1}}(a_n + a_{n-1}) = \frac{m}{2^{n-1}}g - T_n$$

a odtud pro T_n , resp. T_{n+1} platí

$$T_n = \frac{m}{2^{n-1}}(g - a_n - a_{n-1}), \quad T_{n+1} = \frac{m}{2^n}(g - a_{n+1} - a_n).$$

Tyto vztahy dosadíme do (11) a po úpravách dostáváme rekurentní vzorec

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 3g, \quad \forall n \geq 2. \quad (12)$$

Nyní si všimneme, že rovnici (12) řeší konstantní posloupnost a_n ($a_n = a_{n+1}$, $\forall n \geq 2$), pak dosazením do (12) zjistíme, že pro všechna n je $a_n = g/3$. Toto řešení není ale jediné. Řešením je také $g/3 + h$, kde h vyhovuje rovnici s nulovou pravou stranou

$$a_{n+1} + 6a_n + 2a_{n-1} = 0. \quad (13)$$

O tom se můžete sami přesvědčit dosazením. Abychom zjistili všechna řešení rovnice (13), odbočíme na chvíli od fyzikálního problému a ukážeme, jak obdobné rovnice (nazýváme je diferenční) řešit

Budeme předpokládat řešení ve tvaru x^n , $x \neq 0$. To znamená, že všude namísto a_n napíšeme x^n , obdobně místo a_{n+1} napíšeme x^{n+1} atd. Mějme obecnou rovnici

$$c_r a_{n+r} + \dots + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n = 0,$$

kterou převedeme na

$$c_r x^{n+r} + \dots + c_1 x^{n+1} + c_0 x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_r x^r + \dots + c_1 x^1 + c_0 = 0,$$

toto je rovnice r -tého stupně. Pokud najdeme r různých¹ kořenů x_1, \dots, x_r , pro řešení diferenční rovnice platí

$$a_n = k_1 x_1^n + \dots + k_r x_r^n,$$

kde k_1, \dots, k_n jsou neznámé koeficienty, které můžeme určit z počátečních podmínek. Zkuste si vypočítat, jak vypadá explicitní vzorec pro Fibonacciho posloupnost, pro kterou platí $a_0 = 0, a_1 = 1$ a $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Tento postup aplikujeme na rovnici (13). Dostaneme rovnici

$$x^{n+1} + 6x^n + 2x^{n-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 2 = 0.$$

Kvadratická rovnice má dvě řešení

$$x_1 = -3 - \sqrt{7}, \quad x_2 = -3 + \sqrt{7}.$$

Rovnice (13) má pak řešení

$$a_n = k_1(-3 - \sqrt{7})^n + k_2(-3 + \sqrt{7})^n,$$

kde k_1, k_2 jsou neznámé koeficienty.

Nyní se vraťme opět k fyzice. Jak jsme již řekli, řešení rovnice (12) je rovno $g/3 + h$, kde h je řešení (13), a tedy zrychlení n -tého vozičku vypočítáme

$$a_n = \frac{1}{3}g + k_1(-3 - \sqrt{7})^n + k_2(-3 + \sqrt{7})^n,$$

kde k_1, k_2 musíme určit. Je zřejmé, že k_1 musí být rovno nule, neboť $|-3 - \sqrt{7}| > 1$, a pokud by bylo k_1 nenulové pro n rostoucí do nekonečna, zrychlení by rostlo nade všechny meze. To ale není možné, protože nejvyšší možné zrychlení v tíhovém poli je rovno g . O koeficientu k_2 neumíme zatím nic říci. Označme $\lambda = -3 + \sqrt{7}$, předchozí rovnice se potom přepíše na

$$a_n = \frac{1}{3}g + k_2 \lambda^n, \quad \forall n \geq 2. \quad (14)$$

Abychom určili, čemu je roven koeficient k_2 , potřebujeme ještě jednu rovnici. Tou bude pohybová rovnice pro zrychlení prvního vozičku. Urychluje jej jen síla přenášená od kladky. Pohybová rovnice pro první voziček pak vypadá takto

$$\frac{3}{2} m a_1 = \frac{1}{2} m (g - a_1 - a_2).$$

Dosazením za $n = 2$ v rovnici (14) dostáváme

$$a_2 = \frac{1}{3}g + k_2 \lambda^2.$$

Tuto rovnici dosadíme do pohybové rovnice pro první voziček, abychom zjistili, čemu je rovno jeho zrychlení. Po krátkých úpravách dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{6}g - \frac{1}{4}k_2 \lambda^2.$$

¹⁾ pro vícenásobné kořeny toto neplatí

Sepišme si pro přehlednost vztahy, které použijeme pro výpočet k_2 . Jako poslední využijeme rovnice (13) pro $n = 2$

$$a_1 = \frac{1}{6}g - \frac{1}{4}k_2\lambda^2, \quad a_2 = \frac{1}{3}g + k_2\lambda^2, \quad a_3 = \frac{1}{3}g + k_2\lambda^3, \\ a_3 + 6a_2 + 2a_1 = 3g.$$

Nyní dosadíme za a_1 , a_2 a a_3 do poslední rovnice, z toho si vyjádříme k_2 .

$$\frac{1}{3}g + k_2\lambda^3 + 2g + 6k_2\lambda^2 + \frac{1}{3}g - \frac{1}{2}k_2\lambda^2 = 3g \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{g}{3\lambda^2(5,5 + \lambda)}.$$

Prímým dosazením do vztahu pro první vozíček získáváme

$$a_1 = \frac{g}{6} - \frac{g}{12(5,5 + \lambda)} \doteq 0,15g,$$

pro n -tý vozíček platí

$$a_n = \frac{g}{3} \left(1 + \frac{\lambda^{n-2}}{5,5 + \lambda} \right).$$

Snadno si všimneme, že pro n jdoucí do nekonečna konverguje a_n ke $g/3$, protože $|\lambda| < 1$. A konkrétně pro stý vozíček se velikost zrychlení liší od $g/3$ až na 45. desetinném místě.

Úloha IV.1 ... atomový útok v roce 1985 (4 body; průměr 2,23; řešilo 35 studentů)

Sovětským generálům došla trpělivost. Už se nemohli dívat na provokace ze strany amerických imperialistů a stiskli červený knoflík na odpálení atomové bomby. Hned nato do řídicí místnosti přiběhl mladý poručík, který byl zodpovědný za propočítání dráhy letu, že si prý při výpočtech trochu přihnul ze stakanu vodky a důsledkem toho místo na New York míří raketa na spřátelenou Kubu.

Naštěstí je ale po ruce náhradní bomba, kterou by se ta původní dala sestřelit, čímž by se zamezilo rozkolu v socialistickém táboře. Původní raketa byla vystřelena rychlostí v_0 pod úhlem α . Jaký úhel odpálení β druhé rakety mají sovětské experti nastavit, aby tu první zasáhli, když mezi oběma odpaly je časová prodleva T ?

Diskutujte, kdy se dá mír mezi spřátelenými zeměmi zachránit a kdy už ne. Odpor vzduchu zanedbejte. Všichni samozřejmě víte, že Země je placatá a její gravitační pole je homogenní.

Nejprve zavedeme vhodnou soustavu souřadnic (počátek umístíme do místa startu raket, osa x bude vodorovná), pak lze popsat pohyb raket následujícími rovnicemi

$$x_1 = v_0(t + T) \cos \alpha, \\ y_1 = v_0(t + T) \sin \alpha - \frac{1}{2}g(t + T)^2, \\ x_2 = v_0t \cos \beta, \\ y_2 = v_0t \sin \beta - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde x_1 a y_1 jsou souřadnice první rakety a x_2 a y_2 jsou souřadnice druhé rakety, t je čas uplynulý od vystřelení druhé rakety, v_0 je počáteční rychlost raket a g je tíhové zrychlení, zbylé veličiny jsou dle zadání. Pro srážku musí platit $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$, porovnáním příslušných rovnic získáme soustavu dvou rovnic s neznámými β a t . Z rovnic pro x -ové souřadnice vyjádříme

$$t = \frac{T \cos \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha}.$$

Upravujeme dále rovnici y -ových souřadnic

$$v_0t \sin \alpha + v_0T \sin \alpha - \frac{1}{2}gT^2 - gtT = v_0t \sin \beta,$$

po dosazení za t

$$\frac{v_0 T \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha} + v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2 - \frac{g T^2 \cos \alpha}{\cos \beta - \cos \alpha} = \frac{v_0 T \cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha},$$

$$v_0 T \cos \alpha \sin \alpha + (v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2)(\cos \beta - \cos \alpha) - g T^2 \cos \alpha = v_0 T \cos \alpha \sin \beta$$

dostaneme rovnici

$$(\frac{1}{2} g T^2 - v_0 T \sin \alpha) \cos \beta + v_0 T \cos \alpha \sin \beta + \frac{1}{2} g T^2 \cos \alpha = 0.$$

Pro přehlednost v dalším textu označme $A = g T^2 / 2 - v_0 T \sin \alpha$, $B = v_0 T \cos \alpha$ a $C = g T^2 \cos \alpha / 2$. Protože $\beta \in (0, \pi/2)$, platí

$$B \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -(A \cos \beta + C).$$

Rovnici umocníme na druhou (může tak přibýt neplatné řešení) a upravíme do tvaru kvadratické rovnice pro $\cos \beta$

$$(A^2 + B^2) \cos^2 \beta + 2CA \cos \beta + C^2 - B^2 = 0,$$

její řešení po zpětné substituci a úpravě jsou

$$\cos \beta = \frac{2gTv_0 \sin \alpha - g^2 T^2 \pm 4v_0^2 \mp 2gTv_0 \sin \alpha}{g^2 T^2 - 4gTv_0 \sin \alpha + 4v_0^2} \cos \alpha,$$

smysl má však jen $\cos \beta$ kladné

$$\cos \beta = \frac{4v_0^2 - g^2 T^2}{g^2 T^2 - 4gTv_0 \sin \alpha + 4v_0^2} \cos \alpha,$$

což je hledaný výsledek.

Nakonec najdeme podmínku pro možnost sestřelení rakety. Je zřejmé, že mezi mezi sestřelením rakety za letu a nestihnutím sestřelit raketu je situace, kdy sestřelíme raketu právě při dopadu. Pro tuto situaci platí, že obě rakety musí mít stejnou vzdálenost dopadu, a tudíž vzhledem k tomu, že mají jinak stejné vlastnosti, musí platit $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. A protože obecně hledáme řešení pro $T \neq 0$, musí být $\beta = \pi/2 - \alpha$, tedy $\cos \alpha = \sin \beta$, přičemž aby mohla druhá raketa vylézt později a sestřelit první, musí být $\beta < \alpha$. Pro dobu letu rakety platí

$$t = 2v_0/g \cdot \sin \beta < 2v_0/g \cdot \sin \alpha.$$

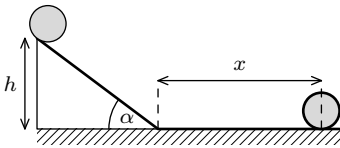
Z rovnosti x -ových souřadnic $v_0 t \cos \beta = v_0(t+T) \cos \alpha$ po dosazení vyjádříme podmínku pro T

$$T < \frac{2v_0}{g} (\sin \alpha - \cos \alpha).$$

Úloha IV. 2 ... za nití (4 body; průměr 2,41; řešilo 29 studentů)

Váleček o malém poloměru r a hmotnosti m se kutálí z nakloněné roviny a na jejím konci přejde hladce do vodorovného pohybu po podložce. Přitom na sebe namotává nit o délkové hustotě ϱ . V jaké vzdálenosti od konce nakloněné roviny se váleček zastaví? Dále znáte výšku nakloněné roviny h a její sklon α . Tření zanedbávejte.

Zamysleme se nejprve, zda se váleček zastaví, nebo nezastaví. Na počátku nit leží na podložce a váleček ji svým pohybem vyzvedává do určité výšky. Tím vykonává práci a spotřebovává energii. Z toho tedy plyne, že se po vyzvednutí určité části nitě zastaví. Tato úvaha nás nabádá k řešení této úlohy pomocí zákona zachování energie. Hladinu nulové potenciální energie umístíme do výšky podložky. Nit ležící na zemi bude mít tedy nulovou potenciální energii. Na obrázku 32 je nakreslen váleček na počátku a po zastavení.



Obr. 32

Nejprve vypočítejme velikost mechanické energie na počátku. Váleček se nehýbe, jeho kinetická energie je tudíž nulová. Délka nitě na nakloněné rovině o výšce h a sklonu α je rovna $l = h/\sin \alpha$, její hmotnost je pak rovna $m_n = \varrho h/\sin \alpha$. Těžiště nitě na nakloněné rovině je ve výšce $h/2$. Potenciální energie nitě je tedy rovna

$$E_{\text{nit}} = \frac{1}{2} m_n g h = \frac{h^2 \varrho g}{2 \sin \alpha}.$$

Těžiště válečku je ve výšce $h + r \cos \alpha$ a jeho potenciální energie je rovna $mg(h + r \cos \alpha)$. Celková energie na počátku je rovna

$$E_{\text{poč}} = \frac{h^2 \varrho g}{2 \sin \alpha} + mg(h + r \cos \alpha).$$

Tato energie se postupně přeměňuje v kinetickou energii válečku, později zpět v potenciální energii vyzvednuté nitě. Skutečnost, že váleček bude mít dost energie na to, aby se skutálel z nakloněné roviny, nám zajišťuje jeho malý rozměr. Když se váleček zastaví, bude mít na sobě namotanou nit o délce $l + x$, kde x je vzdálenost místa zastavení válečku od nakloněné roviny. Zbytek nitě bude ležet na podložce. Celková energie bude tedy rovna potenciální energii válečku a namotané nitě. Tuto energii pak porovnáme s počáteční energií soustavy.

Předpokládejme, že po zastavení válečku je nit namotaná celými otáčkami. Proč takový zjednodušující předpoklad provádíme? Pokud bychom vypočítali přesně potenciální energii nitě namotané na válečku, zjistili bychom po porovnání počáteční a konečné energie soustavy, že dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici pro x . Musíme tedy provést aproximaci. Navíc toto zjednodušení nám nijak významně neovlivní výsledek. Čím delší nit bude namotaná, tím přesnější řešení dostaneme. Pro malý váleček nám vyjde x mnohem větší než jeho obvod.

Těžiště nitě namotané celými otáčkami na válečku je v těžišti válečku, tj. ve výšce r . Její hmotnost je rovna $\varrho(l + x)$. Celková konečná energie je tedy rovna

$$E_{\text{kon}} \doteq mgr + gr\varrho(l + x),$$

kde první člen je potenciální energie válečku a druhý člen je potenciální energie nitě. Nyní dle zákona zachování energie porovnáme počáteční a konečnou energii soustavy $E_{\text{poč}} = E_{\text{kon}}$.

$$\begin{aligned} \frac{h^2 \varrho g}{2 \sin \alpha} + mg(h + r \cos \alpha) &= mgr + gr\varrho(l + x), \\ x &= \frac{mh}{gr} - \frac{m(1 - \cos \alpha)}{\varrho} + \frac{h^2}{2r \sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

Konkrétně pro hodnoty např. $m = 200 \text{ g}$, $r = 5 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\rho = 2 \text{ g}\cdot\text{m}^{-3}$ dostáváme uraženou vzdálenost přes 2 km. Použitá aproximace je tedy v pořádku.

Nakonec ještě malá poznámka. Použití zákona zachování hybnosti při pohybu válečku na rovině nelze, neboť váleček není zcela oproštěn ode všech vnějších sil. Působí na něj tíhová síla skrze nit při jejím namotávání.

Úloha IV . 3 ... limuzína v garáži (4 body; průměr 2,50; řešilo 32 studentů)

Jeden z vítězů Superstar narazil na problém. Jeho nová limuzína je příliš dlouhá na to, aby se vešla do jeho staré garáže. Kamarád této Superstar, který studuje fyziku, si však věděl rady. Jelikož dobře zná práci Alberta Einsteina, uvědomil si, že pokud se limuzína rozjede dostatečně rychle, zkrátí se její délka z pohledu stojícího pozorovatele natolik, že se jíž do garáže vejde.

Na začátku a na konci garáže jsou umístěny padací dveře, které se spustí ve chvíli, kdy celá limuzína bude uvnitř. Z pohledu superstar v limuzíně se však naopak v důsledku kontrakce délek zkrátí garáž a vůz se do ní určitě nevejde. Rozhodněte, zda je možné tímto způsobem limuzínu do této garáže zaparkovat.

Na začátku bych jen poznamenal, že tento příklad byl před rokem 1989 znám jako úloha o vysokém funkcionáři okresního výboru KSČ a jeho Tatře 613. Doba se však změnila, tudíž se změnilo i zadání úlohy.

Nezávisle na společensko-politickém podtextu je řešení tohoto zdánlivého paradoxu následovné. Z pohledu pozorovatele, který stojí v garáži, je situace jasná. Podle kontrakce délek vidí zkrácenou limuzínu, jak vjíždí do garáže. Když je uvnitř celá, zaklapnou se dveře a je hotovo. Limuzína je uvnitř, tudíž je zaparkováno.

Z pohledu řidiče limuzíny je situace poněkud složitější. Vyjdeme z Lorentzovy transformace

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Necht' auto narazí předkem v čase $t = 0$ do dveří o souřadnici $x = 0$. Ve stejném okamžiku se zaklapnou zadní dveře, jež jsou v bodě $x = -g$. Pozorovatel v autě uvidí, že se dveře zaklaply v nějakém (pozdějším) čase v bodě o souřadnici

$$x' = -\frac{g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(do Lorentzovy transformace dosazujeme $t = 0$, $x = -g$). V soustavě spojené s autem má předek souřadnici $x' = 0$ a zadek souřadnici $x' = -a$. Požadujeme, aby se dveře zaklaply vlevo od konce auta (auto jede vůči zemi doprava, garáž proto vůči autu ujíždí doleva). To vyjádříme nerovnicí

$$\frac{-g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} < -a,$$

odkud dostaneme stejnou nerovnost, jakou bychom dostali při výpočtu pomocí kontrakce délek v soustavě garáže

$$a < \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Závěrečný verdikt tedy zní: Ano, limuzína bude v garáži zaparkovaná. Otázkou však je, v jakém stavu ji její majitel (ať už je to papaláš z dob minulých či hvězda šoubyznysu z dob přítomných) najde. Po zastavení se totiž limuzína roztáhne zpět na původní délku, a do garáže se tudíž nevejde. To ovšem nic nemění na tom, že už uvnitř je. Řešení tohoto problému však již nespadá do oblasti speciální teorie relativity, ale spíše do fyziky pevných látek. Každopádně limuzína po

tomto pokusu nebude pojiždna. Na to není jiný recept než si koupit jinou (či ji dostat přidělenou z ústředí strany).

Nakonec jeden chybný argument: Limuzínu nelze takto zaparkovat, protože po zastavení se prodlouží na původní délku a nevejde se do garáže. To je sice pravda, ale takto zaparkovaná limuzína již nebude mít ani po zastavení svou původní délku, tentokrát však ne vlivem relativistických efektů, avšak v důsledku nevratné deformace.

Úloha IV . 4 ... Mössbauerův jev (4 body; průměr 3,45; řešilo 20 studentů)

Frekvence fotonu vyzářeného jádrem radioaktivního železa není vždy stejná, ale při rozpadech různých jader se nepatrně liší (to platí i pro jiná jádra). Pro jednoduchost předpokládejte, že hodnota energie fotonu v klidové soustavě jádra železa leží náhodně v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$, kde $E_0 = 14,4 \text{ keV}$ ($\text{keV} = \text{kiloelektronvolt}$), $\Delta E \approx 10^{-8} \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

- Vyzáří-li volný nehybný atom železa foton, musí mít tento atom podle zákona zachování hybnosti opačnou hybnost než vyzářený foton. Vypočítejte kinetickou energii takového atomu a porovnejte ji s veličinou ΔE .
 - Takzvaný Mössbauerův jev spočívá v tom, že je-li foton vyzářen atomem železa vázaným v krystalu, může se hybnost „zpětného rázu“ předat celému krystalu. Vypočítejte kinetickou energii krystalu (posun energie fotonu) v tomto případě za předpokladu, že krystal je složen z řádově 10^{23} atomů.
- Stejně jako emise fotonu může probíhat i jeho absorpce. Foton však může být absorbován jen tehdy, když jeho energie v klidové soustavě jádra leží v intervalu $(E_0 - \Delta E, E_0 + \Delta E)$.
- Rozhodněte, zda může nehybný atom železa absorbovat foton vyzářený jiným nehybným atomem.
 - Vypočítejte, jak rychle se vůči sobě musí pohybovat dva kusy železa, aby už první kus nemohl kvůli Dopplerovu jevu absorbovat fotony vyzářené druhým kusem. Dopplerovým jevem myslíme to, že frekvence záření f , kterou vyzařuje zdroj přibližující se rychlostí v , se v naší soustavě změní na

$$f' = \left(1 + \frac{v}{c}\right) f.$$

Předpokládejte, že při emisi i absorpci se uplatňuje výše zmíněný Mössbauerův jev.

Potřebné konstanty naleznete v tabulkách.

Před vlastním řešením této úlohy bude dobré vyjasnit si některé zvláštnosti ve světě atomů. Prozkoumejme nejprve proces vyzařování. Jako cokoliv ve světě atomů je i vyzařování popsáno kvantovou mechanikou a propočítat jej není jednoduché. Nicméně nám stačí vědět, že atom, který má energii větší než minimální, může přebytečnou energii vyzářit ve formě fotonu – kvanta světla. Ovšem foton nemusí reprezentovat pouze světlo. Záleží na tom, jakou si nese energii. Takže fotony s relativně malou energií, které se vyzařují při přechodech v elektronovém obalu, pro nás znamenají mikrovlny, světlo, Röntgenovo záření, a dokonce i záření γ . Jádro vyzařuje zejména vysokoenergetické γ fotony. Jakou energii bude mít vzniklý foton, když jádro přejde z jedné hladiny na druhou? Zdálo by se, že to bude obyčejný rozdíl energií těchto hladin. Ovšem není tomu tak, a to hned ze dvou důvodů.

Za prvé, má-li dojít k přechodu mezi hladinami, jádro nemůže být přesně a pouze ve stavu odpovídajícím vyšší hladině. Tento stav je totiž tzv. stacionární, což znamená, že když už jednou jádro je v takovém stavu, zůstane v něm navždy (samozřejmě když do něj „nestrčíme“). Jistě jste už něco slyšeli o superpozici (kombinování) stavů: jádro před přechodem je dobrým příkladem oné známé Schrödingerovy kočky; jádro je spíše na vyšší hladině, ale je v něm již namícháno něco z nižší hladiny. Ježto není jasné, kolik přesně je tam vyššího stavu a kolik nižšího, není ani přesně dáno, jakou energii bude mít vyzářený foton, neboť energie stavu je také směs energií oněch dvou hladin. My samozřejmě nevíme, v jakém stavu jsou jádra v kusu

železa, se kterým měříme, ale můžeme měřit s mnoha jádry a pak výsledky zprůměrovat. Takto získáme křivku udávající závislost pravděpodobnosti vyzáření fotonu na energii. Ve skutečnosti vypadá jako např. Sněžka s vrcholem umístěným nad energií odpovídající rozdílu energií hladin; v naší úloze jsme si situaci zjednodušili.

Druhý důvod, proč energie nebude prostě rozdíl energií hladin, je zpětný ráz. Při procesu vyzářování se musí zachovávat energie a hybnost. Hybnost atomu po vyzáření je opačná než hybnost vyzářeného fotonu, byl-li atom původně v klidu. Do bilance energie nám vstupují změna potenciální energie atomu, energie fotonu a kinetická energie atomu. Nicméně změna potenciální energie atomu je prostě rozdíl energií hladin, čili z rovnice zákona zachování energie

$$\Delta \text{energie atomu} = \text{kinetická energie atomu} + \text{energie fotonu}$$

seznáme, že energie vyzářovaných fotonů bude menší o energii zpětného rázu. Jak známo, $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ a $p = mv$, odkud $2mE_{\text{kin}} = p^2$, kde m je hmotnost tělesa, jež je vystaveno rázu, v našem případě atomu. Hybnost fotonu souvisí s energií jako $E_{\text{foton}} = pc$. Poslední vzorec plyne z teorie relativity. Velikosti hybnosti se musí rovnat, takže dostáváme rovnici

$$E_0 = \frac{E_{\text{foton}}^2}{2mc^2} + E_{\text{foton}}.$$

To je obyčejná kvadratická rovnice, my ji ale budeme řešit pouze přibližně, což nám usnadní práci. Kdybychom neuvažovali zpětný ráz, bude $E_{\text{foton}} = E_0$. Zpětný ráz způsobí malou změnu této energie, nechť je tato $E_{\text{foton}} = E_0 - \delta$, kde $\delta \ll \Delta$ je ona malá změna. Když toto řešení dosadíme do rovnice, dostaneme

$$0 = \frac{E_0^2 + \delta^2 + 2\delta E_0}{2mc^2},$$

kde můžeme vynechat člen δ^2 , neboť je podle předpokladu mnohem menší než ostatní členy. Takto najdeme

$$\delta \approx \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{E_0 + mc^2},$$

čili

$$E_{\text{foton}} \approx E_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{E_0}{E_0 + mc^2} \right).$$

Jeden mol železa váží asi 56 g a nachází se v něm zhruba $6 \cdot 10^{23}$ atomů, pročež hmotnost $m \approx 9 \cdot 10^{-26}$ kg, $E_0 = 14,4 \text{ keV} = 2,3 \cdot 10^{-15}$ J a $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Z toho nakonec pro relativní změnu energie dostaneme hodnotu $1,4 \cdot 10^{-7}$, a tedy pro změnu energie $2,0 \cdot 10^{-3}$ eV, což je sice málo v absolutní hodnotě, ale hodně ve srovnání s rozptylem energií fotonů způsobeným výše popsaným mechanismem.

Pojem Mössbauerův jev je označení pro situaci, kdy zpětný ráz je absorbován nikoliv jediným atomem (jako v případě výše), nýbrž celý krystalem najednou. Nebudeme diskutovat otázku podstaty tohoto jevu, neboť je to netriviální problém kvantové teorie pevných látek. Pro řešení naší úlohy nám postačí uvážit, že můžeme zachovat předchozí postup, avšak s m rovnajícím se nikoliv hmotnosti atomu, ale hmotnosti krystalu $m' = Nm$, kde $N \approx 1 \cdot 10^{23}$ je počet atomů v krystalu. Takto dostaneme pro hodnotu posunu energie odhad $1 \cdot 10^{-26}$ eV.

Máme-li vyzářující volný atom železa a absorbující volný atom železa, nemůže dojít k absorpci na dané energii; energie fotonů vyzářovaných i absorbovaných se nacházejí v okolí o pološířce $\Delta E \approx 1 \cdot 10^{-8}$ eV od základní energie E_0 , avšak posun energií v důsledku zpětného rázu je řádově $1 \cdot 10^{-3}$ eV (to jsme před chvilkou vypočetli), okolí se tedy nebudou překrývat a to znemožní absorpci. Situace se změní s nástupem Mössbauerova jevu. Posun energií je pak pouze $\approx 1 \cdot 10^{-26}$ eV $\ll 1 \cdot 10^{-8}$ eV; posuv proto můžeme s klidným svědomím zanedbat a k absorpci dochází.

Budeme-li nyní jedním kusem železa pohybovat, energie fotonu v laboratorní soustavě (tj. klidové soustavě druhého kusu) se změní, tentokrát v důsledku Dopplerova jevu. Díky malosti rychlosti můžeme použít jeho nejjednodušší verzi bez nějakých relativistických korekcí, tedy verzi ze zadání $f' = (1 + v/c)f$, přičemž v je kladné, když se železa přibližují. Energie fotonu je svázána s frekvencí Planckovým vztahem $E = hf$ ($h \approx 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ je Planckova konstanta), čili energie vyzářeného fotonu v laboratorní soustavě bude $E' = E(1 + v/c)$. K absorpci fotonu stojícím kusem železa bude docházet, když se tato energie bude nacházet v ΔE okolí energie E_0 , jinými slovy o $E_0 v/c$ posunutá vyzářovací charakteristika se musí překrývat s neposunutou absorpční (tj. vyzářovací) charakteristikou. Mezní případ odpovídá přibližování zdroje a nejmenší možné energii vyzářeného fotonu (příp. vzdalování a největší možné energii), tj.

$$E_0 + \Delta E = (E_0 - \Delta E) \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx E_0 - \Delta E + E_0 \frac{v}{c},$$

odkud $v \approx c \cdot 2\Delta E/E_0 \approx 0,4 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Bude-li se zářič železo pohybovat (v prvním přiblížení je jedno kterým směrem) rychlostí větší než právě vypočtenou, stojící kus železa nebude jím vyzářené fotony schopen absorbovat.

Železo se k měření používá proto, poněvadž má jednu z nejužších a přitom nejvydatnějších spektrálních čar, což zlepšuje rozlišení měření. Původně se používala jádra osmia či iridia. Experimentální uspořádání může vypadat takto: zářič se pohybuje nějakou rychlostí, záření prochází skrz nepohybující se kus železa a za ním detektorem měříme intenzitu. Stojící železo bude při různých rychlostech různě absorbovat, absorbovat bude, právě když se dostatečně překrývají spektrální čáry pohybujícího se a stojícího železa. Takto bychom například zjistili, že pokud má v přízemí se nacházející kus železa absorbovat fotony vyzářované železem v dvacátém patře, musí se toto přibližovat jistou rychlostí, kterou bychom změřili a odtud určili velikost rudého posuvu.

Objev tohoto jevu dal experimentátorům možnost zkoumat velice malé posuny frekvencí, a to tak malé, že se pomocí nich dá zkoumat například struktura spektrálních čar (tj. výše používaných vyzářovacích charakteristik) a jiné jemné efekty v pevných látkách. Dále se dá využít pro měření malých rychlostí, což se hodí např. při přibližování dvou kosmických lodí ve vesmíru. Pomocí něho se rovněž povedlo naměřit gravitační rudý posuv, jež předpovídá obecná teorie relativity.

Za svůj objev byl německý fyzik Rudolf Mössbauer z Mnichova v roce 1961 oceněn Nobelovou cenou.

Úloha IV . P ... rezonující sklenička (5 bodů; průměr 1,91; řešilo 22 studentů)

Kroužením mokřým prstem po hraně broušené skleničky (například na víno) lze vyloudit poměrně intenzivní zvuk. Pokud se do skleničky nalije voda, pak frekvence vyluzovaného tónu klesá se vzrůstající výškou hladiny. Sami si to vyzkoušejte a pokuste se tento jev vysvětlit.

Skleničku s vodou si můžeme modelově představit jako jeden lineární harmonický oscilátor s určitou tuhostí k a hmotností M . Rezonanční frekvence takového oscilátoru závisí na těchto parametrech následujícím vztahem

$$f = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

V prvním přiblížení budeme považovat tuhost za nezávislou na množství vody ve skleničce. Hmotnost M nebude přesně součet hmotností skleničky a vody v ní, ale půjde spíše o efektivní hmotnost – voda i sklenička k ní budou přispívat svým dílem. Zde můžeme v prvním přiblížení předpokládat lineární závislost, tj.

$$M = am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}.$$

Koeficienty a a b jsou materiálové konstanty dané tvarem skleničky, tuhostí skla, viskozitou vody a dalšími veličinami. Jejich přesné určení by bylo komplikované, nám ale ke kvalitativnímu

posouzení stačí předpoklad, že jde o nenulová kladná čísla. Nyní nás bude zajímat závislost frekvence na množství nalité vody.

$$f(m_{\text{voda}}) = \sqrt{\frac{k}{am_{\text{sklo}} + bm_{\text{voda}}}}.$$

Analýza takovéto funkce není obtížná. Pro kladné m_{voda} monotónně klesá, tedy s rostoucím množstvím vody ve skleničce klesá frekvence vydávaného zvuku.

V řešeních se často vyskytovaly některé chybné modely, které stojí za to rozebrat. Někteří řešitelé se domnívali, že ve skleničce rezonuje vzduchový sloupec podobně jako v píšťale varhan. To by ovšem vyvolávalo přesně opačnou závislost, tj. s rostoucím množstvím vody roste frekvence. Jiné navrhované vysvětlení bylo, že frekvence se mění vlivem tlumení kmitů sklenky o vodu. To by sice vysvětlovalo charakter závislosti, nicméně intenzita vydávaného zvuku by rychle klesala s množstvím vody, což se nepozoruje. Posledním častým modelem bylo, že se kmity původně generované pohybem prstu po skle přenášejí do vody a ta rezonuje. Tento model ovšem nevysvětluje, proč rezonuje i prázdná sklenička a proč je změna frekvence při malých množstvích vody blízká frekvenci prázdné skleničky.

Úloha V.1 ... dáreček od Buffala (4 body; průměr 3,28; řešilo 32 studentů)

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit?“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je zanedbatelná, a tření rovněž zanedbejte. Zamyslete se nad dalšími zajímavými okolnostmi tohoto souboje.

Než se začneme zabývat samotným soubojem, vypočítáme, jaký důsledek bude mít zásah jediné střely do sudu. Po výstřelu začne ze sudu vytékat petrolej o hustotě ρ . Dle první impulzové věty je celková hybnost soustavy sud–vytékající petrolej konstantní (neb jediná působící vnější síla je tíhová síla). Vypočítejme hybnost petroleje Δp , který vyteče ze sudu za časový interval Δt . Jeho hmotnost je

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S v \Delta t,$$

kde S je průřez díry, kterou vytvoří střela v sudu, a v je rychlost výtoku petroleje. Hybnost je pak rovna (za předpokladu, že rychlost výtoku je v intervalu Δt konstantní)

$$\Delta p = \Delta m v = \rho S v^2 \Delta t.$$

Z první impulzové věty plyne, že změna hybnosti sudu bude rovna hybnosti vyteklého petroleje, pro sílu působící na sud tedy platí

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \rho S v^2.$$

Teď už nám stačí jen zjistit, jak velká je výtoková rychlost petroleje. Tu určíme například ze zákona zachování energie (je třeba předpokládat, že proudění vody k výtoku je ustálené)

$$v = \sqrt{2gh},$$

kde h je výška kapaliny nad otvorem a g velikost tíhového zrychlení. Celkově pak pro jeden otvor dostáváme

$$F = 2\rho Sgh.$$

Tím jsme vypočítali velikost síly. Směr vektoru síly je zřejmě opačný, než v jakém vytéká petrolej.

Jessie i Buffalo Bill střílejí do sudu tak rychle po sobě, že zasáhnou sud téměř ve stejném okamžiku. Předpokládejme, že vektor výsledné síly působící na sud míří k Jessiemu. Pak souřadnice výsledné síly bude dle zadání rovna

$$F = -2\rho Sg \frac{h}{10} + \rho Sg \frac{h}{2} + 2\rho Sg x = 2\rho Sg \left(\frac{2h}{5} + x \right),$$

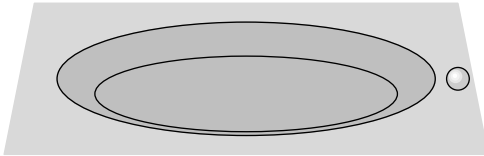
kde x je vzdálenost druhého Billova zásahu od hladiny petroleje v sudu. Počáteční souřadnici zrychlení sudu a pak určíme

$$a = \frac{F}{M} = \frac{2\rho Sg (2h/5 + x)}{M}.$$

Vidíme, že v každém případě bude sud zrychlovat směrem k Jessiemu, neboť $a > 0$. Ve skutečnosti by se však sud určitě nepohnul, protože působící síla by nepřekonala statické tření.

Úloha V. 2 ... pád ze schodů (3 body; průměr 2,42; řešilo 26 studentů)

Malý Karlík si hraje s kuličkou. Při cvrknání je však neopatrný, kulička se mu odkutálí k nakloněné rovině, kterou doma mají místo schodiště, a začne po ní klouzat dolů. Kulička se pohybuje tak, že vektor její rychlosti \mathbf{v} svírá s horní hranou nakloněné roviny úhel φ . Vypočítejte vektor rychlosti \mathbf{v}' kuličky (tj. jeho velikost a také směr) pod nakloněnou rovinou, jejíž výška je h . Tření mezi kuličkou a zemí je malé, proto ho zanedbejte. Předpokládejte, že horní a dolní hrana nakloněné roviny je zaoblená, takže se kulička neodlepí od podlahy.



Obr. 33

Jako bonus můžete vypočítat, jak se změní směr rychlosti kuličky, která proletí válcovou jamkou o poloměru R a hloubce h se zkosenými hranami (viz obr. 33). Délku zkosení můžete vzhledem k poloměru jamky zanedbat.

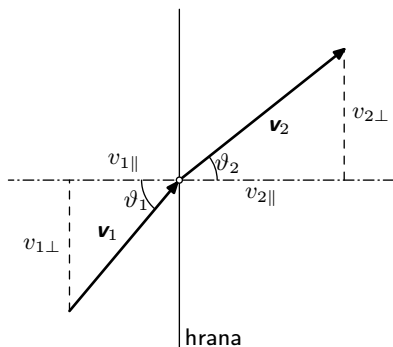
K vyřešení této úlohy nám dopomohou známé mechanické zákony zachování. Zákon zachování energie říká, že pokud měla kulička na začátku kinetickou energii T_1 a na konci kinetickou energii T_2 , potom rozdíl těchto energií je roven změně potenciální energie mgh (neboť kulička klesne o h v gravitačním poli). Zákon zachování hybnosti dále tvrdí, že nepůsobí-li během celého procesu v nějakém směru žádná síla, pak je složka hybnosti kuličky v tomto směru stejná na začátku jako na konci. Toto jsou postačující vstupní informace.

Zákon zachování energie doopravdy platí, poněvadž tření je velmi malé (a zanedbáváme jej) a kulička se neodlepí od země, tedy ani nedopadá, ani se neodráží, v kterýchžto procesech se energie předává podložce a současně se kulička ohřívá. Zákon zachování hybnosti ovšem platí jen v jistém směru. Není jím směr kolmý na hranu schodu, neboť během sjezdu v tomto směru působí urychlující složka gravitační síly. Ve směru rovnoběžném s hranou však během procesu žádná síla nepůsobí, a zachová se tudíž složka hybnosti (i rychlosti, hmotnost kuličky se nemění) v tomto směru. Tímto jsme sestavili dvě rovnice (označení viz obrázky 34)

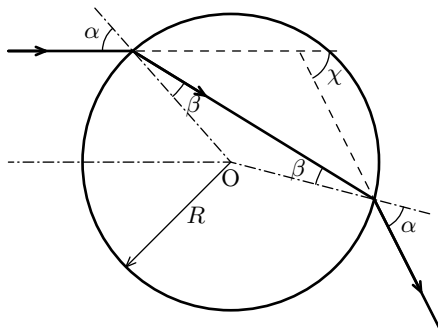
$$mv_{1\perp} = mv_{2\perp} \quad \text{a} \quad \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh.$$

Z obrázku rovněž vyčteme platnost vztahů $v_{1\perp} = v_1 \sin \vartheta_1$ a $v_{2\perp} = v_2 \sin \vartheta_2$. Z rovnice zákona zachování energie vyjádříme $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$ a rovnici pro siny upravíme na tvar

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_1^2}} = n.$$



Obr. 34



Obr. 35

Všem znalým optiky se teď musí rozsvítit – odvodili jsme mechanický Snellův zákon. Roli indexu lomu hraje veličina na pravé straně rovnice, která závisí pouze na velikosti vstupní rychlosti a hloubce jámy.

Když už nyní víme, že kulička se na rozhraní láme jako světelný paprsek, můžeme zkusit „zobrazit“ kuličku čočkou – důlčkem. Situace je zachycena na obrázku 35.

Na prvním i druhém rozhraní použijeme odvozený zákon lomu (stejný jako v optice!), tedy položíme $\sin \alpha = n \sin \beta$, a uvědomíme si, že pro celkovou změnu směru χ platí $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Teď stačí jen dosadit za $\beta = \arcsin(\sin \alpha / n)$ a máme hotovo. Platí

$$\chi = 2 \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right).$$

Zájemci mohou vyřešit ještě zobrazení svazku kuliček tenkou jamkou ve tvaru čočky. Neměli bychom zapomenout prodiskutovat vliv okrajů. V tomto případě totiž nebude zákon lomu platit přesně, nýbrž pouze tehdy, budou-li rozměry zkosení hran zanedbatelné proti poloměru důlku – pouze tehdy okraj lokálně vypadá jako rovná hrana, pro kterou odvozený zákon lomu platí.

Ty z vás, kteří poctivě četli seriál anebo jinde slyšeli o lagrangiónech či akcích, nalezené vzorečky jistě nepřekvapily. Mechanika se totiž dá odvodit z jistého variačního principu podobného Fermatovu principu geometrické optiky. Naopak geometrická optika se dá přepsat do parciálních diferenciálních rovnic podobných těm mechanickým. Tato analogie vedla zakladatele kvantové mechaniky k zavedení vlnově-částicového dualismu.

Úloha V. 3 ... beta rozpad (3 body; průměr 2,70; řešilo 23 studentů)

Při měření rozpadu neutronu na elektron a proton proměřovali čeští vědci energii vylétávajícího elektronu. Jak mohou pouze na základě údajů z tohoto měření poznat, zda nevzniká při tomto rozpadu ještě jiná částice? Uvažujte, že neutron je před rozpadem v klidu.

Pro pořádek nejprve zjistíme, zda se může dvoučásticový rozpad vůbec realizovat a vypočítáme energii elektronu. Uvažujme, že při rozpadu vzniká pouze proton a elektron. Celkovou energii částice můžeme vyjádřit relativistickým vztahem

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

kde c je rychlost světla, m_0 klidová hmotnost částice a p její hybnost. Protože byl neutron původně v klidu, budou hybnosti elektronu a protonu opačné.

Platí také zákon zachování energie

$$E_{n0} = E_p + E_e,$$

kde E_{n0} je klidová energie neutronu a E_p a E_e jsou energie protonu a elektronu. Po odečtení E_e od obou stran rovnice a jejím následným umocnění dostáváme

$$E_{n0}^2 + E_e^2 - 2E_e E_{n0} = E_p^2.$$

Nyní dosadíme za celkovou energii protonu a za klidovou energii neutronu a vyjádříme celkovou energii elektronu. Využijeme toho, že hybnosti elektronu a protonu jsou stejné, členy $p^2 c^2$ můžeme tedy odečíst.

$$\begin{aligned} m_n^2 c^4 + m_e^2 c^4 + p^2 c^2 - 2m_n c^2 E_e &= m_p^2 c^4 + p^2 c^2, \\ E_e &= \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} c^2. \end{aligned}$$

Vědci by naměřili energii, která je rozdílem celkové a klidové energie elektronu,

$$E = \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n} c^2 - m_e c^2 = \frac{(m_n - m_e)^2 - m_p^2}{2m_n} c^2.$$

Zde je důležité si všimnout, že neplatilo-li by $m_n > m_e + m_p$, nebyl by takovýto rozpad vůbec kinematically možný! Rozpad je tedy realizovatelný a pro energii elektronu číselně vychází $E = 1,25 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 181 \text{ keV}$.

Vyřešme tuto úlohu pro zajímavost tak, jak ji vyřešila historie. Až když v roce 1932 James Chadwick prokázal existenci neutronu, mohl být hlouběji pochopen beta-rozpad, tj. spontánní emise elektronu jádrem atomu. Jednoduché vysvětlení bylo: původcem beta-radioaktivity je rozpad neutronu na proton a elektron (tato varianta je možná, jak jsme ukázali výše). Podrobnější zkoumání beta-rozpadu však odhalilo zdánlivý paradox. Spektrum energií produkovaného elektronu se totiž naměřilo *spojité*, což je v rozporu s představou, že se jedná o dvoučásticový rozpad. V tom případě by měl elektron vždy jednu energii přesně určenou zákonem zachování energie a hybnosti.

Na záchranu zákona zachování energie postuloval Wolfgang Pauli existenci další částice, která při beta-rozpadu vzniká. Tato částice je mnohem lehčí než elektron a elektricky neutrální, Enrico Fermi ji proto pojmenoval *neutrino*. Tato myšlenka se úspěšně ujala, i když samotné neutrino bylo detekováno až v polovině padesátých let.

Úloha V.4 ... neposlušná gravitace (4 body; průměr 2,00; řešilo 18 studentů)

Při dlouhodobém pozorování zákrytů Jupiterova měsíce Io bylo zjištěno, že naměřená doba oběhů měsíčku kolem planety (např. od předchozího do následného začátku zákrytu) pravidelně kolísá mezi hodnotami 42 h 28 min 21 s a 42 h 28 min 51 s (s chybou měření 2 s).

Pokuste se jak kvalitativně, tak kvantitativně vysvětlit pozorované změny. Kvantitou rozumíme určení „velikosti této příčiny“ na základě měření samozřejmě s odhadem chyby!

V zadání jsme záměrně zatajili, že popsaného jevu si všiml dánský astronom Olaf Römer již v roce 1676, když se v Jupiterově soustavě měsíců snažil najít přesně jdoucí hodiny sloužící námořníkům k měření času. Sám Römer okamžitě předložil správnou interpretaci svých měření.

Při analýze problému si musíme uvědomit, že vysvětlujeme experimentálně zjištěný údaj, jenž může být ovlivněn nejen vlastním chováním studovaného systému (zde Jupiterovy rodiny měsíců), ale také samotným procesem a okolnostmi měření!

Předpokládejme nyní, že oběžná doba T měsíčku Io kolem Jupitera se nemění, a zamysleme se právě nad okolnostmi měření. Pozorujeme harmonický pohyb s periodou necelé dva dny. Co může být příčinou malých změn této periody mezi zadanými krajními hodnotami? Jako první by nás měla napadnout změna frekvence v důsledku dobře známého Dopplerova jevu, jehož původem by zde měl především být pohyb pozorovatele (tedy planety Země) a předpoklad,

že světlo se šíří konečnou rychlostí. Potom „kvantitou“ v zadání bychom rozuměli výpočet rychlosti světla z naměřených hodnot

$$T_1 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 21 \text{ s} = 152\,901 \text{ s}, \quad T_2 = 42 \text{ h } 28 \text{ min } 51 \text{ s} = 152\,931 \text{ s}.$$

Vyšetřeme tedy tento model pro zdroj v klidu a pohybujícího se pozorovatele. Vzájemnou rychlostí bude zřejmě průmět vektoru okamžité rychlosti Země do směru spojnice Země–Jupiter. Máme zadány právě maximální a minimální hodnotu periody, ty budou v našem modelu odpovídat situaci, kdy se Země pohybuje přesně vůči Jupiteru, resp. letí od něj (neboli průmět rychlosti má největší velikost). Potom velikost relativní rychlosti v odpovídá v případě přibližování i vzdalování právě kruhové rychlosti oběhu Země kolem Slunce, jejíž velikost můžeme snadno vypočítat (např. délka kružnice dělená dobou oběhu, popř. jinak)

$$v = 29,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Měřená perioda oběhu T_i , $i = 1, 2$ je z definice doba mezi příchody stejné fáze oběhu měsíce (např. okamžik začátku zákrytu, resp. dobře definovaný okamžik, kdy měsíc vletí do stínu Jupitera). Dvě po sobě jdoucí stejné fáze jsou od sebe vzdáleny o $l = cT$, kde T je skutečná doba oběhu. Za měřenou kratší dobu T_1 jednak Země uletí dráhu vT_1 vůči Jupiteru, jednak světelná informace vzdálenost cT_1 . Součet těchto vzdáleností musí dát nutně dráhu l čili

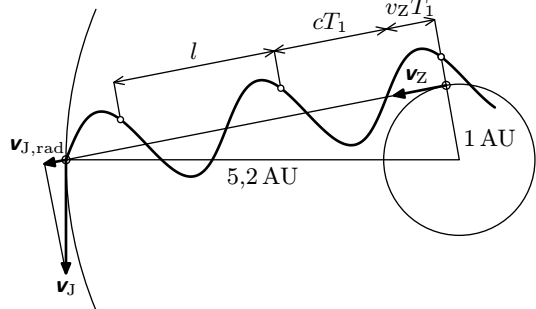
$$cT = cT_1 + vT_1,$$

odkud dostáváme známý vztah pro klasický Dopplerův jev pro přibližujícího se pozorovatele

$$T_1 = \frac{c}{c+v} T.$$

Pro nejdelší naměřenou periodu T_2 odvodíme analogicky (postačí všude zaměnit znaménko u v)

$$T_2 = \frac{c}{c-v} T.$$



Obr. 36. Jupiter a Země na oběžné dráze

Jinými slovy za dobu T_2 mine pomyslná tyč délky l pozorovatele při relativní rychlosti (z klasického skládání) $c - v$. Z obou rovnic vyjádříme T , abychom jej vyloučili, a ze vzniklé rovnice vyjádříme hledanou velikost rychlosti světla

$$c = \frac{T_2 + T_1}{T_2 - T_1} v = 3,04 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Je jasné, že perioda pozorovaných změn oběžné doby bude o něco delší než jeden tropický rok, neboť za tuto dobu se Jupiter již znatelně posune.

K odhadu chyby můžeme efektivně použít zákona o sčítání relativních chyb. Absolutní chyba čitatele i jmenovatele je stejná a je součtem zadané chyby měření period $\Delta T_{1,2} = 2 \text{ s}$, tj. 4 s . Tomu odpovídá relativní chyba čitatele $1,3 \cdot 10^{-3} \%$ (lze zanedbat) a jmenovatele asi $13,3 \%$. Relativní chybu hodnoty vzájemné rychlosti v zahrnující změny v důsledku pohybu Země po eliptické dráze můžeme odhadnout 1% . Uvedené relativní chyby jsou poměrně malé a odpovídají veličinám (resp. celým výrazům) v součinu nebo podílu, proto jejich součet určuje relativní chybu výsledku asi 15% , jež dává absolutní chybu $4,6 \cdot 10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Správně zaokrouhlený výsledek je

$$c = (3,0 \pm 0,5) \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Při přesném rozboru bychom museli započítat pohyb Jupitera i Země a geometrii včetně analytického nalezení maximální hodnoty relativní rychlosti. Pro radiální složku vektoru oběžné rychlosti Jupitera v našem zjednodušeném modelu vychází velikost přibližně (viz obr. 36)

$$v_{J,\text{rad}} = \frac{r_Z}{r_J} v_J = \frac{1 \text{ AU}}{5,2 \text{ AU}} \cdot 13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 2,5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pokud bychom chtěli tuto chybu, která odpovídá asi 9% z v , zahrnout do chyby rychlosti v , bylo by již korektnější chybu výsledku určit pomocí zákona o sčítání kvadrátů, kam můžeme dosadit absolutní chyby vypočtené pomocí parciálních derivací nebo pro zjednodušení vypočtené relativní chyby. Potom relativní chyba výsledku bude

$$\delta c = \sqrt{0,13^2 + 0,09^2} \approx 0,16 = 16\%.$$

Na závěr uvedme, že Römerovi vyšla velikost rychlosti světla o něco menší, protože přesně neznal rychlost pohybu planety Země, resp. správnou vzdálenost Země od Slunce (Newtonova Principia se zákony mechaniky a všeobecné gravitace vyšla až v roce 1687). Nicméně Olaf Römer získal první přesvědčivý a řádově správný odhad rychlosti světla. Pro úplnost je třeba dodat, že měření dob pomocí zákrytů je mnohem přesnější (na zlomky sekundy) a námi uvedená chyba měření byla z pedagogických důvodů nadsazena. Z úlohy plyne důležité poučení, že mnohá měření prováděná ze Země je nutné správně korigovat o pohyb Země.

Úloha V. P ... rychlejší než voda (4 body; průměr 2,14; řešilo 22 studentů)

Zamyslete se nad tím, zda se může lodička bez motoru na řece pohybovat rychleji než samotná voda. Svou odpověď zdůvodněte a předpokládejte, že proudění vody je laminární.

Řeku považujeme za stacionární proud vody. Na ní umístíme loďku a sledujme, jak se bude pohybovat. Na loďku působí jediná vnější síla, a to je gravitační síla. Tu můžeme rozložit do směru rovnoběžného s řekou a směru kolmého na řeku. Složka gravitační síly kolmá na řeku se vyruší s reakcí způsobenou vodou v řece. (Jinak by se loďka pohybovala směrem pod hladinu.) Složka rovnoběžná s řekou se takto lehce nevyruší. Proti ní působí odporová síla vody (voda přirozeně klade loďce odpor při pohybu). Ta ovšem závisí na relativní rychlosti loďky vůči řece (lineárně, kvadraticky či nějak jinak). Přirozeně s větší rychlostí se zvětšuje. Proto rovnoběžnou složku gravitační síly vyrovná až při určité nenulové vzájemné rychlosti. V tu chvíli nastane stacionární stav. Výsledek tedy zní: Loďka se skutečně pohybuje rychleji než řeka.

Úloha VI. 1 ... fotoefekt (3 body; průměr 2,89; řešilo 35 studentů)

Na katodu fotočlánku dopadá ze rtuťové výbojky světlo o vlnové délce 546,1 nm a k potlačení proudu vznikajícího díky fotoelektrickému jevu je potřeba napětí $U_1 = 1,563 \text{ V}$. Dopadá-li na katodu světlo o vlnové délce 404,7 nm, je potřeba napětí $U_2 = 2,356 \text{ V}$. Vypočítejte hodnotu Planckovy konstanty h .

Objasnění fotoelektrického jevu na počátku dvacátého století bylo jedním z důležitých kroků k revoluci ve fyzikálním vnímání světa. Článek, jenž nesl název „O heuristickém hledisku zabývajícím se vznikem a přeměnou světla“ a vysvětlil fotoelektrický jev na základě myšlenky kvantování energie elektromagnetického pole, publikoval v roce 1905 Albert Einstein a obdržel za něj Nobelovu cenu v roce 1921.

Vnější fotoelektrický jev můžeme vysvětlit pohlcním fotonu elektronem. Foton pak předá svou energii elektronu. Jelikož jsou elektrony v atomu vázány určitou silou, musíme jim dodat energii, aby atom opustily. Tato energie závisí na rozložení energetických hladin v atomu, a je tudíž pro danou katodu konstantou nazývanou výstupní práce W_v . Má-li foton vyšší energii, než je hodnota výstupní práce elektronu, přemění se její přebytek v kinetickou energii elektronu, vyjádřeno rovnicí

$$E = W_v + E_k. \tag{15}$$

Jelikož energie fotonu závisí na frekvenci záření f podle vztahu

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda}, \quad (16)$$

kde h je Planckova konstanta, je i kinetická energie vyražených elektronů funkcí frekvence záření (a tedy i vlnové délky záření λ).

Letící elektrony můžeme zpomalovat vnějším elektrickým polem. Úbytek kinetické energie elektronu je pak roven práci, kterou elektron vynaloží na překonání potenciálové bariéry.

$$W_e = eU. \quad (17)$$

Regulací intenzity elektrického pole zjistíme hodnotu napětí U , pro kterou již elektrony nedokáží toto pole překonat a obvodem neprotéká proud. Poté je W_e rovno kinetické energii elektronů E_k . Využitím vztahů (15), (16) a (17) získáme vzorec

$$\frac{hc}{\lambda} = W_v + eU.$$

Dosazením U_1 , U_2 , λ_1 a λ_2 získáme dvě rovnice o dvou neznámých h a W_v . Algebraickými úpravami vyjádříme h vztahem

$$h = \frac{e\lambda_1\lambda_2(U_2 - U_1)}{c(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Zbývá dosadit číselné hodnoty ($c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) a velikost Planckovy konstanty vyjde $h = 6,623 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

Úloha VI.2 ... jak vyrobit černou díru (4 body; průměr 3,83; řešilo 41 studentů)

Pokud stlačíme hvězdu (či jakékoliv jiné těleso) na kouli o poloměru r_g , zhroutlí se nenávratně do černé díry. Tzv. Schwarzschildův poloměr r_g si lze v klasické analogii představit jako poloměr tělesa o hmotnosti M , z jehož povrchu lze uniknout pouze rychlostí světla (úniková rychlost je c).

Na základě znalosti hmotnosti hvězdy M určete Schwarzschildův poloměr r_g a kritickou hustotu hvězdy ρ , při které se přemění v černou díru. Příklad řešte obecně a poté konkrétně pro Zemi, Slunce a jádro galaxie o hmotnosti 100 miliard Sluncí.

Schwarzschildův poloměr určíme ze zákona zachování energie. Na povrchu hvězdy má těleso energii

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Dle zadání dosadíme $v = c$, $r = r_g$. Úniková rychlost je taková nejmenší rychlost, že s ní těleso unikne do nekonečna. V nekonečnu je potenciální energie od hvězdy nulová, tedy i celková energie je nulová, $E = 0$. Po dosazení dostaneme

$$\frac{1}{2}mc^2 - \frac{GMm}{r_g} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Kritickou hustotu dopočítáme snadno.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_g^3} = \frac{3c^6}{32\pi M^2 G^3}.$$

Pro Zemi je kritický poloměr $r_g \approx 9 \text{ mm}$ a hustota je neuvěřitelně velká $\rho \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. U Slunce vychází kritický poloměr na $r_g \approx 3 \text{ km}$ a hustota $\rho \approx 2 \cdot 10^{19} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. U jádra galaxie je poloměr $r_g \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ m}$ a hustota $\rho = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Co tyto výsledky znamenají? Abychom ze Země vytvořili černou díru, museli bychom ji stlačit na kuličku o poloměru 9 mm, což asi v našich silách není. Naopak aby se přeměnilo jádro galaxie na černou díru, stačí, aby jeho hustota byla $0,002 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, což je ve srovnání s hustotou vzduchu asi tisícina. To se zdá jako docela reálné. Musíme si však uvědomit, že většina vesmíru je vyplněna vakuem a jeho průměrná hustota je ještě o mnoho řádů nižší.

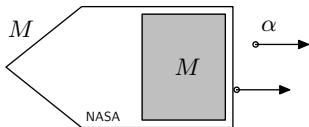
Čím jsou tělesa těžší, tím větší je jejich Schwarzschildův poloměr (logicky) a tím menší je kritická hustota (možná trochu překvapivě).

Je zajímavé, že tento klasický přístup je kvantitativně téměř shodný s přístupem obecně relativistickým. Proto námi vypočítané výsledky odpovídají přibližně realitě.

Úloha VI.3 ... sonda NASA (4 body; průměr 2,70; řešilo 20 studentů)

Jet Propulsion Laboratory v Kalifornii vyvíjí pro NASA nový typ raketových pohonů. Pohonná jednotka využívá hybnost α -částic při rozpadu nuklidu fermia ${}_{100}^{257}\text{Fm}_{157}$, jehož hmotnost je m_{Fm} a poločas rozpadu T . Druhým produktem přeměny je nuklid kalifornia ${}_{98}^{253}\text{Cf}_{155}$. Hmotnost α -částice je m_{α} , hmotnost nuklidu kalifornia je m_{Cf} , přeměnou se uvolní energie E . Předpokládejte, že každá α -částice opouští raketu ve stejném směru.

Vesmírná sonda s popsáním pohonem je na počátku v klidu, její hmotnost je M , hmotnost pohonné látky je také M . Určete rychlost sondy v po přeměně poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Výslednou hodnotu dopočítejte i číselně pro hodnoty $E = 1,106 \cdot 10^{-12} \text{ J}$, $M = 4 \text{ kg}$ a $T = 100,5 \text{ dní}$, ostatní hodnoty najdete v tabulkách.



Obr. 37

Pozorujme sondu z její vztažné soustavy, ve které jsou atomy fermia v klidu. Při rozpadu fermia na α -částici a kalifornium platí zákon zachování hybnosti $p_{\alpha} = p_{\text{Cf}}$. Vzhledem k tomu, že uvolněná energie $E \ll m_{\alpha}c^2$, můžeme hybnost α -částice vyjádřit v klasickém nerelativistickém tvaru $p_{\alpha} = m_{\alpha}v_{\alpha}$. Stejně tak můžeme zapsat i zákon zachování energie v nereativistickém tvaru, tj. vyzářená energie bude

rovna energiím, které získají kalifornium a α -částice,

$$E = \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + \frac{p_{\text{Cf}}^2}{2m_{\text{Cf}}} = p_{\alpha}^2 \frac{m_{\alpha} + m_{\text{Cf}}}{2m_{\alpha}m_{\text{Cf}}} \Rightarrow p_{\alpha} = \sqrt{\frac{2Em_{\alpha}m_{\text{Cf}}}{m_{\alpha} + m_{\text{Cf}}}}$$

Nyní určíme, kolik částic se rozpadne v zadané úloze. Necháváme rozpadnout jednu polovinu hmotnosti nuklidů fermia. Za předpokladu, že známe hmotnost jednoho nuklidu fermia, můžeme určit, kolik částic se rozpadlo $N = M/2m_{\text{Fm}}$. Dále potřebujeme znát změnu Δv_k rychlosti sondy při vyzáření jedné α -částice za předpokladu, že předtím už uniklo k α -částic. Celková hmotnost sondy bude rovna $M_c = 2M - m_{\alpha}k$. Ze zákona hybnosti mezi α -částicí a sondou pak platí

$$p_{\alpha} = M_c \Delta v_k \Rightarrow \Delta v_k = \frac{p_{\alpha}}{M_c} = \frac{p_{\alpha}}{2M - m_{\alpha}k} \quad (18)$$

A teď se už konečně pustíme do řešení hlavního problému úlohy. Chceme určit rychlost po rozpadu N nuklidů fermia. Doteď jsme zatím nepoužili nic z relativity. Předpokládejme, že se už rozpadl určitý počet nuklidů fermia a sonda má rychlost v , v opačném směru právě vylétává α -částice a zvyšuje rychlost sondy o Δv . Chceme určit novou rychlost sondy v' , k tomu použijeme vzoreček pro relativistické skládání rychlostí

$$v' = \frac{v + \Delta v}{1 + v\Delta v/c^2}$$

Tímto způsobem sčítat rychlosti je však zřejmě dost složité, uvědomíme-li si, že Δv je závislé na počtu rozpadlých α -částic. Proto si usnadníme práci a všimneme si, jak vypadá vzoreček

pro součet argumentů v hyperbolickém tangentu.

$$\operatorname{tgh} \alpha' = \operatorname{tgh}(\alpha + \Delta\alpha) = \frac{\operatorname{tgh} \alpha + \operatorname{tgh} \Delta\alpha}{1 + \operatorname{tgh} \alpha \operatorname{tgh} \Delta\alpha}.$$

Tento vzoreček je přece velice podobný vzorečku pro relativistické skládání rychlostí! Stačí použít následující substituce a dostaneme přímo vzorec výše uvedený.

$$\operatorname{tgh} \alpha' = \frac{v'}{c}, \quad \operatorname{tgh} \alpha = \frac{v}{c}, \quad \operatorname{tgh} \Delta\alpha = \frac{\Delta v}{c}.$$

Tento trik nám tedy umožní počítat rychlosti přímo jako argumenty hyperbolického tangentu. Na počátku je sonda v klidu. Rychlost V po rozpadu N částic vypočteme takto

$$\frac{V}{c} = \operatorname{tgh} \beta = \operatorname{tgh}(\alpha_1 + \dots + \alpha_N), \quad (19)$$

kde úhly α_i odpovídají změnám rychlostí Δv_i . Dle výše uvedené substituce víme, že

$$\operatorname{tgh} \alpha_i = \frac{\Delta v_i}{c}.$$

Odsud můžeme vyjádřit α_i (argument hyperbolického tangentu lze vyjádřit pomocí logaritmu)

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \ln \frac{c + \Delta v_i}{c - \Delta v_i} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i} \right).$$

S tímto by se nám ovšem dost špatně počítalo, nehledě na to, že můžeme provést velice dobrou aproximaci. Člen $\Delta v_i/(c - \Delta v_i)$ je velice malý, lze proto použít aproximaci $\ln(1+x) \approx x$ pro malé x

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + 2 \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i} \right) \approx \frac{\Delta v_i}{c - \Delta v_i}.$$

Nyní dosadíme aproximaci α_i do rovnice (19)

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta v_1}{c - \Delta v_1} + \dots + \frac{\Delta v_N}{c - \Delta v_N} \right),$$

kde Δv_i jsme si vyjádřili v (18). Sečíst řadu v hyperbolickém tangentu není sice až tak velký problém, ale podíváme-li se na vztah pro Δv_i , zjistíme, že změnu hmotnosti sondy lze zanedbat. Hmota, která unikne v podobě α -částic, je vskutku zanedbatelná. Všechny členy Δv_i aproximujeme Δv_0 .

Vraťme se tedy zpět k našemu výpočtu.

$$\frac{V}{c} \approx \operatorname{tgh} \left(\frac{\Delta v_1}{c - \Delta v_1} + \dots + \frac{\Delta v_N}{c - \Delta v_N} \right) \approx \operatorname{tgh} \left(N \frac{\Delta v_0}{c - \Delta v_0} \right).$$

Chyba oproti přesnému součtu se projeví až na sedmém řádu, použitá aproximace je tedy opravdu vhodná. Hledané V je rovno

$$V \approx c \operatorname{tgh} \left(N \frac{\Delta v_0}{c - \Delta v_0} \right) \approx c \operatorname{tgh} \left(\frac{N \Delta v_0}{c} \right).$$

Zadané hodnoty jsou tyto

$$u \doteq 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad m_{\text{Fm}} \doteq 257,1 \text{ u}, \quad m_{\text{Cf}} \doteq 253,1 \text{ u}, \quad m_{\alpha} \doteq 4,002 \text{ u}, \\ c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad M = 4 \text{ kg}, \quad E = 1,106 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

a pro ně vychází

$$p_\alpha \doteq 1,203 \cdot 10^{-19} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad N \doteq 4,683 \cdot 10^{24}, \quad \Delta v_0 \doteq 1,504 \cdot 10^{-20} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

a

$$V \doteq 70,43 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nakonec si ještě všimněme, že v této úloze nebylo podstatné, jak velký je poločas rozpadu. Ptali jsme se totiž na rychlost sondy po rozpadu poloviny hmotnosti nuklidů fermia. Poločas rozpadu může být libovolně velký, chceme jen, aby sonda stačila ustálit svou rychlost mezi jednotlivými rozpady.

Úloha VI. 4 ... nezastavitelný chodec (5 bodů; průměr 3,00; řešilo 12 studentů)

Vraťte se na chvíli do Atén na loňské olympijské hry a určete, jaká je teoretická maximální rychlost chodce. Chodec nebude diskvalifikován, pokud se každý rozhodčí (pozorovatel) shodne na tom, že alespoň jedna noha chodce stojí v každém okamžiku na zemi.

Pokusme se nejdříve úlohu řešit klasicky, pouze s uvažováním konečné rychlosti šíření světla. Nechť je levá noha v místě o souřadnici 0 a pravá noha právě došlápla do místa vzdáleného a . Chodec bude moci levou nohu zvednout až ve chvíli, kdy světelný paprsek z místa o souřadnici a dorazí k levé noze, protože jinak by například rozhodčí stojící za ním uviděl zvednutí levé nohy dříve než dopad pravé. Označme tento interval $t_0 = a/c$. Levá noha se bude pohybovat nejdříve světelnou rychlostí, a to po dobu $2t_0$. Těžiště chodce se přesune o vzdálenost a za celkový čas $3t_0$, při uvažování pouze tohoto klasického jevu by byla jeho maximální možná rychlost $c/3$.

Znáznorníme nyní situaci v prostorčasovém diagramu (viz obr. 38). Na vodorovnou osu vynášíme souřadnici x , na svislou osu ct v soustavě S spojené se zemí. V tomto diagramu je světočára světelného paprsku $x = ct$ přímkou, která s osami svírá úhel 45° . Vypočítejme, jak v tomto diagramu budou umístěny souřadnicové osy soustavy S' , která se vůči S pohybuje rychlostí v (ve směru osy x).

Napišme si známé vztahy pro Lorentzovu transformaci (tu používáme při přechodech mezi inerciálními systémy speciální teorie relativity)

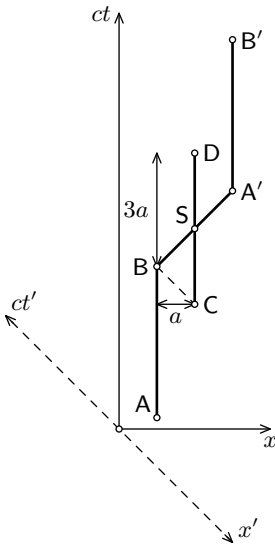
$$x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right), \quad ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right),$$

kde $\gamma = \sqrt{1/(1-v^2/c^2)}$ je Lorentzův faktor. Osa ct' je dána rovnicí $x' = 0$, ze které dostáváme

$$ct' : \quad ct = \frac{c}{v} x,$$

osa x' je dána rovnicí $ct' = 0$, odkud

$$x' : \quad ct = \frac{v}{c} x.$$



Obr. 38

První pozorování je, že osy se sklápí. Vidíme, že směrnice přímk, které udávají osy soustavy S' , jsou navzájem převrácené. To znamená, že svírá-li osa x' s osou x úhel φ (tj. $\text{tg } \varphi = v/c$), potom stejný úhel svírá osa ct' s osou ct .

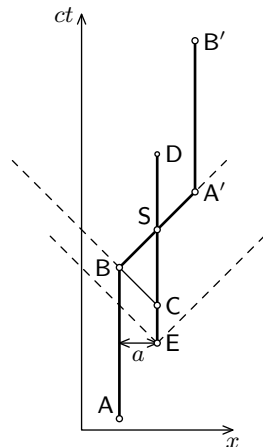
Připomeneme si důležité pozorování. Události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x jsou v soustavě S současné. Analogicky události umístěné na přímce rovnoběžné s osou x' jsou současné v soustavě S' . Jelikož se osy sklápí, je současnost událostí relativní.

Uvažujme extrémní případ, kdy rozhodčí se pohybuje limitně rychlostí $-c$ vůči soustavě S . Jeho klidovou soustavu označíme S' . Směrnice os x' a ct' jsou podle výše odvozených vztahů rovny -1 , budou tedy s osami x a ct svírat úhel -45° (viz obr. 38). Jak ukážeme dále, na tohoto rozhodčího si bude muset chodec dávat největší pozor.

Délku kroku označme $2a$. Světočára levé nohy je $ABA'B'$ (události A a A' představují položení nohy, události B a B' představují zvednutí nohy), část světočáry pravé nohy je úsečka CD. Události B a C musí být vůči sobě postaveny tak, aby událost C předcházela události B ve všech inerciálních soustavách (tj. aby všichni rozhodčí viděli, že nejprve se dotkne země pravá noha, a pak se teprve zvedne levá noha). To zajistíme tak, že události budou současné v soustavě S' (kterou jsme definovali výše), tj. události B a C budou ležet na rovnoběžce s osou x' . Jak si snadno rozmyslíte, v ostatních soustavách potom bude pořadí událostí náležité.

Levá noha se pohybuje nejvýše světelnou rychlostí, proto je úsečka BA' světelnou světočárou (přímka BA' svírá se souřadnicovými osami úhel 45°). Při symetrickém pohybu protíná spojnice BA' úsečku CD v jejím středu S. Přímka BA' je kolmá ke přímce BC; je-li vzdálenost přímek AB a CD rovna a , bude délka úsečky CS rovna $2a$, délka celé úsečky CD je $4a$. Uražení vzdálenosti a na prostorové ose trvá chodci $3a/c$. Rychlost chodce při neuvažování konečného šíření signálu vychází $c/3$.

Uvažujme kombinaci výše popsaných jevů. Prostorčasový diagram na obrázku 39. Předpokládejme, že zvednutí pravé nohy nastane dříve – již v bodě E. Do diagramu jsme přerušovanou čarou zakreslili světelné světočáry, které „nesou“ informaci o proběhlých událostech E a B. Požadujeme, aby se každý rozhodčí dozvěděl nejdříve o události E, a až poté o události B. Rozhodčího do diagramu zakreslíme jako prostorupodobnou světočáru (tj. nikdy se nepohybuje rychleji než c). Snadno si rozmyslíme, že každý rozhodčí se dozví o událostech E a B v náležitém pořadí (okamžik, kdy se rozhodčí o události dozví, je určen průsečíkem světočáry rozhodčího a příslušné světelné světočáry), dokonce událost E může být identická s událostí C. Maximální rychlost tedy zůstává $c/3$.



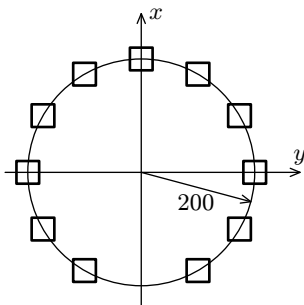
Obr. 39

Úloha VI. P ... výlet na Stonehenge (5 bodů; průměr 1,08; řešilo 13 studentů)

Představte si, že v raketě prolétáte nad Stonehenge. Ten je tvořen kameny ve tvaru kvádrů rozmístěných do vrcholů pravidelného dvanáctiúhelníku (viz obrázek 40) o poloměru 200. Letíte nad osou x ve výšce $z = 50$ a díváte se vodorovným směrem. Když jste v bodě o souřadnicích $(-200, 0)$, resp. $(0, 0)$, uvidíte svět přesně tak, jak je zobrazen na obrázku 11, resp. 12. Váš stojící kamarád jej ovšem uvidí jinak, a sice jako na obrázku 13, resp. 14, přičemž oba máte shodné oči (tzn. např. stejný zorný úhel). Z obrázků přibližně určete poměr rychlosti rakety a rychlosti světla.

Tuto úlohu bylo možné řešit hned několika způsoby. Pro nedočkavce, kteří chtějí znát pouze nejjednodušší (i když nevšeobecné) řešení, uvedeme zkrata vtipný postup.

Povšimněme si, že střed Stonehenge (jež rozpoznáme pomocí šachovnicové sítě na zemi) je na obrázcích 12 a 13 s velkou přesností na stejném místě. Předpokládáme-li, že zorný úhel stojícího a letícího pozorovatele je stejný, musí být stejné i úhly, pod kterými paprsek světla dopadá do oka pozorovatelů. Obrázek 12 se týká letícího pozorovatele v bodě $(0, 0, 50)$, obrázek 13 stojícího pozorovatele v bodě $(-200, 0, 50)$. Do oka stojícího pozorovatele paprsek



Obr. 40

ze středu (o souřadnicích $(0, 0, 0)$) dopadá pod úhlem $\arctg(50/200)$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníka. V soustavě spojené s raketou dopadá pod stejným úhlem; příčné rozměry těles se při Lorentzových transformacích nemění. Odtud plyne, že v době, kdy paprsek opustil střed, musel mít střed x' -ovou souřadnici rovnu 200. Jelikož ale paprsek do oka pozorovatele dopadl přesně, když byl střed pod raketou, musel se do výšky 50 dostat za stejný čas, za který střed urazil vzdálenost 200. Odtud

$$v = c \cdot \cos \alpha = c \cdot \frac{200}{\sqrt{200^2 + 50^2}} \approx 0,970c.$$

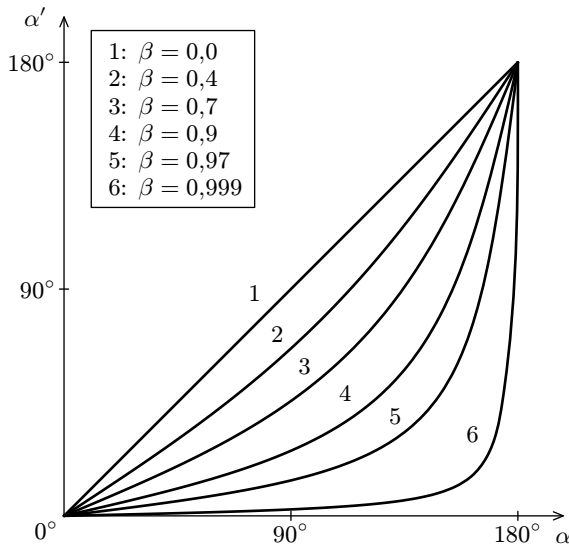
Ve skutečnosti byla rychlost rakety $v = 0,969c$, takže shoda je výborná. Nicméně stejnost poloh středů byla čistě náhodná; při jakékoliv jiné rychlosti, poloze či absenci jednoho z párů obrázků fotografovaných ze stejných míst bychom tento postup použít nemohli.

Můžeme se podívat nad zdánlivým paradoxem; v relativitě se totiž podélné vzdálenosti zkracují a příčné zachovávají, zorný úhel by se měl proto zmenšit. Chyba! Špatně jsme použili kontrakci délek, což seznáme, když situaci podrobně propočteme pomocí Lorentzových transformací. My půjdeme trochu jiným směrem, využijeme známých vzorců pro skládání rychlostí (viz např. seriál v 15. ročníku). Představme si dvě vztažné soustavy, které se přibližují rychlostí u (kupříkladu soustava středu Stonehenge (S) a rakety (S')). Jestliže se těleso v soustavě S pohybuje rychlostí $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, v soustavě S' bude mít rychlost $\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y)$, pro kterou platí

$$v'_x = \frac{v_x + u}{1 + v_x u / c^2}, \quad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{1 + v_x u / c^2}.$$

Uvažujme nyní světelný paprsek, jenž se v soustavě S šíří (a na sítnici oka stojícího pozorovatele dopadá) pod úhlem α ; rychlost paprsku je $\mathbf{v} = (c \cos \alpha, c \sin \alpha)$. Úhel α' , pod kterým paprsek dopadá na sítnici pozorovatele v raketě, je potom dán vztahem

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v'_y}{v'_x} = \sin \alpha \frac{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}{\cos \alpha + u / c}.$$



Obr. 41. Závislost úhlu α' na úhlu α pro různé hodnoty $\beta = u/c$.

Závislost úhlu α' na úhlu α je znázorněna na obrázku 41 pro různé hodnoty $\beta = u/c$. Pokud se díváme ve směru letu, zorný úhel se doopravdy zvětšuje (neboť $\alpha > \alpha'$). Naopak, díváme-li se dozadu, uvidíme menší část prostoru.

Dejme tomu, že jsme obraz zaznamenávali fotoaparátém. V takovém případě se zachovávají úhly paprsků. Ježto je vzdálenost filmu od objektivu konstantní, průsečík paprsku s filmem bude ve vzdálenosti $d \operatorname{tg} \alpha$, kde d je vzdálenost objektivu od filmu a α je úhel, jež svírá paprsek s optickou osou. To znamená, že vzdálenost na obrázku je úměrná $\operatorname{tg} \alpha$ příslušného paprsku.

V této chvíli si již můžeme libovolně zvolit směr, ve kterém budeme měřit vzdálenosti a porovnávat polohu stejných paprsků na obrázku vestoje a za letu. Zde v řešení budeme zjišťovat polohu kvádrů o souřadnicích $(0, \pm 200)$, budeme pracovat ve vodorovné rovině. Stojíce v bodě $(0, 0)$ bychom měli tyto kvádry vidět pod úhlem 90° . Úhel za letu můžeme odměřit z obrázku 12.

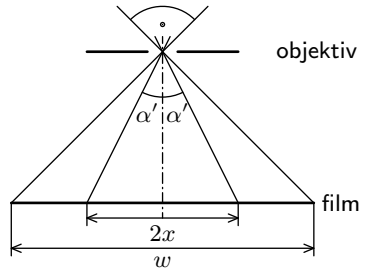
Z obrázku 13 plyne, že zorný úhel fotoaparátu je 90° . Zorným úhlem zde rozumíme úhel, jež svírá levý krajní paprsek s pravým krajním paprskem. Pro poměr vzdálenosti středu levého kvádry od středu obrázku x ku šířce obrázku máme $2x/w = \operatorname{tg} \alpha' / \operatorname{tg} 45^\circ$. Odměříme

$$2x/w \approx 0,256 \approx \operatorname{tg} \alpha' .$$

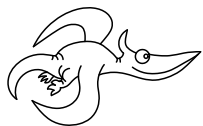
Známe $\alpha = 90^\circ$, pročež platí rovnice $\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{1 - \beta^2} / \beta$, odkud úpravou dostaneme

$$u = \beta \cdot c = \frac{c}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \approx 0,969c ,$$

takže jsme se do správné hodnoty trefili opět výborně.



Obr. 42



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... a přece se točí

Již několik století víme, že se Země točí. Změřte tedy dobu, za kterou se Země otočí o 360° kolem své osy. Své měření se pokuste provést co nejpřesněji. Můžete navrhnout a vypracovat několik různých metod a jejich výsledky porovnat. V každém případě proveďte dostatek měření, abyste je mohli statisticky zpracovat. (řešení str. 55)

Úloha II. E ... není hmotnost jako hmotnost

Experimentálně ověřte rovnost setrvačné (té, která vystupuje ve druhém Newtonově pohybovém zákonu) a gravitační hmotnosti (té, která vystupuje v Newtonově gravitačním zákonu). (řešení str. 56)

Úloha III. E ... hustota vzduchu

Změřte hustotu vzduchu. Provést to můžete libovolnou metodou, nezapomeňte k vaší metodě uvést potřebnou teorii. Správný experimentální výsledek nesmí také postrádat určení chyby změřené hodnoty. (řešení str. 58)

Úloha IV. E ... čaj po večeři

Organizátoři FYKOSu popijeli v menze po večeři výborný čaj. Protože jsou to zvědaví lidé, zamysleli se někteří z nich nad procesem chladnutí čaje. Předmětem sporu bylo, do jaké míry přispívají k chladnutí čaje procesy vypařování, vedení tepla a vyzařování. Pokuste se stejný problém řešit experimentálně. (řešení str. 60)

Úloha V. E ... paličův seník

Určete teplotu vznícení náplně plynového zapalovače, tj. nejnižší teplotu, na kterou ji musíme zahřát, aby se na vzduchu vznítla. Jako bonus můžete též zjistit zápalnou teplotu technického lihu nebo jiné organické látky.

Postupujte například tak, že na odporový drát rozzhavený průchodem elektrického proudu pustíte plyn ze zapalovače. K určení zápalné teploty využijete změřené hodnoty napětí a proudu a známou závislost odporu na teplotě. Vaší vynalézavosti se však meze nekladou. Varujeme: Oheň způsobuje těžké popáleniny, postupujte proto obezřetně! (řešení str. 61)

Úloha VI. E ... chyťte foton

Změřte rychlost světla ve vakuu. Provést to můžete libovolným způsobem, použijte třeba i mikrovlnnou troubu. (řešení str. 64)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... a přece se točí (8 bodů; průměr 4,33; řešilo 46 studentů)

Již několik století víme, že se Země točí. Změřte tedy dobu, za kterou se Země otočí o 360° kolem své osy. Své měření se pokuste provést co nejpřesněji. Můžete navrhnout a vypracovat několik různých metod a jejich výsledky porovnat. V každém případě proveďte dostatek měření, abyste je mohli statisticky zpracovat.

Teorie

Jako způsob určení doby rotace se nabízí měřit dobu mezi po sobě následujícími západy Slunce nebo pomocí stínu. Oba tyto způsoby mají jednu vadu – Země kromě pohybu kolem vlastní osy ještě obíhá kolem Slunce. Když sluneční paprsky dopadají na zemský povrch znovu pod tímž úhlem, Země se mezitím stihla pootočit kolem Slunce o $360^\circ/365,25$ (asi 1°), a tak v tu dobu Země neorotovala o celých 360° , ale jen o přibližně 359° . Je třeba provést příslušnou korekci. Ani takhle to však není úplně v pořádku, neboť trajektorie, po které obíhá Země okolo Slunce, není kružnice, nýbrž elipsa a rychlost pohybu Země je v různých místech trajektorie různá (2. Keplerův zákon)².

Vhodnější metodou je určovat dobu rotace z polohy hvězd. Pohyb hvězd a pohyb středu Země vzhledem ke vzdáleným hvězdám můžeme v tomto případě skutečně zanedbat. Pokud máme přístup ke hvězdářskému dalekohledu, můžeme jej pro toto měření využít. (Co jiného než hvězdářský dalekohled vydrží nehnutě stát po celých 23 h 56 min anebo pomocí čeho jiného lze na stupnici odečítat rektascenzi?)

Dále můžeme využít metodu Foucaultova kyvadla. Tato metoda je však náročná na praktické provedení a nepřesnosti. Další možností je změřit tíhové zrychlení, které, jak známo, závisí na rychlosti rotace Země. Chyba takového měření by však byla srovnatelná s měřenou hodnotou.

Výsledky měření

Jelikož jsem neměla k měření dostatek hvězdných nocí, rozhodla jsem se použít naměřené hodnoty některého z řešitelů. Kdyby toto řešení mělo být zcela autorské, nemohlo by být v žádném případě vzorové, protože výsledky *Stanislava Vosolsobě* nebo *Tomáše Bednářika* by byly očividně lepší než ty moje. Vybrala jsem ke zveřejnění Stanislavovo řešení. Ten měřil v šesti dnech čas, kdy se hvězda Capella promítla do určitého bodu.

den	1. měření		2. měření	
	t_1 [h:min:s]	Δt_1 [min:s]	t_2 [h:min:s]	Δt_2 [min:s]
1	20:36:35	–	20:40:15	–
2	20:24:47	3:56	20:28:25	3:57
3	20:20:50	3:57	20:29:05	4:20
4	20:12:50	4:00	20:16:00	4:03
5	20:05:20	3:45	20:07:50	4:05
6	20:01:37	3:34	20:03:58	3:52

Vypočítáme průměrnou hodnotu Δt a směrodatnou odchylku $s_{\Delta t}$, k hrubé chybě nedošlo.

$$\Delta t = 4 \text{ min } 2,9 \text{ s}, \quad s_{\Delta t} = 6,7 \text{ s}.$$

²⁾ Je užitečné nakreslit si obrázek. Pojmy jako hvězdný a sluneční den jsou objasněny např. v gymnaziální učebnici fyziky – díl astrofyzika.

Jako celkovou chybu vezmeme trojnásobek směrodatné odchylky, chyba měření je vůči ní zanedbatelná

$$\Delta t = (4,0 \pm 0,3) \text{ min.}$$

Pro dobu rotace Země dostáváme

$$T = 24 \text{ h} - \Delta t = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 0 \text{ s} \pm 20 \text{ s},$$

v rámci chyby se shodujeme s tabulkovou hodnotou 23 h 56 min 4 s.

Úloha II. E ... není hmotnost jako hmotnost (8 bodů; průměr 4,81; řešilo 31 studentů)

Experimentálně ověřte rovnost setrvačné (té, která vystupuje ve druhém Newtonově pohybovém zákonu) a gravitační hmotnosti (té, která vystupuje v Newtonově gravitačním zákonu).

Teorie

Před měřením si musíme uvědomit, kde gravitační a setrvačná hmotnost vystupují. Například u siloměru se tíhová síla přenáší na výchylku pružiny, takže měříme vlastně hmotnost setrvačnou. Samotná tíhová síla je také tvořena dvěma složkami – kromě gravitační síly na těleso působí rovněž odstředivá síla (Země se otáčí), určovaná hmotnost je tedy součtem gravitační a setrvačné hmotnosti. Orientačním výpočtem se ale můžeme přesvědčit, že setrvačná složka netvoří více než 0,3 % výsledné síly.

Gravitační hmotnost lze určit obyčejným vážením, musíme si však uvědomit, jak přesně použité váhy pracují. Další možnosti je volný pád, omezuje nás ovšem odpor vzduchu, který do měření vkládá velkou chybu. Setrvačnou hmotnost můžeme určit pomocí kyvadel nebo z dob kmitání těles na pružině. Ve druhém případě je však obtížné použít za výchozí údaj tuhost pružiny, ta byla pravděpodobně určena obdobným experimentem, lépe by bylo provést druhé měření pro pružinu tvořenou dvěma stejnými pružinami. Poměr gravitační a setrvačné hmotnosti můžeme také určit z úhlu, o který se od svislého směru odchýlí rotující kulička na provázku. V tomto případě je vodorovná složka výslednice tvořena odstředivou silou (podílí se na ní setrvačná hmotnost) a svislá silou tíhovou, u které můžeme s velkou přesností předpokládat, že je tvořena gravitační hmotností.

S velkou přesností byl poměr gravitační a setrvačné hmotnosti určen pomocí Cavendishových vah. Na tyč zavěšenou na tenkém vlákne jsou připevněna dvě závaží, do jejichž blízkosti umístíme dvě těžké koule. Gravitační síla, kterou tyto koule na menší závaží působí, vyvolá kmitání tyče kolem rovnovážné polohy. Jeho periodu pak můžeme určit tím, že sledujeme odraz světelného paprsku od zrcátka připevněného k tyči.

V domácích podmínkách je pravděpodobně nejjednodušší provést měření doby kmitů mateematického kyvadla, proto jsme si tento způsob vybrali také my.

Vzdálenost místa na povrchu Země od jejího středu určíme podle vzorce

$$R = R_{\text{rov}} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + (R_{\text{pol}}/R_{\text{rov}})^4 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + (R_{\text{pol}}/R_{\text{rov}})^2 \sin^2 \varphi}},$$

kde R_{rov} je rovníkový a R_{pol} poledníkový poloměr Země. Uvědomme si ale, že gravitační působení rotačního elipsoidu nemůžeme nahradit působením hmotného bodu v jeho středu. Chybu vzdálenosti R určené z předchozího vztahu proto odhadneme na 5 km, přičemž do ní zahrneme i tyto odlišnosti. Pro Prahu ($\varphi = 50^\circ 07'$) vychází

$$R = (6366 \pm 5) \text{ km.}$$

Tíhovou sílu působící na povrchu Země můžeme vyjádřit jako součet gravitační a odstředivé síly. Ve vztahu pro gravitační sílu vystupuje gravitační hmotnost μ a ve vztahu pro odstředivou sílu setrvačná hmotnost m . Výslednici dáme do rovnosti s dostředivou silou.

$$\frac{\mu M_Z}{R^2} - m \Omega^2 R \cos \varphi = m \omega^2 l,$$

kde l je délka kyvadla, ω úhlová frekvence kmitání kyvadla a Ω úhlová frekvence otáčení Země. Odtud pro poměr gravitační a setrvačné hmotnosti plyne

$$x = \frac{\mu}{m} = \frac{\Omega^2 R \cos \varphi + \omega^2 l}{\varkappa M_Z / R^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{\varkappa M_Z} \left(\frac{R \cos \varphi}{T_Z^2} + \frac{l}{T^2} \right), \quad (20)$$

kde T_Z je doba otočení Země a T perioda matematického kyvadla.

Výsledky měření

Matematické kyvadlo jsme si reprezentovali kuličkou zavěšenou na niti. Za délku kyvadla budeme považovat vzdálenost závěsu od středu koule. Tu vyjádříme jako součet délky niti L , délky h háčku, na kterém je koule zavěšena, a poloměru koule r . Poloměr koule i délku háčku jsme určili posuvným měřítkem, délku niti pásovým měřidlem. Chybu délky niti odhadneme na 0,4 cm.

$$h = (0,69 \pm 0,01) \text{ cm}, \quad r = (1,17 \pm 0,01) \text{ cm}, \quad L = (99,3 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Při určování chyby celkové délky matematického kyvadla můžeme chyby poloměru koule i délky háčku zanedbat.

$$l = (101,2 \pm 0,4) \text{ cm}.$$

Dobu deseti kmitů kyvadla jsme určovali pomocí čítače. Ten vždy zaznamenává dobu, kdy kyvadlo protlo dráhu světelného paprsku, čímž výrazně zvyšuje přesnost měření (odstraňuje reakční dobu experimentátora). Výchytku kyvadla volíme maximálně 3° .

č. m.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10T$ [s]	20,1838	20,1875	20,1857	20,1834	20,1806	20,1829	20,1857	20,1866	20,1859	20,1803
T [s]	2,01838	2,01875	2,01857	2,01834	2,01806	2,01829	2,01857	2,01866	2,01859	2,01803

Aritmetický průměr je 2,01842 s. Chybu měření odhadneme vzhledem k rozptylu naměřených hodnot na 0,0003 s, neboť měření může být zatíženo systematickou chybou přístroje a metody.

$$T = (2,0184 \pm 0,0003) \text{ s}.$$

Určení součinu $\varkappa M_Z$ je poněkud problematické. Předpokládejme, že byl změřen metodou, která nezávisí na setrvačné hmotnosti, a berme

$$\varkappa M_Z = (3,987 \pm 0,005) \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Poměr μ/m určíme ze vztahu (20), jeho chybu určíme z kvadratického zákona přenosu chyb

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial (\varkappa M_Z)} \Delta (\varkappa M_Z)\right)^2}.$$

Dostáváme poměrně přesný výsledek

$$x = \frac{\mu}{m} = 0,999 \pm 0,004.$$

Diskuse a závěr

Na chybu výsledného poměru μ/m má největší vliv chyba určení délky kyvadla l . Tuto chybu bychom mohli snížit použitím delšího závěsu. Dále se na výsledné chybě projevuje nepřesnost určení součinnu \mathcal{M}_Z a vzdálenosti R . Chyba způsobená tím, že kmity nejsou harmonické, je o řád menší než uvedená chyba, také předpoklad matematického kyvadla je zde poměrně přesný.

Námi určená hodnota poměru gravitační a setrvačné hmotnosti se tedy v rámci své chyby shoduje s očekávanou hodnotou.

Úloha III. E ... hustota vzduchu (8 bodů; průměr 5,15; řešilo 27 studentů)

Změřte hustotu vzduchu. Provést to můžete libovolnou metodou, nezapomeňte k vaší metodě uvést potřebnou teorii. Správný experimentální výsledek nesmí také postrádat určení chyby změřené hodnoty.

Pro řešení problému využijeme dynamické metody určování hustoty plynů. Vyzkoušejme tedy pád tělesa ve vzduchu.

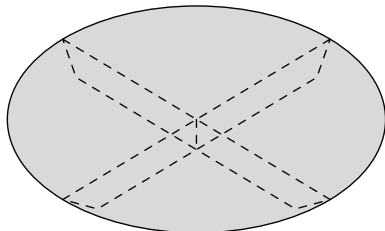
Teorie

Při měření budeme uvažovat ustálený stav, kdy těleso padá rovnoměrně přímočaře, tedy kdy je tíha působící na těleso vyrovnána odporovou silou vzduchu, jehož hustotu máme určit. Jak dobře víme, pro velikost odporové síly známe několik vztahů v závislosti na charakteru proudění a obtékání tělesa. Ve výpočtu použijeme Newtonův vzorec (zdůvodnění viz též Diskuse), kde hustota vzduchu ρ vystupuje, a tedy pro rovnováhu sil dostáváme

$$mg = \frac{1}{2}CS\rho v^2,$$

kde m je hmotnost tělesa, $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ velikost tíhového zrychlení, v velikost ustálené rychlosti, S plocha maximálního průřezu tělesa kolmého k rychlosti v a C součinitel odporu, jehož hodnoty jsou tabelované. Ze zjištěných hodnot těchto veličin vypočteme hledanou hustotu podle vztahu

$$\rho = \frac{2mg}{CS} \left(\frac{t}{s} \right)^2. \quad (21)$$



Obr. 43. Kruhová deska s „křídélky“

Postup měření

K měření jsme použili kruhovou desku o průměru d , tudíž ploše $S = \pi d^2/4$ a se součinitelem odporu $C = 1,11$, realizovanou velice tenkým papírem, který se užívá ve fotoalbech, aby se fotografie neslepily. Aby byly splněny podmínky pokusu (kolmost na směr rychlosti a rovnoměrný přímočarý pohyb), přilepili jsme zespodu křídélka vysoká 3 cm ve tvaru kříže, navíc udržující rovinu papíru (viz obr. 43). Budeme předpokládat, že koeficient C se touto úpravou nezměnil (viz Diskuse).

Toto těleso klesalo rovnoměrně na dráze $s = 1,15 \text{ m}$, poté se začalo výrazněji naklánět a uhybat do stran, což dobře známe. Ustálené rychlosti bezpečně dosáhlo na dráze cca 10 cm. Celková hmotnost papírového tělesa m byla určena laboratorními rovnoramennými vahami. Měření průměru kruhu d milimetrovým měřítkem a doby pádu t (ruční měření) na dráze s bylo zpracováno statisticky.

Výsledky měření

Mnozí z vás pečlivě zpracování a vyhodnocení chyb vynechávají. Dovolte mi tedy shrnout základní body.

- a) Rozhodneme se, kde použijeme statistické zpracování. Např. hmotnost jednoho tělesa nebo délku určitého úseku nemá smysl měřit několikrát. Jiný případ je, použijeme-li jiná měřidla, abychom potlačili systematickou chybu měření, nebo kontrolujeme-li neměnnost veličiny v průběhu měření. Naopak rozměry tělesa a ruční měření času určitě zpracujeme statisticky! Zde např. statistická chyba měření průměru d (tj. standardní odchylka σ_d) vypovídá, jak přesný kruh máme. V případě měření času statistika eliminuje zkreslení výsledků náhodnou chybou při měření. (Hrubou chybu odhalíme kritériem 3σ .)
- b) Veškeré hodnoty veličin X uvádíme ve tvaru $X = (x \pm \varepsilon_x)$ jednotka. Chyba ε_x (zaokrouhlená na maximálně dvě platné číslice) je možná chyba měření daná polovinou nejmenšího dílku stupnice nebo naším rozumným odhadem, případně spočtená z možné statistické chyby. Střední hodnotu x zaokrouhlíme ve stejném řádu, jako je chyba ε . Jako možnou chybu ručního měření času vezmeme reakční dobu člověka alespoň 0,2 s, kterou si sami můžeme změřit. Chyby sčítáme podle kvadratického zákona sčítání chyb

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_A^2 + \varepsilon_B^2}.$$

- c) Chybu vypočtené veličiny určíme obecně pomocí parciálních derivací jakožto váhy v kvadratickém zákonu. Pokud však veličiny vystupují v součinu/podílu a jsou zatíženy malými relativními chybami, lze efektivně přímo sčítat relativní chyby. (Toto bylo pro rychlý odhad chyby uplatněno v našem zpracování, i když chyby jsou již poměrně velké.)

Výsledky jsou tedy následující. Hodnoty z měření doby pádu a průměru kruhové desky jsou v následující tabulce.

t [s]	1,64	1,70	1,60	1,70	1,68	1,66	1,68	1,60	1,68	1,64
d [mm]	21,00	21,10	21,00	21,00	21,10	21,10	21,00	21,10	21,10	21,10

Spočítáme průměrnou hodnotu a standardní (střední kvadratickou) odchylku. Shrňme naměřené hodnoty

$$s = (1,15 \pm 0,05) \text{ m}, \quad t = (1,66 \pm 0,20) \text{ s}, \quad d = (0,2106 \pm 0,0006) \text{ m}, \quad m = (1,30 \pm 0,05) \text{ g}.$$

Ze vztahu (21) dostáváme $\rho = (1,37 \pm 0,29) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, správně zaokrouhlený výsledek měření tedy je

$$\rho = (1,4 \pm 0,3) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

přičemž je vztažen na následující podmínky měření. Teplota vzduchu 22°C (určena kuchyňským teploměrem), tlak 1014 hPa (podle TV relace o počasí).

Diskuse

Nesmíme zapomenout na diskusi, kde posoudíme splnění podmínek pokusu a správnost výsledků a kde provedeme srovnání s tabelovanými hodnotami a zhodnotíme chyby měření. Případné odchylky se pokusíme zdůvodnit.

Výsledek koresponduje dobře s tabelovanou hodnotou $1,27 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ v rámci chyby měření, která je poměrně velká. Při prvním provedení (ve snaze snížit chybu měření) byl stejným způsobem zkoumán pád na dráze 2,2 m, který dal výsledek $1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, avšak v druhé polovině pádu objekt neletěl rovnoměrně a přímo dolů. Takový pohyb navyšuje dobu pádu t a mění podmínky měření a zřejmě vede k vyšší hodnotě hustoty vzduchu, než je skutečná. Ze stejného důvodu je i přesnější výsledek vychýlen nahoru od tabelované hodnoty.

Měření je zatíženo poměrně velkou chybou danou především nepřesným ručním měřením času, ale navýšenou také větším počtem nepřesně zjišťovaných veličin (tj. měření na krátké dráze a relativně malé hmotnosti).

Zbývá zhodnotit správnost úvah a rovnic, ze kterých jsme vycházeli. Charakter proudění lze určit podle Reynoldsova čísla, na základě jehož odhadnuté velikosti (ν je kinematická viskozita vzduchu)

$$Re = \frac{dv}{\nu} \approx \frac{0,21 \cdot 0,69}{1,4 \cdot 10^{-5}} \approx 10^4$$

lze konstatovat, že naše proudění je turbulentní a v tomto případě platí dostatečně přesně Newtonův vzorec (čili závislost na kvadrátu velikosti rychlosti v). Nezbytná úprava tělesa (doplnění svislými křídélky) může způsobit podstatné turbulence pod plochou deskou. Příslušnou změnu tabelovaného součinitele C však neumíme odhadnout, což vnese do výsledku systematickou chybu. Lokální ani časovou změnu hustoty vzduchu při měření (s ohledem na rychlost pohybu v) nepředpokládáme.

Úloha IV . E ... čaj po večeři (8 bodů; průměr 5,33; řešilo 24 studentů)

Organizátoři FYKOSu popijeli v menze po večeři výborný čaj. Protože jsou to zvidaví lidé, zamysleli se někteří z nich nad procesem chlazení čaje. Předmětem sporu bylo, do jaké míry přispívají k chlazení čaje procesy vypařování, vedení tepla a vyzařování. Pokuste se stejný problém řešit experimentálně.

Teorie

Čaj chladne díky vypařování, vyzařování a vedení tepla. Ze Stefanova-Boltzmannova zákona můžeme už předem říci, že vliv vyzařování bude nepatrný.

Jak to naměřit? Jedním z možných způsobů bylo zjišťovat poměr tepel odevzdaných čajem jednotlivými způsoby okolí v různých časech a tím i při různých teplotách. Platí následující vztahy

$$Q_1 = ml_v, \quad Q_2 = \frac{\lambda S \Delta T \tau}{d}, \quad Q_3 = \sigma T^4 S \tau,$$

kde Q_1 je teplo odevzdané vypařováním, Q_2 je teplo odevzdané vedením a Q_3 je teplo odevzdané vyzařováním. (T je teplota, τ je čas. Pozor, l_v není měrné skupenské teplo varu, je to měrné skupenské teplo vypařování.) Při měření Q_1 měříme úbytek hmotnosti čaje v hrníčku v závislosti na čase, pro zjištění tepla odevzdaného vedením stačí pouze proměřit plochu nádoby, tloušťku jejích stěn, teplotu a zaznamenávat čas, u vyzařování to je podobné. Vše ostatní nalezneme v tabulkách. Při určování tepla odevzdaného vypařováním je však nutno odfiltrout zbylé dva faktory (vyzařování a vedení), analogicky při měření obou zbylých tepel. (Viz dále.)

Druhý přístup, který lze zvolit, je následující. Nejprve proměřit časovou závislost teploty čaje v hrnku, kde jsou odstíněny všechny tři vlivy, poté měřit za přítomnosti pouze jednoho z faktorů, pak přidat druhý faktor a nakonec ten třetí. Dostaneme graf, kde jsou nad sebou čtyři křivky a z mezer mezi nimi vidíme podíl jednotlivých faktorů na chlazení při různých teplotách.

Jak provést odstínění? Vypařování se zbavíme přikrytím hladiny, vedení odstraníme co nejlepší tepelnou izolací (např. uzavřením hrníčku do kalorimetru) a vyzařování lze odfiltrout zabalením do alobalu. Žádný z faktorů však bohužel neodfiltrujeme stoprocentně.

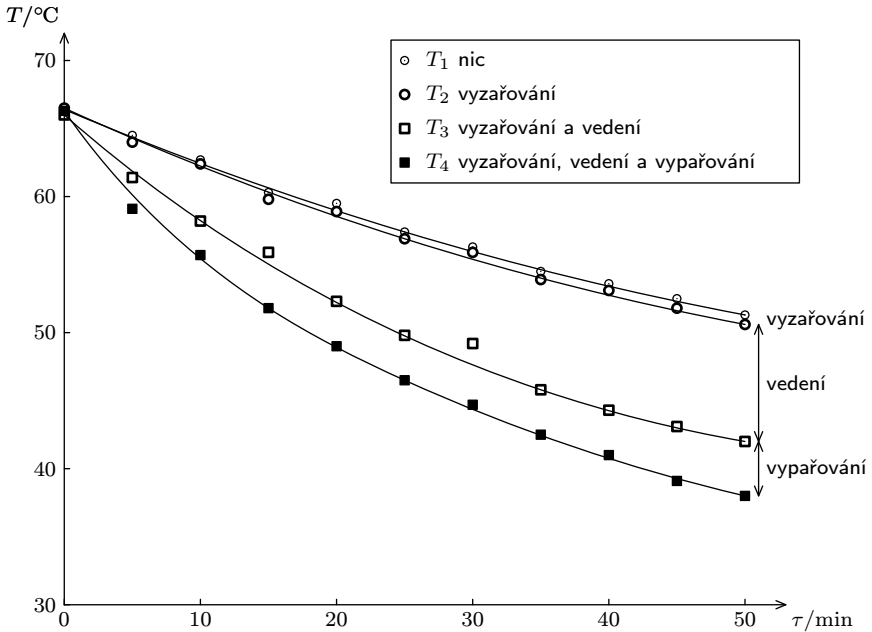
Experiment

Pro svůj experiment jsem zvolila druhý postup. K měření jsem použila digitální teploměr. Jako chladnou kapalinu jsem si opatřila originální výborný čaj z menzy. K odstranění odpařování jsem používala igelit, na tepelné odizolování jsem si zapůjčila kalorimetr a vyzařování jsem brzdila alobalem. Výsledky jsou v grafu na obrázku 44.

t [min]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
T_1 [°C]	66,4	64,5	62,7	60,3	59,5	57,4	56,3	54,5	53,6	52,5	51,3
T_2 [°C]	66,5	64,0	62,4	59,8	58,9	56,9	55,9	53,9	53,1	51,8	50,6
T_3 [°C]	66,0	61,4	58,2	55,9	52,3	49,8	49,2	45,8	44,3	43,1	42,0
T_4 [°C]	66,3	59,1	55,7	51,8	49,0	46,5	44,7	42,5	41,0	39,1	38,0

Závěr

Jak je vidět z grafu, podíly jednotlivých faktorů na chladnutí výborného čaje z menzy dost závisí na teplotě. Ve vlivu na chladnutí ve výsledku vede vedení, vypařování se výrazněji uplatňuje pouze na začátku (při vyšších teplotách), vyzařování je skutečně zanedbatelné.



Obr. 44

Úloha V. E ... paličův seník (8 bodů; průměr 6,13; řešilo 15 studentů)

Určete teplotu vznícení náplně plynového zapalovače, tj. nejnižší teplotu, na kterou ji musíme zahřát, aby se na vzduchu vznítla. Jako bonus můžete též zjistit teplotu vznícení technického lihu nebo jiné organické látky.

Postupujte například tak, že na odporový drát rozžhavený průchodem elektrického proudu pustíte plyn ze zapalovače. K určení teploty vznícení využijete změřené hodnoty napětí a proudu a známou závislost odporu na teplotě. Vaší vynalézavosti se však meze nekladou.

Varujeme: Oheň způsobuje těžké popáleniny, postupujte proto obezřetně!

Teplota vznícení je teplota, při které látka vzplane pouze působením tepla, kdežto zápalná teplota je teplota, při které se látka zapalí po přiblížení plamene. Je si proto potřeba uvědomit, že například teplota jisker, které zapalují plyn unikající ze zapalovače, nemusí dosahovat teploty vznícení, stačí jen přesáhnout teplotu zápalnou, která se pohybuje okolo 10°C.

Teorie

Budeme postupovat tak, jak navrhuje zadání úlohy. K tomu je potřeba znát závislost odporu drátu na teplotě. Pro kovy lze v širokém rozsahu teplot aproximovat tuto závislost lineárním vztahem

$$R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0)), \quad (22)$$

kde α je teplotní součinitel odporu a R_0 odpor při teplotě T_0 . S dostatečnou přesností v oboru našeho měření také platí Ohmův zákon

$$U = RI, \quad (23)$$

který jistě všichni důvěrně znáte.

Měření

Seženeme si odporový drátek, který budeme zahřívat průchodem elektrického proudu. Zdůrazňuji přívlastek *odporový*, jelikož drátek musí mít výrazně větší odpor než přírodní vodiče.

Odpor drátku budeme měřit podle schématu na obrázku 45. Jelikož je jeho odpor zanedbatelný vůči odporu voltmetru, připojíme přímo k drátku voltmetr a před voltmetr zařadíme ampérmetr.

Nejprve měřením určíme koeficient α ze vztahu (22). To provedeme tak, že změříme odpor drátku při různých teplotách, které měříme například pomocí termistoru v rozsahu do 200°C. Naměřené hodnoty shrnuje následující tabulka.

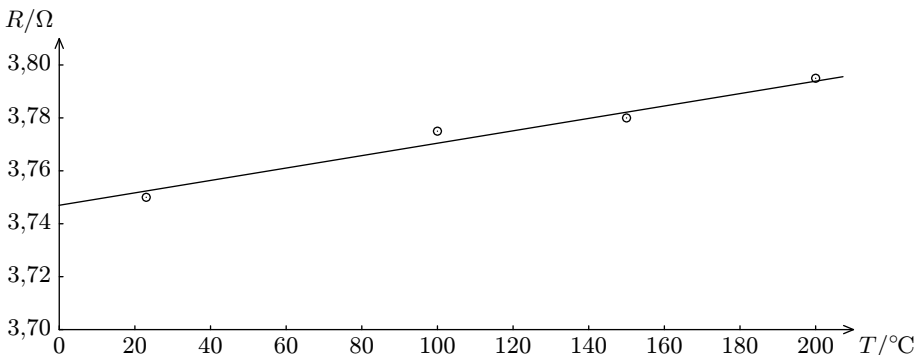
t [°C]	23	100	150	200
R [Ω]	3,750	3,775	3,780	3,795

Hodnoty vyneseme do grafu a provedeme lineární regresi – body proložíme přímkou, ta protne osu y v hodnotě R_0 a její směrnice bude (podle (22)) $R_0\alpha$.

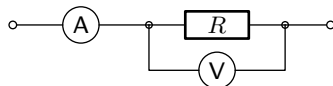
$$R_0 = (3,75 \pm 0,04) \Omega, \quad R_0\alpha = (2,3 \pm 0,5) \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{K}^{-1},$$

kde chyby jsme určili ze statistické chyby regrese a chyby měření $\Delta R = 0,04 \Omega$, která je daná třídou přesnosti měřících přístrojů a vlivem přechodových odporů na kontaktech. Pro teplotní součinitel dostáváme

$$\alpha = (6,1 \pm 1,4) \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}.$$



Obr. 46



Obr. 45. Schéma měření odporu

Nyní se pokusíme změřit teplotu vznícení náplně zapalovače. Odporový drátek budeme zahřívat průchodem elektrického proudu a zároveň budeme měřit proud tekoucí drátkem a napětí na drátku, použijeme regulovatelný zdroj napětí. Napětí zdroje budeme zvyšovat tak dlouho, dokud plyn puštěný na rozžhavený drátek nevzplane. Naměřené hodnoty napětí a proudu při vzplanutí plynu jsou

$$I = (2,92 \pm 0,02) \text{ A}, \quad U = (11,33 \pm 0,05) \text{ V},$$

odtud odpor drátku při teplotě vznícení je

$$R = (3,88 \pm 0,04) \Omega.$$

Teplotu vznícení určíme ze vztahu (22).

$$T_{\text{náplň zapalovače}} = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha} + T_0 = (600 \pm 300)^\circ\text{C}.$$

Analogicky budeme postupovat při měření teploty vznícení lihu. Rozžhavený drátek budeme umísťovat do par lihu a napětí budeme zvyšovat, dokud páry nevzplanou. Naměřené hodnoty napětí a proudu jsou

$$I = (2,80 \pm 0,02) \text{ A}, \quad U = (10,77 \pm 0,05) \text{ V},$$

odtud odpor drátku při teplotě vznícení je

$$R = (3,85 \pm 0,04) \Omega.$$

Teplotu vznícení par lihu určíme stejně jako výše.

$$T_{\text{lih}} = \frac{R - R_0}{R_0 \alpha} + T_0 = (400 \pm 200)^\circ\text{C}.$$

Diskuse a závěr

Přesnost určení zápalných teplot není příliš velká, což je důsledek malé velikosti součinitele α . Bohužel většina odporových drátů (tj. drátů s velkým měrným odporem) má málo výraznou závislost na teplotě stejně jako ten, který jsme použili my. Konkrétně náš drátek měl $\alpha \sim 6 \cdot 10^{-5}$ a to způsobilo obrovskou výslednou chybu (50%). Vhodnější by bylo použít materiál s $\alpha \sim 1 \cdot 10^{-3}$.

Další chyba (až 10 %) je způsobena tím, že závislost odporu na teplotě není přesně lineární.

Pokud porovnáme naše výsledky s tabulkovými hodnotami (předpokládáme, že náplň zapalovačů je směs propanu a butanu)

$$T_{\text{propan-bután}} = 480^\circ\text{C} - 605^\circ\text{C}, \quad T_{\text{ethanol}} = 425^\circ\text{C},$$

zjistíme, že se v rámci chyb shodují, což však nijak nezhodnocuje naše měření.

Úloha VI. E ... chyťte foton (8 bodů; průměr 5,88; řešilo 25 studentů)

Změřte rychlost světla ve vakuu. Provést to můžete libovolným způsobem, použijte třeba i mikrovlnnou troubu.

Historický úvod

Historie měření rychlosti světla je poměrně obsáhlá kapitola. K realizaci klasických mechanických experimentů (Fizeauovo měření s ozubeným kolem nebo užití Foucaultova rotujícího zrcadla) si pravděpodobně neobstaráme potřebné zařízení. Kvůli technické i časové náročnosti se nebudeme zabývat zajímavými astronomickými metodami, jako např. Bradleyho měření aberačního úhlu u hvězd nebo pomocí zákrytů měsíců některých planet (viz úloha předchozí série). V našem řešení budeme měřit rychlost vlnového elektromagnetického vlnění, kterým viditelné světlo je, a přitom užijeme teoretického poznatku J. C. Maxwella, že všechno elektromagnetické záření se ve vakuu šíří stejnou rychlostí, která je prakticky rovna měřené rychlosti světla ve vzduchu.

Teorie

Mezi vlnovou délkou λ , frekvencí f a rychlostí šíření c elektromagnetického vlnění platí vztah

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

Odtud rychlost světla vypočteme, podaří-li se nám např. změřit vlnovou délku záření o známé frekvenci. Ze zkušenosti víme, že rychlost světla je velká, proto bychom potřebovali vlnění s poměrně vysokou frekvencí, aby vlnová délka byla měřitelná dostupnými prostředky. Vyzkoušejme třeba (podle doporučení v zadání) mikrovlnnou troubu, která dle normy pracuje na frekvenci (samozřejmě v bezlicenčním frekvenčním pásmu)

$$f = 2,45 \text{ GHz}.$$

Při měření vlnové délky mikrovln využijeme skutečnosti, že vyzářené vlny interferují s vlnami odraženými od stěn a v troubě vzniká tzv. *stojaté vlnění*. Vlny se musí odrazet; jejich pohlcování ve stěnách je neúčinné a mohlo by znamenat poničení trouby. Mikrovlny samozřejmě nesmí unikat do okolí a ohrožovat kuchaře. U stojatého vlnění existují jednak *uzly* (tj. místa, kde se vektory elektrické intenzity přímé a odražené vlny nezávisle na čase vyruší), jednak *kmitny*, v nichž se intenzity sčítají konstruktivně a dosahují největší amplitudy. Právě v místě kmiten se ohřívá látce (která musí být alespoň polární, jako např. voda) předává nejvíce energie a látka se nejrychleji zahřívá. Aby se potravina lokálně nespálila v důsledku pomalého odvodu tepla, talíř se s ní pomalu otáčí. Jistý vliv na ohřev může mít také proudící vzduch. Ve vodě se teplo efektivně rozvádí prouděním (konvekcí). Nepolární látky, jako např. porcelán talíře či sklo, se ohřívají sekundárně od jídla běžným vedením tepla.

V teorii potřebujeme zmínit, že sousední kmitny jsou vzdáleny právě o polovinu vlnové délky. Vlnovou délku tedy určíme změřením vzdálenosti d přes celkem n kmiten (včetně měřených krajních) podle vztahu

$$\lambda = \frac{2d}{n-1}.$$

Měření

Když rozumíme principům funkce mikrovlnné trouby, můžeme se věnovat vlastnímu měření. Polohu kmiten zviditelníme látkou, která se snadno nataví (a pokud možno příliš rychle neodvádí teplo, což vede k rozmazání polohy). Organizátoři k tomuto účelu jednomyslně preferují čokoládu. Jednu nebo dvě tabulky čokolády nožem narežeme na malé kousky a dostatečně hustě je rozsypeme po rovném skleněném talíři z trouby. Je jasné, že musíme potlačit otáčeni talíře,

tudíž jej do trouby položíme na dva vhodné vysoké hrnky, lépe však na plastový kryt sloužící k přiklopení talířů. Pokud nemáme velké zásoby čokolády a chceme šetřit energii, musíme pokus provádět s rozvahou. Nastavíme střední výkon a spustíme mikrovlnku na 5 až 30 sekund. Poté talíř vytáhneme a špičkou nože vyzkoušíme, kde a do jaké míry se čokoláda rozežhala. Podle množství a jakosti materiálu můžeme pokus opakovat a hledat optimální nastavení výkonu a doby ohřevu. Je vhodné dát čokoládu na talíři ztuhnout do lednice a měření opakovat.

Vyzkoušeli jsme měření s několika různými mikrovlnkami. Nejlepší dosažený výsledek obsahoval $n_1 = 5$ zviditelněných kmiten. Odečtené vzdálenosti d_i jsou uvedeny v tabulce s vypočtenou hodnotou rychlosti.

č. m.	n	d [cm]	λ [cm]	rel. chyba [%]	c [10^8 m/s]
1	5	24 ± 1	$12,0 \pm 0,5$	4,2	$2,94 \pm 0,13$
2	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$
3	3	$12,5 \pm 1,0$	$12,5 \pm 1,0$	8,0	$3,1 \pm 0,3$
4	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$
5	3	12 ± 1	12 ± 1	8,3	$2,9 \pm 0,3$

Relativní chybu měření d můžeme pokládat za rovnou relativní hodnotě výsledku c díky přímé úměře. Pokud je první platná číslice absolutní chyby jednička, je možné uvést chybu na dvě platné číslice. Připomeňme, že absolutní chyby vždy bezpečně zaokrouhlujeme nahoru a střední hodnotu zaokrouhlíme standardně ve stejném řádu. Všechny výsledky s ohledem na chyby měření spolu korespondují. V závěru můžeme uvést nejpřesnější měření, popřípadě aritmetický průměr, jenž může být vážený převrácenými hodnotami relativních chyb a vypočten z nezaokrouhlených hodnot, jakožto nejlepší odhad střední hodnoty (uveden se standardní odchylkou)

$$c = (2,95 \pm 0,09) \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Chybu výsledku vypočítáme dle kvadratického zákona sčítání možné chyby, statistické a případně dalších chyb měření, což je důležité, abychom nepodcenili výslednou chybu měření

$$\varepsilon_c = \sqrt{0,25^2 + 0,09^2} \cdot 10^8 \text{ m/s} \doteq 0,266 \cdot 10^8 \text{ m/s} \doteq 0,3 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

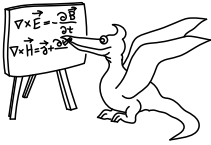
Diskuse a závěr

S využitím stojatého vlnění v mikrovlnné troubě jsme s chybou 10 % změřili rychlost světla ve vzduchu

$$c = (2,9 \pm 0,3) \cdot 10^8 \text{ m/s,}$$

kteřá se velmi dobře blíží tabelované hodnotě $c \doteq 3,0 \cdot 10^8$ m/s. Chybu měření navýšilo především nepřesné určení poloh kmiten. Při některých uspořádáních experimentu se kmitny nedaly nalézt, což lze vysvětlit složitými odrazy a pohlčováním mikrovln v troubě. Pokud se však kmitny v přímce zviditelnily, dávaly vždy dobrý a jednoznačný výsledek v souladu s teorií.

Všimněte si, že aritmetický průměr je mírně vychýlen od tabelované hodnoty, i když jí v rámci standardní odchylky odpovídá. Jeho uvedením se standardní odchylkou, která může být při větším statistickém souboru již hodně malá, bychom se mohli dopustit chyby v závěru. Proto musíme při vyhodnocení chyby započítat také možnou chybu danou hrubostí měření, jak jsme to udělali, abychom neztratili jistotu. Co říci na závěr, je jasné. Po experimentu, poctivém počítání směrodatných odchylek a vyhodnocení chyb a jako odměnu za naše celoroční snažení všichni čokoládu s chutí sníme!



Seriál o teoretické mechanice

Úvod

Svět, ve kterém žijeme, je na první pohled plný různých těles. Tělesa se pohybují nebo jsou v klidu, vzájemně interagují buď na dálku, nebo přímým dotykem. Při prvním seznámení s fyzikou jste se jistě snažili najít zákony, které mechanické pohyby těles popisují. Úkolem letošního seriálu o **teoretické mechanice** je ucelit a doplnit vaši představu o mechanice. Zároveň chceme ukázat i jiné, silnější nástroje pro studium mechaniky, které rozšíří množinu problémů, které dokážete řešit.

V tomto seriálu budeme zanedbávat rozměry těles oproti rozměrům prostoru, tělesa nahradíme *hmotnými body*. Možná namítnete, že tato představa je vzdálená od reality, v mnoha případech je ale oprávněná, i když rozměry těles nelze zanedbat. Například tuhá tělesa³, která neinteragují dotykem, můžeme nahradit hmotným bodem umístěným ve hmotném středu. Dále spojitě prostředí měnící svůj tvar můžeme rozdělit na maličké části a ty nahradit hmotnými body. Ukazuje se, že nejvýhodnější je formulovat fyzikální principy a zákony pro vzájemné interakce právě hmotných bodů. Případný přechod od diskrétního modelu ke spojitému je už čistě záležitostí matematiky.

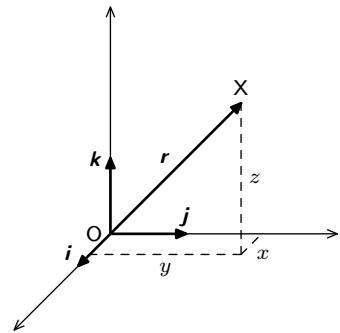
Ve všech kapitolách se budeme zabývat buď jedním hmotným bodem nebo konečnými počty hmotných bodů, jejichž pohyb v prostoru je určen přesně. Předmětem mechaniky je nalézt zákony pohybu těchto hmotných bodů. Prvním našim cílem bude matematicky popsat libovolný pohyb hmotného bodu. Tím se zabývá *kinematika*. Zákony těchto pohybů stanovuje *dynamika*.

Kapitola 1: Newtonovská mechanika

Kinematika hmotného bodu v kartézské soustavě

Již jsme se zmínili, že kinematika popisuje libovolný pohyb hmotného bodu. Tento pohyb je spojitou řadou událostí v třírozměrném prostoru a čase. Pohyb vztahujeme ke *vztažné soustavě*, což je množina (myšlených) bodů, které jsou v prostoru rozloženy nekonečně hustě (v libovolně malém objemu je nekonečně mnoho těchto bodů). Vztažná soustava nemusí být nutně jen množina myšlených bodů, většinou je vhodné ji ztotožnit s konkrétním tělesem. Nejčastěji uvažujeme vztažné soustavy spojené se Zemí. Pokud se vzdálenosti bodů vztažné soustavy nemění, nazýváme ji *tuhá*. Soustava spojená se Zemí je příkladem tuhé vztažné soustavy.

Náš prostor bude mít *euklidovskou geometrii*, tj. tu, kterou znáte již od základní školy. Vzdálenosti bodů budeme měřit v této geometrii v jednom časovém okamžiku. Na měření času budeme používat hodiny, které jdou rovnoměrně a stejně rychle bez vztahu k jakémukoli tělesu, tj. ve všech vztažných soustavách odměřují stejný čas. Tomuto předpokladu říkáme *absolutní čas*. Einsteinova teorie relativity ukázala, že tento předpoklad není oprávněný, platí ovšem dostatečně přesně, pokud se pohybujeme malými rychlostmi vůči rychlosti světla.



Obr. 47

³⁾ Body tuhého tělesa nemění vzájemnou vzdálenost, tuhé těleso tedy nemění tvar.

Abychom mohli ve vztažné soustavě měřit vzdálenosti a určovat polohu bodů, musíme si v ní nějakým způsobem zavést souřadnice. Souřadnice jednoznačně určují polohu bodu v prostoru, různé body musí mít různou souřadnici. V třírozměrném prostoru potřebujeme pro určení polohy každého hmotného bodu tři čísla, souřadnice je tedy trojice čísel. Za souřadnicovou soustavu budeme volit *kartézskou*. Je to soustava pravouhlých souřadnic, určená počátkem O a systémem tří ortonormálních (jednotkové velikosti, navzájem kolmých) vektorů \mathbf{i} , \mathbf{j} a \mathbf{k} . Tento systém volíme pravotočivý – pokud \mathbf{i} vystupuje z odtaženého palce pravé ruky a \mathbf{j} vystupuje z prstů, potom \mathbf{k} vychází z dlaně pravé ruky. Poloha hmotného bodu X je určena polohovým vektorem \mathbf{r} , představujícím orientovanou úsečku z bodu O do bodu X . Tento vektor můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Čísla (x, y, z) jsou souřadnicemi hmotného bodu. Pro vzdálenost dvou hmotných bodů v euklidovské geometrii platí

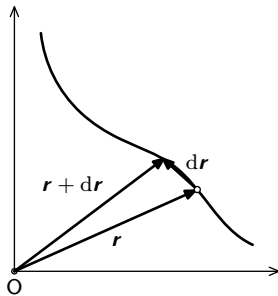
$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Složkami libovolného vektoru \mathbf{A} nazýváme takovou trojici čísel (A_x, A_y, A_z) , pro kterou platí

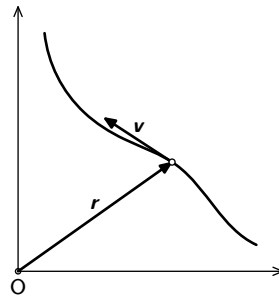
$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}.$$

Budeme se zabývat problémy, kdy bude polohový vektor obecně spojitou funkcí času $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Množina koncových bodů $\mathbf{r}(t)$ je *trajektorie* hmotného bodu. Délce trajektorie od pevně zvoleného bodu říkáme *dráha*.

Pro formulaci pohybových zákonů si nevystačíme se samotným polohovým vektorem. Je třeba zavést jeho první a druhou časovou derivaci⁴.



Obr. 48



Obr. 49

Rychlostí hmotného bodu nazveme vektor

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}},$$

který má směr tečny trajektorie. *Zrychlením* hmotného bodu nazveme vektor

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}}.$$

Tečkou značíme první derivaci podle času, dvěma tečkami druhou derivaci. Pro složky rychlosti a zrychlení platí

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}, & v_y &= \dot{y}, & v_z &= \dot{z}, \\ a_x &= \ddot{x} = \dot{v}_x, & a_y &= \ddot{y} = \dot{v}_y, & a_z &= \ddot{z} = \dot{v}_z. \end{aligned}$$

⁴) Vektor derivujeme tak, že zderivujeme každou jeho složku.

Pro každý bod trajektorie můžeme nakreslit *oskulační kružnici*. Tato kružnice leží v rovině určené vektory rychlosti a zrychlení, dotýká se trajektorie v daném bodě, ve kterém má navíc stejnou křivost. Pro každý bod trajektorie rovněž definujeme jednotkový vektor \mathbf{l} , který má směr tečný k trajektorii, a \mathbf{n} , který má směr do středu oskulační kružnice.

Užitečné je rozložit vektor zrychlení na tečnou a normálovou složku. Rychlost můžeme napsat jako

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \mathbf{l},$$

derivováním tohoto vztahu získáme

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{l} + \dot{s} \frac{d\mathbf{l}}{dt}. \quad (24)$$

Nyní využijeme Frenetovy formule

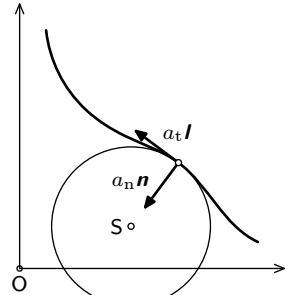
$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R},$$

kde R je poloměr křivosti trajektorie⁵. Vztah (24) dostává tvar

$$\mathbf{a} = \ddot{s} \mathbf{l} + \frac{(\dot{s})^2}{R} \mathbf{n} + 0 \mathbf{b}.$$

Vektor $\mathbf{b} = \mathbf{l} \times \mathbf{n}$ značí binormálu. Tečná, normálová a binormálová složka zrychlení je tedy

$$a_t = \dot{v}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_b = 0.$$



Obr. 50

Inerciální vztažný systém

Nyní již dokážeme popsat pohyb hmotného bodu. Zákony mechaniky budeme formulovat pro tuhé vztažné soustavy s kartézskými souřadnicemi, které jsme si popsali v minulé kapitole, protože v těchto systémech jsou zákony nejjednodušší. Otázkou je, zda jsou tyto zákony ve všech vztažných systémech totožné, nebo zda existují nějaké privilegované systémy. Newton tento problém řešil tak, že zavedl *absolutní prostor* a fyzikální zákony formuloval pro vztažný systém, který je vůči absolutnímu prostoru v klidu. Tento vztažný systém Newton charakterizoval tím, že *volný hmotný bod* se vůči němu pohybuje bez zrychlení (rovnoměrně přímočaře). Pokud tento vztažný systém nazveme inerciální, získáme známou formulaci **1. Newtonova zákona**:

„Volný hmotný bod se v inerciální vztažné soustavě pohybuje bez zrychlení.“

Zbývá dodat, co je volný hmotný bod. Rozumíme jím hmotný bod, na nějž nepůsobí žádné pravé síly (tj. ty, které pocházejí ze vzájemné interakce hmotných bodů), nebo jejichž výslednice je nulová.

Na přelomu 19. a 20. století se po marných pokusech zjistit rychlost Země vůči absolutnímu prostoru dospělo k tomu, že žádný absolutní prostor neexistuje. Což nakonec vedlo k zformulování „speciální teorie relativity“, jejímž důsledkem je i neexistence absolutního času.

Ač žádný absolutní prostor neexistuje, umíme najít inerciální vztažné systémy. Například soustavu spojenou se stálicemi nebo se Zemí můžeme považovat za inerciální. Na Zemi působí zdánlivé síly (příčinou je rotace Země), které musíme vyrovnávat, aby se hmotný bod pohyboval bez zrychlení. Potom se tedy nejedná o volný hmotný bod. Pokud se ale na odstředivou sílu budeme dívat jako na pravou, stejně jako na gravitační (jejich sečtením dostaneme sílu tíhovou), bude soustava spojená se Zemí inerciální (alespoň pokud nebudeme provádět velice přesná měření).

⁵⁾ R má také význam poloměru oskulační kružnice.

Poslední problém, nad kterým se zamyslíme, je jednoznačnost inerciální soustavy. Odpověď je jednoduchá. Mějme nějakou inerciální vztažnou soustavu S , vůči které se všechny volné hmotné body pohybují bez zrychlení. Nyní uvažme soustavu S' , která se vůči S pohybuje konstantní rychlostí \mathbf{u} . Ta bude zřejmě také inerciální. Pokud počátky soustav v čase $t = 0$ splývají, dostáváme následující vztah mezi polohovými vektory v obou soustavách

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u}t,$$

pokud k tomuto přidáme vyjádření absolutnosti času

$$t = t',$$

máme *Galileiho transformaci* mezi soustavami S a S' .

Úloha I. S ... kinematika hmotného bodu

- a) Poloha hmotného bodu v závislosti na čase v kartézské souřadnicové soustavě je popsána polohovým vektorem

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, d).$$

Určete, jak závisí na čase vektory $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$. Vypočítejte také tečnou, normálovou a binormálovou složku zrychlení.

- b) Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v . S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času v soustavě spojené se Zemí. Může být jeho rychlost v určitém okamžiku nulová?

(řešení str. 96)

Newtonovy pohybové rovnice

Po nezbytných definicích se můžeme začít zabývat příčinami pohybu. Měli bychom dospět k Newtonovým pohybovým rovnicím, které budeme formulovat pro inerciální vztažné soustavy.

Příčina změny rychlosti se v Newtonově mechanice nazývá *silou*. Působení síly na daný hmotný bod je projevem interakce s ostatními hmotnými body. Míra této interakce je dána velikostí síly. Abychom byli schopni formulovat pohybové zákony, je třeba umět přiřadit každému hmotnému bodu sílu, která na něj působí.

Síla je příčinou změny rychlosti, nemůže tedy sama záviset na zrychlení hmotných bodů. Obecně síla působící na hmotný bod závisí na poloze a rychlosti bodu samého a také na polohách a rychlostech ostatních bodů a na čase. Dále budeme předpokládat *princip nezávislosti sil*, což znamená

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, t) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1, t) + \dots + \mathbf{F}_N(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{r}_N, \mathbf{v}_N, t).$$

Jinak řečeno, síly působící mezi dvojicí bodů nejsou nijak ovlivněny přítomností ostatních bodů. Sílu působící na hmotný bod můžeme proto rozložit na síly působící mezi jednotlivými dvojicemi. Důležitým požadavkem na síly je platnost **3. Newtonova zákona**, kterému také říkáme *zákon akce a reakce*. Ten říká

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},$$

neboli velikost síly, kterou působí první bod na druhý, je rovna velikosti síly, kterou působí druhý bod na první.

Na mechanice je určit vztahy pro síly. Nemusí přitom vždy vycházet z interakce mezi jednotlivými hmotnými body, řada vztahů pro síly byla určena experimentálně. Sám Newton šel příkladem a popsal gravitační působení zákonem

$$\mathbf{F}_{12} = \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{|\mathbf{r}_{12}|^3} \mathbf{r}_{12},$$

kde $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, κ je gravitační konstanta. Veličiny μ_1 a μ_2 , které charakterizují jednotlivé hmotné body, jsou mírou gravitace, nazýváme je *tíhové hmotnosti*.

Nyní se dostáváme k formulaci pohybových zákonů. Zajímá nás pohyb jednoho hmotného bodu, pokud známe sílu na něj působící (známe tedy rychlosti a polohy okolních bodů). Pohyb tohoto bodu je v inerciální soustavě popsán vztahem

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad (25)$$

kteřému říkáme **2. Newtonův zákon**. Podle definice rychlosti a zrychlení je

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t). \quad (26)$$

Veličina m charakterizuje jedinou vlastnost hmotného bodu – jeho setrvačnost, nazýváme ji proto *setrvačnou hmotností*. Velice pozoruhodné je, že tento parametr je identický s tíhovou hmotností μ z Newtonova gravitačního zákona⁶. Sám Newton to nedokázal zdůvodnit. Rovnost obou hmotností je předpokladem obecné teorie relativity. Nejnovější měření ukazují, že

$$\frac{m}{\mu} = 1 \pm 10^{-19}.$$

Sami se o rovnosti obou hmotností můžete přesvědčit při řešení experimentální úlohy této série.

Rovnice (26) představuje soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic, pro každou souřadnici v kartézské souřadnicové soustavě je jedna. Říkáme jim Newtonovy pohybové rovnice.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{y} &= F_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t), \\ m\ddot{z} &= F_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z, t). \end{aligned}$$

Pokud budeme mít zadány počáteční podmínky

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}),$$

můžeme z těchto rovnic jednoznačně určit funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$. Určíme tak budoucí časový vývoj polohového vektoru $\mathbf{r}(t)$, což jsme přesně chtěli.

Složitější je situace, pokud sledujeme pohyb více než jednoho bodu. Máme-li N hmotných bodů, potřebujeme k jejich popisu vyřešit soustavu $3N$ rovnic a znát $6N$ počátečních podmínek. Pro velké N je tento úkol velice obtížný, pro jejich popis se používají jiné modely.

Newtonovy rovnice nám umožňují určit pro přesně dané počáteční podmínky budoucí vývoj systému. Tato typická vlastnost klasické mechaniky se nazývá *laplaceovský determinismus*.

Použití Newtonových rovnic si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 1 – pohyb tělesa v kapalině

Napište a řešte pohybové rovnice tuhé koule v kapalině a homogenním tíhovém poli Země. Počáteční rychlost \mathbf{v}_0 směřuje svisle dolů. Uvažujte, že koule je obtékána laminárně.

Řešení

Proti pohybu koule působí odporová síla, která je pro laminární obtékání dána vztahem

$$F = 6\pi\eta Rv = kv,$$

kde R je poloměr koule a η dynamická viskozita vody. Pohybové rovnice mají tedy tvar

$$m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{vz} - k\mathbf{v}.$$

⁶) Přesněji: poměr m/μ je úměrný konstantě, která nazávisí na čase.

Zvolme kartézskou souřadnicovou soustavu tak, že osa x míří svisle vzhůru, a napišme si pohybové rovnice v těchto souřadnicích

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - k\dot{x}, \\ m\ddot{y} &= -k\dot{y}, \\ m\ddot{z} &= -k\dot{z}, \end{aligned}$$

kteřé budeme řešit spolu s počátečními podmínkami $\mathbf{v}(0) = (-v_0, 0, 0)$ a $\mathbf{r}(0) = (x_0, y_0, z_0)$.

Předposlední rovnici řešíme separací proměnných

$$\int \frac{dv_y}{v_y} = - \int \frac{k}{m} dt \quad \Rightarrow \quad v_y = Ce^{-kt/m}.$$

Integrační konstantu C určíme z počáteční podmínky $v_y(0) = 0$, vychází $C = 0$. Podobně dostaneme pro z -ovou složku. Druhou integrací tedy máme

$$y = y_0, \quad z = z_0.$$

Separaci proměnných budeme řešit rovněž i první pohybovou rovnici.

$$\int \frac{dv_x}{v_x + \frac{g}{k} \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right)} = - \int \frac{k}{m} dt \quad \Rightarrow \quad v_x = Ce^{-kt/m} - \frac{g}{k} \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right).$$

Integrační konstantu C určíme opět z počáteční podmínky $v_x(0) = -v_0$. Po dosazení vychází

$$v_x = \frac{g}{k} \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right) \left(e^{-kt/m} - 1\right) - v_0 e^{-kt/m}.$$

Odtud můžeme snadno určit mezní rychlost koule, pro $t \rightarrow \infty$ je

$$v_x(\infty) = -\frac{g}{k} \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right).$$

Abychom dostali hledanou závislost $x(t)$, budeme vztah pro v_x ještě jednou integrovat. Při určování integrační konstanty přihlédneme k $x(0) = x_0$. Dostaneme

$$x(t) = -\frac{g}{k} \left(m - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right) \left(t + \frac{m}{k} \left(e^{-kt/m} - 1\right)\right) + v_0 \frac{m}{k} \left(e^{-kt/m} - 1\right) + x_0.$$

Pohybová rovnice v neinerciálních systémech

Uvažujme inerciální vztažnou soustavu S , ve které se hmotný bod pohybuje se zrychlením \mathbf{a} . Dále mějme neinerciální vztažnou soustavu S' . V té se hmotný bod pohybuje se zrychlením \mathbf{a}' . Pokusíme se určit vztah mezi těmito vektory.

Pro libovolný vektor \mathbf{A} platí následující vztah

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} + \frac{d'\mathbf{A}}{dt}, \quad (27)$$

kde derivace s čárkou značí časovou derivaci vektoru \mathbf{A} v čárkované soustavě⁷. Představit si to můžete tak, že vektor \mathbf{A} se mění sám (druhý člen na pravé straně) a ještě k tomu se otáčí

⁷⁾ Složky vektoru \mathbf{A} vyjádříme v soustavě S' a každou z nich derivujeme.

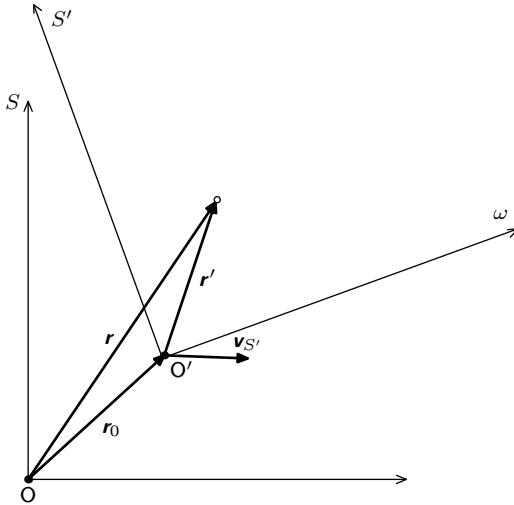
rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ (první člen na pravé straně). Vektor $\boldsymbol{\omega}$ je vektorem úhlové rychlosti systému S' vůči systému S . Vztah (27) nyní aplikujeme na polohový vektor \boldsymbol{r}' v soustavě S'

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{d'\boldsymbol{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_{S'},\end{aligned}$$

kde \boldsymbol{v}' jsme označili vektor rychlosti hmotného bodu v čárkované soustavě a $\boldsymbol{v}_{S'}$ je rychlost počátku soustavy S' vůči soustavě S . Poslední vztah zderivujeme a ještě jednou použijeme (27)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} + \boldsymbol{a}_{S'} = \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{d'\boldsymbol{r}'}{dt} \right) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \frac{d'\boldsymbol{v}'}{dt} + \boldsymbol{a}_{S'} = \\ &= \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{a}_{S'},\end{aligned}$$

přičemž jsme označili $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$.



Obr. 51

Odvozený vztah mezi oběma zrychleními dosadíme do (25)

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{a}_{S'}. \quad (28)$$

Při pohledu na tuto rovnici se nabízí označit celý výraz na pravé straně jako sílu, potom bude mít pohybová rovnice stejný tvar i v neinerciálních soustavách. Sílu

$$\boldsymbol{F}_z = -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{a}_{S'}$$

proto nazveme *zdánlivou*. Síly zdánlivé je třeba odlišovat od sil *pravých* (*vtištěných*). Síly pravé mají původ ve vzájemné interakci hmotných bodů, zatímco síly zdánlivé vznikají pouze v neinerciálních soustavách; lze je odstranit přechodem k inerciálnímu systému.

Síla \mathbf{F}_z se skládá ze síly *Coriolisovy* $\mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, síly *Eulerovy* $\mathbf{F}_e = -m\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{r}'$, dále síly *odstředivé* $\mathbf{F}_o = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ a síly *translační* $\mathbf{F}_{tr} = -m\mathbf{a}_{S'}$. Coriolisova síla působí pouze na pohybující se body vzhledem k S' . Síla *setrvačná* $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_{tr}$ působí i na body v klidu.

V následujícím příkladě si zkusíme vyřešit pohybové rovnice v neinerciálním systému.

Příklad 2 – pohyb v soustavě spojené se Zemí

Najděte rovnice popisující pohyb hmotného bodu na povrchu Země v soustavě spojené se Zemí.

Řešení

Pro jednoduchost řešení předpokládejme $\mathbf{r}(0) = 0$ a $\mathbf{v}(0) = 0$. Zavedme si následující kartézskou souřadnicovou soustavu. Osa z je svislá a míří nahoru, osa y míří od jihu k severu. Úhlová rychlost rotace Země má složky $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega_y, \omega_z)$, kde $\omega_y = \omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ a φ je zeměpisná šířka. V pohybové rovnici

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_G - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

vystupuje navíc pouze Coriolisova síla, neboť odstředivá je zahrnuta v tíhové. Ve složkách dostáváme

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -2(\omega_y \dot{z} - \omega_z \dot{y}), \\ \ddot{y} &= -2\omega_z \dot{x}, \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega_y \dot{x} \approx -g.\end{aligned}$$

V poslední rovnici si můžeme dovolit aproximaci, neboť příslušná složka Coriolisovy síly je díky pomalosti zemské rotace zanedbatelná vzhledem ke složce tíhové. Pak platí

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2,$$

což dosadíme do první rovnice. Máme soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= +2(\omega_y gt + \omega_z \dot{y}), \\ \ddot{y} &= -2\omega_z \dot{x},\end{aligned}$$

jejíž řešení je s ohledem na počáteční podmínky (provedte jako cvičení)

$$x(t) = \frac{g\omega_y}{4\omega_z^3}(2\omega_z t - \sin(2\omega_z t)), \quad y(t) = \frac{g\omega_y}{4\omega_z^3}(1 - 2\omega_z^2 t^2 - \cos(2\omega_z t)).$$

Rozvedeme-li sinus a kosinus v Taylorovu řadu a vezmeme z ní první člen, který se neodečte, pak

$$x(t) \approx \frac{1}{3}g\omega_y t^3 = \frac{1}{3}g\omega t^3 \cos \varphi, \quad y(t) \approx -\frac{1}{6}g\omega_y \omega_z t^4 = -\frac{1}{6}g\omega^2 t^4 \sin \varphi \cos \varphi.$$

S těmito vztahy je možné se spokojit, další členy jsou totiž překryty faktory, které jsme nebrali v úvahu (nehomogenita pole, vliv Měsíce). Hmotný bod se bude tedy kromě volného pádu pohybovat jihovýchodním směrem.

Zákon zachování energie

Vraťme se ještě k soustavě tří rovnic (26). Z teorie diferenciálních rovnic plyne, že pro každou takovou soustavu můžeme najít šest lineárně nezávislých funkcí $\varphi(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, které jsou podél trajektorie konstantní, neboli

$$\frac{d}{dt}\varphi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t) = 0.$$

Funkce s touto vlastností nazýváme *první integrály pohybových rovnic*. Pokud se nám podaří nahradit pohybové rovnice stejným počtem prvních integrálů, můžeme přejít k této nové soustavě. Řešení bude značně snazší, protože se bude jednat o soustavu diferenciálních rovnic pouze prvního řádu.

Integrály pohybu se hledají na základě symetrií systému. My si zde ukážeme, že jedním z těchto integrálů je mechanická energie.

Pohybovou rovnici (26) vynásobíme skalárně zprava vektorem rychlosti \mathbf{v}

$$m\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (29)$$

Všimneme si, že levou stranu můžeme dostat derivací výrazu

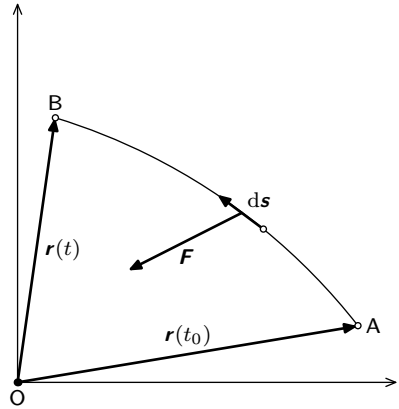
$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

podle času. Veličinu T nazýváme *kinetickou energií* hmotného bodu. Rovnici (29) proto nyní podle času zintegrujeme (od okamžiku t_0 do t), abychom na levé straně získali kinetickou energii

$$T - T_0 = \int_{t_0}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Na součin $\mathbf{v} dt$ se můžeme dívat jako na elementární vektor, jehož velikost je rovna dráze ураženě za dt a jehož směr je tečný na trajektorii. Proto píšeme

$$T - T_0 = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (30)$$



Obr. 52

Integrálu na pravé straně říkáme *křivkový integrál*, neboť integrujeme podél trajektorie. Tento integrál, který určitě všichni dobře znáte, je roven celkové práci vykonané na hmotném bodu mezi body $A = s(t_0)$ a $B = s(t)$.

Pokud existuje funkce $V(\mathbf{r})$ taková, že

$$\mathbf{F} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

řekáme síle \mathbf{F} *konzervativní* a funkci V *potenciální energie*. Mezi konzervativní síly patří například síla gravitační nebo síla elektrostatická. Dosaďme tento vztah do (30)

$$T - T_0 = - \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right) = - \int_A^B dV = V(A) - V(B).$$

Vidíme tedy, že pokud na hmotný bod působí jen konzervativní síly, zachovává se veličina

$$E = T + V, \quad (31)$$

kterou nazýváme *mechanická energie*.

Úloha II. S ... Newtonovy pohybové rovnice

- a) Napište a řešte pohybové rovnice hmotného bodu v tíhovém poli Země. Souřadnicovou soustavu orientujte tak, že osy x a y jsou vodorovné a osa z míří vzhůru. Počáteční poloha hmotného bodu je $\mathbf{r}_0 = (0, 0, h)$, počáteční rychlost je $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$. Soustavu spojenou se Zemí považujte za inerciální.
- b) Muž s puškou sedí v křesle, které se otáčí kolem svislé osy s frekvencí $f = 1$ Hz. Spolu s křeslem se otáčí terč, který je k němu pevně upevněn. V jistém okamžiku muž vystřelí kulku rychlostí $v = 300$ km/h směrem od osy otáčení přesně do středu terče. V jakém místě prorazí kulka terč? Řešte jak z pohledu neinerciální, tak z pohledu inerciální vztažené soustavy. Vzdálenost hlavně od středu terče je $l = 3$ m, odpor vzduchu zanedbejte.
- c) Vyjádřete závislost rychlosti hmotného bodu na poloze v gravitačním poli Slunce.

(řešení str. 98)

Kapitola 2: Lagrangeovská formulace mechaniky

V této kapitole si budeme povídat o zcela jiné formulaci mechaniky, než je Newtonův pohled, který jsme si zopakovali v minulé kapitole. Pokud nějaké části nebudete zcela rozumět, přejděte rovnou na příklady, kterými je výklad dostatečně proložen.

Vazby

Newtonovská mechanika umí přehledně a jednoduše řešit příklady, pokud jsou jednoznačně určeny působící síly. Problém ale nastane, pokud se objeví *vazba*. Jedná se o geometrickou podmínku, kterou daná soustava musí splňovat. Většinou se jedná o případ, kdy je těleso vázáno na (musí se pohybovat po) nějakou křivku, například kružnici či přímku. Obecně vazbu hmotného bodu na plochu můžeme matematicky vyjádřit pomocí rovnice

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (32)$$

Vazba může být, jak je zapsáno v rovnici (32), obecně závislá i na čase. Vazeb může být i několik, pro r vazebných podmínek je nutno psát

$$f_j(x, y, z, t) = 0, \quad \text{pro } j = 1, \dots, r. \quad (33)$$

Ukažme si sestavení takovéto rovnice na nejjednodušších případech.

Příklad 3 – vazebné podmínky

Určete vazebné rovnice pro pohyb hmotného bodu

- a) po přímce, která je souhlasná s osou x ,
- b) po kružnici se středem o souřadnicích $[x_0, y_0]$ a poloměrem R ,
- c) po kouli o poloměru R se středem na ose y , který se pohybuje podél osy y rychlostí v .

Řešení

- a) Zde je určení podmínky jednoduché, vyplývá totiž přímo ze zadání

$$y = 0, \quad z = 0.$$

- b) Pro každý bod na kružnici je splněna rovnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Vazebná podmínka má potom tvar

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0, \quad z = 0.$$

- c) Pro souřadnice hmotného bodu na kouli se středem v $[x_0, y_0, z_0]$ platí $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$. Protože střed koule je na ose y a y -ová souřadnice středu lineárně roste s časem, platí pro vazebnou podmínku

$$x^2 + (y - vt)^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Pokud máme soustavu více hmotných bodů, které jsou navzájem svázány vazebnou podmínkou, potom můžeme rovnici (33) zobecnit pro N hmotných bodů

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) = 0, \quad \text{pro } j = 1, \dots, r.$$

Index u souřadnic probíhá všechny hmotné body, které se na vazbě podílejí. Zkusme si teď vazby nějakým způsobem klasifikovat.

Obecnou vazbu danou rovnicí (32) nazýváme *holonomní*. Pokud neobsahuje explicitně čas, nazýváme takovou vazbu *skleronomní*, v opačném případě mluvíme o vazbě *rheonomní*. Vazebné podmínky mohou záviset i na rychlostech, formulace Lagrangeovy mechaniky s těmito vazbami je poněkud složitější, proto zde nebudeme tyto vazby více popisovat.

Zobecněné souřadnice

Dosud jsme všechny problémy řešili v kartézských souřadnicích. Zavádění těchto souřadnic nemusí být vždy „nejpřirozenější“; můžeme najít souřadnice, ve kterých se nám bude problém řešit daleko snadněji. Ještě výrazněji to platí pro soustavy s holonomními vazbami.

Podívejme se na příklad 3. K určení polohy částice v částech a) a b) nám stačí jenom jedna souřadnice. V prvním případě je to poloha na ose x , můžeme tedy zůstat u kartézských souřadnic. V případě b) nám sice k popisu polohy bodu stačí jedno číslo – poloha na kružnici, v kartézském systému ale potřebujeme k určení polohy x -ovou i y -ovou souřadnici. Kdybychom například znali jen souřadnici y , nedokážeme z vazebné podmínky (32) určit souřadnici x , podmínka je totiž kvadratická v x i v y . Zavedením polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

nám bude k popisu polohy stačit pouze souřadnice φ , neboť vazebná podmínka získá tvar $r = R$.

Přístupme k definici zobecněných souřadnic. Předpokládejme, že polohu částice určíme proměnnými q_1, q_2, q_3 . Kartézské souřadnice x_1, x_2, x_3 můžeme vyjádřit takto⁸

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t). \tag{34}$$

Abychom mohli trojici q_1, q_2, q_3 nazvat souřadnicemi bodu, musí být zobrazení x_i vzájemně jednoznačné, tj. každé trojici q_1, q_2, q_3 odpovídá právě jedna trojice x_1, x_2, x_3 a naopak. Pak existuje inverzní zobrazení

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3, t). \tag{35}$$

Uvažujme soustavu s r holonomními podmínkami (33) a zavedme následující souřadnice. Prvních $n = 3 - r$ zvolíme libovolně podle (35) a posledních r následovně

$$q_{i+3-r} = f_i(x, y, z, t) = 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, r.$$

Tudíž (34) dostává tvar

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t). \tag{36}$$

Kartézské souřadnice závisí jen na prvních n obecných souřadnicích, protože ostatní jsou nulové. Poslední vztah můžeme interpretovat takto. Souřadnice x_1, x_2, x_3 jsou souřadnice bodu v třírozměrném prostoru. Zavedením r holonomních podmínek v tomto prostoru vznikne podprostor⁹ dimenze n , na nějž je pohyb hmotného bodu omezen. Jeho body tedy stačí určovat

⁸⁾ Označení kartézských souřadnic jako x, y, z je ekvivalentní s x_1, x_2, x_3 . Při použití indexů se více hodí druhá možnost.

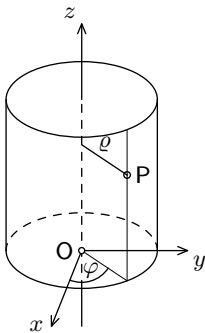
⁹⁾ Tento prostor nazýváme *konfiguračním prostorem* holonomní soustavy.

n obecnými souřadnicemi q_1, \dots, q_n , vztahem (36) jsou pak určeny všechny kartézské souřadnice jednoznačně. Protože polohu částice určuje n souřadnic, říkáme, že má soustava n stupňů volnosti.

V příkladu 3 má tedy hmotný bod v části a) a b) jeden stupeň volnosti a v části c) dva stupně volnosti.

Matematické kyvadlo je podrobeno dvěma holonomními vazbám, má tedy jeden stupeň volnosti, jeho stav popisujeme orientovaným úhlem, který svírá se svislou rovinou.

Pokud chceme řešit problém hmotného bodu omezeného r vazebnými podmínkami, můžeme zůstat v kartézských souřadnicích, jak ukazují Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Ve většině případů je daleko vhodnější přejít k $n = 3 - r$ zobecněným souřadnicím, které zavádíme tak, aby jimi byly v každém čase určeny jednoznačně kartézské souřadnice. Při jejich hledání využíváme symetrii systému, aby se nám popis systému co nejvíce zjednodušil. Pohybové rovnice v těchto zobecněných souřadnicích získáme nejlépe z Lagrangeových rovnic 2. druhu.



Obr. 53

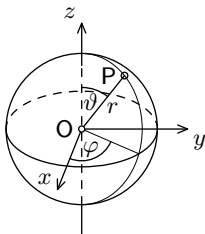
Na závěr uvedme dva nejdůležitější systémy zobecněných souřadnic, se kterými se ve fyzice díky různým symetriím setkáte velice často.

Pokud má zkoumaný systém válcovou symetrii, zavádíme tzv. *válcové souřadnice* (viz obr. 53). V prostoru volíme osu, od které měříme vzdálenost ρ , podél ní měříme vzdálenost z a úhel otočení kolem osy udává φ . Transformační vztahy s kartézskými souřadnicemi jsou

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

V systémech se sférickou symetrií zavádíme tzv. *sférické souřadnice* (viz obr. 54). V prostoru volíme bod, od kterého měříme vzdálenost r , a úhel otočení kolem tohoto bodu udávají $\varphi \in (0, 2\pi)$ a $\vartheta \in (0, \pi)$. Transformační vztahy s kartézskou souřadnicovou soustavou jsou

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta.$$



Obr. 54

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

Zavedení vazeb a vazebných rovnic nás vede k zahrnutí vazebné síly do Newtonových rovnic. Uvažujme nejdříve pohyb omezený jednou vazebnou podmínkou (pohyb po ploše). Nepřihlížíme-li ke tření (jež může být eventuálně započítáno zvlášť), působí vazebná plocha na hmotný bod silou \mathbf{R} . Od této síly očekáváme, že je kolmá na vazebnou plochu, protože se od plochy nelze odtrhnout ani se do ní zabořit. Tuto vlastnost můžeme zapsat takto

$$\mathbf{R} = \lambda \text{grad } f, \tag{37}$$

kde f je vazba, grad je diferenciální vektorový operátor *gradient*

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

a λ je zatím neurčená funkce času. Pro zvědavé čtenáře ukažme, že vektor grad f je skutečně kolmý na vazebnou plochu (kolmá na tuto plochu je potom i vazebná síla \mathbf{R}).

Vezměme dva body, pro které platí $f = 0$

$$f(x, y, z) = 0, \quad f(x + dx, y + dy, z + dz) = 0,$$

potom také

$$0 = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z).$$

První člen rozvineme v Taylorovu řadu do prvního řádu

$$0 = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz - f(x, y, z),$$

to můžeme ale také zapsat jako skalární součin

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } f \cdot d\mathbf{r},$$

neboli vektor $\text{grad } f$ je kolmý na vektor $d\mathbf{r}$, ten však leží v ploše f , gradient je tedy nutně kolmý na plochu f .

Přidejme vazebnou sílu do Newtonovy pohybové rovnice, dostaneme

$$\mathbf{F} + \lambda \text{grad } f = m\mathbf{a}. \quad (38)$$

Tato rovnice se nazývá *Lagrangeova rovnice 1. druhu* a představuje vlastně tři pohybové rovnice pro tři souřadnice. Spolu s vazebnou podmínkou (32) tak máme soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé a_x, a_y, a_z a λ .

Příklad 4 – nakloněná rovina

Určete složky zrychlení hmotného bodu pohybujícího se po nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou podložkou úhel α .

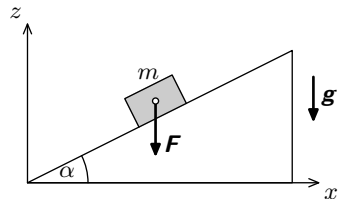
Řešení

Na hmotný bod působí tíhová síla, která má složky $\mathbf{F} = (0, 0, -mg)$. Pro nakloněnou rovinu platí $\text{tg } \alpha = z/x$, vazebná podmínka má tedy tvar

$$f = x \text{tg } \alpha - z = 0.$$

Vektor $\text{grad } f$ má složky

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (\text{tg } \alpha, 0, -1).$$



Obr. 55. Nakloněná rovina

Vše dosadíme do rovnice (38)

$$(0, 0, -mg) + \lambda(\text{tg } \alpha, 0, -1) = m(a_x, a_y, a_z).$$

Pro jednotlivé složky dostáváme tedy rovnice

$$\lambda \text{tg } \alpha = ma_x, \quad 0 = a_y, \quad -mg - \lambda = ma_z.$$

Zderivujeme-li vazebnou podmínku dvakrát podle času, dostaneme čtvrtou rovnici

$$a_x \text{tg } \alpha - a_z = 0. \quad (39)$$

Vyjádříme ze třetí rovnice λ , dosadíme do první a použijeme (39).

$$\begin{aligned} (-mg - ma_x \text{tg } \alpha) \text{tg } \alpha = ma_x &\Rightarrow a_x = -\frac{g \text{tg } \alpha}{\text{tg}^2 \alpha + 1} = -g \sin \alpha \cos \alpha, \\ a_y = 0, \quad a_z = a_x \text{tg } \alpha = -g \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Dostali jsme známé zrychlení tělesa, které se pohybuje po nakloněné rovině.

Pokud budeme mít více nezávislých vazebných podmínek r , započítáme každou jako vazebnou sílu zvlášť. V tomto případě bude mít Lagrangeova rovnice tvar

$$\mathbf{F} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad} f_i = m \mathbf{a}. \quad (40)$$

Jde vlastně o Newtonův zákon síly, v němž rozdělujeme síly na vtištěné \mathbf{F} a vazebné \mathbf{R} , které můžeme také napsat pomocí vztahu (37). Zkusme teď vztah (40) zobecnit. Místo zrychlení \mathbf{a} píšme $\ddot{\mathbf{r}}$, což je druhá derivace polohového vektoru podle času. Dostáváme tak po dosazení do (40) s (33) obecně soustavu čtyř diferenciálních rovnic druhého řádu.

$$\mathbf{F} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad} f_i = m \ddot{\mathbf{r}},$$

$$f_i(x, y, z, t) = 0, \quad \text{pro } i = 1, \dots, r.$$

Pokud nechceme použít kartézské souřadnice (často se pro popis dané soustavy nehodí), můžeme použít obecné souřadnice, o nichž jsme se již něco dozvěděli. Lagrangeovy rovnice 1. druhu budou mít formálně stejný tvar, ve složkách je ale jejich vyjádření dosti složité (zjednoduší se pouze vazebná podmínka). Pro řešení problémů v obecných souřadnicích proto nebudeme Lagrangeovy rovnice 1. druhu používat, dále v textu si na to ukážeme daleko vhodnější nástroj.

Na závěr ještě zmíníme tvar Lagrangeových rovnic 1. druhu pro soustavu N hmotných bodů. Soustavu budeme popisovat v kartézské souřadnicové soustavě. Vezmeme si j -tý bod této soustavy, jemu přiřadíme trojici kartézských souřadnic (x_j, y_j, z_j) . Soustava nechtě je omezena r holonomními vazbami

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Soustava Lagrangeových rovnic 1. druhu má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad}_1 f_i &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1, \\ &\vdots \\ \mathbf{F}_N + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{grad}_N f_i &= m_N \ddot{\mathbf{r}}_N, \end{aligned}$$

kde

$$\operatorname{grad}_j f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right).$$

Rovnice jsou vektorové, máme tak $3N + r$ diferenciálních rovnic pro $3N + r$ neznámých $x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \lambda_1, \dots, \lambda_r$.

Úloha III. S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu

- Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákně. Zaveďte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.
- Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0,$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

- c) Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepi od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepi v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)

(řešení str. 101)

Virtuální posunutí, d'Alembertův princip

Vraťme se teď k vazebné síle \mathbf{R} , kterou jsme definovali pomocí vztahu

$$\mathbf{R} = \lambda \operatorname{grad} f,$$

a uvažujme vazbu, která nezávisí na čase. Již víme, že tato síla je kolmá na vazbu, tedy na plochu (či na křivku v prostoru), po které se hmotný bod pohybuje. Posuňme hmotný bod o vektor $\delta \mathbf{r}$ po vazebné ploše. Pokud je tento vektor posunutí velmi malý, můžeme považovat vektor \mathbf{R} za konstantní, posunutí $\delta \mathbf{r}$ je tedy kolmé k vazebné síle, čili platí

$$\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r} = 0, \quad (41)$$

neboť skalární součin dvou kolmých vektorů je nula. Vektor $\delta \mathbf{r}$ nazýváme *virtuálním posunutím*. Vztah (41) má tvar práce $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ a ukazuje, že práce vykonaná vazebnou silou (*virtuální práce*) při tomto virtuálním posunutí je nulová. Vazebnou sílu \mathbf{R} můžeme podle vztahu z Lagrangeových rovnic 1. druhu vyjádřit jako $\mathbf{R} = m\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}$. Po dosazení do (41) dostaneme

$$(\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} = 0.$$

Rozepišme tento vztah do složek

$$\sum_{i=1}^3 (F_i - m\ddot{x}_i) \delta x_i = 0. \quad (42)$$

Požadavek, aby tento vztah platil pro všechna virtuální posunutí δx_i v souladu s vazbami, vyjadřuje *d'Alembertův princip*.

Pokud by systém nebyl podroben vazbám, byla by virtuální posunutí δx_i vzájemně nezávislá (tím je míněno, že virtuální posunutí δx_1 ve směru osy x neovlivňuje posunutí ve směru jiných os a naopak) a d'Alembertův princip by byl tudíž ekvivalentní s Newtonovými pohybovými rovnicemi pro vtištěné síly $F_i - ma_i = 0$. Za přítomnosti vazeb ale nejsou posunutí δx_i nezávislá a koeficienty, které u nich ve vztahu (42) vystupují, nejsou rovny nule, což je přirozeným důsledkem existence vazebných sil.

Výhodou d'Alembertova principu je, že dynamiku tělesa popisuje pouze jedna rovnice, narozdíl například od Newtonových rovnic, které jsou tři. Další výhodou je, že nám umožňuje hledat řešení pohybových rovnic systému, aniž bychom se museli zabývat vazebnými silami, které v tomto principu vůbec nevystupují.

Často nás zajímá rovnovážná poloha daného systému podrobeného vazbám. V tomto případě je $a_i = \ddot{x}_i = 0$ a vztah (42) se zjednoduší na tvar

$$\sum_{i=1}^3 F_i \delta x_i = 0.$$

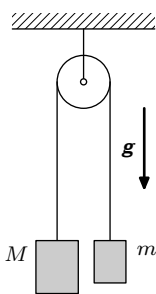
To znamená, že práce vykonaná vtištěnými silami F_i při nekonečně malé výchylce z rovnovážné polohy je nulová. Stejný vztah dostaneme z d'Alembertova principu, pokud budeme považovat $F_i - m_i a_i$ za *efektivní sílu*, která zahrnuje i zdánlivé síly. Výhodou principu virtuální práce je, že místo diferenciálních rovnic řešíme rovnice algebraické.

D'Alembertův princip můžeme rovněž formulovat pro obecně N hmotných bodů. Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m\ddot{x}_i)\delta x_i = 0 \quad (43)$$

pro každé virtuální posunutí δx_i .

Vše si teď ukažme na příkladu.



Obr. 56

Příklad 5 – soustava s kladkou

Určete zrychlení soustavy na obrázku 56. Uvažujte $M > m$, tření na kladce zanedbejte.

Řešení

Vzdálenost tělesa o hmotnosti m od kladky označme x_1 , vzdálenost druhého tělesa o hmotnosti M označme x_2 . Napišme si nejprve vazebnou podmínku. Je-li délka lana L , má vazebná podmínka tvar

$$x_1 + x_2 - L = 0.$$

Pro virtuální posunutí tedy platí

$$\delta x_1 = -\delta x_2.$$

Napišme si vztah (42)

$$M(g - \ddot{x}_1)\delta x_1 + m(g - \ddot{x}_2)\delta x_2 = 0,$$

po dosazení za δx_2 a vyjádření \ddot{x}_1 z druhé derivace vazbové podmínky ($\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$) dostaneme

$$[M(g - \ddot{x}_1) - m(g + \ddot{x}_1)]\delta x_1 = 0.$$

Protože tato rovnice musí platit pro všechna posunutí δx_1 , dostáváme

$$M(g - \ddot{x}_1) - m(g + \ddot{x}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1 = \frac{M - m}{M + m} g.$$

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Dostáváme se k nejdůležitější části našeho seriálu. Zatím jsme při popisu pohybu hmotných bodů zohledňovali silový přístup, tedy ze znalosti působících sil a vazeb jsme sestavili pohybové rovnice. Existuje ale i druhý, většinou daleko efektivnější způsob. Jedná se o energetický přístup. Ze znalosti potenciální a kinetické energie pak pomocí speciálních rovnic dokážeme sestavit tytéž pohybové rovnice jako pomocí sil. Výhoda je v tom, že většinou dokážeme snáz určit hodnotu energie než velikosti působících sil.

Abychom mohli energetický princip efektivně použít, požadujeme po soustavě jednu důležitou vlastnost – aby v ní platil zákon zachování energie. Pokud se energie ztrácí, např. v důsledku třecích sil, lze Lagrangeovy rovnice 2. druhu také použít, mají ale podstatně složitější tvar.

Princip výpočtu bude následující. Má-li hmotný bod n stupňů volnosti, zvolíme si n obecných souřadnic, označme je q_1, q_2, \dots, q_n . Může se jednat třeba o úhel či délku. Poté pomocí těchto souřadnic, jejich derivací a času vyjádříme energii. Vztahy pro energii dosadíme do rovnice, která povede právě k pohybovým rovnicím dané soustavy. Přejdeme od abstrakce ke konkrétním vztahům.

Definujme nejdříve funkci

$$L = T - V,$$

kde T je kinetická energie a V je potenciální energie soustavy. Tato funkce se nazývá *Lagrangeova funkce* nebo zkráceně *lagrangian*. Pro něj platí n rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (44)$$

Tyto rovnice se nazývají *Lagrangeovy rovnice 2. druhu*. Lagrangeovy rovnice mají stejný tvar ve všech obecných souřadnicích, volba souřadnic je tedy naprosto libovolná.

Podobně jako u Lagrangeových rovnic 1. druhu se i zde zamyslíme nad tím, jaký tvar mají Lagrangeovy rovnice 2. druhu pro soustavu N hmotných bodů. Nechť je soustava omezena r holonomními vazbami, soustava má tedy $3N - r$ stupňů volnosti. Můžeme si zvolit $3N - r$ zobecněných souřadnic q_i , které nám soustavu jednoznačně popíší. Dále postupujeme stejně jako pro jediný hmotný bod. Lagrangian soustavy (rozdíl celkové kinetické a celkové potenciální energie) vyjádříme jako funkci souřadnic q_i , jejich derivací a času. Pro soustavu potom platí $3N - r$ Lagrangeových rovnic 2. druhu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 3N - r.$$

Máme tak $3N - r$ diferenciálních rovnic pro $3N - r$ neznámých q_1, \dots, q_{3N-r} .

Konkrétní výpočet si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 6 – matematické kyvadlo

Vypočítejte periodu matematického kyvadla o délce l .

Řešení

Matematické kyvadlo má jeden stupeň volnosti, jako jeho souřadnici volíme výchylku φ z rovnovážné polohy. Pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2,$$

pro potenciální energii

$$V = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Lagrangian kyvadla je tedy

$$L = T - V = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi). \quad (45)$$

Dosadíme do (44) a uvědomíme si, že kinetická energie nezávisí na φ a potenciální nezávisí na $\dot{\varphi}$.

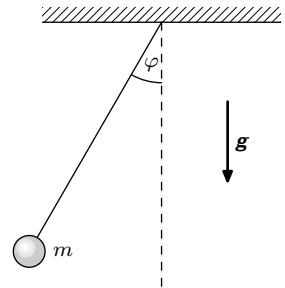
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0.$$

Pokud jsou výchylky malé, můžeme použít aproximaci $\sin \varphi \approx \varphi$. Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0. \quad (46)$$

Nyní se již můžeme radovat, protože toto je rovnice harmonických kmitů a platí $\omega^2 = g/l$. Z toho již snadno dostaneme hledaný vztah pro periodu.

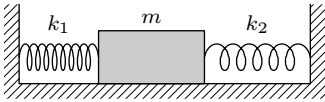
Velmi důležitá je správná volba souřadnice, která bude vystupovat v Lagrangeových rovnicích. V příkladu 6 jsme sice neměli na výběr, protože matematické kyvadlo má pouze jeden stupeň volnosti, ale setkáme se i se systémy s více stupni volnosti. Ne že bychom při nevhodné volbě souřadnic nedošli ke správnému výsledku, ale cesta by byla o poznání delší. Pokud zobecněnými souřadnicemi vhodně popíšeme zkoumaný systém, jsou Lagrangeovy rovnice velice užitečný nástroj, ba dokonce jsou přímo pro tyto případy takto zformulované.



Obr. 57

Příklad 7 – dvě pružiny

Určete periodu kmitů tělesa na obrázku 58. Tuhost první pružiny je k_1 a druhé k_2 . Tření a hmotnost pružin neuvažujte, pružiny jsou na začátku bez napětí.



Obr. 58

Řešení

Těleso má jeden stupeň volnosti, za souřadnici si zvolíme vzdálenost tělesa od rovnovážné polohy, označme ji x . Pro kinetickou energii platí $T = m\dot{x}^2/2$. Potenciální energie se skládá z potenciální energie pružnosti první pružiny, která má hodnotu $V_1 = k_1 x^2/2$, a potenciální energie pružnosti druhé pružiny, která má hodnotu $V_2 = k_2 x^2/2$. (Potenciální energie závisí pouze na absolutní výchylce z rovnovážné polohy.) Pro lagrangián tedy dostáváme

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_1 x^2 - \frac{1}{2}k_2 x^2.$$

Pro dosazení do Lagrangeových rovnic obdržíme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + k_1 x + k_2 x = 0.$$

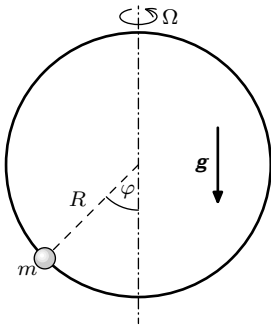
Tento vztah můžeme upravit na tvar

$$\ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = 0.$$

To je ale rovnice harmonických kmitů, pro niž platí $\omega^2 = (k_1 + k_2)/m$. Z toho již snadno dopočítáme hledaný výsledek.

Úloha IV. S ... Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Malý korálek o hmotnosti m klouže bez tření na drátu ve tvaru kruhové smyčky poloměru R , smyčka se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy (viz obr. 59).



Obr. 59

- Vhodně zvolte zobecněnou souřadnici a sestrojte Lagrangeovu funkci problému.
- Sestavte Lagrangeovu rovnici 2. druhu, která popisuje pohyb korálku.
- Rozhodněte, kdy je rovnovážná poloha v nejnižší poloze smyčky stabilní a kdy je labilní v závislosti na Ω . Pro Ω , kdy je tato poloha stabilní, vypočítejte periodu kmitů korálku kolem této polohy.
- Za bonusové body nalezněte další rovnovážné polohy, diskutujte, zda jsou stabilní nebo labilní. Pokud jsou stabilní, určete periodu kmitů kuličky kolem těchto rovnovážných poloh.

(řešení str. 102)

Kapitola 3: Použití Lagrangeova formalismu, příklady

Hlavním účelem tohoto seriálu není vyložit rigorózně všechnu teorii, která se týká lagrangeovského formalismu, ale spíše naučit se ho efektivně používat, zaměříme se teď na příklady. Proto se nezalekněte složitějšího matematického aparátu a zkuste projít příklady uvedené v této kapitole, stačí znát pojem derivace.

V předcházejících kapitolách byl výklad prokládán příklady, ty však byly většinou velmi jednoduché. Cílem nebylo tyto úlohy vyřešit, to by šlo daleko jednodušeji s pomocí newtonovské mechaniky, ale ukázat principy, pomocí nichž se řeší složitější příklady. Právě na ty se teď zaměříme. Ukáže se, že Lagrangeův přístup může být v obtížnějších úlohách daleko efektivnější než newtonovský.

Zatím jsme si vysvětlili, jak fungují určité principy mechaniky a jak s nimi počítat. Umíme počítat s d'Alembertovým principem, Lagrangeovými rovnicemi, ale nevíme, kdy přesně co máme použít.

Princip virtuální práce

Tento princip je velmi výhodný při určování rovnovážných poloh. Je naopak téměř nepoužitelný při počítání dynamického vývoje soustavy. Samotný výpočet často spočívá v tom, že vyjádříme polohu těžiště soustavy pomocí nějakých parametrů (které se mohou měnit – třeba úhel, nebo nějaká vzdálenost). Potom řešíme rovnici vyjadřující princip virtuální práce

$$\sum_{i=1}^3 F_i \delta x_i = 0.$$

Řešení se většinou redukuje na hledání extrému nějaké souřadnice těžiště x_i jako funkce zvolených parametrů, neboť v těchto extrémních bodech platí $\delta x_i = 0$. Jedná se vlastně o hledání minimální potenciální energie.

Příklad 8 – rovnovážná poloha tyčky

Najděte rovnovážnou polohu tyčky znázorněné na obrázku 60. Má délku $2l$, je opřena o hranu stolu a stěnu.

Řešení

Protože se jedná o statickou úlohu, použijeme princip virtuální práce. Pokud si zavedeme souřadnicovou soustavu s vodorovnou osou x a svislou osou y , můžeme psát

$$F_x \delta x + F_y \delta y = 0.$$

Protože jediná vtištěná síla je zde tíha tyčky G , která má směr osy y , redukuje se tento vztah na tvar

$$G \cdot \delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta y = 0.$$

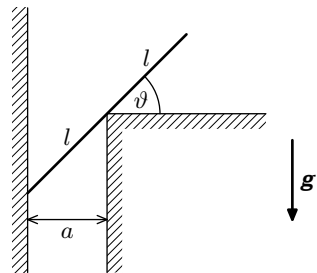
Protože tíhová síla působí v těžišti tělesa, je δy virtuálním posunutím těžiště. Výšku těžiště si můžeme parametrizovat pomocí úhlu ϑ , který svírá tyčka se stolem. Potom výšku těžiště vyjádříme jako $y = -a \operatorname{tg} \vartheta + l \sin \vartheta$. Virtuální posunutí bude nulové, když funkce $y = y(\vartheta)$ bude nabývat extrému. To je důležité si uvědomit i v jiném případě. Platí tedy

$$\delta y = \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \delta \vartheta = \left(-\frac{a}{\cos^2 \vartheta} + l \cos \vartheta \right) \delta \vartheta = 0.$$

Potom již lehko dostaneme

$$-\frac{a}{\cos^2 \vartheta} + l \cos \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^3 \vartheta = \frac{a}{l}.$$

Z toho již snadno najdeme hledaný výsledek.



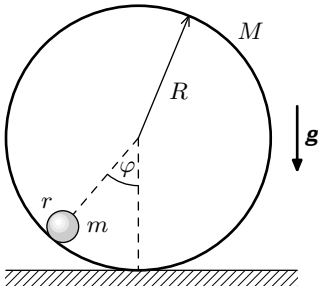
Obr. 60

Lagrangeovy rovnice 1. druhu

I když mají Lagrangeovy rovnice 1. druhu svůj velký význam, k samotným výpočtům se příliš neužívají. Jednak bývá často obtížné najít vazebnou rovnici (nebo je řešit v obecných souřadnicích) a hlavně se ke stejnému výpočtu dají většinou použít Lagrangeovy rovnice 2. druhu, se kterými se počítá lépe. Nicméně je dobré mít Lagrangeovy rovnice 1. druhu na zřeteli a zapamatovat si ideu, ze které vycházejí.

Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Ty mají naopak velmi široké použití, a to nejen v mechanice. Nalezení potenciální a kinetické energie bývá totiž často daleko jednodušší než se zabývat působícími silami. Používají se tedy k určování pohybu dynamických systémů, např. různých zrychlených pohybů či kmitání. Problém se v podstatě redukuje pouze na nalezení vhodných souřadnic, v nichž vyjádříme lagrangian.



Obr. 61

Příklad 9 – dutý válec s kuličkou

Najděte periodu malých kmitů soustavy na obrázku 61. Dutý válec, ke kterému je pevně připevněna kulička, se pohybuje volně.

Řešení

Válec se může jen převalovat z jedné strany na druhou, má tedy jeden stupeň volnosti. Za souřadnici si zvolíme úhel otočení válce z rovnovážné soustavy. Pro kinetickou energii platí

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} (2MR^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(R-r)^2) \dot{\varphi}^2.$$

K určení momentu setrvačnosti kuličky vůči ose procházející středem dutého válce jsme použili Steinerovu větu. Potenciální energie dutého válce zůstává stále stejná, pro potenciální energii kuličky platí

$$V = mgR(1 - \cos \varphi).$$

Dosadíme do Lagrangeových rovnic.

$$-\frac{\partial(T-V)}{\partial \varphi} + \frac{d}{dt} \frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{\varphi}} = mgR \sin \varphi + (2MR^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m(R-r)^2) \ddot{\varphi} = 0.$$

Zavedeme-li aproximaci $\sin \varphi \approx \varphi$, dostaneme po úpravě

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgR}{2MR^2 + m(R^2 - 2Rr + 7r^2/5)} \varphi = 0,$$

což je rovnice harmonických kmitů a platí

$$\omega^2 = \frac{mgR}{2MR^2 + m(R^2 - 2Rr + 7r^2/5)}.$$

Odtud již snadno vypočítáme periodu kmitů.

Příklad 10 – soustava břemena a kladek

Na závěr kapitoly spočítejme jeden příklad třemi různými způsoby, které teoretická mechanika nabízí. Budeme určovat zrychlení tělesa M na obrázku 62.

Řešení

Zvolme kartézskou soustavu tak, že osa x míří dolů. Pohyb všech těles je zřejmě jednorozměrný, budeme se zabývat jen x -ovou souřadnicí. Označíme x_1, x_2 souřadnice kladek, X souřadnici břemene. Levé lano má délku L_1 , pravé L_2 . Vazebné podmínky jsou vyjádřeny rovnicemi

$$\begin{aligned} f_1 &= 2x_1 + X - L_1 = 0, \\ f_2 &= 2x_2 + X - L_2 = 0. \end{aligned}$$

Systém má tedy jeden stupeň volnosti, za nezávislou souřadnici zvolíme X . Pro virtuální posunutí kladek dostaneme podmínky

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -\frac{1}{2} \delta X.$$

Pro zrychlení derivováním vazebných podmínek obdržíme

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = -\frac{1}{2} \ddot{X}. \tag{47}$$

Zde se cesty řešení rozcházejí podle použité metody.

a) **D'Alembertův princip**

Pohybová rovnice

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{F}_i - m\mathbf{a}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$$

po rozepsání dává

$$m_1(g - \ddot{x}_1) \cdot \delta x_1 + M(g - \ddot{X}) \cdot \delta X + m_2(g - \ddot{x}_2) \cdot \delta x_2 = 0.$$

Po dosazení za virtuální posunutí a zrychlení dostaneme

$$\left[-\frac{1}{2}m_1\left(g + \frac{1}{2}\ddot{X}\right) + M\left(g - \ddot{X}\right) - \frac{1}{2}m_2\left(g + \frac{1}{2}\ddot{X}\right)\right] \cdot \delta X = 0.$$

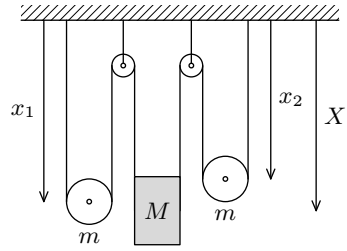
Z toho již snadno vyjádříme zrychlení \ddot{X} .

$$\ddot{X} = \frac{4M - 2(m_1 + m_2)}{4M + m_1 + m_2} g. \tag{48}$$

b) **Lagrangeovy rovnice 1. druhu**

Spolu s vazebnými podmínkami máme soustavu tří rovnic (pro každé těleso jednu)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad}_1 f_A &= m\ddot{\mathbf{r}}_1, \\ \mathbf{F}_2 + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad}_2 f_A &= m\ddot{\mathbf{r}}_2, \\ \mathbf{F} + \sum_{A=1}^2 \lambda_A \text{grad} f_A &= M\ddot{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$



Obr. 62

Vazebné rovnice jsou dvě, dva musí být také koeficienty λ . Pro gradienty dostaneme po derivování

$$\begin{aligned} \text{grad}_1 f_1 &= (2, 0, 0), & \text{grad}_1 f_2 &= (0, 0, 0), \\ \text{grad}_2 f_1 &= (0, 0, 0), & \text{grad}_2 f_2 &= (2, 0, 0), \\ \text{grad } f_1 &= (1, 0, 0), & \text{grad } f_2 &= (1, 0, 0). \end{aligned}$$

Po rozepsání soustavy v x -ových složkách dostaneme

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= m_1 g + 2\lambda_1, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= m_2 g + 2\lambda_2, \\ M \ddot{X} &= M g + \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Po dosazení za zrychlení \ddot{x}_1 a \ddot{x}_2 z rovnice (47) dostaneme tři rovnice pro tři neznámé \ddot{X} , λ_1 , λ_2 . Řešením vychází (48) a navíc pro napětí lan obdržíme

$$\lambda_1 = -m_1 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}, \quad \lambda_2 = -m_2 g \frac{3M}{4M + m_1 + m_2}.$$

c) Lagrangeovy rovnice 2. druhu

Uvážíme-li, že potenciální energie tělesa V je závislá pouze na X a kinetická energie T pouze na \dot{X} , rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{X}} = 0. \quad (49)$$

Podobná podmínka jako pro zrychlení (47) a pro virtuální posunutí platí i pro rychlosti. Derivační vazebné podmínky

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} \dot{X}.$$

Pro kinetickou a potenciální energii potom dostáváme

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M \dot{X}^2 = \frac{1}{8} (4M + m_1 + m_2) \dot{X}^2, \\ V &= m_1 x_1 g + m_2 x_2 g + M X g = \frac{1}{2} g X (2M - m_1 - m_2) + \frac{1}{2} m_1 g L_1 + \frac{1}{2} m_2 g L_2. \end{aligned}$$

Po dosazení do (49) pak vyjde vztah pro zrychlení \ddot{X}

$$\frac{1}{2} g (2M - m_1 - m_2) + \frac{1}{4} (4M + m_1 + m_2) \ddot{X},$$

odtud

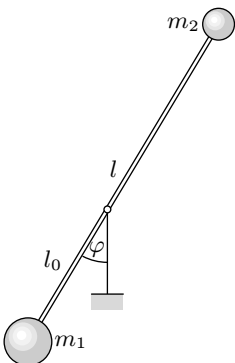
$$\ddot{X} = \frac{4M - 2(m_1 + m_2)}{4M + m_1 + m_2} g.$$

Úloha V. S ... Merkur, jáma a kyvadlo

V následujících úlohách ověříme vaši znalost všech dosud probíraných kapitol mechaniky, tj. Newtonova formalismu, d'Alembertova principu a Lagrangeova formalismu.

- a) Představte si planetu Merkur obíhající kolem Slunce. Jak známo, jeho eliptické trajektorie se stáčí (posouvá se poloha perihélia), což nemůže být způsobeno gravitační silou

$$\mathbf{F} = \varkappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}.$$



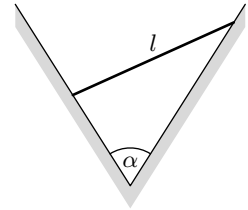
Obr. 63

Dokažte, že když k této síle přidáme dodatečnou centrální sílu

$$\mathbf{F} = C \frac{\mathbf{r}}{r^4},$$

kde C je vhodná konstanta, celá trajektorie (elipsa) se bude otáčet. Znáte-li tuto úhlovou rychlost Ω , určete konstantu C . Stačí takováto oprava k záchraně Newtonovy teorie gravitace?

- b) Určete rovnovážné polohy homogenní tenké tyčky délky l opřené o vnitřní stěny jamky ve tvaru písmene „V“ (viz obr. 64) v závislosti na vrcholovém úhlu jamky α .
- c) Pomocí Lagrangeových rovnic vypočítejte periodu malých kmitů dvojzvrtného kyvadla na obrázku 63. Závaží na koncích nehmotné tyčky délky l mají hmotnosti m_1 a m_2 , vzdálenost bodu závěsu od závaží o hmotnosti m_1 je l_0 .



Obr. 64

(řešení str. 105)

Kapitola 4: Hamiltonovská formulace mechaniky

V předposledním dílu seriálu si povíme něco o Hamiltonovu pohledu na mechaniku. K tomu si budeme muset nejprve definovat několik pojmů, které vycházejí z Lagrangeova formalismu.

Zobecněná hybnost a energie

Nechť Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na některé ze souřadnic q_j (takové souřadnici říkáme *cyklická*), tedy

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Potom se Lagrangeovy rovnice 2. druhu redukují na tvar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0.$$

Odtud plyne, že výraz v závorce je konstantní v čase. Tuto veličinu nazýváme *zobecněná hybnost*

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \quad (50)$$

Zobecněná hybnost se zachovává v případě cykličnosti souřadnic q_j . Poznamenejme ovšem, že obecně mohou mít p_j velmi rozmanitý fyzikální význam. Pokud uvažujeme kartézský souřadnicový inerciální systém, ve kterém nezávisí potenciální energie na rychlostech, platí pro lagrangian

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - V(\mathbf{r}, t).$$

Po dosazení do vztahu pro zobecněnou hybnost dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial v_j} = m v_j = p_j.$$

Vidíme tedy, že za jistých podmínek může být zobecněná hybnost shodná s běžnou hybností, ale obecně tomu tak není.

Pokud Lagrangeova funkce nezávisí explicitně na čase, tj. platí-li

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (51)$$

existuje mimořádně důležitá veličina (která je mimochodem integrálem pohybových rovnic)

$$h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (52)$$

Tvrzení, že se jedná o integrál pohybových rovnic (tj. pro řešení pohybových rovnic je h konstantní neboli zachovává se podél trajektorie), snadno dokážeme přímým výpočtem. Platí totiž

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i - \frac{dL}{dt},$$

kde

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Celkově tedy máme

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

což je rovno nule z platnosti 2. Lagrangeovy rovnice a podmínky (51). Veličina h se nazývá *zobecněná energie* a zachovává se tehdy, nezávisí-li Lagrangeova funkce na čase. Stejně jako zobecněná hybnost má zobecněná energie rozmanitý fyzikální význam, záleží hlavně na podobě lagrangiánu. Pokud můžeme napsat Lagrangeovu funkci ve tvaru

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - V(q_1, q_2, \dots, q_n),$$

kde koeficienty a_{ik} jsou konstanty nebo funkce souřadnic q_i , můžeme se snadno přesvědčit o tom, že vztah pro h se dá napsat ve tvaru

$$h = T + V.$$

V tomto případě má zobecněná energie význam mechanické energie.

Hamiltonova funkce, Hamiltonovy rovnice

V první polovině 19. století našel W. Hamilton novou formulaci klasické mechaniky. Pohybové rovnice v ní nabývají mimořádně jednoduchého tvaru. Hamiltonovská formulace měla velice důležitý význam pro další rozvoj fyziky zejména v oblasti kvantové mechaniky a statistické fyziky.

Hamiltonovskou formulaci budeme aplikovat na stejné problémy, pro které je možné odvodit Lagrangeovu funkci. Pro definici Hamiltonovy funkce budeme potřebovat zobecněné hybnosti, které jsme zavedli vztahem

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Zobecněnou energii v souřadnicích q_i , p_i nazýváme *Hamiltonovou funkcí*

$$H(q_i, p_i, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L. \quad (53)$$

Odtud se dají odvodit Hamiltonovy rovnice

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

kteřé pro systém s n stupni volnosti představují soustavu $2n$ diferenciálních rovnic prvního řádu pro $2n$ neznámých q_i, p_i . Tyto rovnice jsou nižšího řádu než rovnice Lagrangeovy, což je jejich velká výhoda. $2n$ -rozměrný prostor proměnných q_i, p_i nazýváme *fázovým prostorem* a dvojici q_i, p_i se stejným indexem říkáme *kanonicky sdružené veličiny*.

Hamiltonova formulace mechaniky je ekvivalentní s lagrangeovskou. Tak jako v Lagrangeově formulaci jsme hledali Lagrangeovu funkci, budeme zde hledat funkci Hamiltonovu.

Na jednoduchém příkladu si ukážeme odvození Hamiltonovy funkce a Hamiltonových rovnic. Jedná se o triviální úlohu, nevyplývá z ní tedy výhody Hamiltonovy formulace oproti Lagrangeově či Newtonově metodě.

Příklad 11 – matematické kyvadlo hamiltoniánem

Určete Hamiltonovu funkci a Hamiltonovy rovnice pro matematické kyvadlo délky l .

Řešení

V příkladu 6 jsme popisovali matematické kyvadlo pomocí Lagrangeovy funkce, kterou jsme odvodili vztahem (45)

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi).$$

Za zobecněnou souřadnici jsme volili úhlovou výchylku z rovnovážné polohy. K ní kanonicky sdružená zobecněná hybnost je

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi}, \tag{54}$$

kteřá je odlišná od normální hybnosti $ml\dot{\varphi}$. Pro Hamiltonovu funkci podle (53) dostáváme

$$H = p_\varphi\dot{\varphi} - L = ml^2\dot{\varphi}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \varphi).$$

Zdůrazňujeme, že hamiltonián je funkce souřadnic φ a p_φ , v předchozím vztahu je proto nutné za $\dot{\varphi}$ dosadit z (54).

Hamiltonovy rovnice pro matematické kyvadlo jsou

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi.$$

Tuto soustavu vyřešíme nejnázá tak, že ji převedeme na jedinou rovnici 2. řádu, kterou bychom stejně dostali z Lagrangeovy metody

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Kanonické transformace

V Lagrangeově formalismu jsme mohli přecházet mezi libovolnými zobecněnými souřadnicemi, aniž by se změnil tvar Lagrangeových rovnic.

Ukazuje se, že v Hamiltonově formalismu máme ruku ještě volnější. Třída transformací, vůči kterým zachovávají Hamiltonovy funkce tvar, je daleko širší. Tyto transformace nazýváme *kanonické*. Z tvaru Hamiltonových rovnic vidíme, že zobecněné souřadnice a hybnosti zde mají zcela rovnoprávnou roli. Proto není divu, že existuje kanonická transformace, kteřá vede k vzájemné výměně souřadnic a hybnosti.

Popisem kanonických transformací se zde bohužel zabývat nebudeme, matematický aparát by přesahoval rámeček tohoto textu.

Poissonovy závorky

Mějme ve fázovém prostoru dvě funkce závislé na čase $f(q_j, p_j, t)$ a $g(q_j, p_j, t)$. Poissonovou závorkou těchto funkcí nazýváme funkci

$$\{f, g\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Dá se ukázat, že tato funkce $\{f, g\}$ se nemění při kanonických transformacích. Mají proto klíčový význam pro formulaci tvrzení hamiltonovské mechaniky, důležitou roli sehrály při budování kvantové mechaniky.

Ukažme si jednu důležitou vlastnost Poissonových závorek. Pokud funkce $f(q_j, p_j)$ nezávisí explicitně na čase, je f integrálem pohybových rovnic, právě když

$$\{H, f\} = 0.$$

Odtud již snadno plyne, že sama Hamiltonova funkce je integrálem pohybových rovnic, pokud nezávisí na čase.

Dokonce platí následující věta. Jsou-li f a g integrály pohybových rovnic, je integrálem pohybových rovnic i jejich Poissonova závorka $\{f, g\}$. Ještě než ukončíme povídání o hamiltonovské formulaci mechaniky, ukážeme příklad na Poissonovy závorky.

Příklad 12 – volná částice

Ukažte, že hybnost $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ volné částice je integrál pohybu.

Řešení

Na volnou částici se budeme dívat z kartézského souřadného systému, tedy $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$. Lagrangián volné částice je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2).$$

Zobecněně hybnosti

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i$$

odpovídají normálním hybnostem. Hamiltonián tedy je

$$H = m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{p^2}{2m}.$$

Vypočítejme Poissonovy závorky z hamiltoniánu a j -té složky hybnosti

$$\{H, p_j\} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = 0,$$

neboť ani hamiltonián, ani j -tá složka hybnosti nezávisí na souřadnicích.

$$\frac{\partial p_j}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Zjistili jsme, že p_j je integrál pohybu, tudíž i $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ je integrál pohybu.

Úloha VI. S ... Hamiltonův formalismus

Lagrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i,$$

kde φ je elektrický potenciál a \mathbf{A} magnetický vektorový potenciál.

- Určete zobecněně hybnosti částice p_i příslušející rychlostem \dot{x}_i .
- Napište Hamiltonovu funkci.
- Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.

(řešení str. 110)

Kapitola 5: Hamiltonův variační princip

Formulace

Lagrangeovy rovnice jsme obdrželi z Newtonových rovnic přepisem do křivočarých souřadnic. V tomto díle si ukážeme, že je lze odvodit ze zcela fundamentálního principu stacionární akce. Tento princip nám jednak pomůže lépe pochopit strukturu samotné mechaniky a také si řekneme, že lze zobecnit i mimo klasickou mechaniku.

Hamiltonův princip matematicky formulujeme pomocí variačního počtu. Pokud tuto oblast matematiky neznáte, nezoufejte, snadno myšlenku tohoto dílu seriálu pochopíte i bez její znalosti.

Přístupme k formulaci Hamiltonova variačního principu.

Pohyb soustavy v čase $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ se odehrává tak, že

$$\delta S = 0 \tag{55}$$

(*variace akce je nula*), kde funkcionál¹⁰ S je akce definovaná

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt. \tag{56}$$

Postupně si jednotlivé pojmy vysvětlíme. Akce S je funkcionál, který trajektorii $q_j(t)$ s pevnými konci $q_j(t_1)$ a $q_j(t_2)$ (tj. v hraničních bodech t_1 a t_2 máme funkci $q_j(t)$ pevně zadanou) přiřadí číslo. Podle Hamiltonova principu budeme hledat takovou funkci $q_j(t)$, aby funkcionál S nabýval extrémní hodnoty.

Úloha hledání extrému funkcionálu je analogická hledání extrému funkce. Nutnou podmínkou pro existenci extrému funkce f je (jak jistě víte) nulovost diferenciálu

$$df = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

Analogicky nutnou podmínkou existence extrému funkcionálu S je nulovost variace $\delta S = 0$.

Odvození Lagrangeových rovnic

Jak jsme slíbili, nyní si nastíníme, na co Hamiltonův variační princip povede (důkazy některých kroků vynecháme a nebudeme formulovat podmínky, které musí funkcionál S a funkce $q_j(t)$ splňovat).

Zvolme si dva časy t_1 a t_2 , v nichž máme zadanou funkci $q_j(t)$, a hledejme takovou funkci $q_j(t)$, aby variace S byla nulová. Akce S má v $q_j(t)$ nabývat extrému, její hodnota se tedy při změně $q_j(t)$ o libovolně malé $\delta q_j(t)$ nezmění. To vyjádříme rovnicí

$$0 = \delta S[q_j(t)] = S[q_j(t) + \delta q_j(t)] - S[q_j(t)].$$

Dosaďme za akci S z definice (56)

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t) + \delta q_j(t), \dot{q}_j(t) + \delta \dot{q}_j(t), t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt.$$

Provedeme Taylorův rozvoj funkce L do prvního řádu a začneme používat Einsteinovu sumační konvenci¹¹

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_j(t), \dot{q}_j(t), t) dt,$$

¹⁰⁾ Funkcionál je předpis, který funkci přiřadí číslo.

¹¹⁾ Nebudeme vypisovat znamení sumy a budeme automaticky předpokládat, že opakování indexu znamená součet přes všechny jeho hodnoty (zde od 1 do 3).

první a třetí člen se odečtou. Budeme předpokládat, že lze prohodit pořadí variování a derivování podle času, tj. $\delta \dot{q}_j(t) = \frac{d}{dt} \delta q_j(t)$, potom máme rovnici

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \delta q_j \right) dt.$$

Ze závorky v integrandu bychom potřebovali vytknout δq_j , ovšem druhý člen obsahuje jeho derivaci, proto provedeme integraci per partes

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Funkce $q_j(t)$ má pevné konce $q_j(t_1)$ a $q_j(t_2)$, tudíž $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$ a druhý člen v poslední rovnici je roven nule. Nyní již můžeme $\delta q_j(t)$ vytknout a obdržíme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j(t) dt.$$

Funkce $\delta q_j(t)$ je libovolná, má-li být tedy rovnice splněna, musí být výraz v závorce nulový

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

což jsou Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

Lagrangeovy rovnice jsou tedy nutnou podmínkou pro extrém akce S (jsou to diferenciální rovnice pro funkci $q_j(t)$, která realizuje extrém). Protože ovšem nejde o podmínky postačující, nemusí řešení těchto rovnic odpovídat extrému. Fakticky je platnost Lagrangeových rovnic ekvivalentní pouze vztahu (55), tj. stacionaritě funkcionálu S . Řada důležitých výsledků variačního počtu vyžaduje pouze stacionárnost a nikoliv extrémnost funkcionálu S .

V rámci klasické mechaniky se dá ukázat, že akce pro skutečný fyzikální děj nabývá lokálního minima, proto někdy mluvíme o principu nejmenší akce.

Zobecnění mimo klasickou mechaniku

Variační principy se neomezuji jen na mechaniku. Postupně se ukázalo, že všechny základní rovnice moderní fyziky lze vyvodit z principu stacionární akce. Proto se tento princip stává vodítkem při hledání nových teorií.

Obecně akci definujeme předpisem

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\mu}) d\Omega,$$

kde Ω je element prostoročasu. Hledáme funkci Φ , která je pevně zadaná na hranici, aby bylo splněno

$$\delta S = 0.$$

Pro ilustraci uvedeme lagrangiány \mathcal{L} některých fyzikálních teorií a jejich rovnice, které jsou důsledkem variačního principu.

- Maxwellova teorie elektromagnetismu

$$\mathcal{L} = -\frac{\varepsilon}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^{\mu} A_{\mu} \quad \Rightarrow \quad F^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{1}{c\varepsilon} j^{\mu}.$$

- Einsteinova teorie gravitace

$$\mathcal{L} = -\frac{c^3}{16\pi G} R + \frac{1}{c} \mathcal{L}_{\text{hmota}} \quad \Rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}.$$

- Relativistická kvantová teorie pro spin 0 (Klein-Gordon)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\Phi'^{\mu}\Phi_{,\mu} - \varkappa^2\Phi^2) \Rightarrow (\square + \varkappa^2)\Phi = 0.$$

- Relativistická kvantová teorie pro spin 1/2 (Dirac)

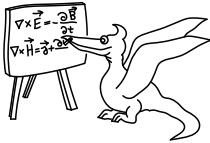
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \varkappa)\psi \Rightarrow (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \varkappa)\psi = 0.$$

Poslední dvě jmenované rovnice najdete od příštího roku na FYKOSím tričku, která jako obvykle dostanou naši nejlepší řešitelé a hledači chyb.

Závěr

Na závěr seriálu vám chceme poděkovat, že jste se dočetli až sem. Doufáme, že se vám aspoň některé části líbily a že jste se něco nového naučili.

Pokud máte jakékoli dotazy či byste se chtěli o teoretické mechanice dozvědět více, nebojte se nás kontaktovat.



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... kinematika hmotného bodu (5 bodů; průměr 3,84; řešilo 31 studentů)

- a) Poloha hmotného bodu v závislosti na čase v kartézské souřadnicové soustavě je popsána polohovým vektorem

$$\mathbf{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, d).$$

Určete, jak závisí na čase vektory $\mathbf{v}(t)$ a $\mathbf{a}(t)$. Vypočítejte také tečnou, normálovou a binormálovou složku zrychlení.

- b) Kolo poloměru R se valí bez prokluzování po přímé dráze rychlostí v . S kolem je pevně spojen bod ve vzdálenosti r od středu. Určete jeho pohyb a rychlost jako funkce času v soustavě spojené se Zemí. Může být jeho rychlost v určitém okamžiku nulová?

- a) Vektor rychlosti \mathbf{v} je roven první časové derivaci polohového vektoru \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d(R \cos \omega t, R \sin \omega t, d)}{dt} = \left(\frac{dR \cos \omega t}{dt}, \frac{dR \sin \omega t}{dt}, \frac{dd}{dt} \right) = \\ &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, 0). \end{aligned}$$

Vektor zrychlení \mathbf{a} je definován jako první časová derivace vektoru rychlosti, platí tedy

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0).$$

K určení tečné, normálové a binormálové složky zrychlení použijeme vztahy ze seriálu. Nejprve vypočítáme velikost rychlosti

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + R^2\omega^2 \cos^2 \omega t} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega,$$

kde jsme využili $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Všimněte si, že velikost rychlosti nezávisí na čase. Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru R úhlovou rychlostí ω . Pro tečnou složku zrychlení vychází

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = 0$$

a pro normálovou (poloměr oskulační kružnice je roven R)

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2.$$

Binormálová složka zrychlení a_b je vždy nulová.

Jediná nenulová složka zrychlení je tedy normálová, zrychlení má směr normály a jeho velikost je a_n .

- b) Zaveďme si kartézskou souřadnicovou soustavu S následovně. Osa x je vodorovná a míří ve směru pohybu středu kola, osa y míří svisle vzhůru (viz obr. 65). Pohyb kola je rovinný, osu z není třeba uvažovat. Počátek souřadnicové soustavy umístíme na úroveň země. Polohu středu kola, které se pohybuje rychlostí v , popisuje polohový vektor

$$\mathbf{r}_{S'} = (vt, R).$$

Nyní přejdeme do soustavy spojené se středem kola, která je rovněž inerciální. V ní si zavedeme souřadnicovou soustavu S' s počátkem ve středu kola a se stejně orientovanými osami x a y . V této soustavě koná hmotný bod, který je upevněn ve vzdálenosti r od středu, pohyb po kružnici. Z analogie s částí a) dostáváme pro polohový vektor

$$\mathbf{r}' = (r \cos \omega t, -r \sin \omega t),$$

jen je třeba uvážit, jakým směrem se bude kolo otáčet.

Opět se vraťme do soustavy S spojené se Zemí a vyjádřeme si polohový vektor hmotného bodu. Ten je dán vektorovým součtem $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{S'} + \mathbf{r}'$, dostáváme tedy

$$\mathbf{r}(t) = (vt + r \cos \omega t, R - r \sin \omega t).$$

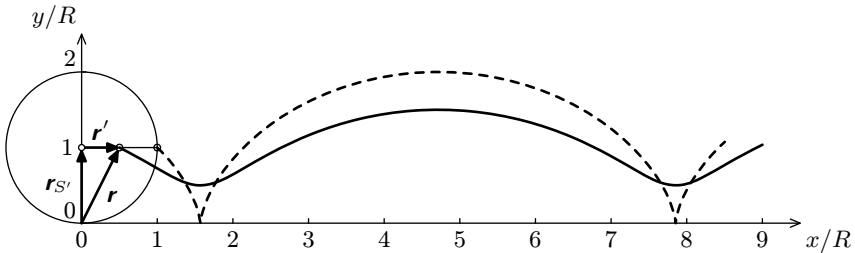
Úhlovou rychlost určíme z podmínky, že valíci se kolo neprokluzuje. Platí tedy $v = \omega R$, odtud

$$\mathbf{r}(t) = \left(vt + r \cos \frac{vt}{R}, R - r \sin \frac{vt}{R} \right).$$

Hmotný bod se bude pohybovat po cykloidě (viz graf na obrázku 65).

Vektor rychlosti určíme derivováním podle času

$$\mathbf{v}(t) = \left(v - \frac{vr}{R} \sin \frac{vt}{R}, -\frac{vr}{R} \cos \frac{vt}{R} \right) = v \left(1 - \frac{r}{R} \sin \frac{vt}{R}, -\frac{r}{R} \cos \frac{vt}{R} \right).$$



Obr. 65

Má-li být rychlost v určitém okamžiku nulová, musí být obě složky rychlosti nulové. Svislá složka rychlosti bude nulová, pokud argument kosinu bude liché násobek $\pi/2$, což nastane v časech

$$\frac{vt}{R} = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_k = (2k + 1) \frac{\pi R}{2v}.$$

Rychlost hmotného bodu v těchto časech bude

$$\mathbf{v}(t_k) = v \left(1 - \frac{r}{R} \sin \left[(2k + 1) \frac{\pi}{2} \right], 0 \right) = v \left(1 \pm \frac{r}{R}, 0 \right).$$

Rychlost bude nulová, jestliže $r = R$, tedy pokud se hmotný bod nachází na obvodu kola, a k je sudé ($k = 2l$). Vypočítejme ještě polohu hmotného bodu v tomto okamžiku

$$\mathbf{r}(t_{2l}) = \left((4l + 1) \frac{\pi R}{2}, 0 \right),$$

hmotný bod se při nulové rychlosti dotýká země.

Úloha II. S ... Newtonovy pohybové rovnice (5 bodů; průměr 4,05; řešilo 20 studentů)

- a) Napište a řešte pohybové rovnice hmotného bodu v tíhovém poli Země. Souřadnicovou soustavu orientujte tak, že osy x a y jsou vodorovné a osa z míří vzhůru. Počáteční poloha hmotného bodu je $\mathbf{r}_0 = (0, 0, h)$, počáteční rychlost je $\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$. Soustavu spojenou se Zemí považujte za inerciální.
- b) Muž s puškou sedí v křesle, které se otáčí kolem svislé osy s frekvencí $f = 1$ Hz. Spolu s křeslem se otáčí terč, který je k němu pevně upevněn. V jistém okamžiku muž vystřelí kulku rychlostí $v = 300$ km/h směrem od osy otáčení přesně do středu terče. V jakém místě prorazí kulka terč? Řešte jak z pohledu neinerciální, tak z pohledu inerciální vztažné soustavy. Vzdálenost hlavně od středu terče je $l = 3$ m, odpor vzduchu zanedbejte.
- c) Vyjádřete závislost rychlosti hmotného bodu na poloze v gravitačním poli Slunce.
- a) Pro zadaný hmotný bod má 2. Newtonův zákon tvar

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G,$$

kde $\mathbf{F}_G = (0, 0, -mg)$ je tíhová síla. Uvažujeme souřadnicovou soustavu popsanou v zadání úlohy, v ní máme tři rovnice pro každou kartézskou souřadnici zrychlení

$$ma_x = 0, \quad ma_y = 0, \quad ma_z = -mg, \quad (57)$$

ze kterých přímo dostáváme zrychlení hmotného bodu

$$\mathbf{a} = (0, 0, -g).$$

Rychlost hmotného bodu získáme integrací rovnic (57) podle času (každou nejprve vydělíme m)

$$v_x(t) = C_x, \quad v_y(t) = C_y, \quad v_z(t) = C_z - gt,$$

kde C_x , C_y a C_z jsou integrační konstanty, které určíme z počáteční podmínky $\mathbf{v}(0) = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = 0, \quad v_z(t) = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Zbývá určit, jak závisí na čase poloha hmotného bodu, budeme proto integrovat podle času poslední tři vztahy pro složky rychlosti

$$x(t) = D_x + v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = D_y, \quad z(t) = D_z + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

kde D_x , D_y a D_z jsou integrační konstanty, jež určíme z druhé počáteční podmínky $\mathbf{r}(0) = (0, 0, h)$

$$x(t) = v_0 t \cos \alpha, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Tím máme pohybové rovnice vyřešeny, dostali jsme rovnice šikmého vrhu, jak jsme očekávali podle počátečních podmínek.

- b) Úlohu vyřešíme nejprve z pohledu inerciální vztažné soustavy spojené se Zemí. Vzdálenost hlavně pušky od osy otáčení označíme d . Zavedme si následující souřadnicovou soustavu. Počátek je v ose otáčení na úrovni pušky, osa x míří ve směru puška-terč, osa z míří vzhůru a osa y je na obě kolmá (viz obr. 66). V této soustavě má kulka počáteční rychlost a polohu

$$\mathbf{v}_0 = (v, \omega d, 0), \quad \mathbf{r}_0 = (d, 0, 0).$$

Analogicky jako v úloze a) určíme, jak závisí poloha kulky na čase

$$x(t) = d + vt, \quad y(t) = \omega dt, \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Nyní určíme čas t_1 , ve kterém kulka prorazí terč. Víme, že se terč otáčí úhlovou rychlostí ω , poloha jeho středu T v naší souřadnicové soustavě je (viz obr. 66)

$$T_x = (d + l) \cos \omega t,$$

$$T_y = (d + l) \sin \omega t.$$

Analyticky popíšeme přímku, která splývá s terčem v rovině xy . Vektor kolmý na přímku má tvar $\mathbf{n} = (\cos \omega t, \sin \omega t)$, rovnice přímky proto je

$$\cos \omega t \cdot x + \sin \omega t \cdot y = d + l,$$

kde pravou stranu rovnice jsme zvolili tak, aby přímka procházela bodem T . Do této rovnice dosadíme polohu kulky a získáme

$$(d + vt) \cos \omega t + \omega dt \sin \omega t = d + l. \quad (58)$$

Tato rovnice bude splněna v okamžiku, kdy kulka prorazí terč, bohužel ji však nelze řešit analyticky. Vzhledem k vzdálenosti terče od hlavně a rychlosti kulky i rotace je ωt malé, potom s dostatečnou přesností platí $\sin \omega t \approx \omega t$ a $\cos \omega t \approx 1$. Rovnice (58) se potom zjednoduší na tvar

$$\omega^2 d \cdot t^2 + vt - l = 0, \quad (59)$$

což je kvadratická rovnice pro t a má jediné kladné řešení

$$t_1 = \frac{v}{2\omega^2 d} \left(-1 + \sqrt{1 + 4ld \frac{\omega^2}{v^2}} \right) \approx \frac{v}{2\omega^2 d} \left(-1 + 1 + 2ld \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \frac{l}{v}.$$

V předchozím výpočtu jsme použili přibližný vztah $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$, který platí pro malá x .

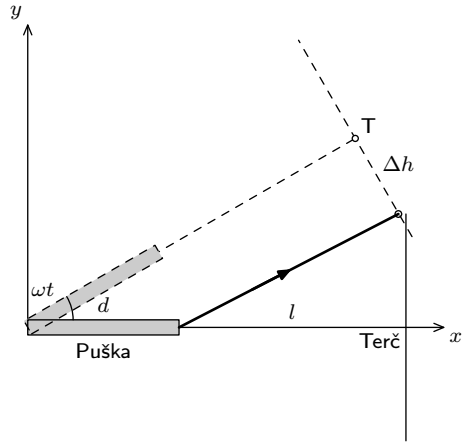
Zbývá určit, v jakém místě prorazí kulka terč. Vodorovnou vzdálenost od středu terče označme Δh a svislou Δs . Vzdálenost Δh je rovna vzdálenosti polohy kulky a středu terče v čase t_1 (opět použijeme přibližné vztahy $\sin \omega t \approx \omega t$ a $\cos \omega t \approx 1$)

$$\begin{aligned} \Delta h^2 &= (x(t_1) - T_x(t_1))^2 + (y(t_1) - T_y(t_1))^2 = \\ &= (d + l - (d + l))^2 + \left(\frac{\omega dl}{v} - \frac{(d + l)\omega l}{v} \right)^2 = \left(\frac{\omega l^2}{v} \right)^2, \end{aligned} \quad (60)$$

příčemž kulka prorazí terč napravo od středu. Svislá vzdálenost je dána volným pádem kulky po dobu t_1 a je rovna souřadnici z v čase t_1

$$\Delta s = -z(t_1) = \frac{gl^2}{2v^2}. \quad (61)$$

Po dosazení zadaných hodnot vychází $\Delta h = 68$ cm a $\Delta s = 6,4$ mm.



Obr. 66

Vyřešme nyní úlohu z pohledu neinerciální soustavy spojené s rotujícím křeslem. Souřadnicovou soustavu si zvolíme stejným způsobem jako minule, ale tentokrát bude navíc rotovat úhlovou rychlostí ω . V této soustavě má kulka počáteční rychlost $\mathbf{v}_0 = (v, 0, 0)$ a polohu $\mathbf{r}'_0 = (d, 0, 0)$. Pohybová rovnice kulky je

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{g} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}',$$

Eulerova a translační síla je nulová. Pohybovou rovnici si přepíšeme na tři rovnice pro souřadnice

$$\begin{aligned}\ddot{x}' &= \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}', \\ \ddot{y}' &= \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}', \\ \ddot{z}' &= -g.\end{aligned}$$

Třetí rovnici snadno dvakrát zintegrujeme

$$z' = -\frac{1}{2}gt^2.$$

Do soustavy prvních dvou rovnic zkusíme dosadit řešení ve tvaru (s ohledem na počáteční polohu)

$$\begin{aligned}x'(t) &= d \cos \omega t + A \sin \omega t + B_1 t \cos \omega t + B_2 t \sin \omega t, \\ y'(t) &= C \sin \omega t + D_1 t \cos \omega t + D_2 t \sin \omega t,\end{aligned}$$

pro neznámé konstanty dostaneme $A = 0$, $C = -d$, $B_1 = -D_2$, $B_2 = D_1$. Aby byla splněna počáteční podmínka pro rychlost kulky, musí navíc platit $B_1 = v$ a $B_2 = \omega d$. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}x'(t) &= (d + vt) \cos \omega t + \omega dt \sin \omega t \approx d + vt + \omega^2 dt^2, \\ y'(t) &= -(d + vt) \sin \omega t + \omega dt \cos \omega t \approx -v\omega t^2.\end{aligned}$$

Kulka prorazí terč v okamžiku, kdy $x' = d + l$, a dostáváme stejnou rovnici jako (58), resp. (59). Z ní jsme vypočítali, že kulka prorazí terč v čase $t_1 = l/v$. Počítejme nyní $y'(t_1)$

$$y'(t_1) = -v\omega t_1^2 = -\frac{\omega l^2}{v},$$

což je zřejmě vodorovná vzdálenost středu terče a místa, kde kulka prorazila terč, a shoduje se s výsledkem (60). Svislá vzdálenost je rovna $z'(t_1)$, ovšem platí $z(t_1) = z'(t_1)$ a dostáváme výsledek (61).

- c) Pro vyjádření vztahu mezi rychlostí a polohou hmotného bodu v gravitačním poli Slunce s výhodou využijeme integrál pohybu – mechanickou energii. Kinetická a potenciální energie hmotného bodu je

$$T = \frac{1}{2}mv^2, \quad V = -\frac{\varkappa m M_S}{r},$$

kde M_S je hmotnost Slunce a r vzdálenost od Slunce. Veličina $E = T + V$ se zachovává, platí tedy

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\varkappa m M_S}{r} \Rightarrow v = \sqrt{2 \left(\frac{E}{m} + \frac{\varkappa M_S}{r} \right)},$$

což je hledaná závislost.

Úloha III. S ... Lagrangeovy rovnice 1. druhu (5 bodů; průměr 3,92; řešilo 12 studentů)

- a) Mějme hmotný bod zavěšený na nehmotném a nepružném vlákně. Zavedte kartézskou souřadnicovou soustavu a v ní napište vazebnou podmínku pro hmotný bod.
 b) Napište Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro hmotný bod z části a). Ukažte, že z nich plyne pohybová rovnice matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (62)$$

kde φ je úhlová výchylka z rovnovážné polohy.

- c) Malé těleso je v klidu na vrcholu polokoule a začne klouzat dolů. Pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu určete, v jaké výšce se těleso odlepí od polokoule. (Nápověda: Těleso se odlepí v okamžiku, kdy $\lambda = 0$.)

- a) Souřadnicovou soustavu zavedeme následujícím způsobem (viz obr. 67). Počátek zvolíme v místě závěsu, osu x orientujeme vodorovně doprava, osu y svisle vzhůru.

Hmotný bod se zřejmě pohybuje po kružnici o poloměru l se středem v počátku souřadnicové soustavy, kde l je délka závěsu. Stačí nám tedy napsat odpovídající rovnici kružnice

$$f = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

což je vazebná podmínka hmotného bodu.

- b) Přistupme nyní k sestavení Lagrangeovy rovnice 1. druhu. Na hmotný bod působí kromě vazebné síly ještě síla tíhová $\mathbf{F}_G = (0, -mg)$. Dle seriálu má pohybová rovnice pro x -ovou souřadnici tvar

$$m\ddot{x} = 0 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2\lambda x,$$

obdobně pro y -ovou souřadnici

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2\lambda y.$$

Abychom vyloučili neznámou funkci λ , první rovnici vynásobíme y a odečteme od ní x -násobek druhé,

$$m(\ddot{x}y - \ddot{y}x) = mgx. \quad (63)$$

Tuto rovnici nyní přepíšeme pomocí parametru l a φ , abychom dostali rovnici (62).

Vztah mezi x , y a výchylkou z rovnovážné polohy φ je (viz obr. 67)

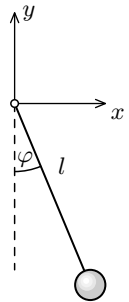
$$x = l \sin \varphi, \quad y = -l \cos \varphi, \quad (64)$$

tyto vztahy dvakrát derivujeme podle času

$$\ddot{x} = -l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + l \cos \varphi \ddot{\varphi}, \quad \ddot{y} = l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l \sin \varphi \ddot{\varphi}. \quad (65)$$

Dosaďme nyní z (64) a (65) do rovnice (63), dostáváme

$$l^2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} - l^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi} = gl \sin \varphi, \\ -l\ddot{\varphi} = g \sin \varphi,$$



Obr. 67

což je rovnice matematického kyvadla ze zadání.

- c) Poloměr polokoule označme R a souřadnicovou soustavu zvolme stejnou jako v části a). Jelikož tělísko klouže po polokouli, vazebná podmínka bude $f = x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Lagrangeovy rovnice 1. druhu budou shodné s těmi, které jsme odvodili v části b),

$$m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = -mg + 2\lambda y.$$

Teď provedeme malý trik. První rovnici vynásobíme x , druhou y a sečteme je

$$m(\dot{x}x + \dot{y}y) = -mgy + 2\lambda(x^2 + y^2). \quad (66)$$

Dvakrát zderivujeme vazebnou podmínku

$$\frac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 2\dot{x}^2 + 2\dot{y}^2 + 2x\ddot{x} + 2y\ddot{y} = 0. \quad (67)$$

Nyní si stačí uvědomit, že $R^2 = x^2 + y^2$ a pro rychlost platí $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, potom z rovnic (66) a (67) dostaneme

$$-mv^2 = -mgy + 2\lambda R^2.$$

Abychom si ušetřili integrování pohybových rovnic, použijeme rovnou zákon zachování energie $mv^2/2 + mgy = mgR$, který spolu s poslední rovnicí dává

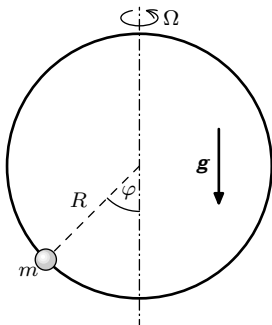
$$2mg(y - R) = -mgy + 2\lambda R^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}R + \frac{2\lambda R^2}{3mg}.$$

Nás zajímá poloha tělíska v okamžiku, kdy $\lambda = 0$ (právě tehdy se odlepí od polokoule). Výška tělesa v tomto okamžiku bude $y = 2R/3$.

Úloha IV . S ... Lagrangeovy rovnice 2. druhu (5 bodů; průměr 4,71; řešilo 14 studentů)

Malý korálek o hmotnosti m klouže bez tření na drátu ve tvaru kruhové smyčky poloměru R , smyčka se otáčí konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy (viz obr. 68).

- Vhodně zvolte zobecněnou souřadnici a sestrojte Lagrangeovu funkci problému.
- Sestavte Lagrangeovu rovnici 2. druhu, která popisuje pohyb korálku.
- Rozhodněte, kdy je rovnovážná poloha v nejnižší poloze smyčky stabilní a kdy je labilní v závislosti na Ω . Pro Ω , kdy je tato poloha stabilní, vypočítejte periodu kmitů korálku kolem této polohy.
- Za bonusové body nalezněte další rovnovážné polohy, diskutujte, zda jsou stabilní nebo labilní. Pokud jsou stabilní, určete periodu kmitů kuličky kolem těchto rovnovážných poloh.



Obr. 68

- a) Systém má jeden stupeň volnosti – výchylku z nejnižší polohy, tu popíšeme úhlem φ z obrázku 68.

Kulička se jednak otáčí kolem svislé osy úhlovou rychlostí Ω a jednak se pohybuje po kruhovém drátu úhlovou rychlostí $\dot{\varphi}$. Celková kinetická energie je součet energií těchto dvou pohybů

$$T = \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m(\Omega R \sin \varphi)^2 = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi).$$

Pokud nulovou hladinu zvolíme ve středu smyčky, potenciální energie kuličky v tíhovém poli bude

$$V = -mgR \cos \varphi.$$

Lagrangeova funkce tedy je

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 + \Omega^2 \sin^2 \varphi) + mgR \cos \varphi.$$

b) Ze seriálu víme, že Lagrangeova rovnice je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

po dosazení vychází

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) - (mR^2\Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mgR \sin \varphi) &= 0, \\ \dot{\varphi} - \Omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{R} \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (68)$$

dostali jsme pohybovou rovnici kuličky.

c) Nejprve nalezneme všechny rovnovážné polohy kuličky. Ty budou jistě tam, kde kulička zůstane, pokud ji tam umístíme. Jinak řečeno, zrychlení kuličky v těchto polohách bude nulové, $\ddot{\varphi} = 0$. Pohybová rovnice (68) nám dává

$$0 = \ddot{\varphi} = \left(\Omega^2 \cos \varphi - \frac{g}{R} \right) \sin \varphi, \quad (69)$$

odtud dostáváme podmínky

$$\sin \varphi = 0 \quad \text{nebo} \quad \cos \varphi = \frac{g}{\Omega^2 R}.$$

Rovnovážné polohy budou v bodech

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi \quad \text{a} \quad \varphi_3 = \pm \arccos \frac{g}{\Omega^2 R} \quad (\text{je-li } \Omega > \sqrt{g/R}).$$

Dále vyšetříme, je-li poloha φ_1 stabilní, nebo labilní. Jak je vidět z rovnice (69), hodnota $\ddot{\varphi}$ mění v bodě $\varphi = 0$ znaménko (tam platí $\cos \varphi_1 = 1$). Je-li $\Omega \leq \sqrt{g/R}$, přechází $\ddot{\varphi}$ z kladných hodnot do záporných. Pokud vychýlíme kuličku z této polohy, bude urychlena zpět – jedná se o polohu stabilní. Je-li $\Omega > \sqrt{g/R}$, přechází $\ddot{\varphi}$ ze záporných hodnot do kladných a poloha tedy bude labilní.

Zbývá určit periodu kmitů kuličky kolem polohy φ_1 , je-li splněna podmínka $\Omega \leq \sqrt{g/R}$ a poloha je stabilní. Vyzjistíme proto, co se stane, pokud kuličku vychýlíme o malý úhel ξ z této polohy. Dosadíme $\varphi = 0 + \xi$ do pohybové rovnice (68) a využijeme aproximační vztahy $\sin \xi \approx \xi$ a $\cos \xi \approx 1$.

$$\ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \right) \xi = 0. \quad (70)$$

To nám však připomíná rovnici harmonických kmitů $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, úhlová frekvence kmitů kuličky tedy je

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \Omega^2}.$$

d) Hledejme další stabilní rovnovážné polohy, jak po nás chce zadání. Kolem polohy $\varphi_2 = \pi$ je závorka ve výrazu (69) vždy záporná. Znaménko $\ddot{\varphi}$ se mění z mínusu do plusu, kulička je tedy urychlována směrem odtud – poloha je vždy labilní.

Počítejme derivaci $\ddot{\varphi}$ v bodech φ_3 , abychom vyšetřili, zda $\ddot{\varphi}$ ve φ_3 roste nebo klesá.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\ddot{\varphi}}{dt} \right|_{\varphi_3} &= \Omega^2 (\cos^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_3) - \frac{g}{R} \cos \varphi_3 = \\ &= \Omega^2 \left(\frac{2g^2}{\Omega^4 R^2} - 1 \right) - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2} = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{g^2}{R^2} - \Omega^4 \right) < 0. \end{aligned} \quad (71)$$

Zrychlení $\ddot{\varphi}$ zde tedy klesá, obě polohy jsou vždy stabilní (pokud ovšem existují).

Stejným způsobem jako v c) vypočítáme periodu kmitů. Do (68) dosadíme $\varphi = \varphi_3 + \xi$, kde ξ je malé (ξ^2 budeme zanedbávat), a použijeme součtové vzorce

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos(\varphi_3 + \xi) \right) \sin(\varphi_3 + \xi) &= 0, \\ \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos \varphi_3 + \Omega^2 \xi \sin \varphi_3 \right) (\sin \varphi_3 + \xi \cos \varphi_3) &= 0, \\ \ddot{\xi} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2 \cos \varphi_3 \right) \sin \varphi_3 - \Omega^2 \xi (\cos^2 \varphi_3 - \sin^2 \varphi_3) + \frac{g}{R} \xi \cos \varphi_3 &= 0.\end{aligned}$$

Nyní dosadíme za φ_3 a zjistíme, že druhý člen je identicky nulový, a využijeme výsledku (71). Dostaneme

$$\ddot{\xi} + \frac{1}{\Omega^2} \left(\Omega^4 - \frac{g^2}{R^2} \right) \xi = 0, \quad (72)$$

úhlová frekvence kmitů tedy je

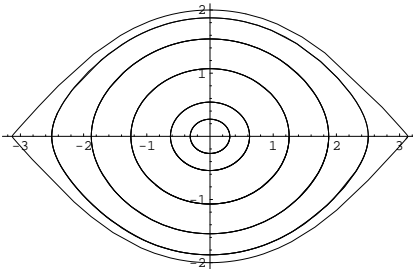
$$\omega = \sqrt{\Omega^2 - \frac{g^2}{\Omega^2 R^2}}.$$

Můžeme si všimnout, že pokud $\Omega \rightarrow \sqrt{g/R}$, jde koeficient u ξ v (70) a (72) k nule. Pokud bychom však dělali menší zanedbání, zjistili bychom, že nenulové zůstanou koeficienty u ξ^3 . Pohyb v nejnižším bodě za podmínek $\Omega = \sqrt{g/R}$ tedy popisuje rovnice ve tvaru $\ddot{\xi} + a^2 \xi^3$, jejím řešením je sice kmitání kolem rovnovážné polohy, není však už harmonické.

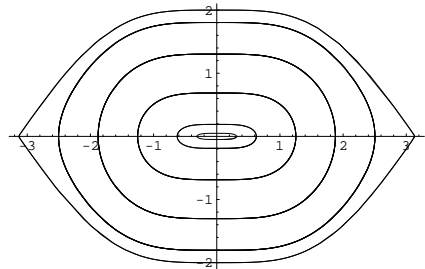
To znamená, že abychom mohli zanedbat členy vyššího řádu v obou rovnicích, musíme při $\Omega \rightarrow \sqrt{g/R}$ čím dál více zmenšovat amplitudy malých kmitů.

Na závěr si pro zajímavost můžete prohlédnout fázový portrét systému. Ten dostaneme řešením pohybové rovnice (68). Na vodorovnou osu vynášíme φ a na svislou $\dot{\varphi}/s^{-1}$. Jedná se vlastně o trajektorii kuličky v souřadnicích $(\varphi, \dot{\varphi})$.

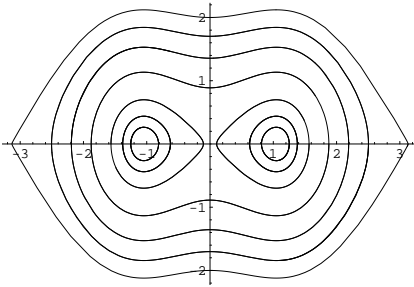
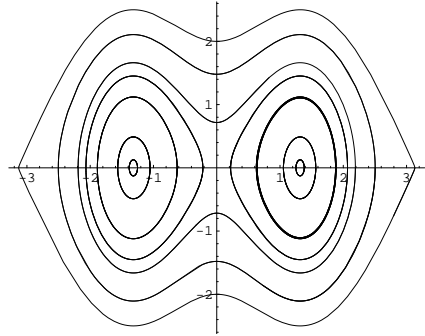
Diagramy na obrázcích 69 až 72 odpovídají různým hodnotám $\Omega^2 R/g$ při $g/R = 1 \text{ s}^{-2}$, v každém diagramu je několik trajektorií pro různé počáteční podmínky. V diagramech jsou dobře vidět stabilní a labilní polohy. Stabilní polohy (v digramu tzv. eliptické body) jsou trajektoriemi obíhány a od labilních poloh (tzv. hyperbolické body) se trajektorie rozbíhají. Sami si pro porovnání rozmyslete, jak vypadá fázový portrét harmonického oscilátoru.



Obr. 69. $\Omega^2 R/g = 0,25$



Obr. 70. $\Omega^2 R/g = 1$


 Obr. 71. $\Omega^2 R/g = 2$

 Obr. 72. $\Omega^2 R/g = 4$
Úloha V. S ... Merkur, jáma a kyvadlo (6 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů)

V následujících úlohách ověříme vaši znalost všech dosud probraných kapitol mechaniky, tj. Newtonova formalismu, d'Alembertova principu a Lagrangeova formalismu.

- a) Představte si planetu Merkur obíhající kolem Slunce. Jak známo, jeho eliptická trajektorie se stáčí (posouvá se poloha perihélia), což nemůže být způsobeno gravitační silou

$$\mathbf{F} = -\kappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Dokažte, že když k této síle přidáme dodatečnou centrální sílu

$$\mathbf{F} = C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (73)$$

kde C je vhodná konstanta, celá trajektorie (elipsa) se bude otáčet. Znáte-li tuto úhlovou rychlost Ω , určete konstantu C . Stačí takováto oprava k záchraně Newtonovy teorie gravitace?

- b) Určete rovnovážné polohy homogenní tenké tyčky délky l opřené o vnitřní stěny jamky ve tvaru písmene „V“ (viz obr. 73) v závislosti na vrcholovém úhlu jamky α .
- c) Pomocí Lagrangeových rovnic vypočítejte periodu malých kmitů dvojzvrtného kyvadla na obrázku 74. Závaží na koncích nehmotné tyčky délky l mají hmotnosti m_1 a m_2 , vzdálenost bodu závěsu od závaží o hmotnosti m_1 je l_0 .
- a) Vyřešme úlohu nejprve za pomoci Newtonova formalismu. Pohybová rovnice Merkuru v inerciální vztažné soustavě spojené se Sluncem bude

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3}. \quad (74)$$

Nyní přidáme dodatečnou sílu (73), která je úměrná $1/r^3$, a přejdeme do neinerciální soustavy, která se otáčí *nekonstantní* úhlovou rychlostí Ω vůči té předchozí. Pohybová rovnice bude mít tvar

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (75)$$

kde druhý člen na pravé straně je odstředivá síla, třetí člen Eulerova síla a čtvrtý člen Coriolisova síla (viz druhý díl seriálu).

Jedním z integrálů pohybové rovnice (74) je moment hybnosti $l = m\omega r^2 = \text{konst}$ (ω je úhlová rychlost rotace Merkuru kolem Slunce). Po přidání dodatečné centrální síly zůstane zákon zachování momentu v platnosti

$$m\omega r^2 + m\Omega r^2 = l + m\Omega r^2 = \text{konst},$$

to znamená, že i výraz $L = m\Omega r^2$ je podél trajektorie konstantní. Odtud pro $\dot{\Omega}$ dostaneme

$$\dot{\Omega} = -\frac{2L}{mr^3} \dot{r} = -\frac{2\Omega}{r} \dot{r},$$

pro vektor platí (vektory Ω a $\dot{\Omega}$ jsou rovnoběžné, protože pohyb Merkuru je rovinný)

$$\dot{\Omega} = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} \Omega = -\frac{2\dot{r}}{r} \Omega.$$

Přepíšme s využitím posledního výsledku rovnici (75). Dostaneme

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\varkappa \frac{mM\mathbf{r}}{r^3} - m\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{2m\dot{r}}{r} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} - 2m\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} - C \frac{\mathbf{r}}{r^4}, \quad (76)$$

Abychom zcela vyhověli předpokladům (tj. trajektorie Merkuru jsou v obou vztažných soustavách identické), musí mít rovnice (74) a (76) na pravé straně stejnou sílu, tedy musí platit

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{2\dot{r}}{r} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}.$$

Rychlost Merkuru si můžeme rozepsat do dvou kolmých složek $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{r}/r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, pak se poslední vztah zjednoduší na

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Oba výrazy na pravé straně upravíme pomocí vektorové identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ a využijeme toho, že $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = 0$, resp. $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$ (vektory jsou na sebe kolmé). Dostaneme

$$\frac{C}{mr^4} \mathbf{r} = \Omega^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \Omega \mathbf{r}.$$

Zanedbáme-li člen úměrný Ω^2 , čili předpokládáme, že úhlová rychlost stáčení perihélia je zanedbatelně malá vzhledem k úhlové rychlosti oběhu planety kolem Slunce, pro C obdržíme

$$C = 2m\omega\Omega r^4 = \frac{2lL}{m}. \quad (77)$$

Vidíme tedy, že síla $\mathbf{F} = C\mathbf{r}/r^4$ skutečně způsobuje stáčení perihélia, neboť C vyšla jako konstantní funkce.

Pro ilustraci vypočítáme, o kolik se perihélium pootočí po jednom oběhu Merkuru kolem Slunce.

$$\Delta\varphi = \int_0^T \Omega dt = \int_0^{2\pi} \frac{\Omega}{\omega} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{L}{l} d\varphi = 2\pi \frac{L}{l},$$

s využitím vztahu (77) dostaneme

$$\Delta\varphi = \frac{\pi m C}{l^2}. \quad (78)$$

Zbývá odpovědět, zda takováto oprava zachráni Newtonovu teorii gravitace. Astronomové naměřili, že perihélium Merkuru se stáčí o $575''$ za století. Zdá se, že je to v rozporu s Newtonovou teorií, podle které jsou trajektorie částic v centrálním poli stacionární. To však platí jen pro systém dvou těles. Pokud uvážíme vliv ostatních planet sluneční soustavy, zjistíme z Newtonovy teorie, že způsobuje stáčení perihélia Merkuru (jejich vliv je totiž ekvivalentní zavedení síly úměrné $1/r^3$). Na stáčení perihélia má také nepatrný vliv zploštění Slunce. Všechny tyto efekty způsobují dohromady stáčení perihélia o $532''$ za století, stále však schází vysvětlit zbylých $43''$ (astronomové jsou ochotni připustit chybu nejvýše zlomek úhlové vteřiny).

Po vyloučení všech dalších možných efektů, které by mohly stáčení perihélia způsobit (planetka mezi Sluncem a Merkurem či hmota jiného druhu), selhala i úprava Newtonovy teorie gravitace (že naše úprava také nepomůže, ukážeme dále). Záhadné stáčení perihélia vysvětlila až Einsteinova teorie obecné relativity, podle které

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi \kappa M}{c^2 a(1 + \varepsilon)} \quad (79)$$

(a je vzdálenost perihélia od Slunce, ε je výstřednost dráhy). Pro zajímavost vypočtené a naměřené (nevysvětlené) hodnoty stáčení perihélia těles sluneční soustavy shrnuje následující tabulka.

	Merkur	Venuše	Země	Ikarus
předpověď OTR ["/stol]	43,0	8,6	3,8	10,3
změřeno ["/stol]	$43,1 \pm 0,5$	$8,4 \pm 4,8$	$5,0 \pm 1,2$	$9,8 \pm 0,8$

Velká nepřesnost měření u Země a Venuše je způsobená malou výstředností jejich dráhy, jejíž vinou se stáčení špatně měří. Vidíme tedy, že předpovědi OTR jsou ve velice dobré shodě s experimentem (potvrzují to i moderní měření).

Porovnejme vztahy (78) a (79). Po námi provedené opravě Newtonovy teorie vychází, že stáčení perihélia závisí na momentu hybnosti planety. Naopak vztah (79) plynoucí z OTR říká, že stáčení perihélia závisí čistě na geometrii trajektorie (výstřednost a délka poloosy eliptické trajektorie, hmotnost Slunce). Odtud je zřejmé, že naše oprava Newtonovy teorie nemůže odpovídat realitě.

Nyní stejnou úlohu vyřešíme (výklad bude poněkud stručnější) pomocí silnějšího Lagrangeova formalismu. Lagrangián částice v centrálním poli $V(r)$ v polárních souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) - V(r).$$

Lagrangián nezávisí explicitně na čase ani souřadnici φ , okamžitě tedy máme dva integrály pohybu (viz minulý díl seriálu). Jsou to celková energie a moment hybnosti

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2) + V(r), \quad l = mr^2\dot{\varphi}.$$

Z obou rovnic vyloučíme $\dot{\varphi}$ a máme rovnici

$$\frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2 r^2} \right) + V(r) = E.$$

Hledáme neznámou funkci $r(\varphi)$ (tj. trajektorii částice v polárních souřadnicích). Rovnice se zjednoduší zavedením substituce $r(\varphi) = 1/u(\varphi)$, pak totiž

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2} u' \dot{\varphi} = -u' \frac{l}{m}$$

a naše rovnice získá tvar

$$u'^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}(E - V).$$

Nejpěkných druhých mocnin se zbavíme zderivováním rovnice podle φ

$$2u'u'' + 2u'u = -\frac{2m}{l^2} \frac{dV}{du} u',$$

za předpokladu $u' \neq 0$ dostaneme známou rovnici, které se říká Binetův vzorec

$$u'' + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du}.$$

Potenciál ve sluneční soustavě předpokládáme ve tvaru $V(u) = -\varkappa Mmu - Cu^2$ (pro konstantu C nechť platí $C \ll l^2/m$). Řešíme tedy rovnici

$$u'' + \left(1 - \frac{Cm}{l^2}\right)u = \frac{\varkappa Mm^2}{l^2}.$$

Řešení je snadné, za předpokladu $C \ll l^2/m$ se jedná o rovnici harmonických kmitů, proto

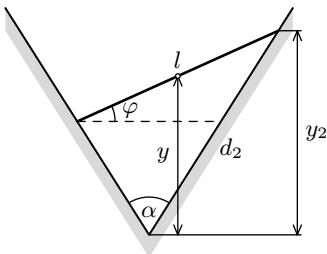
$$u(\varphi) = A \cos\left(\varphi \cdot \sqrt{1 - \frac{Cm}{l^2}}\right) + \frac{\varkappa Mm^2}{l^2}.$$

Jediné, co nás bude zajímat, je stažení perihélia, tedy jak se liší perioda funkce $u(\varphi)$ od 2π .

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Cm/l^2}} - 1 \right) \approx \frac{\pi mC}{l^2},$$

což je v souladu s (78).

- b) V seriálu jsme ukázali, že pro hledání rovnovážných poloh lze s výhodou použít princip virtuální práce $\sum F_i \delta x_i = 0$. V našem případě má tvar



Obr. 73

$$0 \cdot \delta x + F_G \delta y = 0,$$

neboť na tyčku působí jediná pravá síla – tíhová síla F_G . Abychom rovnici splnili, musí být $\delta y = 0$.

Polohu tyčky v jamce popíšeme úhlem φ (viz obr. 73). Pokusme se vyjádřit výšku těžiště tyčky y pomocí parametru φ .

Vzdálenost pravého konce tyčky ode dna jamky d_2 vypočítáme pomocí sinové věty pro trojúhelník, který vytváří tyčka a jamka. Podle ní platí

$$\frac{d_2}{\sin(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \varphi)} = \frac{l}{\sin \alpha} \Rightarrow d_2 = l \frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}.$$

Výška pravého konce tyčky je $y_2 = d_2 \cos \frac{1}{2}\alpha$ a pro výšku těžiště tyčky platí $y = y_2 - \frac{1}{2}l \sin \varphi$, celkově tedy máme

$$y = l \left[\frac{\cos \frac{1}{2}\alpha \cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right] = l \left[\frac{\cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right],$$

což upravíme pomocí vzorce pro kosinus součtu úhlů

$$y = \frac{1}{2}l(\cos \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha + \sin \varphi - \sin \varphi) = \frac{1}{2}l \cos \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha. \quad (80)$$

Zbývá určit φ , abychom splnili $\delta y = 0$, počítejme

$$0 = \delta y = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \delta \varphi = -\frac{1}{2}l \sin \varphi \cotg \frac{1}{2}\alpha.$$

Jelikož je $\delta \varphi$ libovolné, je poslední rovnice za předpokladu $\alpha \in (0, 180^\circ)$ splněna pro $\varphi = 0$.

Zjistili jsme, že vodorovná poloha tyčky je rovnovážná. Nesmíme však zapomenout na polohy, kdy tyčka přiléhá ke stěně jamky. Tyto polohy jsou totiž na okraji definičního oboru φ a o jejich rovnovážnosti nám princip virtuální práce nemůže nic říci. Podíváme se znovu na vztah (80) pro výšku těžiště. Funkce $y(\varphi)$ (která je vlastně jen násobek $\cos \varphi$) má maximum pro $\varphi = 0$, v intervalu $(-90^\circ, 0)$ je rostoucí a v intervalu $(0, 90^\circ)$ je klesající. Vodorovná rovnovážná poloha $\varphi = 0$ je tedy labilní (těžiště je nejvýše, při vychýlení tyčka „spadne“). V diskutovaných polohách na okraji definičního oboru $\varphi = \pm(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$, kdy je tyčka přilehlá ke stěnám jamky, je naopak těžiště nejnižší, jedná se o stabilní polohy.

- c) Poslední úlohu vyřešíme jednoduchou aplikací Lagrangeova formalismu. Soustava dvou těles dvojitelného kyvadla má jeden stupeň volnosti, budeme ji parametrizovat úhlem φ (viz obr. 74). Kinetická energie je součet kinetických energií obou závaží

$$T = \frac{1}{2}m_1(l_0\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}m_2[(l-l_0)\dot{\varphi}]^2.$$

Předpokládejme, že $m_1l_0 > m_2(l-l_0)$, potom bude závaží m_1 dole a potenciální energie soustavy bude (nulovou hladinu zvolíme na úrovni bodu otáčení)

$$V = -m_1gl \cos \varphi + m_2g(l-l_0) \cos \varphi.$$

Lagrangeovu funkci $L = T - V$ dosadíme do Lagrangeových rovnic druhého druhu. Předtím si však vypočítáme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_1l_0^2\dot{\varphi} + m_2(l-l_0)^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_1gl_0 \sin \varphi + m_2g(l-l_0) \sin \varphi,$$

pak dostáváme

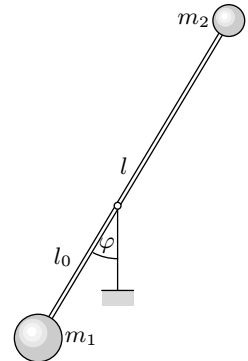
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = [m_1l_0^2 + m_2(l-l_0)^2]\ddot{\varphi} + [m_1gl_0 - m_2g(l-l_0)]\varphi = 0. \quad (81)$$

Hledáme-li úhlovou frekvenci malých kmitů, vystačíme si aproximací $\sin \varphi \approx \varphi$, potom je rovnice (81) rovnicí harmonických kmitů a platí

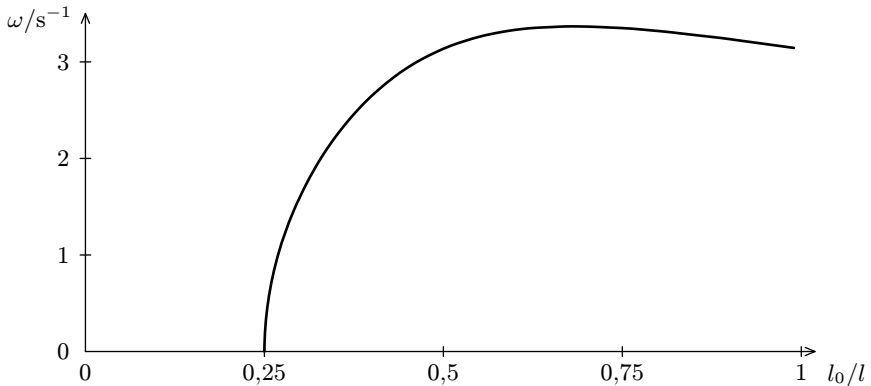
$$\omega = \sqrt{\frac{m_1gl_0 - m_2g(l-l_0)}{m_1l_0^2 + m_2(l-l_0)^2}}. \quad (82)$$

Tento vztah přejde k úhlové frekvenci malých kmitů matematického kyvadla pro $m_2 \rightarrow 0$ nebo $l_0 \rightarrow l$.

Pro zajímavost je závislost (82) vynesena v grafu na obrázku 75 (parametry kyvadla jsou: $m_1 = 3 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $l = 1 \text{ m}$).



Obr. 74



Obr. 75

Je snadné odvodit, že úhlová frekvence kyvadla bude maximální pro

$$l_0 = \sqrt{m_2} \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}{m_1 + m_2} l.$$

Úloha VI. S ... Hamiltonův formalismus (5 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů)

Lagrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i, \quad (83)$$

kde φ je elektrický potenciál a \mathbf{A} magnetický vektorový potenciál.

- Určete zobecněné hybnosti částice p_i příslušející rychlostem \dot{x}_i .
- Napište Hamiltonovu funkci.
- Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.

Řešení této úlohy bude přímočaré, stačí se držet postupu, který jsme naznačili v minulém díle seriálu (jen je třeba si dát pozor, že q je náboj částice, nikoli zobecněná souřadnice).

- Zobecněné hybnosti určíme přímo z definice

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j, \quad (84)$$

odtud inverzí vztahu vyjádříme

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j). \quad (85)$$

Poslední vztah ještě přepíšeme do vektorové podoby

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}).$$

- Lagrangián (83) a zobecněnou hybnost (84) dosadíme do definice Hamiltonovy funkce

$$H(x_j, p_j) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2} m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 + q\varphi.$$

Poslední vztah ovšem ještě není vyjádření hamiltoniánu, musíme přejít k souřadnicím (x_j, p_j) . K tomu využijeme vztah (85) a dostaneme

$$H(x_j, p_j) = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^3 (p_i - qA_i)^2 + q\varphi,$$

v úspornější vektorové podobě má hamiltonián tvar

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi.$$

c) Pro zadaný potenciál hamiltonián je (místo (x_1, x_2, x_3)) budeme od teď používat (x, y, z))

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - qEx = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - qEx.$$

Se znalostí Hamiltonovy funkce už jen zbývá vyřešit Hamiltonovy rovnice. Napišme si první sadu Hamiltonových rovnic $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

kteří mají řešení

$$p_x = qEt + p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad (86)$$

kde p_{x0} , p_{y0} a p_{z0} jsou počáteční hybnosti částice. Do druhé sady Hamiltonových rovnic $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$$

dosadíme z (86)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_{x0}}{m} + \frac{qE}{m} t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_{y0}}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_{z0}}{m}$$

a soustavu vyřešíme

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m} t + \frac{qE}{2m} t^2, \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m} t, \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m} t,$$

kde x_0 , y_0 a z_0 je počáteční poloha částice.

Částice se tedy bude podle očekávání ve směru os y a z pohybovat rovnoměrně přímočaře a ve směru osy x bude zrychlovat se zrychlením o velikosti $a = qE/m$.



Podzimní soustředění ve Vršově

Soustředění se konalo od 16. do 23. října 2004 ve Vršově na úpatí Železných hor.

Organizátoři

Augustinský Pavel, Houštěk Jan, Kladiiva Miroslav, Komm Michael, Lipovský Jiří, Prachař Jan, Ringel Matouš, Trnka Jaroslav, Tůma Karel, Zdeborová Lenka.

Účastníci

Bednárik Tomáš, Bednář 'Béda' Jan, Benda Jakub, Bílka Ondřej, Böhmová Pavlína, Dvořák 'Bezi' Petr, Fiala Roman, Greškovič 'Peťo' Peter, Houštěk Petr, Humpula Michal, Jirotko Tomáš, Josieková Monika, Kavalírová Markéta, Konečný Martin, Kučka Zdeněk, Motloch Pavel, Podolník Aleš, Przczková Jana, Repot 'Tono' Antony, Severa Lukáš, Šrámek Přemysl, Takáč 'Slavo' Slavomír, Valášek 'Jenda' Jan, Vilimovská Markéta, Vítová Hana.

Legenda

Příběh se odehrává v dávném středověku uprostřed temných lesů. Do zapadlého opatství přichází skupina noviců, aby pod vedením místních mnichů hledala cestu k Bohu. Idylická atmosféra však tají hrůznou podstatu.

Společně s příjezdem noviců umírá bratr knihovník za záhadných okolností. Jako vzkaz ze záhrobí působí jako poselství, v němž naznačuje strašné tajemství poklidného opatství.

Novicové jsou během příštích dnů zasvěcováni do mystérií křesťanské víry a pokory. Plní řadu úkolů fyzických i duchovních (jako je třeba orientace v Písmu svatém), záhy však nacházejí úryvky z deníku zesnulého bratra knihovníka. Postupně se dozvídají, že sedm mnichů žijících ve zdech opatství se v průběhu svého života dopustilo sedmi smrtelných hříchů. Jako výměnu za mlčení obdrží novicové od každého z mnichů část procvotví. To ukazuje na to, že v opatství se skrývá vlk v rouše beránčí, ten, jenž je bez viny, první mezi rovnými – bratr opat. Jako vyslanec Temné strany připravuje sestup Antikrista na Zem. Novicové se rozhodnou provést zažehnavací rituál, kterým by Zemi uchránili před hrůznou budoucností. K tomu jim pomůže sedm hříšných mnichů, kteří ač neradi přijímají pravdu o svém představeném. Jejich duše však nejsou čisté. Úmyslně novice oklamou a ti místo zažehnavacího rituálu provedou rituál evokační. Antikrist sestoupí na Zem, kde ho přivítají jeho pochopové. Vláda temna začíná...

Sedm hříchů sedmi mnichů

Hněv

Mnich Jan z Prachatic pocházel z velice chudé rodiny. Jeho rodiče byli natolik chudí, že se rozhodli dát svého jediného syna pod ochrannou ruku místního opata. Učinili to přesto, ač jim málem puklo srdce, ale sami by syna neuzívali. Mladý Jan jejich jednání nebyl schopen pochopit a velice se na rodiče rozhněval. Jeho zloba byla tak silná, že s rodiči už nikdy více nepromluvil a všude se vydával za sirotka. Rodiče to velice zarmoutilo a záhy umřeli žalem.

Závist

Za dob, kdy ještě bratr Pavel nežil ve zdech našeho opatství, bydlil poblíž jeho chýše zbožný ranhojič. Jeho dům byl prostý, leč nejhezčí z celé vesnice. Příbytek Pavlův bylo naopak těžko nazvat jinak než chlívem. Ranhojičův věhlas se rozšířil po širém okolí, neboť jeho umění a dobrota neměly obdobu v celém kraji. V den, kdy ranhojič pojal za manželku krásnou ženu, vyvěřela závist Pavlova na povrch. Ještě toho večera lehl ranhojičův dům popelem a on v něm...

Smilstvo

V době, kdy byl Matouš z Ringlu ještě mlád, pásával celé léto v horách stádo ovcí. Jak čas plynul a Matouš zarůstal vousem, strádal se v něm hříšný chtíč. Až jednoho slunečného dne se stalo to, co ani tento pergamen neunesl . . .

Lakota

Je tomu již mnoho zim, kdy za kruté bouře na bránu kláštera zabušili hladoví pocestní. Zmrzli a vyhladovělí žádali bratra Jana z Houští o kůrku chleba či misku teplé polévky. Ačkoliv klášterní spíž byla plná, bratr Jan pocestným požehnal a odkázal je na pomoc Boží.

Za jarní oblevy vydala slaj sněhu nedaleko od kláštera dvě vyzáblá těla.

Pýcha

Za svého mládí byl bratr Jiří z Lípy bystrý a vnitřní novic. Často pozoroval nebe a napadlo ho, že by Země nemusela být středem vesmíru a naopak ona se otáčí kolem Slunce. Zaslepen svou pýchou kázal tyto bludy a dostal se do sporu s církví. Nehca odvolat své učení, uchýlil se pod hrozbou smrti na hranici do vzdáleného opatství.

Obžerství

Jako mladý jinoch se bratr Michael z Kommína převlékal za potulného mnicha a vtíral se do přízně bohatých pánů z okolí. Za příslib požehnání ho vždy přizvali ke stolu. Bez ostychu stále plnil svůj talíř, a když jeho břich již nemohl pojmout více, nebylo mu zatěžko si s pomocí husího brku ulevit a opět přisednout ke stolu.

Lenost

Bratr Karel z Tůmů celé dny polehával na peci a rozjímal. Jednoho dne ho z jeho odpočinku cosi vyrušilo. Pojednou ho začalo něco svědit, ba i pálit, ale byl příliš unavený na to, aby zareagoval. Zanedlouho však ucítil nepříjemný pach, jako když se škvaří kůže. To ho donutilo, aby se odvalil o kousek dál. Dokonce se zmožil na to, aby otevřel oči. Uviděl malý, ale silící plamínek. Rozmýšlel se, zda má dojít pro vodu k nedalekému potůčku, ale jeho ochablé svaly ho už neposlouchaly. Proto se odkutálel ven do stínu nejbližšího stromu a spokojeně usnul.

Vybrané přednášky

Čísla v přírodě (Lenka Zdeborová)

Napadlo vás již někdy se zamyslet nad otázkou, která čísla rostou v přírodě? Jaký je počet spirál na borové či smrkové šišce nebo počet okvětních lístků sedmikrásky? Biologové i fyzici se touto otázkou již století zabývají, ovšem až poměrně nedávno se podařilo dokázat, že semínka na slunečnici skutečně lépe růst nemohou. Pojďte se dozvědět, které číslo je nejvíce iracionální, jak se rozmnožují včely a jak to spolu všechno souvisí.

Pro pochopení přednášky je nutné umět počítat do stovky. Ale i ti, kdo se chtějí dozvědět, jak se řeší diferenciální (rozišuj diferenciální) rovnice si přijdou na své! Přednáška vám pravda při řešení fyzikální olympiády mnoho nepomůže, ale zato odhalíte spoustu zajímavých informací o tom „jak příroda přemýšlí“.

Potápění (Lenka Zdeborová)

S přístrojovým potápěním je spojeno mnoho zajímavých s fyzikou souvisejících dějů v lidském těle. Vysvětlíme si, jak to vlastně potápěči dělají, že se mohou nehnutě vznášet v „libovolné hloubce“, kdežto potopit se do pěti metrů „na nádech“ je docela fuška. Vysvětlíme si, proč může potápěč mít velmi vážné problémy vyořující se neuváženě ze tří metrů, kdežto při potopení „na nádech“ se toho mnoho stát nemůže. Dozvíte se, jaký je účel dekompresních zastávek. Že rekreační potápěči nedýchají kyslík, ale stlačený vzduch. Proč se nemohou potopit se vzduchem do více než 60 metrů. A jak to tedy dělají pracovníci ropných plošin kontrolující vrt v hloubce 300 metrů? Také si řekneme základní věci o mezinárodně uznávaných potápěčských certifikacích a jak to v praxi funguje, když přijedete k moři a chcete se „podívat na rybičky“. Samozřejmě zbyde čas na jakékoli vaše otázky, i když neříkám, že na všechny budu umět odpovědět.

Digital signal processing (*Matouš Ringel*)

Na přednášce si budeme povídat o způsobech, jakými se zpracovávají elektronicky získaná data. Podíváme se na obecné techniky zpracování (konvoluce, Fourierova transformace) a na příkladech z praxe (zpracování zvuku, obrázků, videa, ...) si ukážeme jejich použití.

Konkrétní témata můžeme zvolit podle zájmu, stejně jako matematickou úroveň. V zásadě se nepředpokládají žádné větší matematické ani fyzikální znalosti.

Elementární částice (*Jarda Trnka*)

Povíme si něco o vývoji pohledu na svět elementárních částic, řekneme si, jak vypadá situace dnes. Dozvíte se, co jsou to kvarky, mezony či hadrony či co je to spin. Přednáška nevyžaduje žádné znalosti, proto na ní může jít každý.

Obvody a obsahy (*Karel Tůma*)

Na začátku se zmíníme o transformaci hvězda \mapsto trojúhelník a naopak, to ale nebude náplň přednášky. Budeme se zabývat obvody střídavého proudu a jejich řešení pomocí fázorového diagramu a jeho reprezentaci komplexními čísly. Proto si o nich také něco povíme (bude-li potřeba).

Speciální teorie relativity (*Pavel Augustinský*)

Stručně shrneme historické důvody vedoucí k formulaci Speciální teorie relativity. Ukážeme si jak z jejich postulátů vyplývá tvar takzvané Lorentzovy transformace a rozebereme její důsledky, jakými jsou například kontrakce délek či dilatace času. Naučíme se pracovat s takzvaným prostorčasovým diagramem, který je užitečným nástrojem pro vyvracení paradoxnosti relativistických „paradoxů“, ale i pro obyčejné výpočty v rámci Speciální teorie relativity.

Vektory (*Pavel Augustinský*)

Na přednášce si ukážeme, že vektor dělají vektorem jeho transformační vlastnosti (nejen) vůči prostorovým rotacím. Odvodíme si správnost (ne zcela úplnou) a jedinečnost definice skalárního a vektorového součinu, ukážeme si jak používat znalosti transformačních vlastností při úpravách výrazů a jak používat vektory v geometrii. Podle zájmu posluchačů pak můžeme rozehrát pojmy tenzor a dualita nebo grupa.

Fotky





Jarní soustředění v Rapotíně

Soustředění se konalo od 23. do 30. dubna 2005 v Rapotíně na Šumpersku na úpatí Jeseníků.

Organizátoři

Augustinský Pavel, Brom Pavel, Komm Michael, Lipovský Jiří, Prachař Jan, Ringel Matouš, Suková Petra, Trnka Jaroslav, Tůma Karel.

Účastníci

Baxová Katarína, Bednárik Tomáš, Benda Jakub, Bílka Ondřej, Bogár 'Bugy' Ondřej, Dvořák 'Bezi' Petr, Formánek Martin, Hergelová Beáta, Hrubý Miroslav, Janáček Miroslav, Jirotko Tomáš, Josieková Monika, Jungrová Zuzana, Konečný Martin, Lochmanová Jana, Malina Lukáš, Motloch Pavel, Pechal Radim, Pöbišová Zuzana, Podolník Aleš, Pospíšilová Lucie, Przczková Jana, Rozvadská Katarína, Scholz Marek, Šachl Libor, Vais Zdeněk, Valášek Jenda

Legenda

Příběh se odehrává na jaře 1936, krátce poté co se generál Franco pokusil převzít moc nad Španělskem. Proti němu a jeho armádě se postavil hlavně sever země, centrem odporu bylo Katalánsko a jeho metropole Barcelona.

Odpůrci Franca trpěli názorovou roztržičností, vedle radiálních anarchistů a syndikalistů hráli významnou roli komunisté, ať už stalinisté s oficiální podporou ze strany Sovětského svazu, či trockisté a jiné minoritní skupiny. Počáteční jednotu vynucená aktuální hrozbou vojenské porážky se začala rozpadat a jednotlivé skupiny bojovaly mezi sebou.

Účastníci přicházejí na scénu jako interbrigadisté – obyčejní dělníci, kteří opustili svoje domovy a vydali se na pomoc Španělsku. Na místě se zařadí do strany POUM (trockistů). Jejich velitely jsou odboroví předáci, jeden soudruh dosazený Sovětským svazem a místní anarchista (CNT-FAI), který zná situaci i místo konfliktu. Jejich úkol je jasný – zastavit postup frankistických vojsk. Pro svoje operace využívají informace získané od zběhů, dešifrováním nepřátelských depeší a zprávy z velitelství protifrankistické koalice.

Po řadě dílčích úspěchů se jim podaří získat plán nepřátelské ofenzivy v okolí strategického města Tarragona. Vypracují riskantní plán jak tuto akci zastavit, ovšem svůj protiútok zahájí příliš pozdě. Obranná linie je prolomena a frankisté postupují rychle vpřed. V rychlosti opouštějí místo konfliktu a přesunují se na jinou část fronty.

Fotky

Na skupinové fotografii jsou (zleva):

První (spodní) řada – Tomáš Jirotko, Ondřej Bogár, Jana Lochmanová, Lukáš Malina, Radim Pechal, Jakub Benda, Jana Przczková, Zuzka Jungrová

Druhá řada – Zdeněk Vais, Katka Baxová, Aleš Podolník, Katka Rozvadská, Monika Josieková, Martin Konečný, Martin Formánek, Jirka Lipovský, Pavel Brom

Třetí řada – Lucka Pospíšilová, Mirek Hrubý, Mirek Janáček, Ondřej Bílka, Tomáš Bednárik, Jarda Trnka, Matouš Ringel

Čtvrtá řada – Pet Suková, Jenda Valášek, Zuzka Pöbišová, Bea Hergelová, Petr Dvořák, Libor Šachl, Pavel Motloch, Honza Prachař, Karel Tůma, Michael Komm



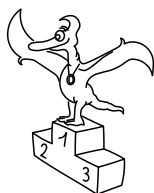


Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je tradiční celodenní akce, kterou pořádáme pro své řešitele, event. jejich přátele či pedagogický doprovod, a to samozřejmě bez ohledu na výsledky v naší soutěži. Účastníci dostanou jedinečnou příležitost prohlédnout si nejrůznější zařízení, se kterými fyzikové pracují, seznámit se s aktuální problematikou a nejnovějšími poznatky v experimentální fyzice a také poznat učitele na Matematicko-fyzikální fakultě. DSEF se uskutečnil 18. dubna 2005 a zúčastnilo se ho 55 studentů.

Letos poprvé DSEF opustil areál v Tróji a vydal se na velmi zajímavá pracoviště *Ústavu fyziky plazmatu v Praze na Slovance*. Zde se nachází jeden z nejvýkonnějších laserových systémů na světě PALS a dále tokamak pro termojadernou fúzi s názvem CASTOR. Tradiční byla návštěva školního reaktoru Vrabec, při níž jsme kdysi zažili cvičný jaderný poplach a vyzkoušeli bezpečnostní systémy reaktoru. Další exkurze proběhly v areálu v Tróji.

V následujícím roce jsou plánovány exkurze na několik pracovišť Ústavu jaderného výzkumu v Řeži u Prahy, zejména k největšímu českému experimentálnímu reaktoru.



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. Stanislav Vosolsobě	G Jablonec n. Nisou	173
2. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	125
3. Bedřich Roskovec	Masarykovo G, Plzeň	103
4. Petr Vaško	Masarykovo G, Plzeň	79
5. Ivan Dimitrov		69
6. Zuzana Safernová	G Bílovec	57
7. Petr Houšťek	G Pelhřimov	50
8. Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	48

Kategorie 3. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. Tomáš Bednárik	G Vsetín	136
2. Martin Konečný	G Boskovice	122
3. Petr Bezmozek Dvořák	SPŠ Jihlava	89
4. Miroslav Hrubý	BG Barvičova, Brno	88
5.–6. Monika Josieková	G Český Těšín	82
Aleš Podolník	G Kapitána Jaroše, Brno	82
7. Libor Šachl	G Terezy Novákové, Brno	74
8. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	69
9. Peter Perešíni	G J. G. Tajovského, B. Bystrica	63
10. Marek Scholz	G Neratovice	57
11. Martin Koštejn	G a SPgŠ Liberec	56
12. Vojtěch Molda	G Vsetín	53
13. Petra Malá	G Moravský Krumlov	49
14.–16. Jan Bednář	COP Hronov	48
Tomáš Jirotko	G Klatovy	48
Jenda Valášek	G Broumov	48

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Pavel Motloch</i>	G Petra Bezruče, Frýdek-Místek	171
2. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	128
3. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	85
4. <i>Lukáš Malina</i>	G Zborovská, Praha	69
5. <i>Jana Przczková</i>	G Komenského, Havířov	61
6. <i>Ondřej Bogár</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	57
7. <i>Jana Lochmanová</i>	G Chodovická, Praha	50
8. <i>Radim Pechal</i>	SPŠE Rožnov p. Radhoštěm	44
9. <i>Daniel Šimsa</i>	G Josefa Jungmanna	41
10. <i>Jakub Prouza</i>	COP Hronov	34

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	67
2. <i>Jan Valášek</i>	G Zborovská, Praha	55
3. <i>Katarína Rozvadská</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	48
4. <i>Katarína Baxová</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	42
5. <i>Tereza Fantová</i>	G Benešov	38
6. <i>Lucie Pospíšilová</i>	G Matyáše Lercha, Brno	30
7. <i>Zuzana Jungrová</i>	G Blovice	26
8. <i>Josef Müller</i>	G Dr. Josefa Pekaře, M. Boleslav	18

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XVIII. ročník – 2004/05

Předmluva: Jan Prachař

Náměty úloh:

Jan Prachař (I.2, I.4, I.P, I.E, I.S, II.3, II.S, III.1, III.S, IV.S, V.S, VI.1, VI.3, VI.S)
Jaroslav Trnka (I.3, II.1, II.E, III.S, IV.1, IV.3, V.P, V.S, VI.2)
Pavel Augustinský (II.2, II.P, III.3, III.E, IV.4, V.3, V.E)
Matouš Ringel (II.4, III.4, V.2, V.S, VI.4, VI.P)
Pavel Brom (V.4, VI.E), Karel Tůma (IV.2, V.1)
Jiří Franta (IV.E), Jan Houšťek (III.P), Miroslav Kladiva (III.2)
Michael Komm (IV.P), Lenka Zdeborová (I.1)

Autoři řešení úloh:

Jan Prachař (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.E, V.S, VI.S)
Matouš Ringel (I.1, II.P, III.3, III.4, IV.4, V.2, VI.P)
Jaroslav Trnka (II.1, III.1, IV.3, V.P, VI.2)
Jiří Lipovský (II.E, III.2, V.3, VI.4)
Karel Tůma (III.P, IV.2, V.1, VI.3)
Pavel Brom (III.E, V.4, VI.E)
Jana Ringelová (I.E, II.2, IV.E)
Petra Suková (I.2, II.3, VI.1)
Jana Hrudíková (I.3, II.4), Milan Pečeňa (I.3, IV.1)
Michael Komm (IV.P), Vojtěch Krejčířík (I.4)
Martin Rybář (I.2), Peter Zalom (I.P)

Seriál o teoretické mechanice: Jan Prachař a Jaroslav Trnka

Legenda podzimního soustředění: Jaroslav Trnka

Legenda jarního soustředění: Michael Komm

Sazba: Jan Prachař

Obrázky a grafy: Jan Prachař, Matouš Ringel, Karel Tůma

Recenzovali:

Martin Konečný, Jiří Lipovský, Matouš Ringel

Korektury:

Pavel Brom, Jan Matoušek, Zuzana Safernová, Jakub Benda,
Jana Przczková a další