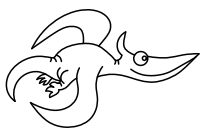


JAN HOUŠTĚK A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XVII. ročník – 2003/04





Obsah

<i>Předmluva</i>	5
<i>Zadání teoretických úloh</i>	6
<i>Řešení teoretických úloh</i>	12
<i>Řešení experimentálních úloh</i>	51
<i>Seriál na pokračování</i>	74
<i>Řešení úloh ze seriálu</i>	95
<i>Výsledková listina</i>	106



Předmluva

Milý čtenáři,

v rukou držíš ročenku obsahující zadání a řešení úloh XVII. ročníku FYKOSu (FYzikálního KOrespondenčního Semináře MFF UK), který proběhl ve školním roce 2003/04.

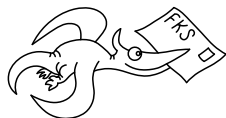
FYKOS je nejstarší a největší fyzikální korespondenční soutěž u nás. V průběhu roku řešitelé pravidelně obdrží zadání sedmi úloh, z nichž je pět teoretických, jedna experimentální a poslední se tématicky váže k *Seriálu na pokračování*, který zadání doprovází (letos byl věnován elektromagnetismu). Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (někteří i všechny) a svá řešení posílají běžnou poštou či elektronicky organizátorům semináře. Ti úlohy opraví, obodují a zašlou zpět účastníkům, kteří se takto seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Na základě bodování je sestavována průběžná výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Kromě zasílání zadání a řešení pořádá seminář řadu dalších akcí. Zejména to jsou dvě týdenní *soustředění*, bez kterých si FYKOS snad nelze ani představit. Probíhají vždy na jaře a na podzim a pro cca 30 nejlepších řešitelů. Další aktivitou je *Den s experimentální fyzikou*, na kterém umožňujeme ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá opravdová fyzika.

Na našich www stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé semináře sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých ročníků zde naleznete průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a reportáže ze soustředění, podrobné informace a pravidla pro připojení se k semináři a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání a řešení teoretických i experimentálních úloh. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím apelovat na každého čtenáře, aby před nalistováním stránky s řešením strávil alespoň chvíli nad zadáním a rozmyslel si, zda a jak by danou úlohu řešil on. Další částí je *Seriál na pokračování*, který je doplňován úlohami souvisejícími s daným tématem. Na konci se nachází soupiska nejlepších řešitelů tohoto ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem, nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na e-mailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu níže.



FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 504 (RNDr. Pavel Krtouš)

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz



Zadání teoretických úloh

Úloha I. 1 ... plovající špunt

Máme vědro s vodou a v něm na dně rukou držíme korkový plovák. Taktó pustíme vědro ze střechy budovy a zároveň pustíme plovák. Kde se bude plovák nacházet těsně předtím, než vědro narazí na zem? Budova je vysoká 30 m.

Úloha I. 2 ... zlatá rybka

Představte si dva rybáře sedící naproti sobě na březích řeky široké 30 m. Zlatá rybka plavající ve vodě spolkně v jednu chvíli návnady obou z nich. Vzdálenost od rybky k prvnímu rybáři je 17 m, ke druhému 20 m. V tu chvíli začnou oba rybáři navíjet, pořád rychleji a rychleji, avšak oba zrychlují stejně. A my se ptáme, po jaké křivce (před jejím analytickým vyjádřením preferujeme její název) se rybka dostane na přímku mezi oběma navijáky.

Úloha I. 3 ... vrh šikmý vzhůru

Fykosák se (po absolvování letošního soustředění) rozhodne cvičit v hodu granátem. Nemá ale k dispozici rovný terén, tak hází ve svahu. Směrem dolů dokáže dohodit 62 m, ale proti svahu jen 53 m (udělal mnoho pokusů, takže v obou případech našel optimální úhel). Určete sklon svahu.

Úloha I. 4 ... závodník

Auto zrychlí z klidu na $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ za půl minuty, přičemž ujede kilometr. Určete průběh rychlosti tak, aby se minimalizovala maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení, kterého auto během pohybu dosáhne.

Úloha I. P ... led a kyselina

Na jeden kilogram ledu o teplotě 0°C nalijeme 900 g 66% kyseliny sírové, taktéž o teplotě 0°C . V jakém stavu se systém ustálí, pokud víte, že teplo tání ledu je větší než teplo uvolněné při smísení použité kyseliny a jednoho litru vody?

Úloha I. E ... absolutní nula

S experimentálním vybavením dostupným v době Lorda Celsia změřte teplotu absolutní nuly (v Celsiově stupnici). Poradíme vám, že pro měření můžete využít například vlastností ideálního plynu.

Úloha II. 1 ... souboj lodí na Bajkale

Nákladní loď Chruščov vezoucí velký náklad uhlí se pohybuje rychlostí $18 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Zdatní sověští topiči začnou přehazovat uhlí rychlostí $31 \text{ t}\cdot\text{min}^{-1}$ na kolemjedoucí rychlejší loď Sojuz, která pluje rychlostí $54 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a má výkon 400 kW. Obě lodi se pohybují rovnoběžně a jsou dostatečně dlouhé. Na jaké hodnotě se ustálí rychlost Sojuzu? Aby bylo možné náklad dobře překládat, musí se rychlosti obou lodí vyrovnat. Jak toho dosáhneme? Uhlí je přehazováno kolmo na pohyb lodí a má zanedbatelnou rychlost vůči Chruščovu. Odporová síla je u obou lodí stejná a nezávisí na jejich hmotnosti ani rychlosti.

Úloha II. 2 ... fošna v kondenzátoru

Mezi desky kondenzátoru o obsahu S a vzdálenosti d postupně vsouváme dřevěné prkno permitivity ε , které zcela vyplňuje prostor mezi deskami. Jaký směr a velikost má síla, jež působí na prkno, pokud

- náboj Q na deskách se nemění,
- napětí U mezi deskami je konstantní?

Úloha II. 3 ... kulička filuta

Mějme kuličku, která se volně pohybuje navlečená na drátové spirále popsané rovnicí $r = C\varphi$; r je vzdálenost od středu a φ je úhel otočení. Počáteční poloha kuličky je r_0 . Spirála rotuje kolem osy procházející jejím středem a kolmé na její rovinu úhlovou rychlostí ω v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček, v opačném směru než ve kterém roste φ). Zjistěte závislost rychlosti kuličky v na r .

Úloha II. 4 ... laser

Má-li z krystalu vycházet laserový paprsek, musíme mu dodat energii prostřednictvím záření z vnějšího zdroje. Cílem je, aby co nejvíce záření z našeho bodového zdroje bylo využito k excitaci elektronů ve velmi malém krystalu. Poradte nám, jaký ideální tvar proto musí mít odrazná plocha. Nezapomeňte své tvrzení dostatečně zdůvodnit.

Úloha II. P ... devalvace měny

Pokuste se spočítat, jak velká hliníková mince se ještě udrží na vodní hladině.

Úloha II. E ... moucha na hladině

Z obdélníkové nádoby vyléváme vodu přes jednu její stěnu. Na hladině plave mrtvá moucha. Proměřte, jak se bude moucha při velmi pomalém vylévání pohybovat. Místo mrtvé mouchy můžete použít jiný odpovídající předmět.

Úloha III. 1 ... na oběžné dráze

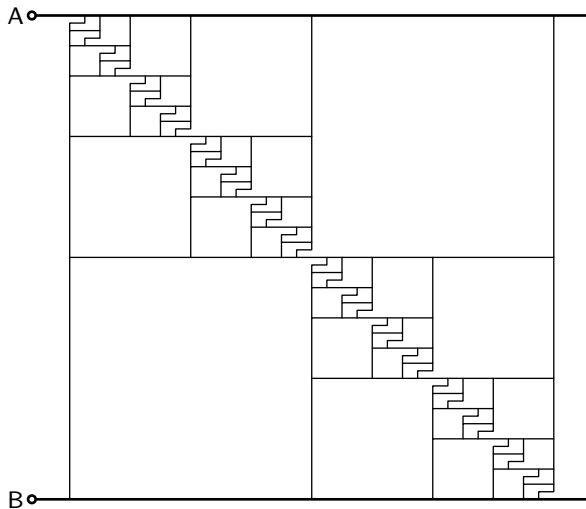
Tři stejné družice obíhají po kružnici kolem malé planetky rychlostí v tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete jejich hmotnost, která není zanedbatelná vůči hmotnosti planetky.

Úloha III. 2 ... cvrnkání kuliček

Organizátoři FYKOSu hráli kuličky. Po chvíli si všimli, že když se treťi do prázdné kulové jamky, kulička na dně kmitá kolem rovnovážné polohy. Určete frekvenci těchto malých kmitů. Jamka má poloměr R , poloměr kuličky je r a její hmotnost je m . Smykové tření mezi kuličkou a povrchem jamky je dostatečně veliké, aby při kutálení nedocházelo k prokluzování. Nápověda: je-li φ malé, můžete použít rovnost $\sin \varphi = \text{tg } \varphi = \varphi$ a analogii s pohybem kyvadla.

Úloha III. 3 ... odporová síť

Jaký je odpor mezi body A a B odporové sítě na obrázku 1? Svislé úsečky mají odpor R a vodorovné odpor nemají. Síť je nekonečná, na obrázku je z technických důvodů jen konečná iterace.



Obr. 1. Nekonečná odporová síť

Úloha III.4 ... kapitán Kork zasahuje

Vesmírná loď Escapeprise se vrací z prostoročasové bitvy s Odborgy. Během letu ale posádka zjišťuje, že nešťastnou náhodou směřují přímo do černé díry FAK-U0. Rozhodnou se pro úhybný manévra a kolmo na směr své rychlosti vypustí v jednom okamžiku všechno palivo. Vypočtete vzdálenost, ve které Escapeprise kolem černé díry proletí. Jakou největší hmotnost může černá díra mít, nemá-li do ní Escapeprise spadnout? Jako bonus se zamyslete nad tím, zda kapitán Kork mohl úhybný manévra vymyslet chytřeji. Hmotnost samotné lodě je M , paliva m . Rychlost lodě ve velké vzdálenosti od černé díry je V a směřuje do středu černé díry. Rychlost vypuštěného paliva je v a úhybný manévra proběhl též velmi daleko od černé díry.

Úloha III.P ... jede, jede autíčko

Představte si autíčko, jehož motor má konstantní tažnou sílu F , pohybující se rychlostí v . Jeho výkon tedy je $P = Fv$. Avšak cyklista jedoucí konstantní rychlostí u pozoruje výkon $P = F(v - u)$. Spotřeba benzínu, která odpovídá výkonu, je však stejná z pohledu cyklisty i stojícího chodce. Vysvětlíte tento „paradox“. Odpor vzduchu neuvážíte.

Úloha III.E ... Země je kulatá

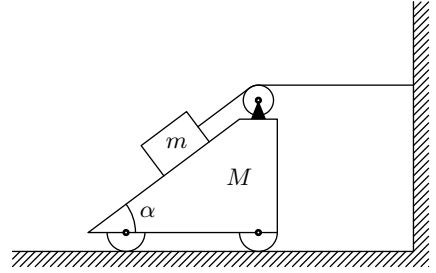
Určete, na které rovnoběžce se nachází vaše bydliště. Navrhněte co nejvíce metod a alespoň dvě realizujte.

Úloha IV.1 ... stavový výťah

Mějme uzavřenou svisle postavenou válcovou nádobu s pohyblivým pístem, jehož hmotnost nemůžeme zanedbat. Při teplotě $t = 0^\circ\text{C}$ je objem plynu nad pístem dvakrát větší než objem plynu pod pístem. Určete poměr objemů plynů při teplotě $t = 100^\circ\text{C}$, víte-li, že jejich látková množství jsou stejná.

Úloha IV. 2 ... záhadné kyvadélko

Kovová palička může kmitat okolo koncového bodu. Její druhý konec se stále dotýká kovového oblouku. Bod závěsu je přes kondenzátor kapacity C zapojený na střed kovového oblouku (tj. nejnižší bod, ve kterém se nachází dolní konec paličky). Celé kyvadélko se nachází v homogenním magnetickém poli indukce B , která je kolmá na rovinu kmitů. Jaká je doba kmitu kyvadla, pokud hmotnost paličky je m a tření a odpor drátu zanedbáme? Počáteční výchylku kyvadla α_0 uvažujeme malou.



Obr. 2. Cihla a klín

Úloha IV. 3 ... cihla na klínu

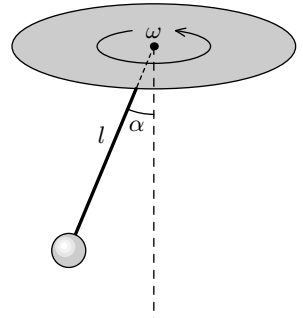
Na obr. 2 je soustava dvou těles. Těleso o hmotnosti m , které je přivázáno ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na malém klínu o hmotnosti M . Tření mezi tělesy je nulové a klín se pohybuje bez odporu. Určete zrychlení klínu.

Úloha IV. 4 ... slezští havíři

Horníci dolu Fučík v Petřvaldě se omylem prokopali skrz Zemi až k protinožcům. Všichni havíři v zoufalství do dolu naskákali. Jak dlouho bude trvat, než doletí na druhý konec vykopaného dolu, pokud tunel prochází přesně středem Země nebo pokud jeho nejkratší vzdálenost od středu Země je d ? Je možné, aby horníci tento průlet přežili?

Úloha IV. P ... kolotoč

Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připevněné kyvadélko, jak je znázorněno na obr. 3. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel α od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 1 Hz.



Obr. 3. Kyvadélko

Úloha IV. E ... Kolumbovo vejce

Roztočte vajíčko na špičce a změřte frekvenci, při které tato poloha přestane být stabilní (tj. vajíčko se začne točit ve vodorovné poloze). Použijte běžné slepičí vejce natvrdo uvařené. Můžete se pokusit i o teoretický model a srovnat ho s vašimi výsledky. Dobrou chuť!

Úloha V. 1 ... maššinka

Máme rotující desku, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem své osy a na níž nepůsobí žádné vnější momenty sil. Směrem do jejího středu jede lokomotiva o hmotnosti m po kolejkách připevněných k desce. Deska mění svou rychlost otáčení. Určete původ, velikost a směr momentu síly, který tuto změnu způsobí.

Úloha V.2 ... loď duchů

Loď duchů pluje proti proudu, jehož rychlost je u . Duchové jsou líní a slabí na přihazování uhlí do kotlů. Poradte jim, jaká má být rychlost lodi v vůči vodě, aby loď měla minimální spotřebu uhlí. Předpokládejte, že spotřeba paliva je úměrná vykonané práci na danou dráhu. Jak se výsledek změní, pokud místo lodního šroubu bude loď poháněna řetězem uloženým na dně řeky?

Úloha V.3 ... slezští havíři reloaded

Havíři z úlohy z minulé série nažhavili opět své krumpáče a prokopali se skrz Zemi, tentokrát ne na Nový Zéland, ale do Tichého oceánu. Do vytvořeného tunelu začne téct voda. Rozhodněte, zda v Petřvaldě v dolu Fučík vystříkne voda do vzduchu. Svou odpověď dostatečně zdůvodněte.

Úloha V.4 ... levitace na světle

Skleněná polokoule o poloměru $R = 10$ cm a indexu lomu n je umístěna v gravitačním poli Země rovnou plochu dolů. Úzkým laserovým paprskem svítíme ze spodu ve směru osy polokoule. Jaký musí být výkon laseru, aby polokoule levitovala. Šířka laserového paprsku je $d = 0,5$ mm a jeho vlnová délka je $\lambda = 660$ nm.

Úloha V.P ... zrychlující Měsíc

Přesnými měřeními je dokázáno, že rychlost rotace Měsíce kolem Země se zvětšuje. Zamyslete se nad tím, jaká síla to způsobuje.

Úloha V.E ... bobřík míření

Jaro začíná a je pravý čas začít sportovat. Mezi mnohé sportovní aktivity patří mimo jiné tenis. A my vám vycházíme vstříc! Vaším úkolem je zjistit, jakou rychlost musí mít tenisový míček, aby rozbil okno. Nezapomeňte provést dostatek měření, abyste mohli vaše zjištěná data statisticky zpracovat.

Úloha VI.1 ... třesk

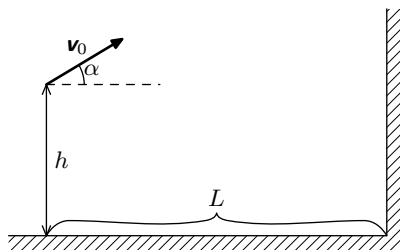
Střelíme střílou s počáteční rychlostí v_0 z výšky h nad povrchem Země na kovovou stěnu ve vzdálenosti L . Pod jakým úhlem α (viz obr. 4) máme střílet, abychom co nejdříve slyšeli náraz?

Úloha VI.2 ... meotar

Možná jste si všimli, že pod plochou zpětného projektoru (meotar) je skleněná deska se soustřednými kruhovými vrypy pracující jako čočka. Rozhodněte, jak se změní poloha obrazu, tedy jestli se posune směrem k meotaru nebo od meotaru, pokud tuto čočku odebereme. Jako bonus můžete vymyslet, na jakém principu skleněná deska s vrypy funguje.

Úloha VI.3 ... padající komín

Silný vítr dul do stěn komínu. Přitom vychýlil komín ze svislé polohy. Komín začal padat a v určitém místě se rozlomil. Pokuste se určit, kde ke zlomu došlo.



Obr. 4. Střelnice

Úloha VI.4 ... *potopa na Utodu*

Planeta Utod o hustotě ρ je pokryta mořem z kapaliny hustoty ρ' . Výška hladiny je h , poloměr planety R . Vyšetřete stabilitu planety.

Úloha VI.P ... *Faradayova klec*

Pokuste se určit největší možnou intenzitu elektrostatického pole, kterou ještě dokáže zastínit Faradayova klec.

Úloha VI.E ... *do dna*

Do dna vědra zhotovte malý kruhový otvor a vědro naplňte vodou. Změřte, jak závisí doba výtoku vody na počáteční výšce hladiny. Naměřené hodnoty porovnejte s teorií.



Řešení teoretických úloh

Úloha I. 1 ... plovající špunt (3 body; průměr 2,09; řešilo 90 studentů)

Máme vědro s vodou a v něm na dně rukou držíme korkový plovák. Takto pustíme vědro ze střechy budovy a zároveň pustíme plovák. Kde se bude plovák nacházet těsně předtím, než vědro narazí na zem? Budova je vysoká 30 m.

Úlohu zadal Michael Komm.

Motto: Kde nic není, ani smrt nebere. (Matouš Ringel)

Na padající vědro se budeme dívat ze soustavy s ním spojené. Tato soustava je neinerciální, vůči inerciální soustavě spojené se zemí se pohybuje se zrychlením g , a proto v ní působí setrvačná síla. Hmotnost vody ve vědru označme M a hmotnost špuntů m .

K vyřešení tohoto příkladu si stačilo uvědomit, že na vodu působí síla tíhová a síla setrvačná, ale na špunt navíc působí síla vztlaková. Síla tíhová má velikost $F_G = Mg$ a síla setrvačná $F_s = -Mg$. Výslednice sil působících na vodu je tedy nulová. Taktéž výslednice síly tíhové $F_G = mg$ a setrvačné $F_s = -mg$ působící na špunt je nulová. Definice síly vztlakové ale říká, že na těleso ponořené do vody působí síla, která je velikostí rovna tíze vytlačené vody. V naší soustavě ale voda žádnou tíhu nemá, proto síla vztlaková, která je jejím důsledkem, má nulovou velikost. Celková síla působící na špunt je tedy nulová, špunt se v naší soustavě spojené s vědrem nemá důvod pohnout z místa a zůstane na dně.

K došlým řešením bych měl ještě poznámku. Mnoho z vás správně přišlo na to, že pokud nezanedbáme odpor vzduchu, špunt u dna nezůstane. Jak vědro padá, má díky odporu vzduchu zrychlení menší než g , proto na vodu nějaká síla v soustavě spojené s vědrem působí. Tato síla potom způsobuje vztlakovou sílu, která špunt zvedne. Nakonec dojde k tomu, že se odporová síla vyrovná se silou tíhovou a vědro začne padat rovnoměrně přímočaře. Pak dokonce na špunt působí vztlaková síla stejná, jako když je vědro v klidu.

Vitek Šípál

vitek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 2 ... zlatá ryбка (4 body; průměr 2,53; řešilo 76 studentů)

Představte si dva rybáře sedící naproti sobě na březích řeky široké 30 m. Zlatá ryбка plavající ve vodě spolkně v jednu chvíli návnady obou z nich. Vzdálenost od ryбки k prvnímu rybáři je 17 m, ke druhému 20 m. V tu chvíli začnou oba rybáři navíjet, pořád rychleji a rychleji, avšak oba zrychlují stejně. A my se ptáme, po jaké křivce (před jejím analytickým vyjádřením preferujeme její název) se ryбка dostane na přímku mezi oběma navijáky.

Z přípravy na slovenskou olympiádu zná Miro.

Víme, že zrychlení, se kterým oba rybáři navíjejí, je v každém okamžiku stejné. V každém časovém intervalu Δt tedy oba rybáři navinou stejný úsek vlasce. Rozdíl délek vlasců proto zůstává konstantní (3 metry). Křivkou, která má konstantní rozdíl vzdáleností od daných dvou pevných bodů – ohnisek (v našem případě rybářů), je hyperbola. Trajektorií ryбки bude jen její část. K analytickému vyjádření hledané křivky zvolme počátek souřadnic do středu úsečky spojující oba rybáře a směr osy x k prvnímu rybáři. Označme délku vlasce prvního rybáře s_1 ,

délku vlasce druhého rybáře s_2 . Pak lze z Pythagorovy věty psát

$$s_2^2 = (x + l)^2 + y^2, \quad (1)$$

$$s_1^2 = (l - x)^2 + y^2. \quad (2)$$

$$s_2 - s_1 = \Delta s. \quad (3)$$

Odečtením rovnic (1) a (2) získáme

$$(s_2 - s_1)(s_2 + s_1) = 4xl.$$

Dosazením z (3)

$$\begin{aligned} \Delta s(2s_1 + \Delta s) &= 4xl, \\ s_1 &= \frac{2xl}{\Delta s} - \frac{\Delta s}{2}. \end{aligned}$$

A konečně dosazením do (2) a úpravou

$$\begin{aligned} \frac{4l^2 x^2}{(\Delta s)^2} - 2xl + \frac{(\Delta s)^2}{4} &= (l - x)^2 + y^2. \\ \frac{x^2}{\left(\frac{\Delta s}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{4l^2 - \Delta s^2}}{2}\right)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Poloosy hledané hyperboly jsou $a = \Delta s/2 = 1,5$ m, $b = \sqrt{4l^2 - \Delta s^2}/2 = 14,9$ m, její střed bude středem úsečky spojující oba rybáře.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. 3 ... vrh šikmý vzhůru (4 body; průměr 2,23; řešilo 48 studentů)

Fykosák se (po absolvování letošního soustředění) rozhodne cvičit v hodu granátem. Nemá ale k dispozici rovný terén, tak hází ve svahu. Směrem dolů dokáže dohodit 62 m, ale proti svahu jen 53 m (udělal mnoho pokusů, takže v obou případech našel optimální úhel). Určete sklon svahu.

Při nedostatku rovného terénu vymyslel Honza Houštěk.

Zjistíme, kam nejdále můžeme dohodit. Pro y -ovou a x -ovou souřadnici šikmého vrhu platí vztah

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad x = v_0 t \cos \alpha.$$

Vyjádřením t z x -ové souřadnice, dosazením do y -ové dostaneme křivku závislou na α , po které poleťte granát. Celý výraz pak zjednodušíme dosazením výšky $H = v_0^2/2g$.

$$\begin{aligned} \frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y &= 0, \\ x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 4Hx \operatorname{tg} \alpha + x^2 + 4Hy &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice pro $\operatorname{tg} \alpha$ má smysl pouze tehdy, je-li diskriminant větší nebo roven nule.

$$D = 4x^2(4H^2 - x^2 - 4Hy) \Rightarrow x^2 \leq 4H^2 - 4Hy,$$

což nám říká, že všechny body, které můžeme zasáhnout šikmým vrhem při dané rychlosti, se nacházejí uvnitř paraboly $x^2 = 4H^2 - 4Hy$. Tato parabola se nazývá obalová křivka a určuje, kam nejdále můžeme dohodit. Rychlost, kterou Fykosák vyhazuje, je stále co největší, protože se snaží dohodit co nejdále. Fykosák stojí v bodě $[0, 0]$. Rovnici kopce můžeme vyjádřit rovnicí $y = kx$, kde $k = \operatorname{tg} \varphi$ je směrnice přímky a φ je úhel kopce. Stačí spočítat průsečíky ochranné paraboly s kopcem.

Eliminací y dostáváme rovnici

$$x^2 + 4Hkx - 4H^2 = 0.$$

Řešením rovnice dostaneme x -ové souřadnice dopadu x_1, x_2 . Dle Viětových vztahů víme

$$x_1 + x_2 = -4Hk, \quad (4)$$

$$x_1x_2 = -4H^2. \quad (5)$$

Vztah mezi x -ovými souřadnicemi a vzdálenostmi d_1 (vrh dolů z kopce), d_2 (nahoru do kopce) je

$$d_1^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2 \varphi} = x_1^2(1 + k^2),$$

$$d_2^2 = \frac{x_2^2}{\cos^2 \varphi} = x_2^2(1 + k^2).$$

Odtud dostáváme

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{1 + k^2}, \quad (6)$$

$$x_1x_2 = -\frac{d_1d_2}{1 + k^2}. \quad (7)$$

Znaménko mínus je zde, protože součin x -ových souřadnic musí být záporný. Umocněním (4) na druhou a podělením (5) dostáváme

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = -4k^2.$$

Dosazením (6) a (7) získáme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d_1 - d_2}{2\sqrt{d_1d_2}}.$$

Číselně pak vychází $\varphi \doteq 4,5^\circ$.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... autíčko závodník (4 body; průměr 2,26; řešilo 58 studentů)

Auto zrychlí z klidu na $100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ za půl minuty, přičemž ujede kilometr. Určete průběh rychlosti tak, aby se minimalizovala maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení, kterého auto během pohybu dosáhne.

Lehce přeformulovaný nápad Pavla Habudy.

Logické by bylo uvažovat pohyb s konstantním zrychlením, protože potom by byla i absolutní hodnota zrychlení konstantní a zřejmě i nejmenší (to bychom již lehko dokázali). Problém je v tom, že takový pohyb nesplňuje okrajové podmínky pro dráhu a rychlost. Lehko se můžeme přesvědčit, že konečná rychlost auta nebude maximální dosažená během pohybu (to si můžete ověřit tím, že vynásobíte konečnou rychlost dobou pohybu – vyjde vám méně než 1 km). Je tedy jasné, že nejdříve zrychlí na nějakou rychlost v_1 za čas t_1 a poté zpomalí na koncovou rychlost $v_2 = 100 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ v čase $t_2 = 30 \text{ s}$.

Přirozené je vzít konstantní zrychlení o velikosti a , kterým bude v prvním úseku zrychlovat a v druhém zpomalovat. Potom je i maximální velikost absolutní hodnoty zrychlení rovna a . Je třeba dokázat, že tento pohyb skutečně odpovídá podmínkám zadání. V důkazu použijeme myšlenku Pavla Kocourka.

Nechť existuje pohyb s maximální absolutní hodnotou zrychlení a' , která je ostře menší než a . Potom pro rychlost při zrychlování platí $v' \leq a't < at$. Při zpomalování bude analogicky platit $v' \leq v_2 + a'(t_2 - t) < a(t_2 - t)$. To znamená, že rychlost bude po celou dobu pohybu menší než v případě s konstantním zrychlením a autíčko ujede méně než 1 km. Stejný důkaz by se dal použít pro pohyby, kdy auto chvíli zrychluje a chvíli zpomaluje.

Přístupme teď k výpočtu. Uvážíme-li, že $v_1 = at_1$, dostaneme pro pohyb vztahy

$$s = \frac{1}{2}at_1^2 + at_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2,$$

$$v_2 = at_1 - a(t_2 - t_1) = a(2t_1 - t_2).$$

To je soustava dvou rovnic pro dvě neznámé t_1 , a . Řešením je

$$t_1 = \frac{2v_2t_2 - 2s + \sqrt{4s^2 - 4sv_2t_2 + 2v_2^2t_2^2}}{2v_2},$$

$$a = \frac{v_2}{2t_1 - t_2}.$$

Po dosazení za zadané hodnoty dostaneme $t_1 = 19,8 \text{ s}$, $a = 2,9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Auto nejdříve zrychluje se zrychlením a po čas t_1 , poté zpomaluje se zrychlením $-a$ až do času t_2 .

Elegantní, ale poněkud komplikovanější důkaz sestrojil Matouš Ringel, když využil geometrických vlastností hledané trajektorie. Řešitele bych rozdělil do tří kategorií:

- 1) Řešitel si nevšiml, že rovnoměrně zrychlený pohyb neodpovídá podmínkám zadání, a tudíž ho uvedl jako ten nejvýhodnější.
- 2) Řešitel sice vyloučil výše zmíněný pohyb, ale chybně předpokládal, že zrychlení musí být buď lineární, nebo jinou komplikovanější funkcí času.
- 3) Řešitel vyřešil úlohu správně.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha I. P ... led a kyselina (5 bodů; průměr 0,70; řešilo 37 studentů)

Na jeden kilogram ledu o teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ nalijeme 900 g 66% kyseliny sírové, taktéž o teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. V jakém stavu se systém ustálí, pokud víte, že teplo tání ledu je větší než teplo uvolněné při smísení použité kyseliny a jednoho litru vody?

Úloha pochází od doc. Obržálka.

Úlohu můžeme vyřešit na základě pozorování z běžného života, bez složitých termodynamických úvah. Nejprve si musíme uvědomit, že led je *pevná látka* jako každá jiná, ačkoliv na něj podvědomě nahlížíme jako na „zmrzlou vodu“, narozdíl od látek jako například kuchyňská sůl, kterou si asi málokdo z nás představuje jako zmrzlou taveninu NaCl.

Všichni víme, že pokud nasypeme do vody sůl (pevnou látku $780\text{ }^{\circ}\text{C}$ pod bodem tání), rozpustí se. Porovnáme-li měrná skupenská tepla tání $519\text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$ (NaCl) a $334\text{ J}\cdot\text{g}^{-1}$ (H_2O), zjistíme, že jsou srovnatelná. Sůl se tedy rozpouští ve vodě, přestože tento proces „spotřebuje“ velké množství energie. A protože mezi rozpouštěním NaCl v H_2O a H_2O (s) v H_2SO_4 není žádný kvalitativní rozdíl (snad jen s výjimkou toho, že H_2O a H_2SO_4 se mísí v libovolném poměru) a dokonce i všechny „materiálové konstanty“ jsou řádově stejné, můžeme usoudit, že tyto systémy se budou chovat stejně. Z těchto úvah vyplývá, že se *všechn* led rozpustí a systém se ustálí při teplotě nižší než $0\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Fundamentální příčinou tohoto chování je to, že libovolný systém s danou energií (což směs vody a kyseliny je, protože ji můžeme považovat za tepelně izolovanou) se ustálí ve stavu s nejvyšší možnou *entropií*. Entropie se rozpouštěním ledu a smícháním s kyselinou rapidně zvýší (zvětší se neuspořádanost, resp. počet možných realizací stavu). Snížením teploty se sice entropie naopak o něco sníží (menší tepelný pohyb molekul znamená menší neuspořádanost), ale v důsledku bude stav, kdy je led rozpouštěn a směs chladnější, entropicky výhodnější.

Pokud vám přijde divné, že při rozpouštění soli ve vodě nepozorujeme žádné podchlazení, je to tím, že rozpustnost kuchyňské soli ve vodě je poměrně malá. Pokud však do vody nasypeme například NH_4NO_3 , $\text{CaCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, či jinou ve vodě dobře rozpustnou sůl, podchlazení pozorovat budeme, a to velmi výrazné (tento pokus si můžete sami vyzkoušet). Dodejme ještě, že popsaneho jevu se využívá například pro chlazení na nízké teploty za laboratorních podmínek (se zadanou směsí lze dosáhnout teplot až několika desítek stupňů pod nulou) či pro úpravu pozemních komunikací (známé solení zasněžených silnic).

Pavel Augustinský
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. 1 ... souboj lodí na Bajkalu (4 body; průměr 2,07; řešilo 27 studentů)

Nákladní loď Chruščov vezoucí velký náklad uhlí se pohybuje rychlostí $18\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Zdatní sovětští topiči začnou přehazovat uhlí rychlostí $31\text{ t}\cdot\text{min}^{-1}$ na kolemjedoucí rychlejší loď Sojuz, která pluje rychlostí $54\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ a má výkon 400 kW. Obě lodě se pohybují rovnoběžně a jsou dostatečně dlouhé. Na jaké hodnotě se ustálí rychlost Sojuzu? Aby bylo možné náklad dobře překládat, musí se rychlosti obou lodí vyrovnat. Jak toho dosáhneme? Uhlí je přehazováno kolmo na pohyb lodí a má zanedbatelnou rychlost vůči Chruščovu. Odporová síla je u obou lodí stejná a nezávisí na jejich hmotnosti ani rychlosti.

Nad úlohou debatovali Kája Tůma a Honza Prachař.

Nejdříve si uvědomíme, proč Sojuz (rychlejší loď) zpomaluje. Není to tím, že roste jeho hmotnost, protože (jak jsme předpokládali) odporová síla nezávisí na hmotnosti lodě. Podívejme se na situaci z paluby Sojuzu, zde přistává uhlí, které sem házou topiči z Chruščova. Protože se Chruščov pohybuje pomaleji než Sojuz, má dopadající uhlí nenulovou rychlost opačného směru

než je směr plavby. Uhlí je následně urychleno na nulovou rychlost vzhledem k palubě Sojuzu, je mu tedy dodána hybnost Δp . Z toho důvodu je loď zpomalována. Rychlost Chruščova se vůbec nemění.

Rychlost Sojuzu a Chruščova označme v_s a v_c , výkon Chruščova je P a zdatní topiči přehazují uhlí rychlostí $\mu = \Delta m / \Delta t$. Zjistíme, na jakou rychlost v se Sojuz zpomalí.

Začneme tím, že si napíšeme pohybovou rovnici Sojuzu

$$ma = F.$$

Zajímá nás, na jaké rychlosti se Sojuz ustálí, potom je $a = 0$. Nyní určíme sílu F . Sojuz urychluje tažná síla F_1 motoru. Výkon P je konstantní, platí tedy $P = F_1 v$, odtud

$$F_1 = \frac{P}{v}.$$

Dále na Sojuz působí odporová síla F_o . Tu určíme z počátečních podmínek, kdy na loď působily jen tažná a odporová síla, které byly v rovnováze

$$F_o = \frac{P}{v_s}.$$

Zbývá určit sílu F_2 , kterou vyvolává uhlí dopadající na palubu. Rozdíl rychlostí obou lodí je $v - v_c$, uhlí tedy získává hybnost $\Delta p = (v - v_c)\Delta m$. Uhlí brzdí loď silou

$$F_2 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = (v - v_c) \frac{\Delta m}{\Delta t} = (v - v_c)\mu.$$

Dosaďme nyní do pohybové rovnice

$$0 = F_1 - F_2 - F_o = \frac{P}{v} - (v - v_c)\mu - \frac{P}{v_s},$$

neboli

$$\mu v^2 + \left(\frac{P}{v_s} - \mu v_c \right) v - P = 0.$$

Hledaná rychlost v je větším kořenem této kvadratické rovnice (menší je záporný, neboť součin obou kořenů je $-P$)

$$v = \frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s} + \sqrt{\left(\frac{v_c}{2} - \frac{P}{2\mu v_s} \right)^2 + \frac{P}{\mu}} = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 48 \text{ km/h.} \quad (8)$$

Můžeme také použít zákon zachování energie. Musíme si však dávat pozor, abychom na nic nezapomněli. Situaci budeme opět sledovat z paluby Sojuzu. Napíšeme si tedy energetickou bilanci (Sojuz má ustálenou rychlost v) v časovém intervalu Δt ,

$$P\Delta t + \Delta E = F_o v \Delta t + \Delta E_v.$$

Na levé straně je práce, kterou vykonal motor, a energie odevzdaná uhlím dopadajícím na palubu. Na pravé straně je práce vykonaná odporovou silou a energie, kterou získala voda

v řece (lodní šroub ji rozpoohybovává). Postupně určíme všechny členy. Odporovou sílu již známe. Uhlí na palubě zastaví, proto odevzdá energii

$$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m (v - v_c)^2.$$

Energii ΔE_v určíme ze zákona zachování hybnosti. Hybnost celé vody je p_v (má opačný směr než pohyb lodí) a po dopadu uhlí na palubu se zvětší o Δp_v . Hybnost Sojuzu je nulová, protože se nacházíme v soustavě spojené s ním. Hybnost soustavy loď-voda-uhlí se před a po dopadu uhlí na palubu musí rovnat, neboť je tato soustava izolovaná.

$$-p_v - \Delta m (v - v_c) = -p_v - \Delta p_v.$$

Odtud

$$\Delta p_v = \Delta m (v - v_c).$$

Pokud předpokládáme, že je voda v klidu, a vůči Sojuzu se tedy pohybuje rychlostí $-v$, $p_v = \Delta m v$, vychází

$$\Delta E_v = \frac{(-p_v - \Delta p_v)^2}{2\Delta m} - \frac{p_v^2}{2\Delta m} = \frac{p_v \Delta p_v}{\Delta m} + \frac{(\Delta p_v)^2}{2\Delta m} = \Delta m v (v - v_c) + \frac{1}{2} \Delta m (v - v_c)^2.$$

Již známe všechny členy ze zákona zachování energie, můžeme do něj tedy dosadit (přitom dělíme Δt)

$$P + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2 = \frac{P}{v_s} v + \mu v (v - v_c) + \frac{1}{2} \mu (v - v_c)^2.$$

Po úpravě dostáváme stejnou rovnici pro v jako předtím.

$$\mu v^2 + \left(\frac{P}{v_s} - \mu v_c \right) v - P = 0.$$

Nakonec vyřešíme, jak rychlosti lodí vyrovnat. Ze vztahu (8) vidíme, že pro $\mu \rightarrow \infty$ je $v \rightarrow v_c$. Přehazováním uhlí ale vyrovnání rychlostí nedosáhneme. Pokud by se totiž rychlosti lodí vyrovnaly, bude síla F_2 nulová a rychlost Sojuzu se začne opět zvětšovat.

Vyrovnat rychlosti však můžeme tak, že snížíme výkon kotlů Sojuzu na $P' = P \cdot v_c / v_s = 133 \text{ kW}$. Jinou variantou je, že k sobě lodě svážeme. Nebo můžeme přehazovat uhlí ne kolmo na pohyb, ale šikmo proti směru pohybu Sojuzu.

Poznámky k došlým řešením. Řešitelé, kteří se vydali první zmíněným postupem, byli většinou úspěšní a jejich řešení byla správná. Většina však vycházela ze zákona zachování energie, který nikdo nenapsal správně, a tudíž ani nikdo z nich neměl správný výsledek.

Honza Prachař
 honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. 2 ... fošna v kondenzátoru (4 body; průměr 1,93; řešilo 27 studentů)

Mezi desky kondenzátoru o obsahu S a vzdálenosti d postupně vsouváme dřevěné prkno permitivity ε , které zcela vyplňuje prostor mezi deskami. Jaký směr a velikost má síla, jež působí na prkno, pokud

- náboj Q na deskách se nemění,
- napětí U mezi deskami je konstantní?

Autorem vylepšení úlohy z učebnice Halliday Resnick je Honza Prachař.

Hloubku desky kondenzátoru nazvěme a a šířku b , její obsah je tedy $S = ab$. Délku, po kterou je fošna zasunuta, nazvěme x . Při vsouvání se mění kapacita kondenzátoru a můžeme ho chápat jako paralelní zapojení vzduchového (vakuového) kondenzátoru a kondenzátoru s fošnou. Tedy

$$C = \frac{\varepsilon_0(a-x)b}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_rxb}{d} = \frac{\varepsilon_0b}{d}(a-x + \varepsilon_r x) = \frac{\varepsilon_0S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right).$$

Celková energie kondenzátoru je $E = CU^2/2 = Q^2/2C$.

- Ze zákona zachování energie plyne, že při $Q = \text{konst.}$ bude změna energie rovna změně práce vykonané na prknu.

$$dW = dE = -\frac{Q^2}{2C^2} dC = -\frac{Q^2}{2C^2} \frac{\varepsilon_0S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a} dx = -\frac{Q^2(\varepsilon_r - 1)}{2a \frac{\varepsilon_0S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right)^2} dx,$$

$$F = \frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2(\varepsilon_r - 1)}{2a \frac{\varepsilon_0S}{d} \left(1 + \frac{\varepsilon_r - 1}{a}x\right)^2}.$$

Síla F je záporná, a prkno je tedy přitahováno dovnitř kondenzátoru.

- Při konstantním napětí obsahuje elektrický obvod navíc ještě zdroj elektrického napětí, který udržuje konstantní napětí na kondenzátoru. Tím se ale mění náboj na deskách a zdroj pro dodání dQ vykoná práci $dW_1 = U dQ$. Ze zákona zachování energie pro $U = \text{konst.}$ platí

$$dW + dW_1 = dE,$$

tedy

$$dW = dE - dW_1 = \frac{U^2}{2} dC - U^2 dC = -\frac{U^2}{2} dC = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a} dx,$$

$$F = \frac{dW}{dx} = -\frac{U^2}{2} \frac{\varepsilon_0S}{d} \frac{\varepsilon_r - 1}{a}.$$

Síla F je opět záporná, prkno je přitahováno do kondenzátoru, narozdíl od prvního příkladu však síla nezávisí na tom, jak hodně je prkno zasunuto.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. 3 ... kulička fluta (4 body; průměr 1,41; řešilo 29 studentů)

Mějme kuličku, která se volně pohybuje navlečená na drátové spirále popsané rovnicí $r = C\varphi$; r je vzdálenost od středu a φ je úhel otočení. Počáteční poloha kuličky je r_0 . Spirála rotuje kolem osy procházející jejím středem a kolmé na její rovinu úhlovou rychlostí ω v záporném směru (tj. po směru hodinových ručiček, v opačném směru než ve kterém roste φ). Zjistěte závislost rychlosti kuličky v na r . Jedna řešitelná úloha mezi nápady Jardy Trnky.

Nejvýhodnější bylo řešit úlohu pomocí zákona zachování energie. Energie se sice v laboratorní soustavě nezachovává (na udržení konstantní úhlové rychlosti rotace spirály musíme dodávat energii), ale v neinerciální soustavě, ve které je spirála v klidu, ano. Energie kuličky se skládá z kinetické energie a z potenciální energie odstředivé síly. Tu lehce spočítáme integrací $F_{\text{od}} = -m\omega^2 r$ podle r . Pokud rychlost kuličky v neinerciální soustavě označíme V , pak má zákon zachování energie tvar

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r_0^2.$$

Popišme pohyb kuličky v laboratorní soustavě okamžitou radiální rychlostí v_r a okamžitou úhlovou rychlostí Ω . Rotuje-li spirála rychlostí $-\omega$, dostaneme z vlastností úlohy pro radiální rychlost vztah $v_r = C(\Omega + \omega)$. (Promysli, proč tento vztah musí platit i pro počáteční podmínky). V rotující soustavě má kulička úhlovou rychlost $\Omega + \omega$, radiální rychlost zůstává stejná, pro rychlost V tedy platí zřejmý vztah

$$V = \sqrt{v_r^2 + r^2(\Omega + \omega)^2} = (\Omega + \omega)\sqrt{C^2 + r^2}.$$

Dosadíme za V do vztahu pro zákon zachování energie a upravíme

$$(\Omega + \omega)^2(C^2 + r^2) - \omega^2 r^2 = (C^2 + r_0^2)(\Omega_0 + \omega)^2 - \omega^2 r_0^2,$$

vyjádříme Ω v závislosti na r

$$\Omega^2(C^2 + r^2) + 2\Omega\omega(C^2 + r^2) - (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega) = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\Omega = -\omega \pm \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Zadání odpovídá kladné znaménko. Pro v_r získáme vztah

$$v_r = C(\Omega + \omega) = C \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

Pro rychlost kuličky v laboratorní soustavě platí $v = \sqrt{v_r^2 + \Omega^2 r^2}$. Po dosazení vychází

$$v^2 = \omega^2(2r^2 + C^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\omega\Omega_0) - 2\omega r^2 \frac{\sqrt{\omega^2(C^2 + r^2) + (C^2 + r_0^2)(\Omega_0^2 + 2\Omega_0\omega)}}{\sqrt{C^2 + r^2}}.$$

To je hledaná závislost $v(r)$. Pokud dosadíme $r = r_0$ a $\Omega = \Omega_0$, skutečně nám vyjde $v = \sqrt{C^2(\Omega_0 + \omega)^2 + r_0^2\Omega_0^2} = \sqrt{v_{r0}^2 + v_{\varphi0}^2}$.

Pár slov k došlým řešením. Jediný *Matouš Ringel* vyřešil úlohu správně a právem si zaslouží výjimečné bodové ohodnocení. Zajímavé řešení poslal *Anton Repko*, ostatní řešitelé tahali za kratší konec. Největší chybou bylo ztotožnění úhlové rychlosti rotace spirály ω s úhlovou rychlostí kuličky Ω .

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

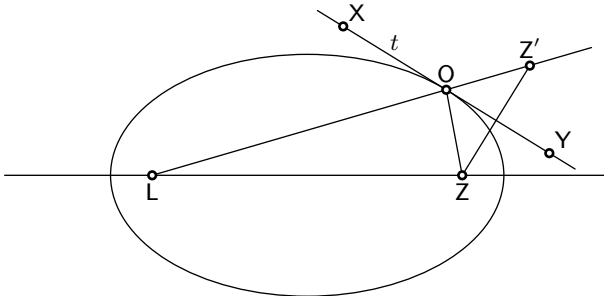
Úloha II.4 ... laser (4 body; průměr 2,19; řešilo 21 studentů)

Má-li z krystalu vycházet laserový paprsek, musíme mu dodat energii prostřednictvím záření z vnějšího zdroje. Cílem je, aby co nejvíce záření z našeho bodového zdroje bylo využito k excitaci elektronů ve velmi malém krystalu. Poradte nám, jaký ideální tvar proto musí mít odrazná plocha. Nezapomeňte své tvrzení dostatečně zdůvodnit.

Úlohu navrhl *Pavel Brom*.

Nahradíme si bodový zdroj světla a velmi malý krystal laseru body Z, L. Zákon odrazu říká:

- Úhel dopadu je roven úhlu odrazu (my uijeme rovnost k nim doplňkových úhlů).
- Paprsek po odrazu zůstává v dopadové rovině (ta je kolmá k tečné rovině v bodě odrazu O).



Obr. 5

Je jasné, že body L, Z musí ležet v dopadové rovině, ve které budeme problém dále řešit. Chceme využít co nejvíce světla, proto si nejprve položíme otázku, zda existuje křivka, která „odrazí“ všechny paprsky jdoucí z jednoho bodu do druhého. K pevně daným bodům L, Z ji zkusme odhadnout a co nejpřesněji načrtnout její tvar. Taková křivka existuje – je to elipsa.

Zkoumejme, co musí platit pro tečnu t takové křivky v bodě odrazu O. Ze zákona odrazu

$$|\angle LOX| = |\angle YOZ| = |\angle YOZ'|, \quad (9)$$

kde osová souměrnost s osou t zobrazí úsečku OZ na OZ'. Dále evidentně platí

$$|LO| + |OZ| = |LO| + |OZ'| = |LZ'|. \quad (10)$$

Nyní potřebujeme zajistit, aby množina bodů O byla spojitá. Položíme-li $|LZ'|$ v rovnici (10) rovno konstantě, vyhovíme tak definici elipsy (množiny bodů O v rovině, která má od dvou daných ohnisek F, G konstantní součet vzdáleností), o které víme, že existuje a je spojitá. K této podmínce nás rovněž navede obecná platnost Fermatova principu, a sice, že světlo se šíří po nejkratších časových spojnicích. Žádný bod O křivky (resp. celé odrazné plochy) by neměl být

kvůli Fermatovu principu preferovaný, tudíž libovolná dráha Z–O–L by měla být vždy stejně dlouhá, tj. $|ZO| + |OL| = \text{konst.}$ Toto musí být splněno pro všechny body O v prostoru.

K důkazu přímé hypotézy, že danou křivkou je právě elipsa, stačí ukázat, že tečna elipsy v bodě O je osou úhlu ZOZ', jestliže Z' je zkonstruován na polopřímce LO tak, že $|LZ'| = 2a = \text{konst.}$, kde a je hlavní poloosa uvažované elipsy. Na ose úhlu (značené t) vezměme libovolný bod X různý od O. Z osové souměrnosti s osou t plyne

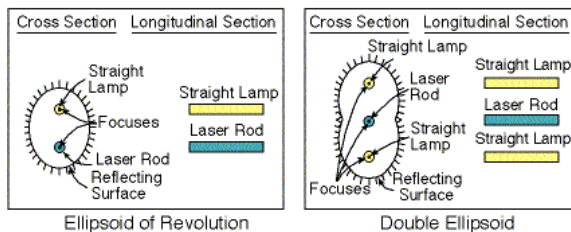
$$|XZ'| = |XZ|, \quad \text{tedy} \quad |LX| + |XZ| = |LX| + |XZ'| > |LZ'| = 2a,$$

to je trojúhelníková nerovnost v trojúhelníku LXZ'. To znamená, že žádný uvažovaný bod X osy t kromě společného bodu O není bodem elipsy (musela by nastat rovnost), tedy osa t nemůže být sečnou, proto je nutně tečnou elipsy a platí rovnost úhlů v podmínce (9).

Správné řešení úlohy zní následovně. Ideální odraznou plochou je rotační elipsoid rotující kolem své hlavní osy (nikoliv podle jiné), přičemž laser umístíme do jednoho ohniska elipsoidu a zdroj do druhého – technicky např. pomocí dutých trubiček připevněných v hlavních vrcholech. Pokud by se osy elipsy při rotování spojitě měnily (tzn. v řezech rovinami obsahujícími L, Z bychom dostávali různé elipsy), nemohla by být tečná rovina kolmá k dopadové rovině a odražený paprsek by minul bod L. Tím jsme vyloučili obecný elipsoid.

Někteří řešitelé použili nedovolené a ohromné čočky (tzn. zařízení se zkomplikuje, prodraží). Mnozí doporučili parabolu/rotační paraboloid (za 1 bod) ze stejné rodiny křivek, ale s nižším procentem využitého světla. Nalezení elipsy (rotačního elipsoidu) bylo oceněno 3 body, přijatelný důkaz tvrzení 1 bodem. Jen 2 řešitelé nezapomněli na druhou část zákona odrazu, čímž odůvodnili, že elipsoid musí být rotační podle hlavní osy.

Objevíli jsme zajímavou vlastnost kuželoseček. Paprsky vyslané z jednoho bodu jsou odrazem změněny na rovnoběžné (paraboloid), sbíhavé (elipsoid), rozbíhavé (hyperboloid) nebo vráceny zpět (kulová plocha). Zároveň rozumíme, proč se oněm význačným bodům říká ohniska.



Obr. 6

Na závěr uvedme, že k „pumpování laserů“ se v praxi nepoužívá bodový zdroj světla, ale dokázaná vlastnost elipsy se uplatňuje pro tyčový krystal a jednu nebo dvě s ním paralelní zářivky, viz obr. 6.

Pavel Brom
paja@fykos.mff.cuni.cz

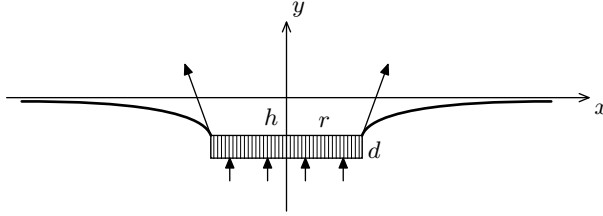
Úloha II. P ... devalvace měny (5 bodů; průměr 2,61; řešilo 33 studentů)

Pokuste se spočítat, jak velká hliníková mince se ještě udrží na vodní hladině.

Navrhl Honza Houštěk.

Přestože se to na první pohled může jevit překvapivé, i hliníková mince o hustotě větší než voda může plavat na hladině. Klíčem k tomuto jevu je jak jinak než povrchové napětí vody.

Na obr. 7 je zakresleno, jak taková plavající mince vypadá. Tloušťku mince jsme označili d , její poloměr r a hloubku horní strany pod úroveň hladiny h . Na dolní stranu mince působí hydrostatický tlak vody a na horním obvodě povrchová síla vody.



Obr. 7. Síly působící na plavající minci

Spočítat tlakovou sílu je při znalosti h snadné, $F_p = S \varrho g(d+h)$, kde S je plocha mince. Jak se ukáže, stanovení h bude tím nejobtížnějším problémem. Velikost povrchové síly spočteme snadno, $F_\sigma = l\sigma$, kde l je obvod mince. Ve vzorci by měl vystupovat ještě nějaký úhlový člen. S tím je trochu problém, stanovení úhlu, pod kterým je mince smáčena, není jednoduché, navíc by záleželo na konkrétním tvaru okraje mince a do hry by vstoupilo i povrchové napětí na rozhraní voda-mince. Jak se ale ukáže, bude nakonec možné sílu F_σ zanedbat, proto se problémy s úhlem smáčení zabývat nebudeme.

Plavání mince je umožněno schopností hladiny prohnout se a udržet určitý tlakový rozdíl. Tlak je jak víme přímo úměrný křivosti povrchu, konstantou úměrnosti je povrchové napětí σ . Budeme-li předpokládat $r \gg h$, můžeme zanedbat zakřivení dané kruhovým tvarem mince. Je třeba tedy najít tvar hladiny $y(x)$ tak, aby v každém bodě platilo¹ $\sigma/r = \varrho g y$. Na základě výsledku pak stanovíme maximální hodnotu h .

Pro matematicky náročného čtenáře provedeme tento výpočet níže. I bez výpočtů můžeme provést následující úvahu. Výsledná maximální hodnota h bude záviset jen na hodnotách σ , ϱ , g a ne na parametrech mince. Až na multiplikativní konstantu existuje jediný způsob, jak z těchto tří hodnot sestavit veličinu s rozměrem délky,

$$a = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho g}} = 2,7 \text{ mm.}$$

Hledaná maximální hodnota h bude jen nějakým násobkem a . Z toho, že h nezávisí na velikosti mince je vidět, že plavat může libovolně velká mince, její tíha i tlaková síla jsou úměrné její ploše. Stačí, aby tloušťka mince byla

$$d < \frac{\varrho}{\varrho' - \varrho} \cdot h_{\max},$$

kde ϱ' je hustota mince. Pro hliník to je asi $0,6 \cdot h_{\max}$. Spolu s odhadem $h_{\max} \sim a$ už máme docela slušný výsledek.

Uvažovali jsme ovšem pouze tlakovou sílu. Zkusme tedy porovnat velikost obou sil pro velké mince,

$$\frac{F_\sigma}{F_p} = \frac{\sigma l}{S \varrho g h_{\max}} = \gamma \cdot \frac{a}{r}.$$

¹⁾ Vzorec platí včetně znaménka, křivost $1/r$ konkávní funkce bereme záporně.

$\gamma = 2a/h_{\max}$ je bezrozměrná konstanta. Pro velké mince tedy bude opravdu možné povrchovou sílu zanedbat a současně vidíme, že mírou oné „velikosti“ je právě hodnota a .

Nyní přistoupíme k výpočtu tvaru funkce $y(x)$. Diferenciální rovnici už máme téměř sestavenou, ve vztahu $\sigma/r = \rho g y$ stačí vyjádřit křivost pomocí derivací $y(x)$,

$$\rho g y = \sigma y'' (1 + y'^2)^{-3/2}.$$

V této rovnici nevystupuje proměnná x . Lze tedy provést transformaci $u = y'$ a hledat závislost $u(y)$. Pak totiž platí $y'' = uu'$. Tedy

$$y = a^2 uu' (1 + u^2)^{-3/2}.$$

V tomto tvaru lze rovnici snadno integrovat,

$$\frac{y^2}{2} + C = -a^2 (1 + u^2)^{-1/2}.$$

Z okrajové podmínky $u = 0$ pro $y = 0$ určíme hodnotu integrační konstanty a po úpravě dostáváme

$$y = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - (1 + u^2)^{-1/2}}.$$

Místo, kde je hladina ohnutá kolmo dolů, tj. $u = \infty$, je v hloubce $h_{\max} = a\sqrt{2}$. Někteří řešitelé uvažovali i možnost zahnutí hladiny ještě více, toto se nám ale nepodařilo (narozdíl od zbytku tvrzení) experimentálně ověřit a navíc by to stejně do výsledku nepřineslo velký rozdíl. Závěr je tedy takový, že plavat může libovolně velká hliníková mince o maximální tloušťce cca 2 mm.

Úlohu zcela vyřešil pouze *Matouš Ringel*, za což si vysloužil plný počet bodů. Několik řešitelů provedlo popsany rozměrový odhad h_{\max} . Ostatní většinou skončili na tom, že místo tlakové síly působící na spodní stranu mince uvažovali vztlakovou sílu danou objemem mince. To je špatně, protože vztlaková síla je daná rozdílem tlaku pod a nad tělesem, je-li zcela obklopeno kapalinou. Zde je ale nad mincí tlak nulový, tím je ostatně umožněno její plavání.

Honza Houštek

honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.1 ... na oběžné dráze (3 body; průměr 2,40; řešilo 52 studentů)

Tři stejné družice obíhají po kružnici kolem malé planety rychlostí v tak, že jsou neustále ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete jejich hmotnost, která není zanedbatelná vůči hmotnosti planety.

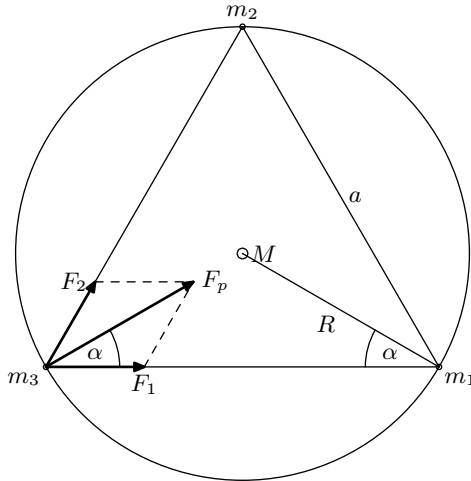
Úlohu navrhl Honza Prachař.

Na planetku gravitačně působí tři objekty. Planeta ve středu a dvě planety ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Výsledná síla působící na planetku m_3 od planetek m_1 a m_2 je

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \kappa \frac{m_1 m_3}{a^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{1,3}}{|\mathbf{r}_{1,3}|} + \kappa \frac{m_2 m_3}{a^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{2,3}}{|\mathbf{r}_{2,3}|}.$$

Jelikož $m_1 = m_2 = m_3 = m$, pak předchozí rovnici můžeme přepsat na tvar

$$\mathbf{F}_p = 2\kappa \frac{m^2}{a^2} \cos \alpha.$$



Obr. 8

Centrální planeta působí na planetku m_3 silou

$$F_M = \kappa \frac{mM}{R^2}.$$

Výsledná síla působící na naši planetku je

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_p = \kappa \frac{mM}{R^2} + 2\kappa \frac{m^2}{a^2} \cos \alpha \quad (11)$$

protože směry F_p a F_M jsou oba totožné a směřují k centrální planetě.

Vyjádříme vzdálenost a pomocí R .

$$a = 2R \cos \alpha = 2R \cos 30 \text{ deg} = R\sqrt{3}.$$

Pak rovnice (11), vyjadřující celkovou gravitační sílu působící na m_3 , nabývá tvaru

$$\begin{aligned} F &= \kappa \frac{mM}{R^2} + 2\kappa \frac{m^2}{3R^2} \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ &= \kappa \frac{mM}{R^2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{M} \right). \end{aligned}$$

Tato síla musí být vyvážena odstředivou silou, proto

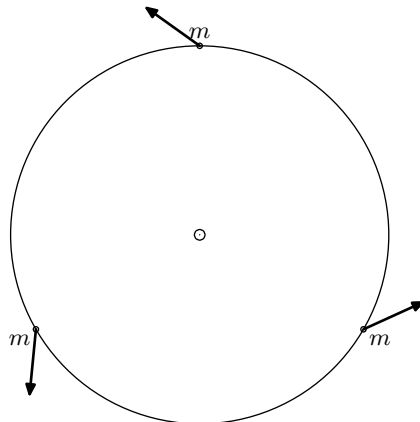
$$\frac{mv^2}{R} = \varkappa \frac{mM}{R^2} \left(1 + \frac{\sqrt{3} m}{3 M} \right)$$

$$m = \sqrt{3} \frac{v^2 R - \varkappa M}{\varkappa}.$$

Závěrem:

- Nebudeme zkoumat, jak se čtyři tělesa dostaly do této rovnovážné polohy. Domnívám se, že to jde velice těžko a jenom za pomoci dalších těles.
- Jestliže planety obíhají kolem centrální planety ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka, pak nutně nemusí obíhat po kružnici. Stačí, když v některém okamžiku budou vektory rychlosti a hybnosti stejné (v jedné rovině) a planety se budou nacházet ve vrcholu rovnostranného trojúhelníka (příčměž v soustavě nesmí být žádné další těleso). Křivka, po které budou obíhat kolem centrálního tělesa, nebude elipsa, rozmyslete si proč.

Dokonce není nutné aby planety obíhaly v jedné rovině. Příkladem buď velice hmotné centrální těleso a nehmotné planety, jejichž dráhy se protínají v jednom bodě, jsou v tomto bodě ve stejný okamžik a jejich dráhy jsou vůči sobě pootočený o 60° .



Obr. 9

- Není možné použít Keplerovy zákony. Ty byly odvozeny jenom pro dvě tělesa, ne pro tři nebo více.

Pavol Habuda

bzuco@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. 2 ... cvrnkání kuliček (4 body; průměr 1,52; řešilo 31 studentů)

Organizátoři FYKOSu hráli kuličky. Po chvíli si všimli, že když se treťi do prázdné kulové jamky, kulička na dně kmitá kolem rovnovážné polohy. Určete frekvenci těchto malých kmitů. Jamka má poloměr R , poloměr kuličky je r a její hmotnost je m . Smykové tření mezi kuličkou a povrchem jamky je dostatečně veliké, aby při kutálení nedocházelo k prokluzování. Nápověda: je-li φ malé, můžete použít rovnost $\sin \varphi = \text{tg } \varphi = \varphi$ a analogii s pohybem kyvadla.

Zadal Honza Prachař inspirován na cvičeních z Fyziky I.

Pro kuličku platí zákon zachování energie. K potenciální energii a kinetické energii hmotného středu přibude také rotační energii kuličky.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + mgh = \text{konst.}, \quad (12)$$

kde h je výška těžiště nad nejnižší polohou, ω je úhlová rychlost otáčení kuličky a J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Výšku h můžeme vyjádřit pomocí úhlu φ

$$h = (1 - \cos \varphi)(R - r),$$

kde pro malé úhly φ můžeme za $\cos \varphi$ dosadit výraz $1 - \frac{\varphi^2}{2}$ (φ bereme v radiánech).

$$h = (R - r) \frac{\varphi^2}{2}.$$

Oblouk kružnice můžeme nahradit souřadnicí kuličky x , proto z definice úhlu plyne $\varphi = \frac{x}{R-r}$. Dosadíme-li do (12) také za moment setrvačnosti kuličky $J = \frac{2}{5}mv^2$ a za její úhlovou rychlost $\frac{v}{r}$, dostáváme

$$\frac{7}{10}mv^2 + m \frac{gx^2}{2(R-r)} = \text{konst.}$$

Pokud obě strany rovnice zderivujeme, dostáváme

$$\frac{7}{5}m\dot{x}\ddot{x} + \frac{mgx\dot{x}}{R-r} = 0.$$

Zkrátíme-li vřaz u \dot{x} , obdržíme rovnici

$$\ddot{x} + \frac{5g}{7(R-r)}x = 0. \quad (13)$$

Nyní dojde na analogii se závažíčkem na proužince, kterou jsme zmínili v zadání. Napišme si tedy pohybovou rovnici závažíčka

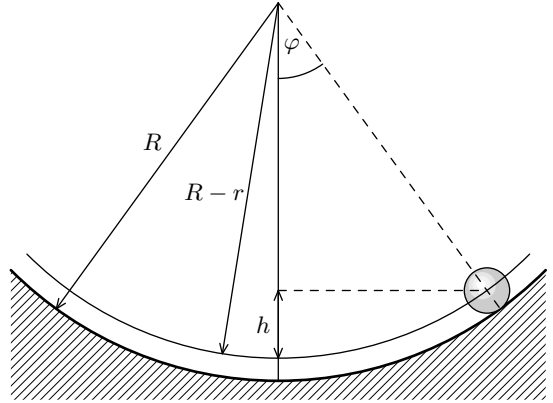
$$ma = -kx \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Tato rovnice je formálně stejná s naší rovnicí (13) pro kuličku v jamce. Rovnicím, které mají tento tvar, říkáme rovnice harmonických kmitů. Konstanta před x je druhá mocnina úhlové frekvence soustavy. V našem případě je

$$\Omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$

úhlová frekvence kmitání kuličky. Frekvenci f těchto kmitů už vyjádříme ze známého vztahu

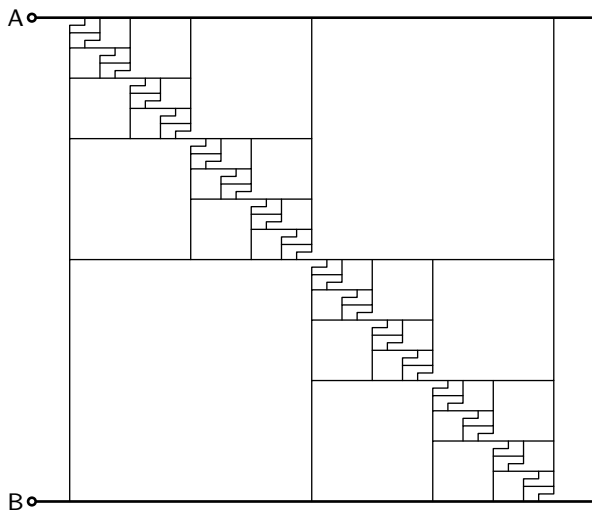
$$f = \frac{\Omega}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}.$$



Obr. 10

Úloha III.3 ... odporová síť (3 body; průměr 2,48; řešilo 27 studentů)

Jaký je odpor mezi body A a B odporové sítě na obrázku 11? Svislé úsečky mají odpor R a vodorovné odpor nemají. Síť je nekonečná, na obrázku je z technických důvodů jen konečná iterace.



Obr. 11. Nekonečná odporová síť

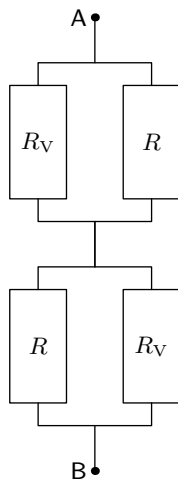
Vynalezl Pavel Augustinský pro Bělčickou olympiádu.

Protože je odporová síť nekonečná, víme, že část celé odporové sítě má tentýž elektrický odpor jako celá síť. Zjednodušeně můžeme celou situaci překreslit do obrázku 12. Výsledný odpor R_V mezi body A a B je dle obrázku roven

$$R_V = 2 \frac{RR_V}{R + R_V}.$$

Odsud dostáváme kvadratickou rovnici s kořeny 0 a R . Dokažme, že hledaný odpor není roven 0. Při provádění jednotlivých iterací odpor nikdy neklesne pod R . Odpor první iterace je zřejmě roven $2R$ a odpor dalších iterací klesá monotónně k R . V jednotlivých krocích vždy sériově spojujeme 2 stejná zapojení. Toto zapojení zkonstruujeme jako paralelní zapojení předchozí iterace a odporu R . Paralelní zapojení dvou rezistorů o odporech R a odporu větší než R je ekvivalentní odporu, který má odpor větší než $R/2$. A sériové spojení dvou takovýchto zapojení je větší než R . Jelikož je první iterace větší než R , a pak i každá další větší, nebo rovna R , nemůže odpor žádné iterace klesnout pod R . Výsledný odpor celé odporové sítě je roven R .

Byla i jiná možnost jak řešit tuto úlohu. Představte si tenký plechový čtverec o odporu R . Pokud z téhož materiálu vyrobíme čtverec o jiné délce strany, bude jeho odpor opět R , neboť jeho průřez se zmenší sice dvakrát, ale jeho délka také. Nyní vyšetřujeme odpor plechového čtverce mezi jeho protilehlými stranami (ten je dle předpokladu R). Pokud čtverec jakkoli



Obr. 12

rozřežeme, nezmění se jeho odpor. Samozřejmě nesmíme rozřezané kusy od sebe oddělit a stejně tak předpokládáme, že se vše chová naprosto ideálně a nikde nevznikají přechodové odpory. Rozdělíme ho na čtverce, tedy každá část, ze které pak budeme moci čtverec zpět poskládat, má odpor R . Takto rozřezaný čtverec můžeme reprezentovat elektrickou sítí složenou z odporů velikosti R , přičemž využijeme, že místa se stejným potenciálem nemusí být spojena vodičem (proud by mezi nimi stejně netekl). Pokud budeme správným způsobem nekonečněkrát dělit čtverec, můžeme získat stejnou odporovou síť jako byla v zadání. Při jednotlivém čtvrcení budeme postupovat tak, že vždy po rozříznutí čtverce na čtvrtiny se nebudeme více starat o levou dolní část a horní pravou část. Nadále budeme do nekonečna pokračovat v krájení zbylých „zajímavých“ částí stejným způsobem. Tento postup zcela odpovídá zapojení v zadání. Na obrázku můžete vidět 2. krok tohoto postupu a jemu odpovídající zapojení. Bílé čtverce se budou ještě dále dělit, ale šedé už zůstanou tak, jak jsou. Všechny rezistory na obrázku mají odpor R . Protože má celý čtverec odpor R (stejně tak všechny „malé“ čtverce), má i zadaná síť odpor R .

Nakonec ještě taková malá poznámka. Uvědomme si, že nezáleží na tom, jak velký odpor leží na úhlopříčce odporové sítě. Pokud totiž zpodrobňujeme schéma zapojení směrem dovnitř – jakoby se přibližujeme k síti a zkoumáme, co se nachází na úhlopříčce – zjišťujeme, že namísto rezistoru o nekonečném odporu nalézáme znovu tutéž odporovou síť, jako jsme viděli předtím.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

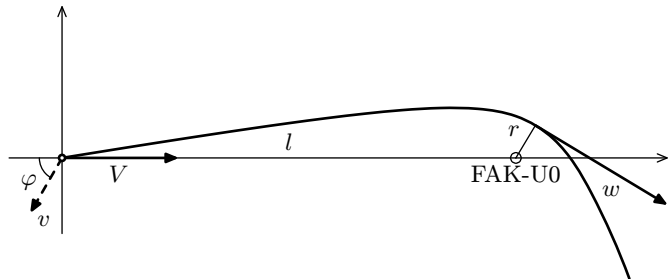
Úloha III.4 ... kapitán Kork zasahuje (5 bodů; průměr 2,00; řešilo 21 studentů)

Vesmírná loď *Escapeprise* se vrací z prostoročasové bitvy s Odborgy. Během letu ale posádka zjišťuje, že nešťastnou náhodou směřují přímo do černé díry FAK-U0. Rozhodnou se pro úhybný manévru a kolmo na směr své rychlosti vypustí v jednom okamžiku všechno palivo. Vypočtete vzdálenost, ve které *Escapeprise* kolem černé díry proletí. Jakou největší hmotnost může černá díra mít, nemá-li do ní *Escapeprise* spadnout? Jako bonus se zamyslete nad tím, zda kapitán Kork mohl úhybný manévru vymyslet chytřeji. Hmotnost samotné lodě je M , paliva m . Rychlost lodě ve velké vzdálenosti od černé díry je V a směřuje do středu černé díry. Rychlost vypuštěného paliva je v a úhybný manévru proběhl též velmi daleko od černé díry.

Vymyslel Jarda Trnka při sledování svého oblíbeného seriálu.

Označme počáteční vzdálenost od černé díry l , nejmenší vzdálenost r , hmotnost černé díry D a rychlost lodi v nejbližším místě od středu černé díry w .

Prvním úkolem je určení výsledné rychlosti rakety po provedení úhybného manévru. Nechť spojnice rakety a středu černé díry je osa x , osa na ní kolmá bude osa y a poloha počátku bude totožná s polohou rakety těsně po úhybném manévru. Předpokládejme teď, že kapitán Kork palivo vypustí pod nějakým úhlem φ vůči ose x .



Obr. 13

Ze zákona zachování momentu hybnosti dostaneme

$$v_x = V + \frac{m}{M}v \cos \varphi \quad (14),$$

$$v_y = \frac{m}{M}v \sin \varphi \quad (15).$$

Dále vyjdeme ze dvou zákonů zachování, a to zachování energie a momentu hybnosti. Protože v nejbližším bodě od černé díry je vektor rychlosti kolmý na spojnici lodí a středu černé díry, platí pro zákon zachování hybnosti

$$L = Mlv_y = Mrw. \quad (16)$$

Ze zákona zachování energie dostaneme

$$\frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) - \frac{GMD}{l} = \frac{1}{2}Mw^2 - \frac{GMD}{r}. \quad (17)$$

Vyjádříme z (16) rychlost w a dosadíme do (17), přitom uvážíme, že pro $l \gg r$ můžeme potenciální energii v počáteční poloze zanedbat.

$$\frac{1}{2}M(v_x^2 + v_y^2) = \frac{Ml^2v_y^2}{2r^2} - \frac{GMD}{r}.$$

Dosadíme-li (14) a (15) do (17) a uvážíme-li, že ze zadání je $\varphi = 90^\circ$, vyjde

$$V^2 + \frac{m^2v^2}{M^2} = \frac{l^2m^2v^2}{r^2M^2} - \frac{2GD}{r}. \quad (18)$$

Z toho úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro r .

$$r^2 \left(V^2 + \frac{m^2v^2}{M^2} \right) + 2GDr - \frac{l^2m^2v^2}{M^2r^2} = 0. \quad (19)$$

Rovnice (19) má dvě řešení, fyzikální smysl má jen jedno, které se dá upravit na tvar

$$r = \frac{\sqrt{G^2D^2M^4 + (V^2M^2 + m^2v^2)l^2m^2v^2} - GDM^2}{M^2V^2 + m^2v^2}.$$

Tím jsme odpověděli na první otázku.

Dále je potřeba zjistit kritickou hmotnost černé díry. V této situaci bude nejbližší vzdálenost lodě od středu černé díry rovna kritickému, tzv. Schwarzschildovu, poloměru, pro který platí

$$r_g = \frac{2GD}{c^2} \quad (20)$$

Tento vztah se dá odvodit, když si uvědomíme, že úniková rychlost z této vzdálenosti je rovna rychlosti světla. V rovnici (18) dosadíme $r = r_g$ a vyjádříme hmotnost D .

$$D = \frac{r_g}{2G} \left(\frac{m^2v^2}{M^2} \left(\frac{l^2}{r_g^2} - 1 \right) - V^2 \right).$$

Po dosazení z (20) za r_g vyjde po úpravách

$$D = \frac{mvlc^2}{2GM\sqrt{V^2 + c^2 + \frac{m^2v^2}{M^2}}}.$$

To je tedy odpověď na druhou otázku. Zbývá vyřešit bonus.

Jde vlastně o analogický výpočet, jen nedosazujeme za φ . Vyjádříme velikost D stejným způsobem, jen nebudeme za v_x a v_y prozatím dosazovat, vyjde

$$D = \frac{r_g}{2G} \left(\frac{l^2 v_y^2}{r_g^2} - v_y^2 - v_x^2 \right).$$

Dosadíme teď do tohoto vztahu za v_x a v_y z (14) a (15) a také za r_g . Stejným způsobem vyjádříme velikost D . Po všech dosazeních a úpravách vyjde

$$D = \frac{mvlc^2 \sin \varphi}{2GM\sqrt{V^2 + c^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2 v^2 + \frac{2mvV \cos \varphi}{M}}}.$$

Tento vztah udává závislost $D = D(\varphi)$. Budeme hledat extrém této funkce, tedy úhel, pro který je derivace $d/d\varphi$ nulová. Pokud tedy tento vztah zderivujeme a derivaci položíme rovnu nule, dostaneme řešení ve tvaru

$$\varphi = \arccos \left(\sqrt{\left(\frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV} \right)^2 - 4} - \frac{Mc^2 + mv^2 + MV^2}{2mvV} \right).$$

Příslušné výpočty si můžete vyzkoušet za cvičení.

Pár slov k došlým řešením. Málo z vás si uvědomilo, že k výpočtu je nutné použít zákon zachování momentu hybnosti či 2. Keplerův zákon. Jen ze ZZE se úloha vyřešit nedala, jak si mnozí z vás mysleli. Další chybou byla nesprávná úvaha, že se dá vliv černé díry během letu zanedbat. To by tam ta černá díra vůbec nemusela být a řešili bychom pohyb volné částice.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III. P ... jede, jede autíčko (5 bodů; průměr 1,13; řešilo 30 studentů)

Představte si autíčko, jehož motor má konstantní tažnou sílu F , pohybující se rychlostí v . Jeho výkon tedy je $P = Fv$. Avšak cyklista jedoucí konstantní rychlostí u pozoruje výkon $P = F(v - u)$. Spotřeba benzínu, která odpovídá výkonu, je však stejná z pohledu cyklisty i stojícího chodce. Vysvětlete tento „paradox“. Odpor vzduchu neuvažujte.

Na klasický paradox v mechanice si vzpomněl Honza Prachař.

Většina řešitelů k této úloze přistoupila tak, že nějakým způsobem napsala, že zákon zachování energie platí, tudíž i z pohledu cyklisty musí mít autíčko výkon Fv . Avšak jen málo vysvětlilo paradox, který spočívá v tom, proč cyklista pozoruje výkon jen $F(v - u)$ a kam se ztratí onen zbytek.

Správné vysvětlení je takové, že ve vztažné soustavě cyklisty autíčko působí na vozovku reakční silou $-F$, vozovka se pohybuje vůči cyklistovi rychlostí u . Tedy zbývající výkon Fu autíčko spotřebuje na rozpoohybování vozovky.

Na úlohu se můžeme podívat i z energetického hlediska. Z pohledu pozorovatele stojícího pevně v prostoru se za krátký čas dt zvětší kinetická energie auta o $[v(dt)^2 - v(0)^2]m/2$ a kinetická energie Země o $[V(dt)^2 - V(0)^2]M/2$, kde velká písmenka se vztahují k parametrům Země, malá k parametrům autíčka. Písmenko d před veličinou znamená, že se jedná o malou změnu. Předpokládáme-li, že na začátku stojí pozorovatel v klidu vůči Zemi, tedy $V(0) = 0$, a použijeme-li zákon zachování hybnosti, je změna energie Země $m(dv)^2/2M$, což je malinké zanedbatelné číslo.

Z pohledu cyklisty je změna energie autíčka $[(v(dt) - u)^2 - (v(0) - u)^2]m/2$ a změna energie Země $[(V(dt) + u)^2 - u^2]M/2$. Opět použijeme zákon zachování hybnosti, ale tentokrát změna energie Země $mu dv$ není zanedbatelná, neboť Země se vůči cyklistovi na začátku pohybuje rychlostí u . Přičteme-li změnu energie Země ke změně energie autíčka, vyjde nám přesně totéž, co pozoruje chodec.

Lenka Zdeborová
lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.1 ... stavový výťah (4 body; průměr 2,86; řešilo 37 studentů)

Mějme uzavřenou visle postavenou válcovou nádobu s pohyblivým pístem, jehož hmotnost nemůžeme zanedbat. Při teplotě $t = 0^\circ\text{C}$ je objem plynu nad pístem dvakrát větší než objem plynu pod pístem. Určete poměr objemů plynů při teplotě $t = 100^\circ\text{C}$, víte-li, že jejich látková množství jsou stejná. *Ze cvičení Fyziky I zná Jirka Lipovský.*

Označme při počáteční teplotě T objem plynu nad resp. pod pístem V_1 resp. V_2 a tlak nad resp. pod pístem p_1 resp. p_2 . Obdobně označme všechny čárkované veličiny při konečné teplotě T' . Píst svou tíhou vytváří tlak v dolní části válce, který závisí pouze na hmotnosti pístu. Rozdíl tlaků v dolní a horní části nádoby musí být proto v každém okamžiku stejný.

$$p_2 - p_1 = p'_2 - p'_1. \quad (21)$$

Ze zadání úlohy víme, že

$$V_1 = 2V_2, \quad (22)$$

a hledáme konstantu k takovou, aby

$$V'_1 = kV'_2. \quad (23)$$

Pro oba plyny platí stavová rovnice

$$pV = nRT,$$

kde R je univerzální plynová konstanta a n je látkové množství plynu. Jelikož víme, že látková množství plynů nad a pod pístem jsou stejná, můžeme psát

$$\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_2 V_2}{T} = \frac{p'_1 V'_1}{T'} = \frac{p'_2 V'_2}{T'}. \quad (24)$$

Z předchozí rovnice můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} p_2 &= 2p_1, \\ p'_2 &= kp'_1 \end{aligned}$$

a po dosazení do (21) dostáváme

$$p_1 = (k - 1)p'_1. \quad (25)$$

Zřejmě se součet objemů jednotlivých částí nemění.

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2'.$$

Dosadíme-li za V_2 a V_2' z (22) resp. (23), dostáváme

$$V_1 = \frac{2(k+1)}{3k} V_1'. \quad (26)$$

Vynásobíme-li nyní levé a pravé strany rovnic (26) a (25), získáváme

$$p_1 V_1 = \frac{2(k+1)(k-1)}{3k} p_1' V_1'.$$

Dosadíme-li za poměr $\frac{p_1 V_1}{p_1' V_1'}$ ze stavové rovnice (24) výraz $\frac{T}{T'}$, můžeme předchozí vztah upravit na kvadratickou rovnici

$$k^2 - \frac{3T}{2T'} k - 1 = 0.$$

Fyzikální význam má pouze její kladný kořen, který po dosazení zadaných hodnot teplot vychází $k = 1,69$. Píst tedy vystoupí o kousek nahoru, protože s rostoucí teplotou se snižuje význam jeho příspěvku k tlaku ve spodní části válce (tlak plynu se s rostoucí teplotou zvyšuje, tlak způsobený hmotností pístu zůstává stejný).

Jirka Lipovský

jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... záhadné kyvadélko (5 bodů; průměr 2,67; řešilo 9 studentů)

Kovová palička může kmitat okolo koncového bodu. Její druhý konec se stále dotýká kovového oblouku. Bod závěsu je přes kondenzátor kapacity C zapojený na střed kovového oblouku (tj. nejnižší bod, ve kterém se nachází dolní konec paličky). Celé kyvadélko se nachází v homogenním magnetickém poli indukce B , která je kolmá na rovinu kmitů. Jaká je doba kmitu kyvadla, pokud hmotnost paličky je m a tření a odpor drátu zanedbáme? Počáteční výchylku kyvadla α_0 uvažujeme malou.

Úlohu znal a navrhl Miro.

Označme si výchylku kyvadla φ , délku závěsu r , U_C napětí na kondenzátoru a U_P napětí na kovové paličce. Jelikož se palička pohybuje v magnetickém poli, tak se na ní bude indukovat napětí

$$U_P = \frac{d\mathbf{B} \cdot \mathbf{S}}{dt} = \frac{Br^2 d\varphi}{dt} = Br^2 \dot{\varphi}.$$

Bez odporu je napětí na paličce stejné jako na kondenzátoru

$$U_P = -U_C = Q/C,$$

což po dosazení za U_P dává

$$Br^2 \dot{\varphi} = -Q/C. \quad (27)$$

Tím máme vyřešenou elektrickou část problému a teď se podíváme na mechanický pohyb paličky. Tady použijeme druhou impulsovou větu

$$M = J\ddot{\varphi}, \quad (28)$$

kde J je moment setrvačnosti, který má pro paličku hodnotu $mr^2/3$. Moment síly je dán součtem magnetické a gravitační síly, tedy

$$M = mg \frac{r}{2} \sin \varphi \doteq \frac{mgr^2}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I.$$

To nám spolu s rovnicí (28) dává

$$\frac{mr^2}{3} \ddot{\varphi} = \frac{mgr}{2} \varphi + \frac{Br^2}{2} I. \quad (29)$$

Nyní už máme všechny rovnice, které potřebujeme, jen rovnici (27) musíme zderivovat podle času

$$Br^2 \dot{\varphi} = -I/C.$$

Z této rovnice dosazením za I do (29) máme

$$\left(\frac{2}{3} mr^2 + CB^2 r^2 \right) \ddot{\varphi} = mgr \varphi,$$

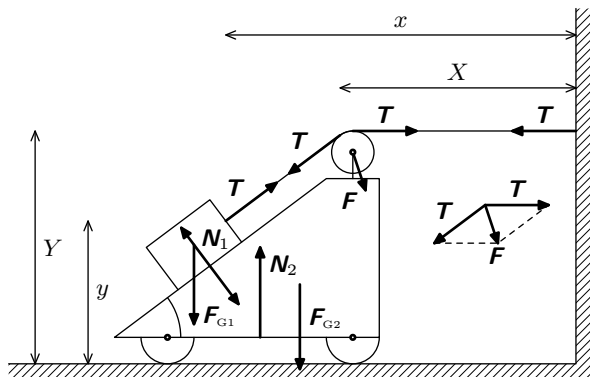
což je rovnice harmonických kmitů s dobou kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{3g} + \frac{CB^2 r^3}{2mg}}.$$

Miro Kladiva
miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... cihla na klínu (4 body; průměr 1,73; řešilo 45 studentů)

Na obr. 14 je soustava dvou těles. Těleso o hmotnosti m , které je přivázáno ke zdi ideálním lanem, leží v klidu na malém klínu o hmotnosti M . Tření mezi tělesy je nulové a klín se pohybuje bez odporu. Určete zrychlení klínu. Z emailové konference MFO zná Honza Prachař.



Obr. 14. Cihla a klín

Úlohu budeme řešit pomocí Newtonových pohybových rovnic. Začneme proto tím, že popíšeme všechny síly, které na vozík ve tvaru klínu a na cihlu působí. Síly jsou znázorněny na obrázku 14. Na cihlu působí tíhové pole silou F_{G1} , na vozík normálovou silou N_1 a na lano silou T . Podle zákona akce a reakce bude cihla působit na vozík silou N_1 . Dále na vozík působí tíhové pole silou F_{G2} , podložka, po které vozík jezdí, silou N_2 a konečně lano silou F . Síla F pochází od ohybu lana na kladce, určíme ji jako výslednici sil na kladce (viz obr. 14). Ve vswislém a vodorovném směru platí

$$\begin{aligned} F_y &= T \sin \alpha, \\ F_x &= T(1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

Odtud pro velikost síly F dostáváme

$$F = 2T \sin \frac{\alpha}{2},$$

její odklon od vswislého směru je $\alpha/2$.

Polohu cihly a vozíku popíšeme souřadnicemi zobrazenými na obrázku 14. Polohu cihly určuje vzdálenost od stěny x a vzdálenost od podlahy y . Podobně pro vozík máme souřadnice X a Y . Přístupme nyní k sestavení čtyř pohybových rovnic, pro každé těleso dvě (ve vswislém a vodorovném směru). Zrychlení cihly označme a a zrychlení vozíku A . Při sestavování pohybové rovnice ve vswislém resp. vodorovném směru dáme na levou stranu rovnice zrychlení tělesa vynásobené jeho hmotností a na pravou stranu složky sil působících na těleso do vswislého resp. vodorovného směru (při tom dáváme pozor na směr sil).

$$\begin{aligned} ma_x &= -T \cos \alpha + N_1 \sin \alpha, \\ ma_y &= N_1 \cos \alpha - mg + T \sin \alpha, \\ MA_x &= -N_1 \sin \alpha - F_x, \\ MA_y &= -Mg - N_1 \cos \alpha + N_2 - F_y. \end{aligned}$$

Máme tedy čtyři rovnice pro sedm neznámých a_x , a_y , A_x , A_y , T , N_1 a N_2 . Budeme k nim proto muset přidat další tři rovnice, jedná se o vazbové podmínky. Pohyb těles totiž není volný. Vozík se pohybuje po podlaze, platí

$$Y = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_y = 0.$$

Dále předpokládáme, že cihla leží na klínu (později se dozvíme, že tomu tak nemusí být)

$$\frac{Y - y}{x - X} = \text{tg } \alpha, \quad \text{neboli} \quad \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x} = \text{tg } \alpha.$$

Konečně délka lana je konstantní

$$X + \frac{x - X}{\cos \alpha} = \text{konst.}, \quad \text{neboli} \quad A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \alpha} = 0.$$

Nyní již máme sedm rovnic pro sedm neznámých. Jejich vyřešení je jen technickou otázkou, proto nebudeme výpočet uvádět. Po vyřešení dostaneme

$$A_x = -\frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)},$$

což je hledané zrychlení vozíku ve vodorovném směru (má znaménko mínus, protože souřadnice X míří ode zdi). Normálová síla, kterou působí cihla na vozík, je

$$N_1 = \frac{mg(m(3 + \cos 2\alpha) - 2(2m + M) \cos \alpha)}{4m \cos \alpha - 2(2m + M)}.$$

Nyní se zamysleme, jestli je možné, aby cihla neležela na klínu, ale vznášela se. Pokud bude vozík lehký vůči cihle, může se stát, že síla F bude klín urychlovat natolik, že cihla nebude „stačit“ a bude se vznášet za klínem. Pokud bude zrychlení vozíku konstantní, bude také úhel odklonu lana od vodorovné roviny β konstantní. Jelikož se cihla již nedotýká vozíku, je normálová síla N_1 v pohybových rovnicích nulová. Ve všech rovnicích bude místo α úhel β . Máme tedy následující soustavu sedmi rovnic

$$\begin{aligned} ma_x &= -T \cos \beta, \\ ma_y &= -mg + T \sin \beta, \\ MA_x &= -T(1 - \cos \beta), \\ MA_y &= -Mg + N_2 - T \sin \beta, \\ 0 &= A_y, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{A_y - a_y}{a_x - A_x}, \\ 0 &= A_x + \frac{a_x - A_x}{\cos \beta} \end{aligned}$$

pro sedm neznámých a_x , a_y , A_x , A_y , N_2 , T a β . Po vyřešení dostáváme jediné A_x , které má fyzikální smysl

$$A_x = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2m + M}{\sqrt{M(4m + M)}}} - 1,$$

a úhel odklonu

$$\cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m + M)} - M}{2m}.$$

Zbývá určit, za jakých podmínek se bude cihla takto vznášet. Zřejmě musí být $\beta < \alpha$, tedy

$$\cos \alpha < \cos \beta = 1 - \frac{\sqrt{M(4m + M)} - M}{2m},$$

po úpravě dostaneme podmínku

$$\frac{m}{M} > \frac{\cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2}.$$

Hmotnost cihly by musela být pro menší úhly α výrazně větší než hmotnost vozíku, což jsme očekávali.

Na problém se můžeme rovněž dívat z hlediska zákona zachování energie, neboť v soustavě nepůsobí žádné třecí síly a síla, kterou působí zeď na lano, nekoná práci. Potenciální energie cihly se mění na kinetickou energii cihly a klínu. Pokud se klín přiblíží ke zdi o vzdálenost ΔX , prodlouží se lano mezi kladkou a cihlou rovněž o ΔX . Z geometrických vlastností vozíku plyne, že poloha cihly se změní

$$\Delta x = \Delta X(1 - \cos \alpha), \quad \Delta y = \Delta X \sin \alpha. \quad (30)$$

Cihla v soustavě spojené se zemí tedy urazí vzdálenost

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta X \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}. \quad (31)$$

Napišme si zákon zachování energie

$$mg\Delta y = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2}M \left(\frac{\Delta X}{\Delta t} \right)^2$$

a dosadíme do něj z (30) a (31). Po úpravě dostaneme

$$\frac{\Delta X}{2(\Delta t)^2} = \frac{mg \sin \alpha}{M + 2m(1 - \cos \alpha)}.$$

Na pravé straně máme vztah pro zrychlení klínu, neboť $\Delta X = A(\Delta t)^2/2$. Dostali jsme samozřejmě to samé jako při použití Newtonových rovnic.

Poznámky k došlým řešením. Výsledky této úlohy nejsou příliš uspokojivé. Dorazilo jen jedno správné řešení, a to od *Matouše Ringela*. Plným počtem bodů jsem hodnotil i řešení, která opomněla možnost, že se cihla „vznáší“ (předpokládali tedy $M \gg m$), ale jinak byla správná. Skoro všichni řešitelé, kteří použili zákon zachování energie, byli úspěšní a vysloužili si tak plný počet bodů. Ostatním, kteří používali Newtonovy pohybové zákony, se až na výjimky ani nepodařilo správně určit všechny síly.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... slezští havíři (4 body; průměr 2,87; řešilo 38 studentů)

Horníci dolu Fučík v Petřvaldě se omylem prokopali skrz Zemi až k protinožcům. Všichni havíři v zoufalství do dolu naskákali. Jak dlouho bude trvat, než doletí na druhý konec vykopaného dolu, pokud tunel prochází přesně středem Země nebo pokud jeho nejkratší vzdálenost od středu Země je d ? Je možné, aby horníci tento průlet přežili?

Nad problémem se zamýšlel Lukáš Chváta.

Nejprve si musíme uvědomit, jak klesá intenzita gravitačního pole s hloubkou v šachtě. Z Gaussovy věty a sférické symetrie problému plyne, že k intenzitě pole ve vzdálenosti d od středu Země přispívá pouze hmota, která leží v kouli o poloměru d , jejíž střed je shodný se středem Země (příspěvek ostatní hmoty k výsledné intenzitě je nulový).

Předpokládáme-li, že hustota Země je ve všech jejích bodech stejná, vidíme, že hmota této koule je úměrná d^3 . Z Newtonova gravitačního zákona tedy plyne, že gravitační síla ve vzdálenosti d od středu Země je úměrná $d^3/d^2 = d$. Konstantu úměrnosti snadno určíme z hodnoty g a poloměru Země jako mg/R_Z , kde m je hmotnost havíře.

Nyní si stačí uvědomit, že pohyb, který vykonává havíř, je harmonický, protože síla, která na něj působí, je úměrná jeho vzdálenosti od středu Země. Ze vzorce pro dobu kyvu harmonického oscilátoru tedy dostáváme dobu průletu havíře

$$T = \pi \sqrt{\frac{g}{R_Z}}.$$

V případě, že šachta nevede přímo středem Země, je situace analogická. Potenciální energie harmonického oscilátoru je kvadraticky závislá na vzdálenosti od rovnovážné polohy. Vidíme

tedy, že potenciální energie havíře ve vzdálenosti d od středu tunelu, jehož nejbližší vzdálenost od středu Země je a , je podle Pythagorovy věty úměrná $d^2 + a^2$ s konstantou úměrnosti stejnou jako v případě $a = 0$ (potenciální energii volíme ve středu Země jako nulovou). Od případu $a = 0$ se tento vzorec liší pouze o aditivní konstantu a na té výsledek nezávisí. Doba pádu je tedy na a nezávislá.

Pavel Augustinský
 pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV . P ... kolotoč (3 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů)

Představme si rotující vodorovný disk. V jeho středu je připevněné kyvadélko, jak je znázorněno na obr. 15. Protože na něj působí odstředivá síla, odchýlí se o úhel α od svislého směru. Určete tento úhel, pokud je délka kyvadélka 1 m a frekvence jeho otáčení 1 Hz.

Navrhl Honza Houštěk inspirovan starou úlohou z FO.

V této úloze záleží na tom, jak je kulička spojena se středem otáčejícího se disku. Pokud je spojena vazbou, která není schopna přenášet rotační pohyb, pak se kulička ani nehne. Předpokládejme, že je kulička spojena s diskem například nehmotnou tyčí připevněnou k disku tak, aby se točila a zároveň se mohla vychylovat.

Nyní se podívejme na to, o jaký úhel se vlastně kyvadélko vychýlí. Z neinerciální soustavy spojené s kuličkou působí na kuličku síla tíhová, setrvačná odstředivá a reakce lanka. Všechny tyto síly se navzájem vyruší (kulička je totiž sama vůči sobě v klidu). Z geometrie sil dle obrázku 16 plyne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg},$$

kde m je hmotnost kuličky, ω úhlová frekvence, α úhel odklonění, g hodnota gravitačního zrychlení na povrchu Země a r vzdálenost kuličky od osy otáčení a platí $r = l \sin \alpha$, kde l je délka závěsu. Dosazením do rovnice získáváme

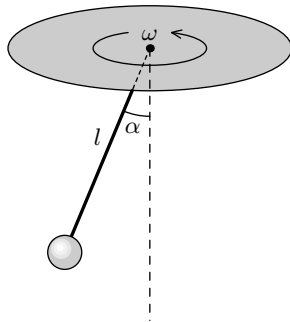
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 l \sin \alpha}{mg},$$

$$\sin \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\omega^2 l}{g} \right) = 0.$$

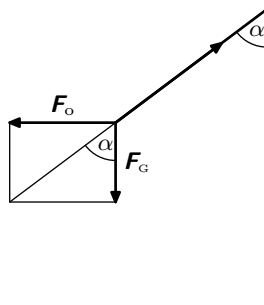
Tato rovnice má 2 řešení

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0, \\ \cos \alpha &= \frac{g}{\omega^2 l}. \end{aligned} \quad (32)$$

Výsledek z první rovnice $\alpha = 0$ znamená, že se kulička bude otáčet, ale zůstane na ose disku; toto řešení je labilní poloha kuličky. Druhé řešení po dosazení $\omega = 2\pi f$ vyjde číselně $\alpha \doteq 76^\circ$,



Obr. 15. Kolotoč



Obr. 16

což je stabilní poloha kuličky. Mnoho z vás spočítalo stabilní řešení správně, ale dělilo sinem a tím ztratilo druhé – labilní řešení.

Zamysleme se na závěr nad tím, kdy bude svislá poloha kuličky labilní. Kyvadélko vychýlíme od svislice o malý úhel α , kulička bude potom vracena zpět silou

$$F \approx mg\alpha - m\omega^2 l\alpha,$$

kde jsme využili $\sin \alpha \approx \alpha$ pro malé α . Aby byla svislá poloha kuličky labilní, musí být $F < 0$, tedy

$$g < \omega^2 l.$$

Pokud je tato podmínka splněna, má výraz (32) smysl, tudíž máme dvě rovnovážné polohy – stabilní (s výchylkou $\arccos g/\omega^2 l$) a svislá labilní. Tento případ nastal v našem případě, neboť

$$\frac{g}{\omega^2 l} \doteq 0,25 < 1.$$

Původně jsme chtěli příklad zadat tak, aby

$$\frac{g}{\omega^2 l} > 1.$$

Pak totiž existuje jediná rovnovážná poloha – svislá a je stabilní. Výraz (32) pro druhou rovnovážnou polohu nemá smysl.

Karel Tůma

kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.1 ... maššinka (4 body; průměr 2,11; řešilo 18 studentů)

Máme rotující desku, která se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem své osy a na níž nepůsobí žádné vnější momenty sil. Směrem do jejího středu jede lokomotiva o hmotnosti m po kolejkách připevněných k desce. Deska mění svou rychlost otáčení. Určete původ, velikost a směr momentu síly, který tuto změnu způsobí. Na zkoušce z Fyziky I dostal Honza Prachař.

O tom, že se bude úhlová rychlost otáčení desky zvyšovat, se můžeme přesvědčit ze zákona zachování momentu hybnosti. Součin $L = J\omega$ musí být konstantní, proto se při snížení celkového momentu setrvačnosti soustavy zvětší hodnota úhlové rychlosti. Zákon zachování energie nelze pro vysvětlení jevu použít. Maššinka totiž překonává odstředivou sílu a její motory konají práci. Označme rychlost mašinky z hlediska vnějšího pozorovatele \mathbf{v} a z hlediska pozorovatele v rotující soustavě \mathbf{v}' . Tyto rychlosti se liší o obvodovou rychlost.

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (33)$$

Zrychlení, které působí na maššinku, určíme jako časovou derivaci rychlosti \mathbf{v}' v čárkované (rotující) soustavě.

$$\mathbf{a}' = \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Za \mathbf{v}' v prvním členu dosadíme z (33) a upravíme

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Nyní dosadíme z (33) za \mathbf{v}' .

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'.$$

Protože $\boldsymbol{\omega}$ má směr osy otáčení a \mathbf{v}' směr opačný k \mathbf{r} , budou první dva sčítance tvořit normálové zrychlení a druhé dva tečné (můžete si to rozmyslet z vlastností vektorového součinu). Síla, která působí na mašššinku kolmo ke kolejím, má směr stejný jako otáčení desky a velikost

$$F_t = -m \frac{d\omega}{dt} r + 2m\omega v.$$

Mašššinka působí stejně velkou silou na desku, protože jede po kolejích. Moment, kterým působí na desku je roven derivaci momentu hybnosti desky L_d . Pro jejich velikosti platí

$$\begin{aligned} M &= F_t r = -m \frac{d\omega}{dt} r^2 + 2m\omega v r, \\ M &= \frac{dL_d}{dt} = J \frac{d\omega}{dt}, \end{aligned} \quad (34)$$

odtud

$$0 = -2m\omega v r + (J + mr^2) \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (J + mr^2) \omega = \frac{dL}{dt}.$$

Tato rovnice není nic jiného než zákon zachování momentu hybnosti. Z ní dostaneme

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2mvr\omega}{J + mr^2}.$$

Moment síly, který desku roztáčí, určíme dosazením do (34) za $d\omega/dt$, získáváme

$$M = \frac{J}{J + mr^2} \cdot 2mvr\omega.$$

Směr momentu síly je shodný se směrem vektoru $\boldsymbol{\omega}$.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.2 ... loď duchů (4 body; průměr 2,50; řešilo 10 studentů)

Loď duchů pluje proti proudu, jehož rychlost je u . Duchové jsou líní a slabí na přihazování uhlí do kotlů. Poradte jim, jaká má být rychlost lodi v vůči vodě, aby loď měla minimální spotřebu uhlí. Předpokládejte, že spotřeba paliva je úměrná vykonané práci na danou dráhu. Jak se výsledek změní, pokud místo lodního šroubu bude loď poháněna řetězem uloženým na dně řeky?
Naurhl Jirka Franta.

Zabývejme se nejprve případem, kdy loď duchů pluje na pohon lodního šroubu. Za čas t loď vůči břehu ujede dráhu $s = (v - u)t$. Podle zadání spotřebu paliva Q uvažujeme úměrnou vykonané práci na dráhu s . Práci spočítáme jako působící sílu krát dráhu, na které síla působí. V našem případě působící síla je tak velká, aby překonávala odpor vody, tj. $F = kv^2$, kde v konstantě k jsou zahrnuty všechny ostatní aspekty kromě rychlosti, jako tvar, velikost lodě a hustota vody. Tato síla působí po dráze, kterou loď za čas t ujede vůči vodě! Tedy $W = kv^2 \cdot vt$. Dosadíme-li za t z prvního vztahu a vydělíme práci uvažovanou dráhou s , dostáváme, že spotřeba paliva je úměrná funkci

$$Q \sim k \frac{v^3}{v - u}.$$

Zbývá tedy najít rychlost v tak, aby spotřeba byla nejmenší. To uděláme pomocí derivací nebo si nakreslíme funkci pro různé hodnoty rychlosti proudu u a polohu minima „vykoukáme“. Výsledkem je, že nejvýhodnější pro duchy je jet rychlostí

$$v = \frac{3}{2}u.$$

Co se změní v případě, že je loď poháněna řetězem uloženým na dně? Síla, kterou musí řetěz na loď působit je opět $F = kv^2$, touto silou se ovšem působí po dráze s , tj. té vůči břehu. Výsledkem je spotřeba paliva úměrná

$$Q \sim kv^2.$$

Tedy je pro duchy nejvýhodnější jet rychlostí těsně větší než je rychlost proudu.

Rozdíl obou případů je zřetelný, zamyslíme-li se, kolik paliva je potřeba na udržení lodě na místě vzhledem ke břehu. V případě pohonu lodním šroubem to rozhodně nebude nula, kdežto v případě řetězu na dně ano. Podobně např. nekonáme žádnou práci, držíme-li kufr ve vzduchu na místě.

Lenka Zdeborová

lenka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.3 ... slezští havíři reloaded (3 body; průměr 0,79; řešilo 19 studentů)

Havíři z úlohy z minulé série nažhavili opět své krumpáče a prokopali se skrz Zemi, tentokrát ne na Nový Zéland, ale do Tichého oceánu. Do vytvořeného tunelu začne téct voda. Rozhodněte, zda v Petřvaldě v dolu Fučík vystříkne voda do vzduchu. Svou odpověď dostatečně zdůvodněte.

Výmyslel Pavel Augustinský.

Úlohu snadno vyřešíme pomocí zákona zachování energie. V momentě, kdy hladina dosáhne petřvaldského konce štol, bude potenciální energie veškeré vody ve štole určitě menší než před vykopáním štol, kdy se všechna tato voda nacházela na povrchu planety. Sloupec vody uzavřený v tunelu tedy musí mít podle zákona zachování energie nenulovou rychlost, takže hladina vody se v tomto bodě určitě nezastaví, ale vytryskne do vzduchu obrovskou rychlostí (i bez jakýchkoliv výpočtů je patrné, že maximální výška, které takto vzniklý gejzír dosáhne, bude řádově srovnatelná s rozměrem Země)!

Někteří řešitelé se nechali zmást tím, že upustíme-li do naší šachty jeden předmět (například horníka), proletí tunelem a na jeho druhém konci se zastaví. V případě, že do tunelu začne téct voda, je však situace odlišná. Na objemový element vody, který již dosáhl bodu, kde by osamocený horník svou pouť k protinožcům završil, totiž ze spoda stále „tlačí“ voda, která tohoto bodu ještě nedosáhla.

Pavel Augustinský

pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.4 ... levitace na světle (4 body; průměr 2,29; řešilo 14 studentů)

Skleněná polokoule o poloměru $R = 10$ cm a indexu lomu n je umístěna v gravitačním poli Země rovnou plochu dolů. Úzkým laserovým paprskem svítíme ze spodu ve směru osy polokoule. Jaký musí být výkon laseru, aby polokoule levitovala. Šířka laserového paprsku je $d = 0,5$ mm a jeho vlnová délka je $\lambda = 660$ nm. Úloha ze 34. MFO na Taiwanu.

Nejdříve je nutné si uvědomit, co všechno se s laserovým paprskem bude dít. Na obou rozhraních dojde k částečnému odrazu a na kulovém rozhraní se bude paprsek lámat. Podle Snellova zákona platí (viz obr. 17)

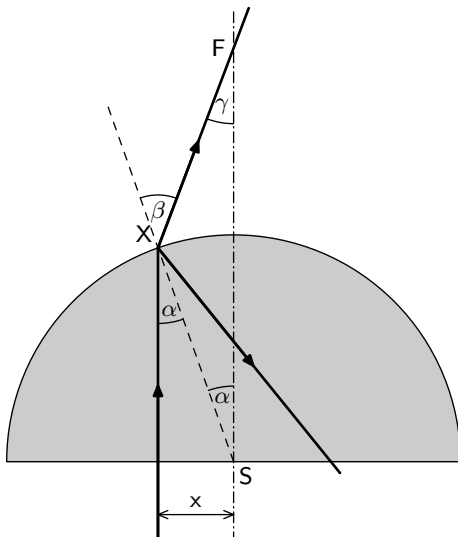
$$n \sin \alpha = \sin \beta.$$

Dle zadaných hodnot je $d/2R \ll 1$, s dostatečnou přesností tedy platí (zkuste ověřit, v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše) $\sin \alpha \approx \alpha$. Můžeme proto napsat

$$n\alpha = \beta.$$

Z trojúhelníku $\triangle FXS$ máme

$$\gamma = \beta - \alpha = (n - 1)\alpha. \quad (35)$$



Obr. 17

Frekvenci laserového světla označme $f = c/\lambda$ a N_0 bude počet fotonů laserového svazku, které dopadnou na jednotkovou plochu za jednotku času. Celkový počet fotonů, které dopadnou na spodní rovnou plochu skleněné polokoule za jednotku času, tedy je $N_0\pi d^2/4$. Celkový výkon těchto fotonů proto je

$$P = \frac{1}{4}N_0\pi d^2 hf,$$

kde h je Planckova konstanta, odtud

$$N_0 = \frac{4P}{\pi d^2 hf}.$$

Počet fotonů na jednotku plochy za jednotku času, které se odrazí od rovné plochy označme N'_0 , které projdou rovnou plochou a dopadnou na kulovou plochu N_1 , od ní se odrazí N'_1 a projde N_2 . Označíme-li propustnost skla τ a zanedbáme-li absorpci, která je u skla malá, potom platí

$$N'_0 = (1 - \tau)N_0, \quad N_1 = \tau N_0, \quad N'_1 = \tau(1 - \tau)N_0, \quad N_2 = \tau^2 N_0.$$

Další odrazy paprsku od kulové plochy zanedbáme.

Vyřešme nejprve odraz od rovné plochy. Hybnost jednoho fotonu je $p = hf/c$. Změna hybnosti všech odražených fotonů tedy bude

$$\Delta p = \frac{2hfN'_0}{c} \frac{\pi d^2}{4} \Delta t,$$

odkud pro sílu, kterou fotony na skleněnou polokouli působí, dostaneme

$$F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\pi h f d^2 N'_0}{2c} = \frac{2P(1-\tau)}{c}.$$

Dále se zamysleme nad paprsky, které se lámou na kulové ploše. Velikost hybnosti fotonu je před vstupem do polokoule a po výstupu z ní stejná, protože je stejná vlnová délka. Hybnost ale v důsledku lomu změní směr, proto se změní její průmět do osy symetrie (označme ho p_z). Ze zákona zachování hybnosti tudíž plyne, že rozdíl hybností byl předán skleněné polokouli.

Protože úhel odklonu paprsku závisí na vzálenosti od osy, budeme muset uvažovat infinitezimálně, paprsky si rozdělíme na tenká mezikruží. Počet fotonů, které projdou kruhovým mezikružím s vnitřím poloměrem r a vnějším poloměrem $r + dr$ za jednotku času, je $N_2 \cdot 2\pi r dr$. Změna z -ové složky hybnosti všech těchto fotonů tedy bude

$$\Delta(dp_z) = \frac{hfN_2}{c} \cdot 2\pi r dr(1 - \cos \gamma)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$dF_2 = \frac{\Delta(dp_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN_2}{c} \cdot (1 - \cos \gamma)r dr. \quad (36)$$

Znovu využijeme toho, že úhel α je malý (v Taylorově rozvoji zanedbáme členy řádu tři a výše), a vztahu (35) dostaneme

$$\cos \gamma \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2} = 1 - \frac{(n-1)^2 \alpha^2}{2}.$$

Dále platí

$$r = R \sin \alpha \approx R\alpha.$$

Dosazením do (36) obdržíme

$$dF_2 = \frac{\pi hfN_2}{c} \cdot \frac{(n-1)^2 r^3}{R^2} dr,$$

celková síla je

$$F_2 = \frac{\pi hfN_2}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n-1)^2 r^3}{R^2} dr = \frac{\pi hf(n-1)^2 d^4 N_2}{64cR^2} = \frac{P(n-1)^2 d^2 \tau^2}{16cR^2}.$$

Analogicky budeme postupovat pro paprsek odražený od kulové sféry. Změna z -ové složky hybnosti všech odražených fotonů bude

$$\Delta(dp_z) = \frac{hfN'_1}{c} \cdot 2\pi r dr(1 + \cos 2\alpha)\Delta t,$$

tomu odpovídající síla je

$$dF_1 = \frac{\Delta(dp_z)}{\Delta t} = \frac{2\pi hfN'_1}{c} \cdot (1 + \cos 2\alpha)r dr. \quad (37)$$

Opět využijeme toho, že úhel α je malý, a dostaneme

$$\cos 2\alpha \approx 1 - \frac{(2\alpha)^2}{2} = 1 - 2\frac{r^2}{R^2}.$$

Vztah (36) má potom tvar

$$dF_1 = \frac{4\pi hf N'_1}{c} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr,$$

celková síla je

$$F_1 = \frac{4\pi hf N'_1}{c} \int_0^{\frac{d}{2}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr = \frac{\pi hf d^2 N'_1}{2c} \left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right) = \frac{2P\tau(1-\tau)}{c} \left(1 - \frac{d^2}{8R^2}\right). \quad (38)$$

Nyní už jsme schopni určit výslednou sílu, která „nadnáší“ skleněnou polokouli

$$F = F_0 + F_1 + F_2 = \frac{P}{c} \left(2(1-\tau^2) + \frac{d^2\tau}{4R^2} \left(\frac{(n-1)^2\tau}{4} - (1-\tau)\right)\right).$$

Z Fresnelových rovnic můžeme pro propustnost dostat

$$\tau = nn' \left(\frac{2}{n+n'}\right)^2,$$

kde n je index lomu prostředí, ze kterého paprsek vystupuje, a n' je index lomu prostředí, do kterého paprsek vstupuje. V našem případě tedy platí

$$\tau = n \left(\frac{2}{1+n}\right)^2,$$

dosazením do (38) po úpravě obdržíme

$$F = \frac{P}{c(n+1)^4} \left(2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2} n(n-1)^3\right).$$

Tuto sílu porovnáme s tíhovou a pro hledaný výkon laseru dostaneme

$$P = \frac{mgc(n+1)^4}{2(n+1)^4 - 32n^2 + \frac{d^2}{R^2} n(n-1)^3} \doteq 1,8 \cdot 10^{11} \text{ W} = 180 \text{ GW},$$

kde $m = 2\pi\varrho R^3/3$ je hmotnost skleněné polokoule. Vidíme, že potřebujeme obrovský výkon. I malá absorbce skla způsobí, že se polokoule v mžiku vypaří. Hodnoty d a R byly zadané tak, že jsme mohli zanedbávat i člen d^2/R^2 .

Poznámky k došlým řešením. Jedna skupina řešitelů diskutovala pouze lom světla na kulové ploše, druhá skupina zase naopak předpokládala, že bude všechno světlo pohlceno nebo odraženo. Protože se jiná řešení prakticky nevyskytla, nevyřešil úlohu nikdo zcela správně.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V. P ... zpomalující Měsíc (5 bodů; průměr 1,28; řešilo 18 studentů)

Přesnými měřeními je dokázáno, že rychlost oběhu Měsíce kolem Země klesá a jeho vzdálenost od Země se zvětšuje. Zamyslete se nad tím, jaká síla to způsobuje.

Během debaty o měsících Merkuru navrhl Honza Houštěk.

Důvod zpomalování měsíce jsou slapové jevy na Zemi. Při slapových jevech dochází k přesunu velkých mas vody, přičemž tření při těchto přesunech ubírá energii. No a tuto energii ztrácí Země ze své rotační energie, a tím se zpomaluje oběh Země okolo vlastní osy. Aby jsme zjistili, jaký to má vliv na Měsíc, tak použijeme zákon zachování momentu hybnosti. Pro Měsíc obíhající okolo Země po kruhové dráze platí

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\varkappa M}{r^2},$$

kde M je hmotnost Země. Pro rychlost dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}.$$

Jelikož se Zem zpomalila, tak její moment hybnosti klesl, tím pádem musel stoupnout moment hybnosti Měsíce. (Měsíc rotuje ve stejném směru, jako je směr rotace Země.) No a jelikož moment hybnosti Měsíce je

$$J = mvr = m\sqrt{\varkappa Mr}$$

jeho zvýšení odpovídá zvýšení poloměru a tedy také snížení rychlosti.

Tím bychom odhalili slapové jevy jako zodpovědné za zpomalování a vzdalování, takže nám zbývá už jen vyšetřit problém z pohledu sil. Tedy najít sílu, která způsobuje ono snížení hybnosti takto na dálku. Slapové síly způsobí vzduť oceánů směrem k Měsíci. Třecí síly však toto vyduť chtějí rotovat ve směru rotace Země. Rovnovážná poloha vyduť potom bude vychýlená ze spojnice Země a Měsíce. Tím se vychýlí i celé těžiště Země, přitažlivá síla Měsíc–Zem získá i složku, která není na spojnici Měsíce s bodem, okolo kterého rotuje (těžiště soustavy Země–Měsíc), a která urychluje Měsíc. Jenže toto urychlení posune Měsíc na vyšší oběžnou dráhu (protože není kompenzované odstředivou silou) až na rovnovážnou dráhu. A jak jsme vypočítali, s vyšším poloměrem je rychlost na kruhové orbitě nižší. Tím jsme vysvětlili mechanismus, jakým se realizuje zákon zachování momentu hybnosti v daném případě.

Miro Kladiwa

miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. 1 ... třesk (4 body; průměr 0,86; řešilo 21 studentů)

Střílíme střelou s počáteční rychlostí v_0 z výšky h nad povrchem Země na kovovou stěnu ve vzdálenosti L . Pod jakým úhlem α (viz obr. 18) máme střílet, abychom co nejdříve slyšeli náraz?

Úloha z archivu (6. ročník, 2. série).

Nejprve vypočítáme čas, za který doletí zvuk z výšky H na desce k pozorovateli vzdálenému L od desky. Uvažujme, že se ve stěně jde zvuk z výšky H do výšky y a potom putuje vzduchem vzdálenost $s = \sqrt{L^2 + y^2}$. Doba, za jak dlouho to zvládne, je

$$t_z = \frac{(H - y)}{c_1} + \frac{\sqrt{L^2 + y^2}}{c_0},$$

kde c_0 je rychlost zvuku ve vzduchu a c_1 je rychlost zvuku ve stěně. Musíme ještě zjistit pro jaké y je tato doba nejmenší

$$\frac{dt_z}{dy} = -\frac{1}{c_1} + \frac{y}{c_0 \sqrt{L^2 + y^2}} = 0.$$

Takže řešení je $y = (c_0/c_1)s$, což po úpravách dává

$$\sqrt{s} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_0}{c_1}\right)^2}} L.$$

z čehož je vidět, že s závisí jen na L , a nezávisí na H .

Čas, za který dojde k pozorovateli první zvuk, je

$$t_z = \frac{1}{c_1} H + \left(1 - \frac{c_0^2}{c_1^2}\right) \frac{s}{c_0}.$$

Jelikož chceme najít úhel, pro který bude čas minimální, a na úhlu závisí jen H a ne s , tak stačí uvažovat $t_z = (H/c_1) + t_0$, kde t_0 by byla v případě zadaných rychlostí a vzdáleností desky pouze nějaká konstanta.

Ještě musíme vyřešit dobu, za kterou dopadne střela na desku. Tento proces budeme brát jako šikmý vrh. Při počáteční rychlosti v_0 a úhlu α bude doba doletu $t_s = L/(v_0 \cos \alpha)$, přičemž střela doletí do výšky

$$H = L \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2} \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Tady si ještě musíme uvědomit, že nás bude zajímat hloubka a ne výška doletu, neboť v případě výšky bychom museli dát střele větší vertikální rychlost na úkor horizontální oproti případu se stejnou hloubkou, a doba, za jakou zvuk dojde k pozorovateli, nezávisí na tom, jestli to je hloubka nebo výška.

Takže musíme brát předcházející vztah s opačným znaménkem. Teď jsme již schopni určit celkový čas $t = t_z + t_s$, který chceme minimalizovat v závislosti na úhlu α . To provedeme zderivováním podle tohoto úhlu a položením derivace rovné nule

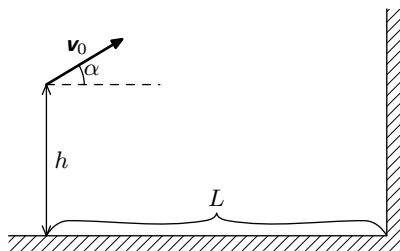
$$\frac{dt}{d\alpha} = \frac{L \sin \alpha}{v_0 \cos^2 \alpha} - \frac{L}{c_1 \cos^2 \alpha} + \frac{L^2 g \sin \alpha}{v_0^2 c_1 \cos^3 \alpha} = 0.$$

To sa dá přepsat na rovnici

$$-v_0^2 \cos \alpha + Lg \sin \alpha + c_1 v_0 \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Tato rovnice se už nedá jednoduše řešit, proto se spokojíme s takovýmto výsledkem. Ještě pro zajímavost, když uvažujeme rychlost střely o hodně nižší než rychlost zvuku ve stěně (což je dost rozumný předpoklad), tak nám budou vycházet malé úhly. Takže můžeme udělat přiblížení $\alpha \ll 1$ a potom jsme schopni tuto rovnici vyřešit jako

$$\alpha = \frac{v_0^2}{Lg + v_0 c_1}.$$



Obr. 18. Střelnice

Úloha VI.2 ... meotar (4 body; průměr 1,17; řešilo 6 studentů)

Možná jste si všimli, že pod plochou zpětného projektoru (meotar) je skleněná deska se soustřednými kruhovými vrypy pracující jako čočka. Rozhodněte, jak se změní poloha obrazu, tedy jestli se posune směrem k meotaru nebo od meotaru, pokud tuto čočku odebereme. Jako bonus můžete vymyslet, na jakém principu skleněná deska s vrypy funguje.

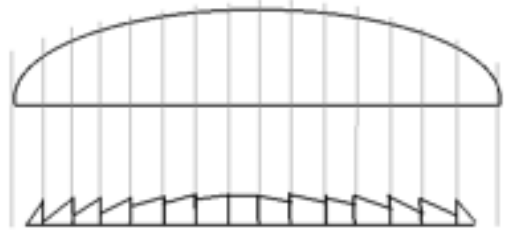
Vymyslel Pavel Augustinský na přednášce QFT.

Nejprve si musíme uvědomit následující elementární fakt: Bod A se zobrazí pomocí nějaké optické soustavy do bodu B, pokud se všechny paprsky, které vycházejí z bodu A a projdou touto optickou soustavou protnou v bodě B (například pokud je na zobrazované fólii jeden červený puntík, musí všechny paprsky červeného světla dopadnout do stejného bodu projekční plátna).

K zodpovězení první otázky si stačí uvědomit pouze to, že dráhu libovolného paprsku, který vychází z nějakého bodu promítané fólie a dopadá na projekční plátno, mohou ovlivnit pouze ty optické prvky (čočky, zrcadla, ...), které mu „stojí v cestě“. A protože diskutovaná čočka leží mezi fólií a zdrojem světla, nemůže nijak ovlivnit polohu, velikost ani orientaci obrazu. Úkolem této čočky je pouze zvýšení jasu obrazu.

Princip funkce této čočky je úplně stejný jako u čočky obyčejné. Čočka v meotaru je však „splácnutá“ tak, jak je naznačeno na obrázku 19. To ale příliš nevádí, protože u tenké čočky není podstatné množství skla mezi rozhraními sklo-vzduch.

Mnoho řešitelů chybně označilo tuto čočku za čočku Fresnelovu, přestože správně pochopili princip její funkce. Dodejme tedy pro objasnění, že Fresnelova čočka soustřeďuje na ní dopadající světlo díky jevu *difrakce* a nikoliv lomu. Tato čočka pracuje správně pouze ve velmi úzkém intervalu vlnových délek (rozhodně ne pro bílé světlo) a navíc musí být vzdálenost vrypů na této čočce řádově srovnatelná s vlnovou délkou dopadajícího světla.



Obr. 19. Čočka v meotaru

Pavel Augustinský
pavel@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.3 ... padající komín (5 bodů; průměr 1,33; řešilo 6 studentů)

Silný vítr dul do stěn komínu. Přitom vychýlil komín ze svislé polohy. Komín začal padat a v určitém místě se rozlomil. Pokuste se určit, kde ke zlomu došlo.

Životní zkušenost Jardy Trnky, kdysi jim spadl komín.

Aproximujeme si komín tenkou tyčkou, aby bylo možné úlohu rozumně vyřešit. Označme L délku komínu a m jeho hmotnost. Pokud komín vychýlíme z rovnovážné polohy, začne padat. Úhlové zrychlení ε v závislosti na úhlu φ , který svírá komín s vodorovnou podložkou, vypočteme z 2. impulzové věty $M = J\varepsilon$, kde $M = Fr = mg \cos \varphi L/2$. Pro moment setrvačnosti vůči bodu otáčení platí $J = mL^2/3$. Po dosažení dostaneme

$$\frac{1}{3}mL^2\varepsilon = \frac{mgL \cos \varphi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{3g \cos \varphi}{2L}.$$

Označme x vzdálenost nějakého bodu od vrcholu komína. Tento bod si můžeme představit jako střed otáčení té části komína, která je nad ním. Potom z druhé impulzové věty dostaneme $M_1 = J_1 \varepsilon_1$. Pro moment síly M_1 bude platit

$$M_1 = F_1 r_1 = m_1 g \cos \varphi \frac{x}{2} = \frac{mgx^2 \cos \varphi}{2L},$$

kde $m_1 = mx/L$ je hmotnost té části komína nad bodem x . Moment setrvačnosti bude analogicky

$$J_1 = \frac{1}{3} m_1 x^2 = \frac{mx^3}{3L}.$$

Po dosazení dostaneme pro zrychlení ε_1

$$\varepsilon_1 = \frac{M_1}{J_1} = \frac{3g \cos \varphi}{2x}.$$

Tímto zrychlením by se část komína od bodu x nahoru měla otáčet, ale nemůže, protože jí v tom brání pevnost materiálu.

Co to tedy znamená? V bodě x působí moment síly $M_1 = J_1 \varepsilon_1$, ale na otáčení se uplatní pouze moment $M_2 = J_1 \varepsilon$ (z druhé impulzové věty – komín se celý otáčí s úhlovým zrychlením ε). Rozdíl těchto momentů je

$$M' = M_1 - M_2 = J_1(\varepsilon_1 - \varepsilon) = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(x^2 - \frac{x^3}{L} \right).$$

To je tedy moment, který se v bodě x ztrácí do deformací komína. No a kde jinde by měl komín rupnout než v bodě, kde bude tento moment největší. Pro bod maxima funkce $M' = M'(x)$ platí

$$\frac{dM'}{dx} = \frac{mg \cos \varphi}{2L} \left(2x - \frac{3x^2}{L} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Dostáváme dvě řešení: $x = 0$, což je minimum, a $x = 2L/3$, což je hledané maximum. Vzdálenost bodu zlomu od paty komína je potom $L/3$.

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI.4 ... **potopa na Utodu** (4 body; průměr 3,00; řešili 4 studenti)

Planeta Utod o hustotě ρ je pokryta mořem z kapaliny hustoty ρ' . Výška hladiny je h , poloměr planety R . Vyšetřete stabilitu planety.

Volné pokračování slezských havířů od Pavla Augustinského.

Před vlastním výpočtem nejprve trochu okomentujme zadání. Celý systém planeta–oceán si z pochopitelných důvodů idealizujeme tak, že planeta je dokonale tuhá se sféricky symetricky rozloženou hmotou. Vnější gravitační projevy takového tělesa se nikterak neliší od dokonale tuhé homogenní koule o stejné hmotnosti, proto budeme homogenitu nadále předpokládat. Kapalina tvořící oceán nechť je taktéž ideální, tj. neviskózní a nestlačitelná. Hustotu (homogenizovanou) planety budeme značit ρ , hustotu kapaliny ρ_0 .

Konfigurace hmoty, kdy je planeta obalena konstantně tlustou vrstvou kapaliny, je zcela jistě rovnovážnou polohou (hladina kapaliny splývá s ekvipotenciálou výsledného gravitačního

pole). V tomto řešení se budeme zabývat tím, zda a za jakých podmínek je tato konfigurace stabilní.

Co je myšleno stabilní konfigurací? Analogie toho, co znáte z mechaniky soustav tuhých těles; stabilní konfigurace je taková, u které malé fluktuace nezpůsobí nenávratnou změnu stavu systému.

Nabízí se otázka, zda vůbec může být popsán systém nestabilní. Poměrně snadno to lze nahlédnout, zamyslíme-li se nad dvěma extrémními případy. V tom prvním předpokládejme, že planeta má zanedbatelnou hmotnost a oceán tvoří v porovnání s poloměrem tenkou vrstvu. Není těžké si rozmyslet, že kapalina se v takové situaci vlastní gravitací koncentruje v jednom místě. Ještě lépe je nestabilní chování vidět v případě, kdy je planeta zanedbatelně malá vzhledem k hloubce „oceánu“. Pak můžeme gravitační pole planety zanedbat a představit si ji jen jako kuličku plavající v kapalně planetě. Je-li její hustota nižší než hustota kapaliny, bude dle Archimédova zákona nadnášena k povrchu; rovnovážná poloha ve středu kapalně koule je zjevně labilní.

Předchozí úvaha napovídá, že nestabilita nějak souvisí s poměrem hustot planety a kapaliny a nabízí se hypotéza, že oceán je nestabilní, právě když je jeho hustota vyšší než střední hustota planety. Ověřme to tedy výpočtem.

Využijeme toho, že ve stabilní rovnovážné poloze vede libovolná malá změna konfigurace ke zvýšení celkové energie (a naopak, lze-li nějakou spojitou změnou celkovou energii snížit, nejedná se o stabilní polohu). Změna, která nás bude zajímat, bude vychýlení planety ze středu kapalně koule při zachování kulového tvaru kapaliny. Výslednou změnu energie snadno popíšeme, představíme-li si planetu jako těleso o hustotě $\rho - \rho_0$, které prolíná kapalinou a nijak s ní neinteraguje² (kapalinu i těleso si lze představit např. jako náhodně rozmístěné hmotné body).

Pole kapalně koule lze snadno popsat, výpočtem lze ověřit, že intenzita závisí přímo úměrně na vzdálenosti od centra. Nyní je již jasné, že znaménko změny energie při vychýlení planety ze středu kapalně koule závisí jen na znaménku $\rho - \rho_0$ konfigurace s planetou ve středu je stabilní, právě když je hustota planety větší než hustota kapaliny.

Jak vypadá stabilní konfigurace v opačném případě není těžké si představit. Planeta „plave“ na hladině kapalněho tělesa, ovšem tvar tohoto tělesa i jejich vzájemná poloha závisí na poměru hustot a hmotností a pravděpodobně je nelze analyticky vyjádřit

Honza Houšťek
honza@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. P ... Faradayova klec (5 bodů; průměr 2,00; řešili 4 studenti)

Pokuste se určit největší možnou intenzitu elektrostatického pole, kterou ještě dokáže zastínit Faradayova klec.

Zmíněno na přednášce z Fyziky II.

K této úloze jste si našli několik různých způsobů přístupu (jak se ostatně u problémové úlohy dá očekávat). Popíšeme nejčastější dva.

Definující vlastností ideálního vodiče je konstantní potenciál na celém povrchu bez ohledu na vnější pole. V důsledku jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice je potenciál uvnitř uzavřené oblasti, na které je potenciál konstantní, roven téže konstantě a tedy je pole v celém objemu uvnitř vodiče nulové.

²⁾ Na čtenáři necháváme ověření, že taková abstrakce je legitimní. Rozmyslete si zejména, jak to souvisí s Archimédovým zákonem.

Klec ovšem není ideální vodič, prvním aspektem, na který jste poukázali, je konečná hodnota náboje a tedy i konečné napětí, které může být jeho rozmístěním kompenzováno. To je pravda, ovšem ilustrační výpočet³ energie na vzdálení všech elektronů z gramu pevné látky o makroskopickou vzdálenost od jejich původních atomů ukazuje, že síla takto vzniklého pole o mnoho řádů převyšuje intenzitu jakkoliv silného externího pole, kterému by reálně klec mohla čelit. Tato limitace reálného vodiče proti ideálnímu je tedy snadno zanedbatelná.

Druhým rozdílem je fakt, že klecí nemyslíme uzavřenou plochu, ale pouze jakousi mříž tvořenou vodičem. Na samotném vodiči je potenciál konstantní, ale řešení Laplaceovy rovnice není v tomto případě jednoznačně určeno a vnější pole dírami dovnitř klece určité částečně zasahuje. Pokusme toto kvantifikovat.

Pro jednoduchost si představme pravidelnou rovinnou čtvercovou mříž se vzdáleností uzlů a umístěnou v rovině xy a nulový potenciál volme na mříži. Situaci dále zjednodušíme tím, že budeme hledat separovatelné řešení pro potenciál $V(x, y, z) = V_x(x)V_y(y)V_z(z)$. Vzhledem k periodické okrajové podmínce je intuitivně jasné, že funkce V_x, V_y se vyplatí hledat mezi goniometrickými funkcemi, pomocí těchto řešení lze sestavit libovolné jiné. Hledejme tedy potenciál ve tvaru

$$V(x, y, z) = V_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) V_z(z),$$

kde m, n jsou přirozená čísla (udávající počet půlperiod funkcí V_x, V_y na vzdálenosti a). Dosazením do Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0$ dostáváme pro $V_z(z)$

$$V_z(z) = V_0 \exp\left(\pm \frac{\pi\sqrt{m^2 + n^2}}{a} \cdot z\right).$$

Průběh potenciálu má tedy v ose z exponenciální průběh. Naše řešení pochopitelně funguje jen lokálně, a v blízkosti mříže (kdy lze považovat aproximaci nekonečnou rovinou a oprávněnou). Globální pohled na celou uzavřenou mříž ukazuje, že je třeba vybrat ta řešení, ve kterých je potenciál tlumen ve směru dovnitř klece. Také je vidět, že síla tlumení roste s m, n , pro náš odhad, jak silné pole může do klece proniknout tedy použijeme hodnoty $m = n = 1$. Je-li v takové situaci do středu nějakého čtverce mříže přiveden potenciál V_0 , je ve vzdálenosti a směrem do středu klece utlumen koeficientem $\exp(-\pi\sqrt{2}) = 0,012$ a nadále exponenciálně klesá.

Klec tedy efektivně odstíní vnější pole, které dovnitř proniká, na vzdálenosti srovnatelné s gridem mřížky.

Honza Houšťek
honza@fykos.mff.cuni.cz

³) který si laskavý čtenář snadno provede



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... absolutní nula (8 bodů; průměr 4,03; řešilo 40 studentů)

S experimentálním vybavením dostupným v době Lorda Celsia změřte teplotu absolutní nuly (v Celsiově stupnici). Poradíme vám, že pro měření můžete využít například vlastností ideálního plynu.

Vymyslel Pavel Augustinský.

Ke změření absolutní nuly využijeme vlastností ideálního plynu. Budeme měřit jeho stavové veličiny při nějakém ději. Tato metoda je relativně málo náročná a vystačíme si se stejnými prostředky, které byly dostupné Lordu Celsiovi.

Teorie

Pokusme se pojmout teorii ve stylu Lorda Celsia. V době Lorda Celsia ještě nebyla žádná teorie pro ideální plyn, proto by například měřil, jak se mění objem plynu při stálém tlaku v závislosti na jeho teplotě. Pokud by byl dostatečně pečlivý, a to on jistě byl, vyšla by mu závislost lineární, jejímž grafem je přímka. Když by tuto přímku prodloužil, tak by v nějaké teplotě protнула nulu na teplotní ose. Při této teplotě by musel mít plyn nulový objem, což je zjevně nemožné. Obdobně by jistě postupoval i s jinými plyny, a ač by sklon této přímky byl jiný, překvapivě by mu vyšlo totéž, přímka by protínala teplotní osu stále ve stejném bodě. Z toho by usoudil, že onen bod bude *absolutní fyzikální nula*.

Úvaha Lorda Celsia je správná, neboť podle stavové rovnice pro ideální plyn platí

$$pV = nRT.$$

Lord Celsius udržoval konstantní tlak plynu v uzavřené soustavě. Potom můžeme napsat

$$V = \frac{nR}{p} \cdot T, \quad \text{tedy} \quad V = C(t - t_0) = Ct - Ct_0, \quad (39)$$

kde C je konstanta, t je teplota v Celsiově stupnici a t_0 teplota absolutní nuly v Celsiově stupnici. Graf závislosti $V = f(T)$ protíná osu x v 0 K , proto graf $V = f(t)$ protne osu x právě v hodnotě teploty absolutní nula. Z (39) víme, že závislost $V = f(t)$ je lineární, neboli

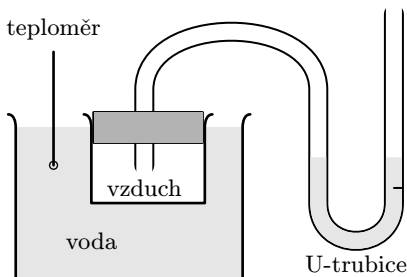
$$V = at + b.$$

Z našich naměřených hodnot určíme koeficienty a a b . Porovnáním s (39) dostáváme

$$t_0 = -\frac{b}{a}.$$

Postup měření

Jako plyn použijeme vzduch, který se vlastnostmi blíží ideálnímu plynu. Plyn jsme uzavřeli do skleněné nádoby. Nádobu jsme zajistili korkovou zátkou s otvorem, kterým vychází trubička spojená s U-trubicí (viz nákres na obrázku 20). Pokud není dostupná přímo U-trubice, dá se použít i něco jiného, co funguje stejně. Zátku jsme zakapali voskem pro zlepšení utěsnění. Celá nádoba je ponořena do vodní lázně, kterou zahříváme a jejíž teplotu měříme. Abychom nádobu udrželi pod vodou, bylo nutné ji zatížit, horní strana byla těsně pod hladinou. V U-trubici je voda. Protože chceme v nádobě udržet konstantní tlak, musí být výška vody v obou ramenech U-trubice stejná. Na U-trubici jsme si dále vyznačili rysku, od které jsme měřili výšku hladiny v ramenech.



Obr. 20. Použitá aparatura

Objem nádoby a objem trubice až po rysku označme V_0 , vnitřní průměr trubice je d . Je-li voda ve výšce h , je objem plynu

$$V = V_0 - \frac{1}{4}\pi d^2 h. \quad (40)$$

Vodní lázeň jsme zahřáli a do U-trubice nalili co nejméně vody (hladina je těsně nad ryskou). Systém jsme nechali ustálit, aby se zahřál i plyn v nádobě. Nyní jsme nechali vodní lázeň a s ní i plyn v nádobě chladnout. Vodu jsme promíchávali, aby v ní nevznikaly rozdíly teplot. Chladnutí probíhalo pomalu, aby se stihla ustavit teplotní rovnováha mezi vzduchem a vodou. V nádobě bylo třeba neustále udržovat konstantní tlak, což jsme realizovali dokapáváním vody do otevřeného konce U-trubice. To mělo výhodu, tlak v nádobě byl stejný jako atmosférický, tudíž žádný plyn neunikal ani žádná voda nevnikala do nádoby případnými netěsnostmi. Jak teplota vzduchu klesala, zaznamenávali jsme pro určité teploty výšku h vodní hladiny v U-trubici.

Měření

Objem V_0 jsme určili pomocí injekční stříkačky $V_0 = (136 \pm 3)$ ml. Vnitřní průměr trubičky jsme změřili posuvným měřítkem $d = (6,0 \pm 0,2)$ mm. Naměřili jsme několik hodnot $[t, h]$, z h jsme poté vypočetli V . Pro lepší přesnost výsledku by mělo být rozmezí měřených teplot co největší a počet naměřených bodů $[t, h]$ také co největší. Dále budeme určovat chybu V , kterou počítáme podle vztahu (40). Na chybu ΔV_0 na chvíli zapomeneme, protože má při všech měřeních stejnou hodnotu. Relativní chyby d a h jsou

$$\delta d = \frac{\Delta d}{d} = \frac{0,2}{6} = 0,033 \quad \text{a} \quad \delta h = \frac{\Delta h}{h} = \frac{5 \text{ mm}}{h}.$$

Chybu Δh jsme se snažili odhadnout tak, aby v ní byla zahrnuta chyba měření teploty i výšky hladiny a chyba systematická. Hodnota δh je tedy pro každé měření jiná. S využitím (40) a obecného vztahu pro výpočet chyby veličiny, pokud ji počítáme z jiných veličin měřených s chybou,

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h + \frac{\partial V}{\partial d} \Delta d,$$

dostáváme

$$\Delta V = \frac{1}{4} \pi d^2 h (2\delta d + \delta h) = \frac{1}{4} \pi d^2 \Delta h + \frac{1}{2} \pi d h \Delta d.$$

Vidíme, že k chybě ΔV nejvíce přispívá Δd , zvláště pro větší hodnoty h , proto jsme průměr d měřili posuvným měřítkem. Hodnoty h , V a ΔV pro 17 měřených teplot jsou v následující tabulce.

$t[^\circ\text{C}]$	36	35	34	33	32	31	30	29,5	29
$h[\text{mm}]$	7	19	38	52	67	86	101	110	115
$V[\text{ml}]$	135,8	135,5	134,9	134,5	134,1	133,6	133,1	132,9	132,7
$\Delta V[\text{ml}]$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4

$t[^\circ\text{C}]$	28,5	28	27,5	27	26,5	26	25,5	25	
$h[\text{mm}]$	120	131	140	149	152	162	169	180	
$V[\text{ml}]$	132,6	132,3	132,0	131,8	131,7	131,4	131,2	130,9	
$\Delta V[\text{ml}]$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	

Hodnoty $[t, V]$ vyneseme do grafu, chyby ΔV vyznačíme chybovými úsečkami. Naměřené hodnoty jsou označeny křížkem. Těmito body proložíme přímkou, protože podle teorie předpokládáme závislost $V = at + b$. To můžeme provést od ruky nebo nám křivku může spočítat počítač. V grafu je regresní přímka vyznačena tučně. Dále si vyznačíme, jak může tato přímka vypadat v krajních případech (v grafu jsou čárkovaně), k tomu využijeme chybové úsečky. Z našeho grafu odečteme a a b pro regresní přímku a $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ pro mezní případy.

$$a = 0,443 \text{ ml} \cdot \text{K}^{-1}, \quad b = 120 \text{ ml},$$

$$a_1 = 0,38 \text{ ml} \cdot \text{K}^{-1}, \quad b_1 = 122 \text{ ml},$$

$$a_2 = 0,48 \text{ ml} \cdot \text{K}^{-1}, \quad b_2 = 118 \text{ ml}.$$

Odtud máme

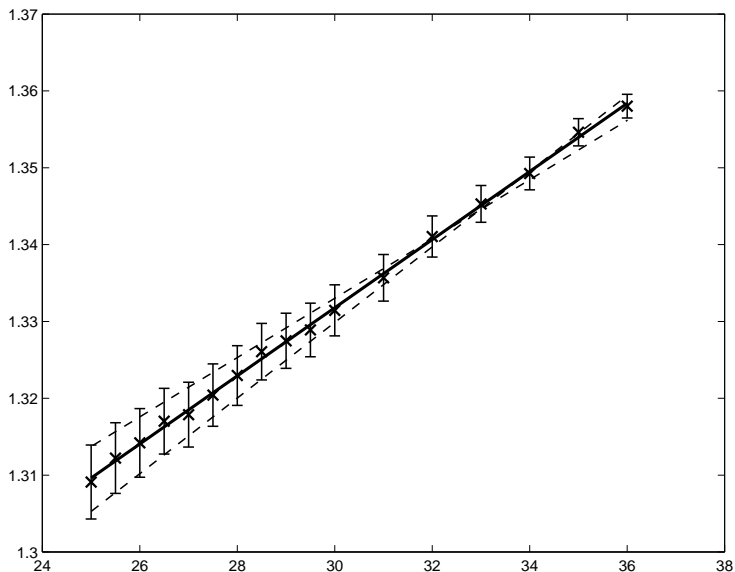
$$a = (0,44 \pm 0,06) \text{ ml} \cdot \text{K}^{-1}, \quad b = (120 \pm 2) \text{ ml}.$$

Nesmíme ale zapomenout na chybu ΔV_0 , která ovlivňuje polohu naměřených hodnot v grafu ve svislém směru. Chyba ΔV_0 tedy přispívá k chybě b . Celkově dostáváme

$$b = (120 \pm 5) \text{ ml}.$$

Relativní chyby a a b jsou

$$\delta a = \frac{0,06}{0,44} = 0,14 \quad \text{a} \quad \delta b = \frac{5}{120} = 0,042.$$



Obr. 21

Pro teplotu absolutní teploty v Celsiově stupnici jsme si odvodili $t_0 = -b/a$,

$$t_0 = -272,7^\circ\text{C}, \quad \delta t_0 = \delta a + \delta b = 0,18 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = 48^\circ\text{C}.$$

Naše naměřená hodnota absolutní nuly je $t_0 = (-270 \pm 50)^\circ\text{C}$.

Závěr

Chyba výsledku vyšla dost velká. To je dáno tím, že jsme závislost $V = f(t)$ proměřovali pro teploty hodně vzdálené od absolutní nuly. Jen náhodou jsme se „trefili“ tak blízko skutečné hodnoty.

Všechny chyby měření jsme zmínili již dříve, jedná se o chybu měření h , d , V_0 a teploty. K těmto chybám přistupují chyby systematické. Vzduch v trubici mimo nádobu má nižší teplotu než vzduch v nádobě. Měříme teplotu vody, vzduch může mít teplotu jinou, pokud není zcela ustavena rovnováha. Z nádoby může unikat vzduch a do vzduchu v nádobě se může vypařovat voda. Vzduch není ideální plyn.

Poznámky k řešení

Všichni řešitelé se zabývali ději plynů v uzavřené soustavě a s využitím jejich vlastností určili absolutní nulu. Byly tři možnosti provedení měření: udržovat konstantní tlak (takto jsme postupovali my, $V \sim T$), udržovat konstantní objem (musíme znát hodnotu atmosférického tlaku, $p \sim T$) a nebo měřit, jak se mění tlak a objem plynu při změnách teploty ($pV \sim T$).

Jiný způsob byl měřit rychlost zvuku ve vzduchu, pro kterou platí $v = \sqrt{K/\rho}$, kde K je modul objemové pružnosti vzduchu. Ze stavové rovnice pro hustotu máme $\rho = pM/RT$ (M je

molární hmotnost vzduchu). Celkově tedy pro rychlost zvuku platí

$$v = \sqrt{\frac{KR}{pM} T}.$$

Závislost $v = f(T)$ jsme mohli obdobně jako při ději ideálního plynu pro několik teplot proměřit.

Naprostá většina řešitelů naměřila hodnotu absolutní nuly v rozmezí 50°C od skutečné hodnoty. Bohužel jen málokdo se pokusil určit chybu svého výsledku a jediná *Jana Matějová* ji měla správně vypočtenou. Ostatní napsali většinou něco jako $t_0 = (-273 \pm 3)^\circ\text{C}$ nebo odchylku od skutečné hodnoty.

Na závěr bych chtěl uvést na pravou míru to, v čem udělalo několik řešitelů chybu. Nechť plyn v uzavřené soustavě přejde izobaricky z jednoho stavu do druhého, pro tyto stavy si napíšeme stavové rovnice

$$pV_0 = nRT_0, \quad pV = nRT.$$

Označíme $\Delta T = T - T_0$, nR/p je konstanta. Pak po odečtení obou rovnic dostaneme

$$V = V_0 + \frac{nR}{p} \Delta T = V_0 \left(1 + \frac{nR}{pV_0} \Delta T \right) = V_0 \left(1 + \frac{1}{T_0} \Delta T \right).$$

Pokud bude původní stav plynu při 0°C , pak V_0 bude objem při 0°C , $\Delta T = t$ a T_0 teplota 0°C v Kelvinově stupnici, tedy velikost teploty absolutní nuly t_0 . Označme $\gamma = 1/T_0 = -1/t_0$, pak dostáváme vztah

$$V = V_0(1 + \gamma t) \quad \text{a podobně také} \quad p = p_0(1 + \gamma t).$$

Tyto vztahy řešitelé používali, ale zapomněli, že V_0 a p_0 je objem a tlak plynu při 0°C . Nebo používali vztah $V = V_0(1 + \gamma \Delta t)$, v tomto případě ale není γ konstanta.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. E ... moucha na hladině (8 bodů; průměr 2,91; řešilo 35 studentů)

Z obdélníkové nádoby vyléváme vodu přes jednu její stěnu. Na hladině plave mrtvá moucha. Proměřte, jak se bude moucha při velmi pomalém vylévání pohybovat. Místo mrtvé mouchy můžete použít jiný odpovídající předmět.

Za dlouhých zimních večerů nad úlohou bádá Honza Houštěk.

Úvod

Ti z vás, kteří se rozhodli experimentální úlohu řešit, jistě záhy zjistili, v čem spočívá její záludnost. Vylévání mouchy jistě není žádné fyzikální terno, ale provést experiment, který by splňoval náročnější požadavky na přesnost a měl nějakou vypovídací hodnotu, nebylo zas až tak triviální (pokusy s větším množstvím vody, navíc v zimě, to nikdy nedělá dobrotu).

Experiment

Při provádění pokusu jsme se vydali cestou, která nám umožňovala vylévat vodu téměř konstantním průtokem. Naše aparatura se sestávala jednak z torza starého dětského kolečka, které mělo „nákladový prostor“ příhodně kvádřového tvaru o rozměrech cca $15 \times 30 \times 50$ cm, dále z provázku, jenž byl na jednom konci přivázaný ke hraně nádržky a druhým koncem se navíjel na kovovou tyčku zasazenou místo vrtáku ve vrtačce upevněné nad nádobkou – tedy jakýsi rumpálek. Vrtačka byla vybavena regulací otáček, mohli jsme tedy snadno měnit rychlost naklápění a tím množství vytékající vody. Místo uhynulého hmyzu jsme použili všem dobře známé malé polystyrénové kuličky – ty mají tu výhodu, že díky velmi malé hmotnosti takřka okamžitě reagují na pohyb okolní vody, naopak jejich nevýhodou je, že se pohnou při sebemenším závanu vzduchu nad hladinou. Tyto kuličky jsme rozptýlili po hladině, což nám umožnilo sledovat proudění vody na různých místech hladiny během jednoho měření. Vedle nádoby jsme položili metr, ze kterého jsme později odečítali polohu kuliček. Vše jsme natáčeli na digitální fotoaparát ve videorežimu. Díky tomu jsme mohli proměření udělat v klidu a pohodlí na velké obrazovce.

Pokud máte tu možnost, zaznamenávejte si podobné experimenty na video. Omezíte tím riziko vzniku hrubých chyb a navíc odpadá časový stres během měření. Pokud do zorného pole kamery umístíte třeba ještě stopky, často vám to velice usnadní zpracování vašeho měření a můžete tak podstatně zvýšit přesnost.

Kuličky, které se dostaly příliš blízko ke stěnám nádoby, se beznadějně přilepily, a proto jsme se jimi dále nezabývali. Berme je tedy jako zástupce okrajových jevů. Zajímavější byla situace blíže středu hladiny. Při naklápění nádoby se nejdřív nad hranou přelivu vytvořil meniskus (opět vliv povrchového napětí vody), po jehož prasknutí vyteklo relativně větší množství vody (to je ten skok z 0 cm na 1,3 cm v naměřených hodnotách). Poté se proudění ustálilo a my jsme mohli začít s odečítáním hodnot.

Výsledky

Uvádíme zde hodnoty x vzdálenost od počáteční polohy a t času pro kuličku pohybující se přibližně na podélné ose nádoby. Kuličky, které se nacházely blíže ke stěně nádoby, se pohybovaly jen nepatrně pomaleji (vlivem tření vody o stěny je zde proudění pomalejší). Jak se ukázalo, okamžitá rychlost pohybu závisela jen na okamžitě, nikoliv na počáteční poloze kuličky. Předpokládáme, že nádoba nijak výrazně neměnila naklopení, pokud jí otočíme o 45° , tak dojde k zásadnímu ovlivnění vlastností vodního tělesa a již nebude splněn náš předpoklad vylévání za přibližně stálých podmínek. Proto nám pro ilustraci zcela postačuje znát průběh pohybu jedné kuličky, která během své „plavby“ proplula přes celou hladinu. Kuličky, které se nacházely před ní, se pohybovaly stejně, jenom se vylyly dříve. Chybu vzdálenosti jsme odhadli na 3 mm, zhruba tolik se ještě dalo z monitoru odečíst, čas měl chybu zhruba 0,1 s. Naměřené hodnoty jsou v následující tabulce, ty jsme dále vynesli do grafu.

t [s]	0	2	4	6	8	10	12	14
x [cm]	0	1,3	1,7	2,3	2,9	3,7	4,7	5,9
v [cm·s ⁻¹]	–	0,65	0,20	0,30	0,30	0,40	0,50	0,60

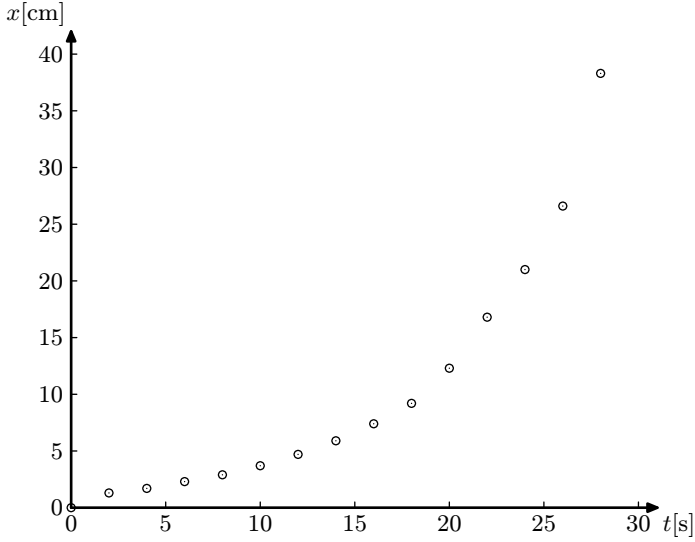
t [s]	16	18	20	22	24	26	28	30
x [cm]	7,4	9,2	12,3	16,8	21,0	26,6	38,3	přepadla
v [cm·s ⁻¹]	0,75	0,90	1,55	2,25	2,10	2,80	5,85	–

Tabulka: naměřené hodnoty $x(t)$

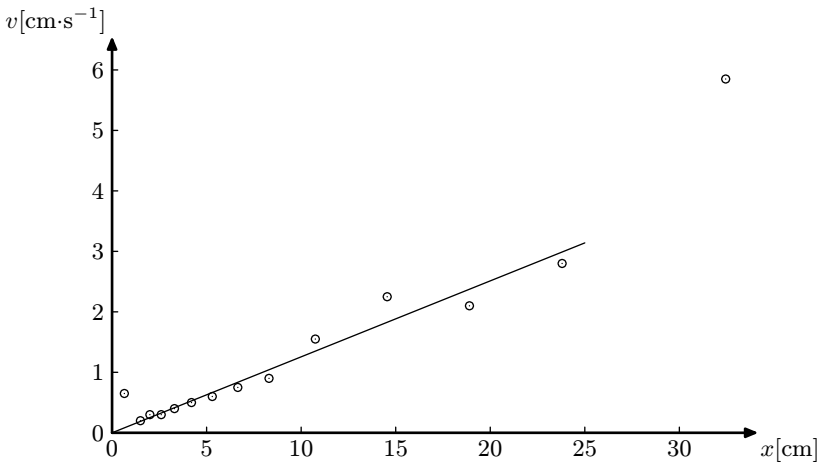
Zajímavější bylo pozorovat, jak se vyvíjí rychlost v závislosti na vzdálenosti od přelivu. Čím byla kulička blíže přelivu, tím rychleji se pohybovala. Rychlosti kuličky jsme počítali jako průměrnou rychlost na jednotlivých intervalech.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{tedy} \quad v_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}.$$

Tyto vypočtené hodnoty jsou uvedené v tabulce a vynesené v grafu.



Obr. 22



Obr. 23

Z grafu vidíme, že zrychlení daleko od přelivu bylo přibližně konstantní, ale s tím, jak se kulička blížila více k přelivu, vzrůstalo. Blízko přelivu máme bohužel málo naměřených dat. Tvar funkce popisující průběh rychlosti je zřejmě závislý na momentální geometrii vodního tělesa v nádobě (pokud se budete snažit, vždy na vaše výsledky nějakou funkci napočítáte, je ovšem otázka, jaký to bude mít fyzikální význam). Jinak bude vypadat proudění vody v mělkém plechu na pečení a jinak ve vysokém hranolu, na náklonu nádoby záleží také. Jistě by bylo zajímavé rozebrat teoreticky pohyb celé vodní masy, nicméně to přesahuje rámec našeho experimentu.

Dále jsme se zabývali příčným průběhem velikosti rychlosti proudění (tedy jak závisí rychlost proudění na vzdálenosti od podélných stěn). Podle očekávání byla kulička blíže ke stěně o něco málo pomalejší. Vlivem tření o stěnu se proudění na okrajích zpomaluje, ale není to výrazný jev.

Závěr

Při tomto typu měření nemá cenu provádět žádné statistické zpracování měření, jde nám především o kvalitativní popis děje, narozdíl od měření například nějaké konstanty. Přesto je dobré rozmyslet si, jakých chyb jsme se při měření dopouštěli, jaký vliv na konečný výsledek tyto chyby mohly mít a jak by se případně daly eliminovat. Znovu zdůrazňuji, že vaše závěry by měly být podloženy alespoň nějakými naměřenými hodnotami, vhodné je nakreslit graf.

Poznámky k došlým řešením

V zadání úlohy nebylo blíže specifikováno, jakým způsobem se má voda vylévat, bylo tedy na vás, jakou cestou se vydáte. Nabízelo se například vylévání konstantním objemovým tokem nebo stálou rychlostí naklápět nádobu. Důležité však bylo zajistit, aby se způsob vylévání neměnil. Vzít nádobu rukou a tak nějak podle oka vodu vylévat nebylo to pravé ořečové. Mnoho z vás se nějakým bližším popisem vůbec nezabývalo, ač se jedná o dost podstatnou věc. Také mě překvapilo, kolik řešitelů bylo ochotno (nebo to o sobě alespoň tvrdilo) pracovat s mrtvými mouchami. Ačkoliv to bylo součástí zadání, za použití méně nechutného pokusného objektu jsem body opravdu nestrhával. Vhodné bylo použít kousků gumy, korku, dřeva a podobně. Při opakovaném měření bylo rovněž vhodné zajistit, aby váš předmět příliš nenasakoval vodu, čímž by se měnila jeho hmotnost.

Nemálo řešitelů používalo nádobičky doslova miniaturních rozměrů, což muselo značně znesnadňovat samotné experimentování a také sabotovat veškeré snahy o přesnost. Nikdo mi nenamluví, že udělal kvalitní měření s kelímkem o rozměrech $5 \times 5 \times 10$ cm. V tomto případě platilo čím větší, tím lepší. Ostatně jistě jste sami zjistili, že moucha má tendenci lepit se na stěny vlivem povrchového napětí, a čím menší nádobka byla, tím těžší bylo udržet mouchu volně plavat.

Řešitelé většinou popisovali pohyb buď jako víceméně rovnoměrný, nebo rovnoměrně zrychlený. Zde bych rád upozornil na možný zdroj chyb. Pohyb plovoucího tělesa se může na první pohled jevit jako rovnoměrný, ale po proměření zjistíte, že tomu tak není. Tím myslím především experimentátory, kteří pouze uvedli, že se moucha pohybovala rovnoměrně, aniž by své tvrzení podložili nějakými čísly.

Michal Bareš
kura@fykos.mff.cuni.cz

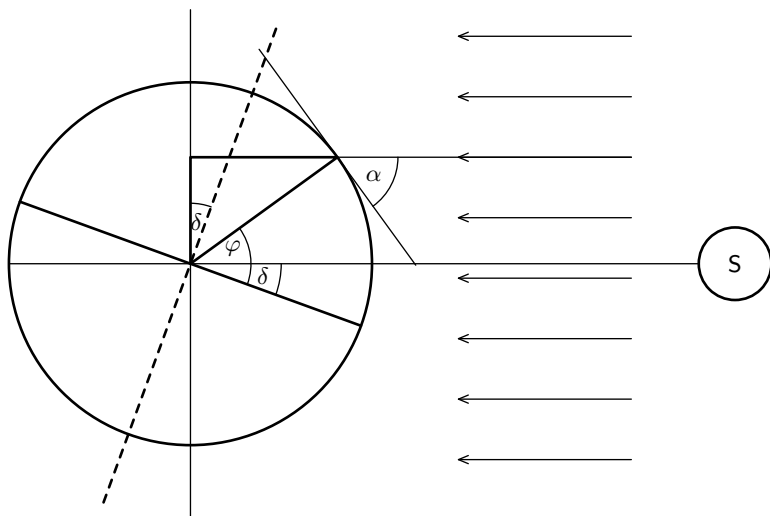
Úloha III. E ... Země je kulatá (8 bodů; průměr 4,71; řešilo 31 studentů)

Určete, na které rovnoběžce se nachází vaše bydliště. Navrhněte co nejvíce metod a alespoň dvě realizujte.

K určení zeměpisné šířky (rovnoběžky) lze dobře využít faktu, že se Země točí kolem své osy. Tento jev se projevuje na chování mechanických soustav, protože se nacházíme v neinerciální soustavě, a také v tom, co pozorujeme na obloze. Dalším projevem rotace Země je její magnetické pole, jehož intenzitu můžeme měřit. K určení zeměpisné šířky lze případně využít sklonu osy rotace vůči ekliptice (rovina v níž obíhá Země kolem Slunce) a kulatosti Země. To způsobuje různé vzdálenosti od Slunce během roku a projevem je například různá teplota na povrchu Země.

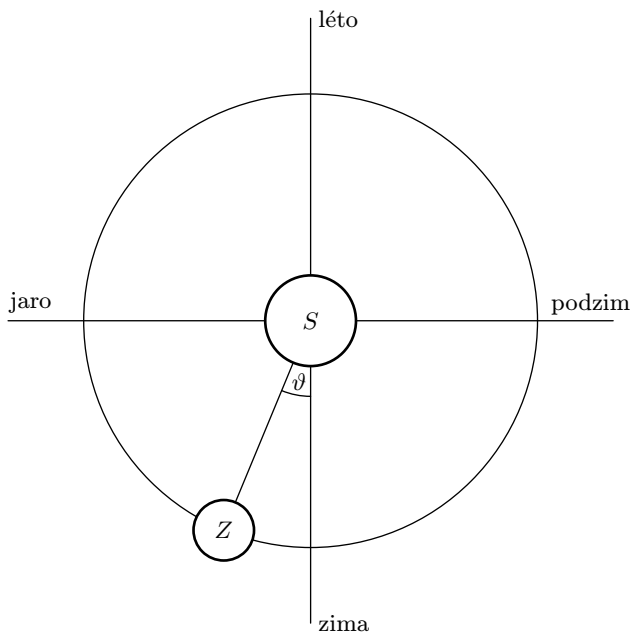
Teorie

Zmíníme zde podrobněji několik metod, které budeme realizovat. Ve všech budeme předpokládat, že Země je dokonalá koule, a zeměpisnou šířkou φ bodu X na povrchu Země označíme úhel, který svírá spojnice střed Země – bod X s rovníkovou rovinou.



Obr. 24

Začneme nejjednodušší metodou, kterou jste využili téměř všichni řešitelé. Pokud budeme za jasné noci pozorovat oblohu, zjistíme, že se celá otáčí kolem jednoho bodu (příčinnou je již zmíněná rotace Země). Tento nehybný bod se nachází velice blízko Polárky. Uvědomíme-li si, že vzdálenost Polárky od Země je ohromná vzhledem k velikosti Země, je zřejmé, že výška Polárky nad obzorem je rovna zeměpisné šířce, neboť osa zemské rotace míří k ní. Nesmíme ovšem ve výsledku zapomenout na chybu, způsobenou nenulovou vzdáleností Polárky od nehybného bodu noční oblohy (tato vzdálenost se během roku mění, vinnou precese zemské osy, nepřesahuje 1°).



Obr. 25

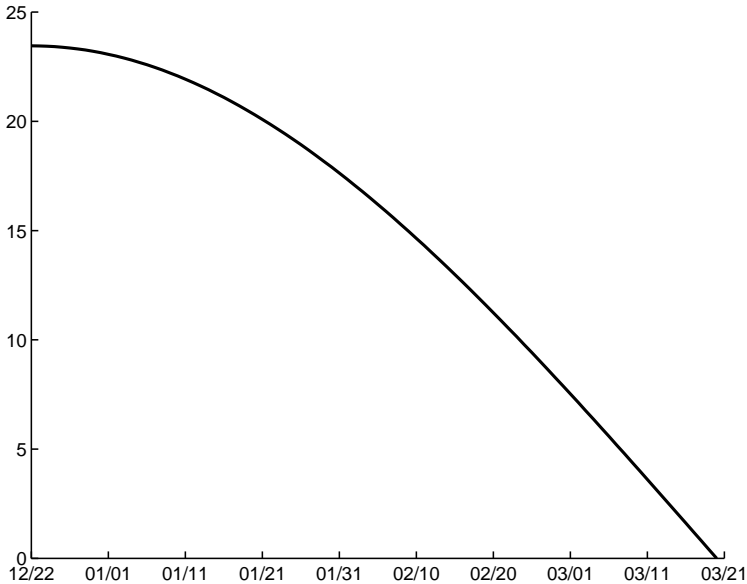
Další možností, jak určit zeměpisnou šířku, je využít pohybu Slunce po obloze. Budeme měřit úhel Slunce nad obzorem α v pravé sluneční poledne. Udělejme řez Zemí, aby v něm ležela zemská osa a spojnice Země–Slunce, jak znázorňuje obr. 24. Pro zeměpisnou šířku potom dostáváme

$$\varphi = 90^\circ + \delta - \alpha, \quad (41)$$

kde δ značí deklinaci – úhlová vzdálenost Slunce od světového rovníku (v létě je kladná, v zimě záporná, v den rovnodennosti nulová). Zbývá určit deklinaci. Polohu Země na oběžné dráze kolem Slunce budeme parametrizovat úhlem ϑ (viz obr. 25), dklon zemské osy vůči ekliptice označíme $\delta_0 = 23^\circ 25'$. Po technickém výpočtu, který nebudu uvádět, dostaneme

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta_0 \cos^2 \vartheta}. \quad (42)$$

Předpokládejme, že rychlost oběhu Země kolem Slunce je konstantní, potom bude výpočet úhlu ϑ z datumu snadný, stačí si uvědomit, že mezi zimou (22. 12. 2003 8:01) a jarem (20. 3. 2004 7:48) opíše průvodič Země na oběžné dráze pravý úhel. Závislost deklinace na datumu je znázorněna v grafu na obr. 26. Ve skutečnosti není rychlost oběhu konstantní, porovnáním skutečných hodnot deklinace z hvězdářské ročenky s hodnotami vypočtenými podle (42) ale zjistíme, že rozdíl činí maximálně $0,15^\circ$, což s ohledem na přesnost našeho měření bude bohatě stačit.



Obr. 26

Třetí metodu, kterou uvedeme, je měření velikosti tíhového zrychlení. V domácích podmínkách je jednoznačně nejpřesnější měření z doby kmitu matematického kyvadla. Pro velice přesná měření hodnoty tíhového zrychlení se používá gravimetr, který využívá volného pádu. Sestup volně padajícího tělesa ve vakuované nádobě je velmi přesně sledován pomocí laserového interferometru. Interferenční proužky jsou navázány na absolutní standardy délky. Velmi přesné měření času je prováděno pomocí atomových rubidiových hodin. Takto je možné změřit tíhové zrychlení až na sedm platných cifer. O takovéto přesnosti si budeme moci jen zdát.

Neomezíme se pouze na model matematického kyvadla, které má dobu kmitu $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Tím bychom se dopustili chyby v řádu desetin procenta, což si nemůžeme dovolit. Pro periodu malých kmitů fyzického kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

kde l je vzdálenost osy otáčení od težiště, I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a m hmotnost kyvadla. Tíhové zrychlení potom určíme ze vztahu

$$g = \frac{4\pi^2 I}{T_m^2 m l}. \quad (43)$$

Kyvadlo jsme realizovali kovovou kuličkou na provázku, jehož moment setrvačnosti je

$$I = \frac{2}{5}Mr^2 + Ml^2 + \frac{1}{3}m(l-r)^2,$$

kde M jsme označili hmotnost kuličky a m hmotnost provázku. Dosazením do vztahu (43) obdržíme

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_m^2} \frac{M}{m+M} \cdot \left(1 + \frac{2}{5} \left(\frac{r}{l} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{m(l-r)^2}{Ml^2} \right). \quad (44)$$

Nyní potřeba přiřadit naměřenému tíhovému zrychlení zeměpisnou šířku. Tíhové zrychlení je vektorový součet odstředivého a_o a gravitačního a_g zrychlení. Pokud budeme předpokládat

$$a_o = \omega^2 R \cos \varphi, \quad a_g = \kappa \frac{M}{R^2},$$

kde ω je úhlová rychlost rotace Země, R je poloměr Země a M je hmotnost Země, dostaneme

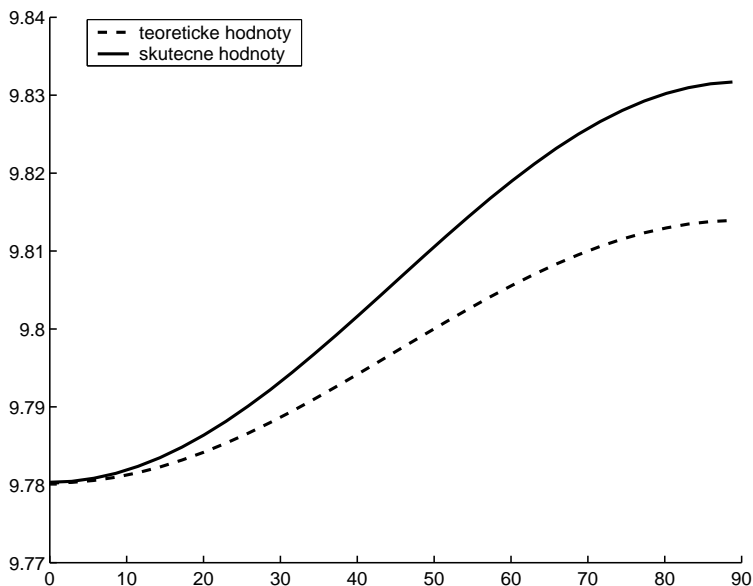
$$g = \sqrt{\kappa^2 \frac{M^2}{R^4} + \omega^2 \left(\omega^2 R^2 - 2\kappa \frac{M}{R^2} \right) \cos^2 \varphi}. \quad (45)$$

Experimenty ukazují, že je tento vztah dost nepřesný. Chybu zanáší předpoklad kulatosti Země, o které víme, že je na pólech zploštělá. Vyřešíme to tím, že budeme používat empirický vztah pro závislost tíhového zrychlení na zeměpisné šířce⁴

$$g = 9,7803185 \cdot (1 + 0,005278895 \cdot \sin^2 \varphi - 0,000023462 \cdot \sin^4 \varphi), \quad (46)$$

který se pro naše potřeby velice dobře shoduje se skutečností. Porovnání vztahů (45) a (46) najdete v grafu na obrázku 27. Závislosti se výrazně rozcházejí pro velké zeměpisné šířky.

Vztah (46) samozřejmě nevystihuje vliv slapových sil od Slunce a Měsíce, nadmořské výšky, podloží, okolního terénu. My je bez obav zanedbáme, například změna nadmořské výšky o 1 m zmenší tíhové zrychlení o $3 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 27

⁴⁾ Na <http://gretchen.geo.rpi.edu/roecker/AppGeo96/lectures/gravity/gravoutline.html> najdete veškeré podrobnosti týkající se tíhového zrychlení.

Poslední metoda, kterou zde podrobněji rozebereme, využívá gyroskopu. Gyroskop je těžký setrvačnický upevněný ve svém těžišti (tíhová síla tedy nemá na jeho pohyb vliv). Pro gyroskop vázaný na vodorovnou rovinu platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \cos \varphi}{I_x} \vartheta = 0,$$

kde ϑ je výchylka z rovnovážné polohy (severojižní směr), Ω je úhlová rychlost rotace Země, w je úhlová rychlost rotace setrvačnicku, I_z je moment setrvačnosti gyroskopu vzhledem k ose symetrie a I_x je moment setrvačnosti vzhledem k ose na ni kolmé. Setrvačnický tedy bude kmitat kolem severojižního směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_v = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \cos \varphi}{I_x}}.$$

Podobně pro gyroskop vázaný na svislou rovinu, jehož normála má severojižní směr, platí pohybová rovnice

$$\ddot{\vartheta} + \frac{I_z \Omega w \sin \varphi}{I_x} \vartheta = 0.$$

Setrvačnický tedy bude kmitat kolem svislého směru s úhlovou rychlostí

$$\omega_s = \sqrt{\frac{I_z \Omega w \sin \varphi}{I_x}}.$$

Pro zeměpisnou šířku tedy dostáváme vztah

$$\operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{\omega_s}{\omega_v} \right)^2. \quad (47)$$

Při realizaci však můžeme narazit na problém, jak upevnit setrvačnický v těžišti při kmitech ve svislé rovině. Vychodiskem může být následující postup. Setrvačnický zavěsíme na provázek, aby splýval s jeho osou, vytvoříme tak kyvadlo. Pokud setrvačnický nerotuje, je úhlová rychlost tohoto kyvadla

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2}},$$

kde m je hmotnost setrvačnicku a l je vzdálenost závěsu od těžiště. V případě, že rotuje,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I_x + ml^2} \pm \frac{I_z \Omega w \sin \varphi}{I_x + ml^2}},$$

znaménko v odmocnině závisí na směru rotace. Z posledních dvou vztahů dostáváme vztah

$$\omega_s^2 = \pm (\omega_2^2 - \omega_1^2) \frac{g}{g - \omega_1^2 l}, \quad (48)$$

který nám umožní určit ω_s pomocí jiných dvou měření. Nevýhoda této metody je v tom, že frekvence ω_1 a ω_2 jsou relativně blízké, to bude zanášet velkou chybu, neboť obě úhlové frekvence od sebe odečítáme.

Existuje ještě spousta dalších možností, jak určit zeměpisnou šířku. Můžeme odměřit polohu slunce několikrát za den a tím určit rovinu, ve které se pohybuje. Rovněž můžeme pozorovat pohyb libovolné hvězdy po obloze, z jejích kulminací lze pak určit zeměpisnou šířku. Neinerciálnost soustavy spojené se Zemí se projevuje Coriolisovou silou, kterou se můžeme pokusit pozorovat. Jedním z jejich projevů je například stáčení roviny kmitů kyvadla (Foucaultovo kyvadlo), to je ale obtížné v domácích podmínkách naměřit. Dále můžeme zjišťovat směr a velikost intenzity magnetického pole Země za pomoci kmitů tyčového magnetu.

Postup měření

Měření výšky Polárky nad obzorem je nejméně náročný experiment, který dává relativně přesné výsledky. Většina řešitelů se do jeho realizace pustila, z toho důvodu jsme se rozhodli ho neprovádět. Ukážeme zde jiné experimenty, na které si tolik řešitelů netroufou.

Výšku Slunce nad obzorem jsme měřili pomocí délky stínu vzrušené svislou tyčkou. Na to se nám hodila překližka, kterou jsme rozřezali na deset plátků. Každý plátek jsme na straně, která bude nahoře, zašpičatili. Ustavili jsme si vodorovnou plochu a pokryli ji papírem, aby bylo možné zaznamenávat polohy stínu. Potom jsme svísele upevnili připravené plátky z překližky, aby vrhaly stín na naši kreslicí plochu. Pak už jen stačilo zaznamenávat délky stínů zhruba od půl dvanácté, dokud nebyly nejkratší (pravý sluneční čas není totožný se střeoevropským, vinou nerovnoměrnosti rychlosti oběhu kolem Slunce se jejich rozdíl během roku mění).

Dobu deseti kmitů našeho kyvadla jsme měřili čítačem, který měří dobu uplynutou mezi dvěma určenými průchody kyvadla dolní rovnovážnou polohou. Zde byla osvětlená fotodioda, která byla při průchodu kyvadla dolní rovnovážnou polohou zastíněna, a čítač odstartoval nebo zastavil stopky. Čítač měřil čas na 6 platných cifer, chyba je na jeho poslední cifře. Vzdálenost r jsme měřili posuvným měřítkem, délku l pásovým metrem (dílek 1 mm).

Jako gyroskop jsme použili ruční frétku, která splňuje předpoklady těžkého setrvačnicku, neboť její otáčky dosahují až $300 \text{ ot} \cdot \text{s}^{-1}$. Nejprve jsme ji zavěsili nad těžištěm, aby kmitala ve vodorovné rovině, a měřili dobu dvou jejích kmitů T_v . Frézka kmitala kolem severojižního směru. Bylo možné měřit pouze dobu dvou kmitů, neboť kmitání bylo velice pomalé, a když se přitlumilo, bylo málo patrné. Poté jsme frétku zavěsili, aby lanko splývalo s její osou, a měřili dobu sta kmitů tohoto kyvadla při zapnutém (T_2) a vypnutém (T_1) motoru. Měření T_1 a T_2 musí být obzvláště pečlivé, protože ve vzorci (48) vystupuje jejich rozdíl a obě periody jsou velice blízké. Proto jsme se rozhodli měřit periody sta kmitů.

Výsledky měření

Svinovacím metrem naměřené hodnoty délek tyček h z překližky a délek jejich stínů d uvádíme v následující tabulce spolu s vypočtenými úhly α podle vztahu

$$\alpha = \arctg \frac{h}{d}.$$

d [cm]	40,00	41,60	40,30	40,55	40,60	41,40	41,05	40,85	41,55	41,70
h [cm]	29,40	29,60	29,35	29,35	29,50	29,55	29,55	29,40	29,60	29,65
α [°]	36,32	35,43	36,07	35,90	36,00	35,52	35,75	35,74	35,47	35,41

Průměrná hodnota je $\bar{\alpha} = 35,76^\circ$. Měření jsem provedl 7. března 2004, tomuto dni odpovídá podle (42) deklinace $\delta = -5,2^\circ \pm 0,2^\circ$. Pro zeměpisnou šířku podle (41) dostáváme

$$\varphi = 49,04^\circ.$$

Zbývá určit chybu. Chybu měření veličiny h vezmeme jako polovinu dílku měřidla $\Delta h = 0,5 \text{ mm}$. Chyba veličiny d je větší, neboť stín, jehož délku jsme měřili, měl neostřý okraj, $\Delta d = 1 \text{ mm}$. Chybu úhlu α potom určíme podle lineárního zákona hromadění chyb

$$\Delta \alpha = \left| \frac{\partial \alpha}{\partial h} \right| \Delta h + \left| \frac{\partial \alpha}{\partial d} \right| \Delta d = \frac{1}{\frac{h}{d} + \frac{d}{h}} \cdot \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta d}{d} \right) = 3,9^\circ.$$

Statistickou chybu můžeme zřejmě zanedbat. Uvážíme-li i chybu v určení deklinace, dostáváme výsledek

$$\varphi = 49^\circ \pm 4^\circ.$$

Naměřené hodnoty doby deseti kmitů kyvadla zhotoveného z mosazné kuličky zavěšené na provázku uvádíme v následující tabulce.

č. m.	1	2	3	4	5	6
$10T$ [s]	20,1002	20,1007	20,1006	20,1001	20,0990	20,1004
č. m.	7	8	9	10	11	12
$10T$ [s]	20,1014	20,1010	20,1011	20,0997	20,0999	20,0993

Průměrná hodnota a směrodatná odchylka jsou

$$\bar{T} = 2,01003 \text{ s}, \quad s_{\text{sm}} = 0,00002 \text{ s}.$$

Vzdálenost závěsu kyvadla od těžiště je $l = (1005 \pm 1) \text{ mm}$, hmotnost kuličky $M = 55,60 \text{ g}$, hmotnost provázku $m = 0,1376 \text{ g}$, poloměr kuličky $r = (11,9 \pm 0,1) \text{ mm}$ a amplituda výchylky $A \approx 2 \text{ cm}$ (tomu odpovídá úhlová amplituda $\alpha \approx 0,02$). Změřené hodnoty hmotností můžeme vzhledem k ostatním chybám považovat za přesné. Docházelo k malým výchylkám kyvadla, můžeme proto bez obav zanedbat jejich vliv na dobu kmitu. Pro výpočet hodnoty tíhového zrychlení použijeme vztah (44).

$$g = 9,805 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Nakonec určíme chybu této veličiny, použijeme lineární zákon hromadění chyb, neboť všechny naše chyby jsou systematické. Pro výpočet vycházíme ze vztahu (44), chybu veličiny v závorce lze zanedbat, neboť je velice blízka jedné. Pro relativní chyby tedy vychází

$$\delta g \approx 2\delta T + \delta l \approx \delta l = 0,001.$$

Výsledná hodnota tíhového zrychlení je

$$g = (9,805 \pm 0,010) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

Ze vztahu (46) potom určíme rozmezí zeměpisných šířek, které tomuto tíhovému zrychlení odpovídají. Dostáváme

$$\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ.$$

Zbývá poslední metoda. vzdálenost závěsu od těžiště frézky při kmitání ve svislé rovině byla $l = (395 \pm 2) \text{ mm}$. Naměřené periody kmitání frézky v různých polohách, jak je popsáno výše, uvádíme v následující tabulce. Jsou zde rovněž vypočtené příslušné úhlové rychlosti podle vztahu $\omega = 2\pi/T$.

Průměrné hodnoty a jejich směrodatné odchylky jsou

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= 4,8316 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, & s_{\omega_1} &= 0,0006 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \bar{\omega}_2 &= 4,8224 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, & s_{\omega_2} &= 0,0005 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \bar{\omega}_v &= 0,6764 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, & s_{\omega_v} &= 0,0133 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Pro zeměpisnou šířku ze vztahů (48) a (47) dostáváme

$$\varphi = \arctg \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)g}{\omega_2^2(g - \omega_1^2 l)} = 72,8^\circ. \quad (49)$$

Opět se zamyslíme nad chybou této hodnoty. Chyba měření času způsobená nedokonalými reakcemi člověka je asi 0,1 s, což způsobuje relativní chybu $\delta_{m\omega}$. Celkové chyby úhlových frekvencí podle

$$\delta\omega = \sqrt{(\delta_{m\omega})^2 + \left(3\frac{s\omega}{\omega}\right)^2}$$

jsou

$$\delta\omega_1 = 0,00086, \quad \delta\omega_2 = 0,00083, \quad \delta\omega_v = 0,059.$$

Celkovou chybu určíme tak, že do vztahu (49) dosadíme krajní hodnoty jednotlivých veličin, které jsou určeny jejich chybami. Vychází

$$\varphi_{\max} = 82,7^\circ, \quad \varphi_{\min} = 14,4^\circ.$$

Hodnota zeměpisné šířky nameřená touto metodou tedy je

$$\varphi = 70^\circ \begin{matrix} +10^\circ \\ -60^\circ \end{matrix}.$$

Diskuse a závěr

Měření výšky Slunce nad obzorem v pravé sluneční poledne nám dalo nejpřesnější výsledek ze všech metod. Největší chyba je způsobena neostrotí vrženého stínu. Nabízí se to vyřešit tím, že bychom si vzali delší tyč. Stín by sice byl delší, ale zároveň by se zvětšila neostrost, relativní chyba by zůstala stejná. K výraznému zpřesnění bychom museli zvolit jiný způsob určení výšky Slunce nad obzorem.

Ve druhé metodě jsme měřili velice přesně, přesto jsme lepšího určení zeměpisné šířky nedosáhli. To je zaviněno tím, že tíhové zrychlení se na zemském povrchu mění až na třetí platné cifře. Díky tomu, že jsme měli k dispozici přesný přístroj na měření času, zanáší jedinou významnější chybu měření vzdálenosti těžiště kyvadla od závěsu l . Tuto chybu ale u domácího vyrobeného kyvadla těžko zmenšíme.

Třetí metoda nám ve výsledku o zeměpisné šířce příliš neřekla. Byla by přesná, pokud bychom dokázali upevnit gyroskop, aby kmital ve svislé rovině. Tím, že jsme to obešli a měřili vlastně kmity fyzického kyvadla, jsme si experiment znehodnotili. Hodnoty ω_1 a ω_2 jsou velice blízké, protože kmitání gyroskopu je výrazně pomalejší než kmitání fyzického kyvadla. Odečítání těchto úhlových frekvencí ve vzorci (48) způsobilo obrovskou chybu výsledku.

Shrňme výsledky všech metod:

- a) $\varphi = 49^\circ \pm 4^\circ$,
- b) $\varphi = 44^\circ \pm 12^\circ$,
- c) $\varphi = 70^\circ \begin{matrix} +10^\circ \\ -60^\circ \end{matrix}$.

Skutečná honota zeměpisné šířky místa, kde jsme prováděli měření, je $50^\circ 6' 28''$ (tu můžeme najít v mapě, pomocí GPS, nebo například na serveru <http://www.mapy.cz>). Naměřené hodnoty se v rámci chyb s touto hodnotou shodují.

Poznámky k řešení

Jak již bylo zmíněno, drtivá většina řešitelů využívala k určení zeměpisné šířky Polárku. Našlo se i pár jedinců, kteří určovali polohu Slunce nebo se pokoušeli měřit tíhové zrychlení (což vzhledem malé přesnosti nevedlo k žádným výsledkům). Jiné realizované metody se v řešeních bohužel nevyšly.

Překvapilo mě (a zároveň zklamalo), že všichni řešitelé považovali odečtení zeměpisné šířky z mapy (či nalezení někde na internetu) za fyzikální experiment. Takto zjištěná hodnota může být použita jedině jako kontrolní údaj. To je, jako kdybychom vám zadali určit elementární náboj a vy ho našli v tabulkách a poslali jako řešení experimentální úlohy.

Honza Prachař

honzik@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. E ... Kolumbovo vejce (8 bodů; průměr 4,75; řešilo 16 studentů)

Roztočte vajíčko na špičce a změřte frekvenci, při které tato poloha přestane být stabilní (tj. vajíčko se začne točit ve vodorovné poloze). Použijte běžné slepičí vejce natvrdo uvařené. Můžete se pokusit i o teoretický model a srovnat ho s vašimi výsledky. Dobrou chuť!

Vajíčko roztáčela Lenka Zdeborová.

Teorie

Není jednoduché vytvořit nějaký teoretický model, protože není tak úplně jasné, z jakého důvodu se vajíčko překlápí. Jedná se tedy spíše o odhad než o seriózní předpověď. Přístupů je několik. Lze například vyjít z energetického hlediska a spočítat, při jaké rychlosti rotace je poloha vajíčka nestabilní. V autorském řešení vyjdeme z představy, že vajíčko se překlápí, pokud bude rychlost precese srovnatelná s rychlostí otáčení. Pro úhlovou rychlost precese Ω platí $M = L\Omega \sin \varphi$, kde φ je úhel odchýlení osy vajíčka od svislé osy, M moment tíhové síly a L moment hybnosti vajíčka. Potom dostáváme

$$\Omega = \frac{mgr \cos \varphi}{2\pi f J},$$

kde r je vzdálenost těžiště vajíčka od bodu dotyku s podložkou a J moment setrvačnosti kolem osy symetrie. Z tohoto přístupu plyne pro frekvenci překlopení

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgr \cos \varphi}{J}}.$$

Pokud vajíčko považujeme za přibližně homogenní rotační elipsoid ($J = mb^2/10$) a úhel odchýlení je přitom malý, pak se výsledek zjednoduší na

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5ga}{b^2}} = 6,4 \text{ Hz},$$

kde a je délka vajíčka a b šířka vajíčka. Použité vajíčko mělo parametry: $m = 56 \text{ g}$, $a = 5,2 \text{ cm}$, $b = 4,0 \text{ cm}$.

Postup měření

Postup měření silně závisí na vybavenosti domácí laboratoře. Pokud nemáme doma žádné speciální vybavení, spokojíme se se stopkami. Na špičku vajíčka nalepíme papírek tak, aby bylo možno pomocí něj počítat otáčky. Pak již nezbyvá než vajíčko roztočit, změřit příslušný čas T , počet otáček N a pomocí vztahu

$$f = \frac{1}{NT}$$

spočítat frekvenci f .

Není ale v lidských silách sledovat pouhým okem tak vysoké frekvence. Proto je prakticky jedinou možností vše natočit na kameru. Pokud má naše kamera zabudovanou časomíru, není problém frekvenci dopočítat. Pokud tomu tak není, umístíme vedle vajíčka stopky. Při použití digitálních fotoaparátů v režimu video je nevýhodou nízká snímkovací frekvence (obvykle okolo 15 Hz).

Nejllepší metodou je použití pokročilé výpočetní techniky. Existují různé elektronické experimentální systémy napojené na počítač, jako je třeba ISES (Inteligentní Školní Experimentální Systém).

Výsledky měření

Jedním z těchto způsobů změříme čas T pro 10 otáček.

měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T [s]	1,17	1,20	1,23	1,23	1,28	1,16	1,31	1,34	1,19	1,24

Pro střední hodnotu dostaneme $\bar{T} = 1,24$ s. Jako systematickou chybu vezmeme nejmenší dílek času, což je $\Delta T_{\text{sys}} = 0,1$ s. Statistickou odchylku spočteme ze vztahu

$$\Delta x_{\text{st}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Po dosazení dostaneme $\Delta T_{\text{st}} = 0,03$ s. Celkovou chybu spočteme ze vztahu

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{sys}})^2 + (3\Delta x_{\text{st}})^2}$$

Pro výsledný čas tedy platí: $T = (1,24 \pm 0,09)$ s. Chyba času je tedy asi 7%. Protože relativní chyby T a f jsou stejné, můžeme psát konečný výsledek ve tvaru

$$f = (8,0 \pm 0,6) \text{ Hz}$$

I když se naměřená hodnota neshoduje v rámci chyby s teoreticky předpovězenou hodnotou, řádově si výsledky odpovídají. Neshoda zřejmě pramení z ne úplně přesného teoretického modelu.

Poznámky k došlým řešením

Řešitelé se podle svých výsledků rozdělili do dvou skupin. První skupině vyšla frekvence v rozmezí 5 – 8 Hz, stejně jako tomu je v autorském řešení. Druhá skupina naměřila hodnotu 1,5 – 3 Hz. Neumím si tento rozpor vysvětlit. Je sice možné, že vajíčko má při rotaci více nestabilních poloh, ale nabízí se i prozaičtější řešení a to, že někteří řešitelé postavili vajíčko na bok místo na špičku.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.E ... bobřík měření (7 bodů; průměr 5,00; řešilo 7 studentů)

Jaro začíná a je pravý čas začít sportovat. Mezi mnohé sportovní aktivity patří mimo jiné tenis. A my vám vycházíme vstříc! Vaším úkolem je zjistit, jakou rychlost musí mít tenisový míček, aby rozbil okno. Nezapomeňte provést dostatek měření, abyste mohli vaše zjištěná data statisticky zpracovat.

Jarda Trnka vyčetl ze sbírky P. Kapicy.

Motivace úlohy

Mnohým se jistě zdálo zadání úlohy přinejmenším podivné. Nešlo však o náhodný rozmar praštěných organizátorů. Úloha pochází z vážené sbírky příkladů nositele Nobelovy ceny za fyziku Petra Leonidoviče Kapicy *Fyzikální ježadači*. Tolik jen pro ty, co snad pochybují o vysoké kvalitě FYKOSích úloh.

Pravdou je, že s měřením jsou spojeny buď určité investice (pokud si okno zakoupíte), nebo nějaké ty nepříjemnosti (pokud rozbijíte stále ještě sloužící okno). To však experimentátora nesmí odradit. Výzkum je na prvním místě!

Metoda měření a teorie

Na webových stránkách <http://star.tau.ac.il/QUIZ/> si zájemci mohou nalézt teoretické předpoklady rychlosti. Hledejte tam úlohu *Breaking windows* z roku 1997. Výpočet není jednoduchý, proto ho zde nebudeme uvádět.

Jak vlastně při tomto nestandardním měření postupovat? Tak hlavně musíme nějakým způsobem určit rychlost dopadajícího míčku. To není vůbec tak jednoduché, jak se na první pohled zdá. Pokud bychom na okno míček házeli z nějaké vzdálenosti, tak budeme mít velké problémy s měřením doby letu (z té pak určíme rychlost míčku). Jediný rozumný způsob jak zaručit dostatečně dlouhý let míčku je vrh svislý vzhůru. Vyhodíme tedy míček do vzduchu, budeme měřit čas a budeme doufat, že spadne na přichystané okno. (Nebo můžeme míčkem házet postupně z prvního až n -tého patra vícepodlažního domu na okno na chodníku). Většinou nám sice míček spadne mimo skleněnou plochu, ale pokud se trefíme, budeme mít měření vcelku přesné.

Metoda měření bude tedy následující. Vyhodíme míček do vzduchu a budeme měřit čas t , za který spadne na přichystané okno. Pro rychlost v bude platit

$$v = \frac{gt}{2}.$$

Nezbývá tedy, než se pustit do měření.

Výsledky měření

Měření samotné bylo poznamenáno menším rozměrem skleněné plochy, tudíž velká část vrhů končila úplně mimo danou oblast. No, nakonec přece jenom pár pokusů skončilo tam, kde mělo, a i k rozbití okna došlo. Všechny pokusy, které skončily pádem míčku na skleněnou desku, jsou zaznamenány v tabulce.

čas t [s]	rychlost v [m·s ⁻¹]	rozbití
1,15	5,6	ne
1,87	9,2	ne
2,77	13,6	ne
2,91	14,3	ne
3,41	16,7	ne
3,67	18,0	ano

Výsledek nelze jednoznačně stanovit. Bude to zřejmě někde mezi hodnotami $16,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $18,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Chybu měření času odhaduji na $0,2 \text{ s}$, což dává relativní chybu asi 5%. Ostatní chyby lze těžko stanovit (jako třeba nekolmý dopad míčku na okno). Proto celkovou chybu odhadneme. Výsledek pak můžeme napsat ve tvaru

$$v = (18 \pm 2) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Na uvedené internetové adrese odhadují velikost rychlosti mezi 20 a 30 m/s. V zásadě je tedy výsledek tohoto experimentu ve shodě s teoretickou předpovědí. Samozřejmě tato hodnota není vůbec směrodatná pro všechna okna. Nějaké je tenčí, jiné tlustší, takže rozptyl výsledků může být dost velký.

Poznámky k došlým řešením

Řešení nepřišlo mnoho. Všichni, co se pokusili něco naměřit, si zaslouží pochvalu. *Slavo Takáč* bohužel nepřemluvil matku, aby obětovala okno ve prospěch vědy, *Tomáš Bednárik* neměl po ruce tenisák, tak musel házet na okno kameny, *Jendovi Valáškov* se zase nechtělo utrácet za nové okno, použil tedy místo něho balící papír. Ze dvou dalších řešitelů by měl pan *Kapica* také radost – z *Martina Konečného* a *Petra Dvořáka*, kteří nelitovali obětovat okna ve prospěch vědy.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz

Úloha VI. E ... do dna (8 bodů; průměr 5,36; řešilo 14 studentů)

Do dna vědra zhotovte malý kruhový otvor a vědro naplňte vodou. Změřte, jak závisí doba výtoku vody na počáteční výšce hladiny. Naměřené hodnoty porovnejte s teorií.

Na schůzce FYKOSu vymyslel Miro.

Do poslední série jsem si pro vás připravili jednoduchou experimentální úlohu. Klíčové na ní bylo srovnání teorie a experimentálních výsledků, proto začněme teorií.

Teorie

Důležité je uvědomit si, jak budeme experiment realizovat, a podle toho formulovat teorii. My jsme použili válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Protože voda bude z nádoby vytékat pomalu a rychlost vytékání se bude také měnit pomalu, můžeme děj považovat za přibližně ustálené. Takže použijeme Bernoulliho rovnici,

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{konst.}$$

Tlak kapaliny je nahoře v nádobě a u výtoku stejný (je roven atmosférickému). Pokud označíme v_R rychlost poklesu hladiny a v výtokovou rychlost z otvoru, pak dostáváme

$$v^2 = v_R^2 + 2hg.$$

Potřebujeme získat vztah pro v_R v závislosti na výšce hladiny. Využijeme rovnici kontinuity

$$\pi r^2 v = \pi R^2 v_R$$

a dostáváme

$$-\frac{dh}{dt} = v_R = \sqrt{\frac{2hg}{\frac{R^4}{r^4} - 1}}.$$

Tuto rovnici můžeme řešit separací proměnných. Označíme-li H jako počáteční výšku hladiny a t čas, za který voda vytekla, potom integrujeme

$$\int_H^0 \frac{dh}{h} = - \sqrt{\frac{2g}{\frac{R^4}{r^4} - 1}} \cdot \int_0^t dt.$$

Pro dobu výtoku dostáváme

$$t = \sqrt{\frac{R^4}{r^4} - 1} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx \frac{R^2}{r^2} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (50)$$

Na závěr teoretického úvodu se zamysleme nad možnými odchylkami teorie od skutečnosti. Předpokládali jsme proudění ustálené, které je ve skutečnosti nestacionární. Proto bude teorie dávat menší časy výtoku, než jsou ve skutečnosti. Ve výpočtu jsme také zanedbali viskozitu vody, která se projevuje tak, že rychlost vody není v celém průřezu otvoru stejná, efektivně tedy snižuje poloměr r . Dále má vliv tvar nádoby, v našem případě je „dokonale zúžená“, neboť v rovném dnu máme malý otvor. To má za následek, že elementy vody narážejí do dna a mění směr své hybnosti, tím se tedy také snižuje rychlost výtoku vodu. Experiment by měl proto dávat delší časy výtoku, než předpovídá teorie.

Postup měření

K úspěšnému provedení experimentu je potřeba mít válcovou nádobu s malým otvorem ve dně. Proto není moc vhodné používat kelbík, protože ten nemá konstantní průřez. Vyrobit si vlastní nádobu například z plastu tak, že k plastové rouře o vnitřním poloměru R přilepíme (například pomocí tavné pistole) rovné dno s dírkou o poloměru r . Celou aparaturu pevně upevníme a plníme ji vodou do různých výšek. Při odměřování času, za který se nádoba vyprázdní, nečekáme do okamžiku, kdy je nádoba zcela prázdná. Lepší je postupovat tak, že si na nádobě uděláme rysku „nulové výšky“ a měříme čas, než hladina klesne na tuto rysku. Přesný okamžik vyprázdnění nádoby nelze totiž určit. Doby výtoku budeme proměřovat pro dvanáct různých výšek, pro každou výšku provedeme tři měření. Abychom zajistili během všech těchto tří měření stejnou počáteční výšku hladiny, naléváme do nádoby vždy stejný odměřený objem vody.

Čas měříme na stopkách, výšku hladiny a průměr nádoby svinovacím metrem a průměr otvoru posuvným měřítkem.

Výsledky měření

Po zhotovení aparatury jsme změřili průměr nádoby a otvoru

$$2R = (124 \pm 2) \text{ mm}, \quad 2r = (8,0 \pm 0,5) \text{ mm}.$$

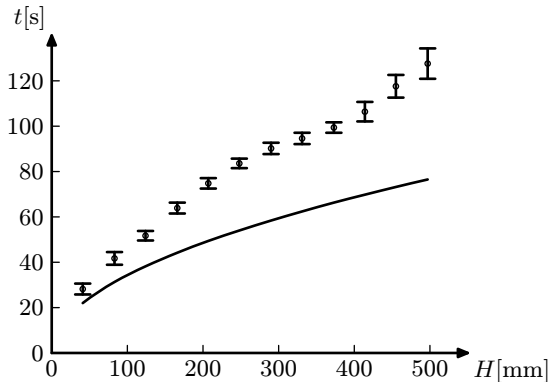
Doby výtoku pro jednotlivé počáteční výšky hladiny jsou uvedeny v následující tabulce.

H [mm]	t_1 [s]	t_2 [s]	t_3 [s]	t [s]	Δt [s]
41	29,1	27,6	27,9	28,2	2,4
83	41,3	43,0	40,8	41,7	2,8
124	52,1	51,4	51,7	51,7	2,1
166	64,6	63,1	64,0	63,9	2,4
207	74,1	75,4	75,0	74,8	2,3
248	83,2	84,1	83,6	83,6	2,1
290	90,8	90,5	89,2	90,2	2,5
331	95,9	94,3	94,4	94,9	2,5
373	100,2	98,9	99,2	99,4	2,3
414	108,7	106,2	104,3	106,4	4,3
455	120,4	115,2	117,1	117,6	5,0
497	131,6	124,3	127,0	127,6	6,7

V posledním sloupci je uvedena chyba hodnot t . Určíme ji ze vztahu

$$\Delta t = \sqrt{(3s_{sm})^2 + s_m^2},$$

kde s_{sm} je směrodatná odchylka a s_m je chyba měření, kterou v našem případě odhadujeme na 2 s (podle toho jak přesně bylo možné určit okamžik, kdy hladina klesla na námi vyznačenou rysku). Tyto hodnoty t spolu s chybovými úsečkami Δt vyneseme do grafu v závislosti na H (viz obr. 28). Hodnoty H považujeme za přesné, neboť jejich chyba je vzhledem k chybě měření času zanedbatelná.



Obr. 28

Do grafu rovněž zakreslíme teoretickou křivku danou vztahem (50). Její hodnoty jsou ovšem také zatíženy chybou, neboť neznáme přesně r a R . Pro relativní chybu teoretických hodnot platí

$$\delta t_{\text{teor}} = 2\delta r + 2\Delta R = 8\%.$$

Diskuse a závěr

Z grafu jasně vidíme, že i když uvážíme chybu teoretických hodnot, tak nám naměřené hodnoty doby výtoku vyjdou větší než teoretické. To potvrzuje naše očekávání, které jsme

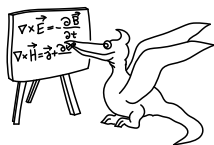
rozebrali v teoretickém úvodu. Naměřené hodnoty mají i podobný průběh jako teoretická křivka, jenom poslední tři hodnoty uhýbají k větším časům. To je pravděpodobně způsobeno změnou charakteru proudění.

Náš teoretický model tedy neodpovídá skutečnosti. Zmenšováním velikosti otvoru se mu ale můžeme dosti přiblížit. V technické praxi se zavádí rychlostní koeficient, který charakterizuje rychlost výtoku kapaliny z otvoru, a koeficient výtoku, který charakterizuje tvar nádoby. S jejich uvážením by se teoretická křivka a naměřené hodnoty v rámci chyby shodovaly.

Poznámky k došlým řešením

S většinou došlých řešeních jsem byl velice spokojen, relativně hodně řešení bylo ohodnoceno plným počtem bodů. Řešitelé přistoupili k problému dobře a vypořádali se i s teorií. Z důvodu časové tísně jsme si s dovolením vypůjčili naměřené hodnoty *Tomáše Bednářika*, moc mu děkujeme.

Honza Prachař
honzik@fykos.mff.cuni.cz



Seriál na pokračování

O čem to bude?

Letošní seriál se bude zabývat elektromagnetizmem. Jedná se o disciplínu, o jejímž praktickém i teoretickém významu nelze pochybovat. O praktických aspektech se zřejmě není třeba zmiňovat, na elektromagnetickém základě je založena většina dnešní techniky od velkých strojů po miniaturní elektroniku. Nemenší revoluci ovšem způsobil objev teorie elektromagnetického pole v samotné teoretické fyzice.

O tomto textu

Než se pustíme do fyziky, pokusíme se popsat, co lze očekávat od tohoto seriálu. V žádném případě ho nelze zaměňovat s učebnicí⁵, tu ostatně budete pravděpodobně při jeho čtení často potřebovat. Cílem je popsat některé části této jinak velmi složité a obsáhlé disciplíny, a to pokud možno pro středoškolačka srozumitelnou a zajímavou formou.

Při čtení seriálu mějte neustále na paměti, že je tu právě pro vás. Nemůžeme samozřejmě vyhovět všem, někdo se z něj příliš nového nedozví⁶ a jinému se bude možná zdát příliš těžký. Chceme se proto pohybovat na takové úrovni, která bude vyhovovat co nejvíce čtenářům. To se nám ovšem nepodaří bez vašich ohlasů.

Na adresu serial@fykos.mff.cuni.cz pošlete veškeré dotazy a připomínky, ať už půjde o upozornění na chybu, doplňující dotaz k výkladu či přání na obsah dalších dílů. V žádném případě se nebojte napsat, že jste něco nepochopili. Bude-li vás více, pokusíme se k tématu podrobněji vrátit i v dalších dílech. Každý ohlas nám pomůže zlepšit kvalitu seriálu.

Kapitola 1: Co to je pole?

Špetka historie

Na začátku 19. století byly známy některé jevy, které v současné době vysvětlujeme elektromagnetickou teorií. Nejprve se elektřina a magnetismus vyvíjely odděleně, ale poměrně brzy bylo jasné, že navzájem souvisí. Např. vodič s proudem vytváří magnetické pole a změna magnetického pole vytváří pole elektrické. Pestrý řetěz experimentů a dílčích teorií završil roku 1873 skotský fyzik a matematik James Clerk Maxwell formulací tzv. Maxwellových rovnic pro elektromagnetické pole.

Elektrický náboj

Než si vysvětlíme, co to vlastně je elektromagnetické pole, je třeba zmínit jiný pojem – *elektrický náboj*. Podobně jako hmotnost je elektrický náboj vlastností hmoty. Většinou o něm hovoříme v souvislosti s elementárními částicemi – ty jsou buď elektricky neutrální (mají nulový náboj), nebo nesou elektrický náboj určité velikosti. Narozdíl od hmotnosti může elektrický náboj nabývat kladné i záporné hodnoty, mluvíme o *kladném* a *záporném náboji*. Jednotkou

⁵⁾ Např. B. Sedlák, R. Bakule: *Elektřina a magnetismus*, SPN, Praha 1973, 1980, 1986.

⁶⁾ Celý první díl je převážně o zavedení základních pojmů. Kdo se při jeho čtení bude nudit, může nám místo toho poslat náměty na další díly.

náboje v soustavě SI je coulomb (C), o jeho definici se zmíníme později. Značí se většinou Q či q .

Náboj neutronu je nula, proton a elektron mají stejně velký náboj⁷ opačného znaménka o velikosti $e = 1,602\,176\,462 \cdot 10^{-19}$ C, tzv. *elementární náboj*. Historicky byl stanoven⁸ náboj protonu kladný a elektronu záporný.

Důležitou vlastností elektrického náboje je jeho „nezávislost na ničem“. Elektron má náboj e nezávisle na tom, kde se nachází, jak rychle se pohybuje, jak a s čím interaguje, či z jaké soustavy ho pozorujeme. Ze speciální teorie relativity víme, že hmotnost takové vlastnosti nemá!

Interakce elektrických nábojů

Veškeré elektromagnetické jevy nějakým způsobem souvisí s elektrickým nábojem. Ano, i magnetické! Jedním z důvodů, proč jsou elektřina a magnetismus neoddělitelné, je právě fakt, že neexistují žádné magnetické náboje. Zjednodušeně lze říct, že celá elektromagnetická teorie je o popisu vzájemného působení elektrických nábojů⁹.

Tedy možná někteří z vás vylovili z paměti tzv. Coulombův vzorec pro silové působení mezi dvěma náboji a uvědomili si, že na něm asi nebude vše zcela v pořádku. Podle tohoto vzorce na sebe dva náboje působí navzájem opačnými silami (akce a reakce) ve směru jejich spojnice o velikosti $F = kQ_1Q_2/r^2$ (r je vzdálenost nábojů o velikostech Q_1 a Q_2 a k je konstanta), síly jsou odpudivé pro souhlasně nabitě a přitažlivé pro opačně nabitě náboje.

Pokud by Coulombův vzorec bez omezení platil, pak by jím byl (v duchu předminulého odstavce) popsán celý elektromagnetismus. Tak jednoduché to ale není. Pohne-li se např. jeden z nábojů, neprojeví se změna síly na druhý náboj okamžitě, ale s určitým zpožděním. Pohybují-li se oba náboje, přidává se ke coulombické síle ještě další složka, která, jak se dozvíme, odpovídá magnetickému působení. Coulombův zákon přesně platí pouze pro náboje, které jsou neustále v klidu (tzv. elektrostatika).

Co to tedy je to pole?

Ukazuje se, že opravit nějakým jednoduchým způsobem Coulombův vzorec tak, aby za každé situace správně udával silové působení dvou nábojů, není možné. Místo toho se zavádí prostředník, kterým je právě elektromagnetické pole. Představa o vzájemném působení nábojů je upřesněna. Náboje vytváří v prostoru entitu zvanou *elektromagnetické pole*, její vznik a chování popisují již zmíněné *Maxwellovy rovnice*. Toto pole pak na náboje, které se v něm nachází, působí silou. Tato síla je součtem elektrické a magnetické síly a nazývá se *Lorentzova*.

Teorie se nám tedy rozpadá do dvou částí. Jedna bude popisovat působení elektromagnetického pole na náboje. Tato část je triviální a je obsažená ve vzorci pro Lorentzovu sílu dále v tomto textu. Druhá část bude popisovat chování a vlastnosti elektromagnetického pole. Jak už jsme zmínili, budou zde hlavní roli hrát Maxwellovy rovnice.

Elektromagnetické pole lze tedy považovat za formální matematický prostředek sloužící k popisu interagujících nábojů. Ukazuje se ovšem, že fyzikální význam elektromagnetického pole je hlubší a že je třeba ho chápat jako něco, co skutečně v prostoru existuje (podobně jako

⁷⁾ I ostatní elektricky nabitě částice mají stejně velký náboj, případně jeho racionální násobek, nicméně pro samotnou elektromagnetickou teorii není toto „kvantování náboje“ podstatné.

⁸⁾ Lze to chápat jako jistou konvenci, žádný fundamentální důvod v této volbě není.

⁹⁾ Platí to i pro elektromagnetické vlny, které se šíří i bez přítomnosti nábojů. Bez nábojů je ale nelze ani vytvořit, ani detekovat, je to tedy také forma interakce mezi náboji.

tam existují náboje nebo hmota). Jedním z hlavních argumentů je fakt, že pole má takové vlastnosti jako energii či hybnost¹⁰.

Co to znamená matematicky

Elektromagnetické pole má dvě složky – elektrickou a magnetickou. Obě jsou tzv. vektorová pole, tj. v každém bodě prostoru je určen vektor udávající „sílu“ tohoto pole v tomto bodě. Tato „síla“ se u elektrického pole nazývá *elektrická intenzita*, značí se \mathbf{E} a má jednotku $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$. U magnetického pole to pak je *magnetická indukce* značená \mathbf{B} s jednotkou Tesla (T).

Matematicky je tedy celé pole dané šesti funkcemi čtyř proměnných (tři složky \mathbf{E} a tři složky \mathbf{B} jsou funkcemi prostorových souřadnic a v případě nestacionárního pole i času). Je důležité si uvědomit, že pole není narozdíl od veličin jako je hmotnost či síla určené jedním či více čísly. Je třeba znát velikost a směr pole v každém bodě oblasti, ve které ho zkoumáme!

Lorentzova síla

Na náboj q umístěný v elektrickém poli působí (elektrická) síla $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$. Znaménko náboje je důležité – na kladný náboj působí síla ve směru \mathbf{E} , na záporný náboj v opačném směru. Vektor \mathbf{E} bereme pochopitelně v místě, kde se právě nachází náboj. S magnetickou silou je to o něco složitější – působí pouze na pohybující se náboje a to podle vzorce $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Komu nic neříká křížek v tomto vzorci, měl by co nejdříve zalistovat nějakou učebnici (nebo vyhledat učitele matematiky). Jde o *vektorový součin* dvou vektorů, jeho znalost se vám bude hodit mnohem častěji než jen při výpočtu magnetické síly.

Úloha I. S ... elektromagnetické pole

- V prostoru je homogenní magnetické a elektrické pole (homogenní pole má svou veličinu všude stejnou co do velikosti i směru). Je dána velikost \mathbf{E} i \mathbf{B} a tyto vektory jsou na sebe kolmé. Jak se musí pohybovat elektron, aby na něj nepůsobila žádná síla? Jak je to v případě, že \mathbf{E} a \mathbf{B} svírají úhel 60° ?
- Jak bylo řečeno v seriálu, při přemístění jednoho náboje se nezmění síla působící na jiné náboje hned. Pokuste se na základě tohoto faktu vysvětlit, proč má elektromagnetické pole hybnost.

Co je to elektrostatika?

Než se pustíme do samotného výkladu, musíme si vymezit pojem elektrostatiky. Jak jsme si již řekli v minulém díle seriálu, má elektromagnetické pole dvě složky – elektrickou a magnetickou. Tyto dvě složky nejsou až tak úplně nezávislé – pokud to ještě nevíte, tak vezte, že proměnné elektrické pole vyvolává proměnné magnetické pole a naopak. Tomuto jevu se říká elektromagnetická indukce. V elektrostatickém poli, jak už název napovídá, bude v tomto ohledu stacionární stav. Elektrické pole se zde nemění, což znamená, že se neindukuje magnetické, a proto elektrostatické pole je reprezentováno pouze vektorem elektrické intenzity \mathbf{E} .

¹⁰⁾ V tom smyslu, že může energii a hybnost získávat od nábojů nebo ji nábojům předávat, bez započítání pole neplatí zákony zachování. O zákonech zachování v elektromagnetickém poli se podrobněji zmíníme v dalších dílech.

Intenzita

Uvažujme dva statické (nepohybující se) bodové náboje q_1 a q_2 . Silové působení prvního náboje na druhý můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^3} \mathbf{r}. \quad (51)$$

Veličina \mathbf{E} představuje vektorové pole, nazývá se *intenzitou elektrostatického pole* a je to vlastně síla, která působí v daném bodě na jednotkový kladný elektrický náboj. Jak vidíme ze vztahu (51), závisí \mathbf{E} v elektrostatice pouze na vzdálenosti nábojů.

Důležitá vlastnost elektrické intenzity je její *aditivita*. To znamená, že pokud máme soustavu více bodových nábojů, je výsledná intenzita v určitém bodě součet intenzit od jednotlivých nábojů. Tato skutečnost se někdy nazývá také slovy *princip superpozice* nebo *linearita*. Ale pozor! V tomto případě nejde o aritmetický součet, ale jde o součet vektorový (mnozí si jistě vzpomenou na doplňování na rovnoběžník).

Pro získání představy o průběhu pole dané soustavy nábojů je výhodné zavést tzv. *siločáry*, což jsou orientované křivky a mají tu vlastnost, že vektor intenzity má ve všech bodech této křivky směr tečny. Siločáry vždy vycházejí z kladných nábojů a vstupují do záporných. Pokud je při ruce jen kladný, resp. záporný náboj, siločáry se rozbíhají od náboje do nekonečna, resp. sbíhají k náboji z nekonečna. Hustotou siločar je možné vyjádřit velikost intenzity pole podobně, jako lze na mapě vyjádřit příkrost svahu hustotou vrstevnic. Můžete si rozmyslet, proč mají siločáry izolovaného bodového náboje tvar přímek a proč se obecně nikdy žádné dvě siločáry nemohou protnout.

Potenciál

Elektrická intenzita \mathbf{E} není jedinou veličinou, kterou lze popsat elektrostatické pole. Často se používá *elektrický potenciál* φ . Je to narozdíl od intenzity veličina skalární, tj. v každém bodě je reprezentována číslem (skalárem). Stejně jako intenzita \mathbf{E} souvisí se silou, potenciál φ souvisí s energií (a to potenciální, jak název napovídá). Máme-li opět bodové náboje q_1 a q_2 , vyvolává první náboj kolem sebe pole s potenciálem o velikosti

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}. \quad (52)$$

Náboj q_2 má v takovém poli potenciální energii o velikosti

$$E_p = q_2 \varphi. \quad (53)$$

Stejně jako intenzita je i potenciál aditivní, ale protože je to skalár, můžeme jednotlivé potenciály prostě sčítat.

Pomocí potenciálu můžeme vyjádřit také práci vykonanou polem při přenesení náboje. Označíme-li počáteční bod indexem 1 a koncový indexem 2, musí ze zákona zachování energie platit

$$W = E_{p1} - E_{p2} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Jak vidíme, vykonaná práce závisí pouze na velikosti přenášeného náboje a na velikostech potenciálu v počátečním a koncovém bodě. To je ovšem velmi důležitý poznatek. Práce totiž nezávisí na křivce, po které jsme se dostali z počátečního do koncového bodu (mohla to být

prostě přímka, ale také půlkružnice). Takováto pole označujeme jako konzervativní a patří mezi ně kromě elektrického také např. gravitační pole.

Důležitá veličina, která souvisí s potenciálem, je napětí mezi dvěma body. To je jednoduše definováno jako rozdíl potenciálů v těchto bodech $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Pomocí něho můžeme vztah pro práci v elektrostatickém poli přepsat do tvaru $W = qU$. Zajímavou otázkou je, co se stane, když ve vztazích (51) a (52) dosadíme nulové r . V tomto případě by byly obě hodnoty nekonečné. Abychom tomu předešli, definujeme \mathbf{E} i φ pouze pro $r > 0$.

Souvislost mezi intenzitou a potenciálem

Mezi vektorovou funkcí $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ a skalární funkcí $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ platí vztah

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}). \quad (54)$$

Symbol $\nabla\varphi$ značí vektor

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right).$$

nazývaný gradientem funkce φ . Elektrická intenzita má tedy směr největšího poklesu potenciálu (znaménko minus), což právě vyjadřují parciální derivace.

Takže pokud máme zadaný potenciál φ jako funkci polohy, můžeme z ní jednoznačně určit velikost intenzity v kterémkoliv bodě. Ale platí to i obráceně? Skoro ano. Protože při výpočtu \mathbf{E} z φ jsme museli derivovat, budeme muset při obráceném postupu integrovat. Zatímco derivace funkce je jednoznačná (pokud existuje), tak výsledek integrálu je určen až na konstantu. Zde se jedná o integrál křivkový, to znamená, že jdeme po integrované křivce \mathbf{E} a sečítáme postupně součiny $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, tedy

$$\varphi = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Když víme, co je křivkový integrál, můžeme zapsat podmínku pro konzervativní pole ve tvaru

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Integrál s kroužkem znamená, že se integruje po uzavřené křivce. To tedy znamená, že pokud se pohybujeme po libovolné trajektorii v elektrostatickém poli a vrátíme se zpět do výchozí pozice, nevykoná se při tom žádná práce.

Gaussova věta

Jedním z možných výpočetních nástrojů v elektrostatiice je Gaussova věta. Ačkoli nemá obecně velké použití k řešení složitějších příkladů, při některých jednodušších se může dobře uplatnit. A hlavně prezentuje velmi důležitý fundamentální princip. Můžeme ji zapsat ve tvaru

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (55)$$

Zkusme si teď vyložit, co znamená tento formální zápis. Uvažujme nějakou uzavřenou plochu (např. sféru) a rozdělme ji na diferenciální plošky $d\mathbf{S}$. Pro každou takovou plošku spočítáme skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, kde \mathbf{E} je intenzita na této plošce (tomuto součinu se říká tok intenzity).

Gaussova věta pak říká, že pokud tento součin integrujeme¹¹ přes celou plochu, potom se tento integrál bude rovnat velikosti náboje (či součtu nábojů) dělené konstantou ε_0 , který je uvnitř této uzavřené plochy.

No jo, ale k čemu to vlastně je? Vždyť většinou známe právě velikost náboje v určitém místě a potřebujeme spočítat intenzitu. Ale to je jednoduché! Zvolíme si takovou uzavřenou plochu, na které je intenzita všude stejná a nejlépe kolmá na danou elementární plošku, tudíž vztah (55) se redukuje na tvar

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (56)$$

Nejlépe to bude ukázat na dvou příkladech.

Nejdříve zkusme spočítat intenzitu ve vzdálenosti r od bodového náboje. Hledaná uzavřená plocha bude kulová plocha o poloměru r . Z důvodu symetrie musí totiž mít intenzita ve dvou bodech vzdálených r od bodového náboje stejnou velikost. Do vztahu (56) dosadíme $S = 4\pi r^2$ a vyjde

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Podobnost tohoto vztahu s Coulombovým zákonem je evidentní.

Gaussova věta nám ale umožňuje spočítat nejen intenzitu od bodových nábojů, ale také od nabitých ploch či drátů. Spočítejme teď intenzitu od nekonečné nabitě roviny o plošné hustotě náboje σ . Uvažujme proto malý váleček, jehož podstavy jsou rovnoběžné s rovinou a každá je na její opačné straně. Obsah jeho podstavy je S' , potom celkový náboj uzavřený válečkem má velikost $Q = \sigma S'$. Vektor elektrické intenzity je kolmý na podstavy válečku, tok pláštěm je tedy nulový. Dosadíme tedy do (56) $S = 2S'$ a vyjde

$$E \cdot 2S' = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Poissonova a Laplaceova rovnice

Na závěr si ukážeme o trochu složitější teorii týkající se elektrostatiky. Někteří z vás již jistě viděli Maxwellovy rovnice, o nichž jsme se již zmínili v minulém díle. Nás teď bude zajímat první z nich, která má ve vakuu tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Veličina ρ je objemová hustota náboje. V námi zkoumaných případech bude většinou v prostoru ρ nulové, náboj se bude nacházet v izolovaných bodech, na křivkách nebo nějakých plochách. Jak popsat hustotu takto rozmístěného náboje si povíme v některém dalším dílu. Konstanta ε_0 je tzv. *permitivita vakua*. Nezkoumejme zatím, co to znamená, a proč by, jak název napovídá, nemusela být permitivita jiných prostředí stejná. Považujme nyní ε_0 za univerzální konstantu, její hodnota je $\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.

¹¹⁾ Neboli sečteme intenzity \mathbf{E} násobené obsahy malých plošek, na kterých jsou tyto vektory definovány. Řešitelům, kteří ještě neovládají diferenciální a integrální počet, doporučujeme prostudovat příslušnou literaturu, tedy vše, co má v názvu hesla jako : *derivative*, *integrál*, *matematická analýza*, *diferenciální počet*.

V rovnici se opět vyskytuje symbolický vektor ∇ . Narozdíl od gradientu, kdy vpravo stálo skalární pole, zde vpravo stojí vektorové pole a navíc je zde naznačen skalární součin. Rozepsáno do složek to vypadá asi takto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (E_x, E_y, E_z) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Jak je již zapsáno na pravé straně, značí se tento operátor také symbolem div a nazývá se divergence. Jedná se zřejmě o operátor, který z vektorového pole dělá pole skalární prostě tak, že v každém bodě sečte hodnoty parciálních derivací jeho složek podle odpovídajících proměnných. Naproti tomu symbol ∇ aplikovaný na skalární pole (bez skalárního součinu) představuje operátor, který ze skalárního pole dělá pole vektorové a nazývá se gradient.

Do první Maxwellovy rovnice nyní dosadíme za intenzitu z (54).

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = (\nabla \cdot \nabla) \varphi = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (57)$$

nebo, trochu jinak zapsáno,

$$-\operatorname{div} \mathbf{E} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Symbol Δ značí Laplaceův operátor. Jeho rozepsání na složky vidíme ve druhé rovnici. Také vidíme, že když zapomeneme jméno matematika¹², podle kterého je pojmenován, můžeme říkat „divergence gradientu“. Platí hezký operátorový vztah $\Delta = \nabla^2$.

Vztah (57) je tzv. Poissonova rovnice. Pokud se v uzavřené ploše nenachází žádný náboj, je $\rho = 0$ a rovnice (57) se redukuje na Laplaceovu rovnici

$$\Delta \varphi = 0. \quad (58)$$

Pro jistotu připomínáme, že symbol Δ zde značí diferenciální operátor, nejedná se o velké řecké Delta, kterým se obvykle značí rozdíl veličiny v různých bodech, časech apod.

Jednoznačnost řešení Laplaceovy rovnice

Pro čtenáře, který se prokousal předchozí sekcí, máme dobrou zprávu. Nebudeme se nyní (jakkoliv by to mohlo být zajímavé) pokoušet diferenciální Laplaceovu či Poissonovu rovnici řešit. Místo toho se na ni podíváme obecněji a vyvodíme z ní principy, které budeme moci při úvahách o elektrostatickém poli používat bez jakýchkoliv výpočtů. Bude se přitom jednat o věci, které by se pouze pomocí Coulombova zákona či Gaussovy věty popisovaly jen velmi obtížně, např. proč je uvnitř vodiče vždy nulové pole, či jak funguje Faradayova klec.

Představme si uzavřenou plochu, na níž známe potenciál. Laplaceova rovnice nám umožňuje předpovědět, jaký bude potenciál uvnitř i vně této plochy, aniž bychom předem znali rozložení nábojů či nabitých ploch vně dané plochy. Důkaz jednoznačnosti je přitom jednoduchý a intuitivní. Představme si, že rovnici vyhovují dva potenciály $\varphi_1(\mathbf{r})$ a $\varphi_2(\mathbf{r})$. Potom potenciál

¹²⁾ Pierre-Simon Laplace (1749–1827), francouzský matematik a fyzik. Rovnici $\Delta \varphi = 0$, kterou dnes po něm nazýváme, zkoumal kolem roku 1800 v díle *Mecanique Celeste*. Nejedná se tudíž o žádnou žhavou novinku.

$\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})$ také díky linearitě Δ splňuje Laplaceovu rovnici s nulovou okrajovou podmínkou.

Stačí tedy ukázat, že libovolné $\varphi_0(\mathbf{r})$ vyhovující (58) s nulovou okrajovou podmínkou je nulové. To je ale zřejmé, protože v opačném případě by v nějakém bodě existoval extrém potenciálu a ploškou opsanou kolem tohoto bodu by procházel nenulový tok \mathbf{E} . Podle Gaussovy věty by pak byl uvnitř této plošky nenulový náboj, což je ve sporu s našimi předpoklady.

Jak tohoto poznatku prakticky využít si ukážeme v příštím dílu.

Úloha II. S ... elektrostatika

- Spočtete intenzitu elektrického pole v okolí dlouhého rovnoměrně nabitého drátu.
- Dokažte, že rovnoměrně nabitou kouli lze nahradit bodovým nábojem v jejím středu. Lze tento výsledek aplikovat i na gravitační pole (vysvětlete proč ano, resp. proč ne)?

Elektrický dipól

Elektrickým dipólem se obvykle rozumí soustava dvou bodových nábojů $Q_- < 0, Q_+ > 0$ stejné velikosti Q , ale opačného znaménka, umístěných v bodech $\mathbf{r}_-, \mathbf{r}_+$ ve vzájemné vzdálenosti l . Pokud chceme vyšetřit elektrické pole dipólu, označíme k tomu účelu vektor $\mathbf{l} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ a zavedeme *elektrický dipólový moment* vztahem

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{l}.$$

Dipól umístíme v počátku soustavy souřadnic tak, že vektor \mathbf{l} , který míří od záporného náboje ke kladnému, bude orientován v kladném směru osy y a počátek bude pólit délku l . Osa y je pak rotační osou symetrie dipólu. Jeho elektrostatické pole tedy stačí počítat v jedné rovině (vybereme $z = 0$). V libovolném bodu roviny xy bude platit

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{R}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{R}_-|} \right).$$

Kde \mathbf{R}_- resp. \mathbf{R}_+ je vzdálenost náboje Q_- resp. Q_+ od bodu A, ve kterém pole počítáme. Předpokládejme nyní, že vzdálenost bodu A od počátku je mnohem větší než rozměr dipólu, tj. $R_- \gg l, R_+ \gg l$. V tomto přiblížení pro potenciál dostáváme (viz obr. 29)

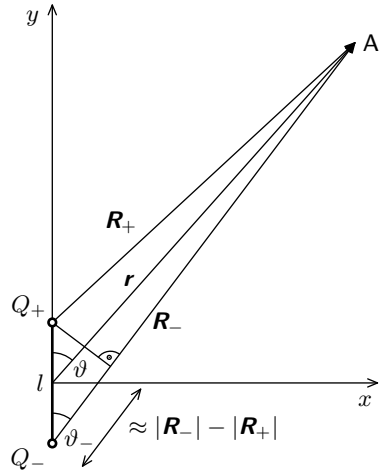
$$\varphi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql \cos \vartheta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

V limitě, kdy $l \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty$ a \mathbf{p} zůstává konečný, vznikne bodový útvar, jehož elektrostatické pole je přesně dáno předchozím vztahem. Nazýváme jej *bodovým elektrickým dipólem*.

Elektrostatické dipólové pole

Pro intenzitu elektrostatického pole platí obecný vztah (jak již víme z minulého dílu) $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$. Po dosazení za $\varphi(\mathbf{r})$ dostáváme pro intenzitu elektrostatického pole od dipólu

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right].$$



Obr. 29

Výpočet x -ové složky:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{p_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{2x(p_x x + p_y y + p_z z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})x}{r^5} - \frac{p_x}{r^3}.$$

Získaný vztah aplikujeme na náš bodový dipól ve směru osy y . Složky intenzity pak jsou

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xy}{r^5}$$

$$E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right)$$

Pro body na ose y ($\vartheta = 0$) bude platit $E_x = 0$, $E_y = p/2\pi\epsilon_0 r^3$, pro body na ose x ($\vartheta = \pi/2$) dostaneme $E_x = 0$ a $E_y = -p/4\pi\epsilon_0 r^3$.

Dipól ve vnějším elektrostatickém poli

Zkusme nyní naopak vyšetřit, jak působí elektrostatické pole na elektrický dipól. Díky tomu, že vzdálenost l je neměnná, můžeme na dipól pohlížet jako na tuhou soustavu. Na jednotlivé náboje působí síly $\mathbf{F}_+ = Q\mathbf{E}(\mathbf{r}_+)$, $\mathbf{F}_- = Q\mathbf{E}_-(\mathbf{r}_-)$. Podle pravidel známých z mechaniky tuhého tělesa můžeme obě tyto síly přenést do jednoho bodu, vektorově je složit a jejich výslednici doplnit dvojicí sil vhodného momentu. Přeneseme-li sílu \mathbf{F}_+ do bodu \mathbf{r}_- dostaneme pro výslednici

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = Q[\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_-)] \approx Q \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial E_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial E_x}{\partial z} l_z, F_y, F_z \right).$$

To lze zapsat vektorově jako

$$\mathbf{F} \approx Q(\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{r}_-),$$

kde operátor $\mathbf{p} \cdot \nabla$ má tvar

$$p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Podstatné je si uvědomit, že elektrické pole se musí místo od místa měnit, aby celková síla působící na dipól byla nenulová. Dynamický účinek výslednice \mathbf{F} je podle zmíněných pravidel mechaniky ještě nutné doplnit silovou dvojicí momentu

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times \mathbf{F}_+ = Q[\mathbf{l} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_+)] = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}_+).$$

Obdobně můžeme určit i potenciální energii elektrického dipólu ve vnějším elektrostatickém poli

$$W = Q[\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-)] \approx Q \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} l_z \right) = \mathbf{p} \cdot \nabla \varphi = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

Tento poslední vztah je hodný zapamatování a ve středoškolských učebnicích se často uvádí bez odvození, neboť to, jak vidíte, je náročné na matematický aparát. Jelikož příroda se snaží minimalizovat svoji energii, snaží se elektrostatické pole natočit dipól do svého směru.

Elektrostatické pole v dielektrikách

Zatím jsme se celou dobu zabývali vlivem elektrostatického pole na vodiče, což jsou látky, které mají schopnost převádět elektrický náboj. Dielektrika tuto schopnost nemají a mohou sloužit jako izolanty. To však neznamená, že by se dielektrikem a vnější elektrostatické pole vzájemně nijak neovlivňovaly. O charakteru tohoto vlivu se můžeme přesvědčit, když prostor mezi deskami kondenzátoru naplníme homogenním izotropním dielektrikem. Napětí mezi elektrodami po vložení dielektrika poklesne a při zachování náboje musí stoupnout kapacita kondenzátoru. To je charakterizováno bezrozměrnou veličinou ε_r , která se nazývá relativní permitivita.

Polarizace dielektrika

Dielektrikum si představujeme jako látku plnou malých dipólků realizovaných polárními molekulami nebo atomy, ve kterých se díky vnějšímu poli posune nepatrně obal vůči jádru. V nulovém vnějším poli bývají dipólky natočeny náhodně. V nenulovém poli jsou ale natočeny (kvůli silám uvnitř pevné látky se natočí většinou jen částečně) do směru pole. Sečteme-li pak vektorově dipólový moment v jednotce objemu látky, vyjde nám číslo, kterému říkáme *vektor elektrické polarizace* \mathbf{P} . Dielektrikum nemusí být polarizováno homogenně, pak má smysl mluvit o vektoru polarizace závislém na poloze \mathbf{r} .

Po chvíli by se dalo odvodit, že elektrostatické pole vytvořené konečným objemem V spojitě rozložených elektrických dipólů můžeme nahradit elektrostatickým polem nábojů rozložených na povrchu tohoto objemu s plošnou hustotou σ_p a uvnitř tohoto objemu s objemovou hustotou ρ_p . Plošná hustota σ_p závisí přitom pouze na směru vektoru elektrické polarizace \mathbf{P} a normály \mathbf{n} na povrchu objemu, objemová hustota ρ_p je různá od nuly jen v případě nehomogenní polarizace. Mezi těmito veličinami platí vztahy

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Oba vztahy představují jakousi obdobu Gaussovy věty a ideí z elektrostatiky ve vakuu, jak se za chvíli ukáže.

Náboje v dielektriku můžeme tedy rozdělit na *volné* (např. poletující elektron) a *vázané* (polarizační, ty z předchozích dvou vztahů). Narozdíl od volných nábojů se vázané nemohou ve vodičích přemísťovat. Celková objemová hustota nábojů ρ_c se potom dá vyjádřit jako součet hustoty volných ρ a vázaných nábojů ρ_p . Stejně tak můžeme i elektrické pole v dielektriku rozložit na pole od nábojů volných a vázaných. Pro vektor výsledné elektrické intenzity potom platí

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_p.$$

Vektor \mathbf{E}_0 značí intenzitu pole volných nábojů, \mathbf{E}_p vázaných.

Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku

První dílčí poznatek říká, že i v přítomnosti vázaných nábojů zůstává pole elektrostatické, tedy i potenciální (existuje jeho potenciál), a musí nutně platit

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

V platnosti ale zůstává i Gaussův zákon, jen si musíme uvědomit, že celkový náboj Q_c je dán nejen volnými náboji Q , ale i vázanými Q_p . Dostáváme tedy

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_c}{\varepsilon_0} = \frac{Q + Q_p}{\varepsilon_0}.$$

Pro náboj Q_p ale platí

$$Q_p = \int \rho_p dV = - \int \nabla \cdot \mathbf{P} dV = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} = Q.$$

V posledním vztahu zavedeme nový vektor

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

a nazveme ho *vektorem elektrické indukce*. S jeho pomocí můžeme Gaussův zákon psát ve tvaru, který známe pro volné náboje:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho.$$

Veličiny Q a ρ se vztahují na volné náboje, stejně jako v elektrostatice ve vakuu.

Úloha III. S ... dipóly

Spočítejte sílu působící mezi dvěma dalekými elektrickými dipóly o momentech \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 ve vzdálenosti r , pokud

- leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány,
- jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém na spojnici,
- dipól \mathbf{p}_1 je orientován kolmo ke spojnici, \mathbf{p}_2 rovnoběžně s ní směrem k prvnímu.

Kapitola 4: Magnetické pole ve vakuu

Historická exkurze

Již ve starověku bylo známé výrazné silové působení mezi určitými látkami. Z látek jevících takové chování byly známy některé nerosty obsahující především oxidy železa a také kovové železo. Kromě toho se také vědělo, že podobné vlastnosti jeví Země jako celek.

Nová etapa ve vývoji poznatků o magnetizmu nastala objevem magnetických účinků vodičů, kterými protékal proud. Vše začal H. Ch. Oersted zjištěním, že magnetka v blízkosti vodiče s proudem mění svou polohu. Záhy objevil A. M. Ampère silové působení mezi dvěma vodiči s proudem. Na základě poznatků získaných z experimentů byl zaveden pojem magnetického pole, které se projevuje silovými účinky na zmagnetovaná tělesa, vodiče s proudem, či na pohybující se elektrické náboje. Zdrojem magnetického pole mohou být zmagnetovaná tělesa nebo makroskopické proudy. Později bylo prokázáno, že magnetické účinky obou těchto zdrojů jsou ekvivalentní.

Magnetická indukce

Experimenty prokázaly, že magnetické pole může existovat jak ve vakuu, tak v látkovém prostředí. Jeho účinky je výhodné popisovat pomocí vektorového pole. Lze si představit, že příslušné vodiče s proudem či zmagnetovaná tělesa vytvářejí ve svém okolí magnetické pole, které působí na jiné vodiče či na jiná tělesa.¹³ Veličina, která charakterizuje sílu magnetického

¹³⁾ Tento popis se nám již osvědčil u elektrostatického pole.

pole se nazývá magnetická indukce a značí se \mathbf{B} . Její jednotce říkáme *Tesla* (T). Uvažujeme-li bodovou částici nesoucí náboj q , která se pohybuje v blízkosti zmagnetovaných těles, bude na ni působit celková síla

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Toto je vztah pro *Lorentzovu sílu* a může být považován za definiční vztah pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} i pro magnetickou indukci \mathbf{B} . V případě, že elektrické pole je v daném místě nulové, působí na částici jen magnetická síla, která je dána vztahem

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Tento vztah lze upravit, budeme-li místo jediného náboje q uvažovat působení magnetického pole na libovolný proud popsany hustotou proudu \mathbf{j} . V tomto případě lze vztah pro objemovou hustotu magnetické síly (to je síla působící na jednotkový objem) psát ve tvaru

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (59)$$

Jako pro každé vektorové pole lze také pro vektor magnetické indukce zavést pojem toku. Mluvíme o magnetickém toku Φ , který je pro libovolnou orientovanou plochu S definován jako

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Jednotkou magnetického toku je *Weber* (Wb).

Cvičení 1: Elektron, který byl urychlen v elektrickém poli v potenciálním rozdílu U , vletl do homogenního magnetického pole o indukci B a kolmo k indukčním čarám opisoval kruhovou trajektorii o poloměru r . Určete měrný náboj elektronu.

$$\left[\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{r^2 B^2} \right]$$

Ampérův zákon

Zatím jsme si ukázali, jakým způsobem působí magnetické pole, pokud ho již máme popsané známou magnetickou indukcí \mathbf{B} . Dosud však nevíme, jaký je vztah magnetického pole k jeho zdrojům, jinak řečeno, jak určit vektor magnetické indukce v daném bodě, když známe rozložení proudů ve vodičích.¹⁴ Vyjdeme z experimentů o silovém působení magnetického pole a budeme nejdříve uvažovat pole přímého nekonečně dlouhého vodiče. Příslušné experimenty ukázaly, že vektor magnetické indukce \mathbf{B} má vždy směr tečny ke kružnicím se středy na ose vodiče. Velikost indukce se dala pak vyjádřit vztahem

$$B = C \frac{I}{a}, \quad (60)$$

v němž C je konstanta, a je vzdálenost od vodiče, I je velikost protékajícího proudu.

Jestliže do magnetického pole vyšetřovaného vodiče vložíme jiný přímý nekonečně dlouhý vodič s proudem I' , který je s prvním vodičem rovnoběžný, pomocí vztahů (59) a (60) můžeme určit velikost příslušné síly F , působící na daný úsek vodiče o délce l . Dostaneme

$$F = C \frac{I \cdot I'}{a} l.$$

¹⁴⁾ Kromě rozložení vodičů s proudem určují magnetickou indukci také vlastnosti okolního prostředí. O tom se více dozvíte v příštím díle seriálu.

Tohoto vztahu bylo užito k definici jednotky proudu. Konstanta C se dá napsat ve tvaru

$$C = 2 \frac{\mu_0}{4\pi},$$

kde

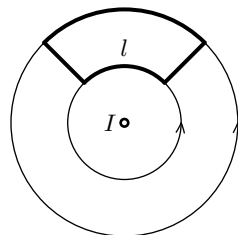
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$$

je tzv. *permeabilita vakua*. Volbou hodnoty μ_0 je určena i hodnota permitivity vakua ε_0 , neboť obě tyto konstanty mají bezprostřední vztah k rychlosti světla. Platí totiž

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2.$$

Všimněme si nyní zajímavé vlastnosti magnetického pole přímého vodiče, která souvisí s cirkulací vektoru magnetické indukce, tj. s vyšetřováním křivkového integrálu. Spočítejme křivkový integrál $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ přes křivku vyznačenou na obr. 30 (proud teče kolmo na rovinu obrázku). Díky tomu, že velikost B je nepřímo úměrná r se části integrálu z obou oblouků odečtou a rovné části mají nulový příspěvek díky nulovosti skalárního součinu. Celkem tedy platí

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$



Obr. 30

Získaný výsledek je možné zobecnit i na uzavřenou křivku obecného tvaru (rovinnou i prostoro-ovou), pokud tato křivka nebude obepínat vyšetřovaný vodič s proudem. Naopak, budeme-li hledat hodnotu integrálu podél kružnice k o poloměru r v rovině kolmé k vodiči a se středem v jeho ose, vychází

$$\oint_k \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B = 2\pi r \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I.$$

Dá se ukázat, že hodnota integrálu se nezmění, pokud místo kružnice použijeme libovolnou uzavřenou křivku. Obecně tedy můžeme psát

$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (61)$$

Vztah (61) se nazývá *Ampérův zákon* a vyjadřuje jednu ze základních vlastností magnetického pole. Tento výraz lze z integrálního tvaru převést na diferenciální. Proud I můžeme vyjádřit ve tvaru

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S},$$

po dosazení do (61) a užitím Stokesovy věty¹⁵ dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (62)$$

¹⁵⁾ Stokesova věta pomáhá převádět plošný integrál na křivkový a obráceně. Mezi těmito integrály platí vztah $\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B}$.

Vektorový potenciál, Biotův-Savartův zákon

Vyšetřování cirkulace vektoru magnetické indukce \mathbf{B} vedlo k formulaci Ampérova zákona, který vyjadřuje jednu z obecných vlastností magnetického pole. Další přirozená otázka je, jestli se nedozvíme o poli více zkoumáním magnetického toku Φ . Veškerá dosavadní experimentální zkušenost ale ukazuje, že magnetický tok libovolnou uzavřenou plochou S je roven nule.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Analogicky se tato vlastnost dá vyjádřit v diferenciálním tvaru¹⁶

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (63)$$

Oba tyto vztahy vyjadřují experimentální poznatek, že v přírodě neexistují „magnetické náboje“, které by tvořily zdroje magnetického pole. Magnetické indukční čáry, jimiž je možné magnetické pole zobrazovat, jsou tedy vždy uzavřené křivky.

Protože vždy platí $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{X} = 0$, můžeme zavést novou veličinu pomocí

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (64)$$

kde vektor \mathbf{A} nazýváme *vektorovým potenciálem* magnetického pole. Vztah (64) neurčuje vektorový potenciál jednoznačně. Protože $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r})$ je roven nule ($\psi(\mathbf{r})$ je skalární funkce), vyhovuje vztahu (64) i tvar

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi.$$

Speciálně je vždy možné vektorový potenciál vybrat tak, aby byl splněn vztah

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (65)$$

nazývaný podmínkou *kalibrační*. Dosadíme-li (64) do (62), dostaneme

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Pokud použijeme základní identitu vektorové analýzy

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A},$$

dostaneme

$$-\Delta \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

A pokud přidáme kalibrační podmínku (65), obdržíme

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j},$$

to je *Poissonova rovnice*. Vnímavému čtenáři jistě neušla podobnost s podobnou rovnicí z elektrostatiky. V elektrostátice byl řešením Poissonovy rovnice vztah

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_V \frac{\varrho(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

¹⁶⁾ Tento vztah je jednou z Maxwellových rovnic.

V analogii můžeme psát řešení ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV', \quad (66)$$

kde vektor \mathbf{R} má význam $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Integrační proměnnou je polohový vektor \mathbf{r} a integrujeme přes objem V , ve kterém je $\mathbf{j}(\mathbf{r}') \neq 0$. Pokud dosadíme z (66) do (64) dostaneme vyjádření

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} dV'.$$

Operace rotace a integrace působí na různé proměnné, proto můžeme zaměnit jejich pořadí. Kromě toho při výpočtu využijeme identity

$$\text{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} = \text{grad} \frac{1}{R} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') + \frac{\text{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R}.$$

Druhý člen na pravé straně je identicky nulový. Dále snadno ověříme, že platí

$$\text{grad} \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}.$$

Takto získáme hledaný výraz pro \mathbf{B}

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (67)$$

který se obvykle nazývá *Biotovým-Savartovým vzorcem*. Z jeho tvaru lze výsledné magnetické pole v daném bodě chápat jako superpozici příspěvků jednotlivých proudových elementů $\mathbf{j} \Delta V$. Lze tedy – podobně jako v elektrostatice – hovořit o platnosti principu superpozice, proudový element ale nelze izolovat!

Pokud je proud homogenně rozložený, je výhodné vztahy (67) a (66) vyjádřit v poněkud jiném tvaru. Využitím rovnosti $d\mathbf{l} = I d\mathbf{l} = \mathbf{j} dV$ lze psát

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}. \quad (68)$$

Poslední odstavce byly trochu složitější, takže nepropadej panice, pokud jsi vše nepochopil. Aplikaci Biotova-Savartova zákona si předvedeme na následujícím příkladu

Příklad: Vypočteme indukci a vektorový potenciál magnetického pole kruhové smyčky o poloměru a v bodě \mathbf{X} na její ose ve vzdálenosti x od jejího středu.

Ze smyčky vytkneme element $I d\mathbf{l}$, který v bodě \mathbf{X} ve vzdálenosti

$$r = \sqrt{x^2 + a^2}$$

budí pole indukce $d\mathbf{B}_r$ a vektorový potenciál $d\mathbf{A}_r$. Protože všechny elementy smyčky mají od bodu \mathbf{X} stejnou vzdálenost r , má indukce i vektorový potenciál od každého elementu stejnou velikost dB_r , dA_r , avšak jiný směr. Ke každému elementu $I d\mathbf{l}$ existuje protilehlý element $I d\mathbf{l}'$,

pro který složka indukce $d\mathbf{B}'_r$ kolmá k ose má stejnou velikost, ale opačný směr než složka $d\mathbf{B}_r$ kolmá k ose. Tyto složky se proto vzájemně vyruší a složky $d\mathbf{B}$ ve směru osy o velikosti

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_r \sin \alpha = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

se sečtou (zřejmě platí $\sin \alpha = a/r$). Podobná úvaha platí pro vektorový potenciál. Každý jeho element má ovšem směr proudového elementu, který ho vyvolává. Proto složka $d\mathbf{A}$ ve směru osy je nulová. Celkový vektorový potenciál \mathbf{A} v bodě \mathbf{X} je tedy nulový.

Integrací indukce přes celou smyčku dostaneme

$$B = \int_0^{2\pi a} \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Cvičení 2: Vypočítejte magnetickou indukci ve středu ploché cívky (vytváří se např. pomocí destičky pro tištěné spoje), která má mezi poloměry r_1 a r_2 z závitů Archimédovy spirály.

$$\left[B = \frac{\mu_0 I z}{2(r_2 - r_1)} \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

Cvičení 3: Vypočítejte indukci magnetického pole, které vytváří proud I ve vodiči ve tvaru velmi dlouhého tenkého žlabu (na příčném řezu vodič vypadá jako půlkružnice o poloměru R). Řešte pro bod ležící na ose ve středu žlabu.

$$\left[B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \right]$$

Úloha IV. S ... magnetické pole ve vakuu

- Určete velikost a směr vektorů magnetické indukce \mathbf{B} a vektorového potenciálu \mathbf{A} ve vzdálenosti a od přímého vodiče délky l , pokud jím prochází proud I .
- Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru a , na němž se nachází náboj Q , který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočítejte indukci \mathbf{B} jeho magnetické složky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti x od jejího středu. Případně (za bonus) můžete také určit intenzitu \mathbf{E} elektrické složky pole ve stejném bodě.

Kapitola 5: Nabliáda

Úvod

V tomto dílu seriálu si něco více povíme o matematické stránce elektromagnetizmu. Zaměříme se na pojem derivace a její spojení s vektory, protože právě vektorovými veličinami elektrické a magnetické pole popisujeme. Za tímto účelem zavádíme operátor derivace *nabla* ∇ . Ten pro nás bude prostředníkem mezi vektorem a jeho derivací. V obecném případě je to velmi abstraktní symbol. Pro představu si uvedeme jeho podobu v kartézských souřadnicích. Tam má následující tvar

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Je to tedy vektor, jehož složkami jsou parciální derivace podle jednotlivých souřadnic. Můžeme ho také napsat ve tvaru

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nemusí to být ovšem nutně kartézské souřadnice, v kterých budeme tento operátor vyjadřovat. Pro ukázkou můžeme uvést tvar, jaký má ve sférických souřadnicích.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Směry jednotlivých složek jsou po řadě \mathbf{r} , $\boldsymbol{\vartheta}$ a $\boldsymbol{\varphi}$.

Proč ale zavádíme nějaký abstraktní vektor (nebo přesněji vektorový operátor), když můžeme rovnou počítat ve složkách? Odpověď je jednoduchá. Protože je to velmi často časově výhodnější. Výpočty s vektory bývají jednodušší a rychlejší než se složkami. Jak se s tímto vektorem pracuje, ukážeme v následujících kapitolách.

Základní vlastnosti

Ještě jsme nezodpověděli na zásadní otázku: Co to vlastně je ta derivace vektoru? Tato derivace není jedna, ale jsou celkem tři. Každá z nich má úplně jiný fyzikální význam, ačkoliv všechny tři se dají vyjádřit právě pomocí operátoru ∇ . K tomu nám poslouží tři typy součinů. Prvním je tzv. *dyadický součin*, značíme ho $\nabla \varphi$. Nechť b je skalár (přesněji skalární funkce – to je funkce, která každému bodu prostoru přiřadí číslo, nikoliv vektor), potom budeme označovat

$$\text{grad } b = \nabla b = \left(\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y}, \frac{\partial b}{\partial z} \right).$$

Nabla zde udělá ze skaláru vektor, který označujeme jako *gradient*. Příkladem může být elektrická intenzita, pro kterou platí $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. Říkáme, že elektrická intenzita je záporně vzatým gradientem potenciálu. Směr gradientu má směr největší změny skalární funkce.

Označme \mathbf{A} vektorovou funkci (každému bodu prostoru přiřadí vektor). Když vynásobíme ∇ „skalárně“ s vektorem \mathbf{A} , dostaneme tzv. *divergenci*.

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Zde nabla udělala z vektoru skalár. Fyzikálně má divergence smysl toku vektoru \mathbf{A} jednotkovým objemem, tj. udává, jaké „množství“ vektoru \mathbf{A} se ztrácí při průchodu jednotkovým objemem. Například pro vektor magnetické indukce \mathbf{B} platí $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Poslední možnost dostaneme, pokud vynásobíme nablu vektorově s vektorem \mathbf{A} . Potom dostaneme vektor, který označujeme jako *rotaci*.

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right].$$

Kromě těchto tři kombinací existuje i další, a to dyadický součin operátoru nabla a vektoru, tedy $\nabla \mathbf{A}$. V tom případě ovšem nedostaneme vektor, ale tzv. *vektorgradient*. Jedná se o tenzor, jehož členy můžeme zapsat do matice

$$\nabla \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} & \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} & \frac{\partial A_y}{\partial y} & \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} & \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Dyadický součin může spojovat i dva vektory. Potom bude výsledkem opět tenzor, který bude mít podobu

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_1B_1 & A_1B_2 & A_1B_3 \\ A_2B_1 & A_2B_2 & A_2B_3 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & A_3B_3 \end{pmatrix}.$$

Existují i další možnosti, ty však nejsou povolené, a to $\nabla \cdot b$ a $\nabla \times b$. Jsou to totiž logické nesmysly. Zkuste si promyslet proč.

Vidíme, že operátor nabla je dvojitý povahy. Zaprvé se chová jako vektor – můžeme ho skalárně, vektorově či dyadicky násobit. Má i svůj směr (je to směr gradientu, tedy největší derivace). Na druhou stranu představuje operátor nabla derivaci. Působí na vektory a skaláry tak, že je derivuje. Tato dvojitá povaha se vyjasní později.

Vektorové identity

Před tím, než začneme počítat příklady, si uvedeme některé základní vektorové identity, které budeme potřebovat. Bez důkazu proto uvádíme

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= -\mathbf{B} \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Skalární součin je tedy komutativní (kolem tečky lze prohazovat), vektorový je antikomutativní (kolem křížku také lze prohazovat, ale se změnou znaménka). Pozor! Dyadický součin není ani komutativní, ani antikomutativní, operandy nemůžeme prohazovat.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

Dále si připomeňme dvě velmi důležité identity.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Pro další výpočty také bude důležité vědět, jak působí operátor ∇ na polohový vektor \mathbf{r} či jeho velikost r .

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3, \\ \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{0}, \\ \nabla r &= \mathbb{1}, \\ \nabla r^n &= n\mathbf{r}r^{n-2}, \\ \nabla \frac{1}{r^n} &= -\frac{n\mathbf{r}}{r^{n+2}}. \end{aligned}$$

Je dobré také vědět, co vznikne vzájemným vynásobením polohových vektorů.

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

Symbolem $\mathbb{1}$ označujeme identitu (přesněji se jedná o tenzor, který má všude nuly, jen na diagonálách jedničky), která při skalárním vynásobení s libovolným vektorem dá ten samý vektor, tedy $\mathbb{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbb{1} = \mathbf{A}$.

Základní pravidla

Je na čase se seznámit se základními pravidly výpočtu pomocí vektorové analýzy. O co nám konkrétně půjde? Budeme mít zadanou nějakou funkci, která bude mít podobu např. $f = b\mathbf{A}$, kde b je skalár a \mathbf{A} je vektor, a budeme vědět, jak působí operátor nabla na b a \mathbf{A} jednotlivě. Naším cílem bude spočítat, jak bude nabla působit na jejich součin, tj. vyjádřit výsledek v závislosti na $\nabla \cdot \mathbf{A}$, $\nabla \times \mathbf{A}$ a ∇b . Abychom zvládli takovýto výpočet, musíme si osvojit několik základních pravidel.

- **Rozepsání.** Zadaný vztah napíšeme tolikrát, na kolik nabla působí funkcí (jak vektorových, tak skalárních), a tyto členy sečteme. V každé této kopii označíme písmenem D skalár či vektor (vždy ale jiný), který budeme derivovat. Jedná se o analogii derivace součinu. Pokud necháme operátor nabla působit vektorovým součinem na naši modelovou funkci, dostaneme

$$\nabla \times (b\mathbf{A}) = \nabla \times (b_D\mathbf{A}) + \nabla \times (b\mathbf{A}_D).$$

- **Vektor versus derivace.** Jak jsme již řekli, má operátor nabla dvojitou povahu – vektorovou a derivovací. Na jednu stranu s ním můžeme pracovat jako s vektorem, na druhou stranu si musíme dát pozor, aby nederivoval něco jiného, než má. Proto při úpravě rovnic budeme ctít toto pravidlo: Snažíme se veličinu oindexovanou písmenem D dostat až k nable. Potom teprve může nabla derivovat.
- **Pravidlo skaláru.** Pokud skalár derivujeme (je označen písmenem D jako derivované), můžeme ho za všech okolností strčit až k nable. Pokud ho nederivujeme, vyhodíme ho ven před nablu. Vše si ukážeme na našem příkladu.

$$\begin{aligned} \nabla \times (b\mathbf{A}) &= \nabla \times (b_D\mathbf{A}) + \nabla \times (b\mathbf{A}_D), \\ &= (\nabla b_D) \times \mathbf{A} + b\nabla \times \mathbf{A}_D, \\ &= -\mathbf{A} \times \text{grad } b + b \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

- **Další pravidla.** Žádná další speciální pravidla neexistují. U všech výpočtů bychom měli vystačit s pravidlem skaláru a s pravidly, které jsou zmíněny v předchozí kapitole.

Příklady

Na začátek si ukážeme ještě jeden jednoduchý příklad. Zkusme spočítat divergenci z $a\mathbf{u}$, tedy $\nabla \cdot (a\mathbf{u})$. Derivovaná funkce se skládá ze dvou prvků, rozepíšeme to tedy dvakrát a oděčkujeme. (Všimněte si, že není třeba psát derivovanou funkci do závorky. Výraz totiž nelze interpretovat jako divergence ze skaláru a krát vektor \mathbf{u} , protože divergence ze skaláru nedává smysl. Pokud nemusíme, závorky raději nepíšeme, protože vzorec pouze znepráhledňují.)

$$\nabla \cdot a\mathbf{u} = \nabla \cdot a_D\mathbf{u} + \nabla \cdot a\mathbf{u}_D.$$

Použijeme pravidlo skaláru. V prvním členu přesunu a až k nable, v druhém ho vyhodím před ní.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot a\mathbf{u} &= \nabla a_D \cdot \mathbf{u} + a\nabla \cdot \mathbf{u}_D \\ &= \mathbf{u} \cdot \text{grad } a + a \text{div } \mathbf{u}. \end{aligned}$$

U úpravy prvního členu jsme využili toho, že kolem tečky lze prohazovat.

Ukažme si teď, jak řešit složitější příklad. Zkusme spočítat $\text{rot } \mathbf{a} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Nablou působíme na tři členy, musíme tedy zadaný vztah opsat třikrát.

$$\nabla \times (\mathbf{a} \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \nabla \times (a_{\text{D}} \mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \nabla \times (\mathbf{a} \mathbf{u}_{\text{D}} \times \mathbf{v}) + \nabla \times (\mathbf{a} \mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\text{D}}).$$

Ve všech členech použijeme pravidlo skaláru

$$= \nabla a_{\text{D}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + a_{\text{D}} \nabla \times (\mathbf{u}_{\text{D}} \times \mathbf{v}) + a_{\text{D}} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_{\text{D}})$$

a u všech třech členů použijeme identitu pro dvojný vektorový součin

$$= [\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \nabla a_{\text{D}}) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \nabla a_{\text{D}})] + [a_{\text{D}} \mathbf{u}_{\text{D}}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - a_{\text{D}} \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{D}})] + [a_{\text{D}} \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{D}}) - a_{\text{D}} \mathbf{v}_{\text{D}}(\nabla \cdot \mathbf{u})].$$

Nastala tady zajímavá situace – v prvním členu druhé závorky a druhém členu třetí závorky se přihodilo, že jsme sice dostali derivovanou veličinu k nable, ale z druhé strany. S tím si musíme poradit. Vezměme si první problematický člen $\mathbf{u}_{\text{D}}(\nabla \cdot \mathbf{v})$. Víme, že $\nabla \cdot \mathbf{v}$ je skalár, můžeme ho dát, kam chceme, tedy i před vektor \mathbf{u}_{D} . Potom prohodíme kolem tečky a dostaneme $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\text{D}}$. Stejně tak učiníme u druhého členu a dostaneme

$$[\mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \nabla a_{\text{D}}) - \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \nabla a_{\text{D}})] + [a_{\text{D}} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\text{D}} - a_{\text{D}} \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u}_{\text{D}})] + [a_{\text{D}} \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{D}}) - a_{\text{D}} \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}_{\text{D}})].$$

Už zbývá výraz přepsat z trojúhelníků do divergencí a gradientů. Odstraníme závorky a přeskupíme. Výsledek má potom tvar

$$(\mathbf{u} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{u}) \cdot \text{grad } a + a(\mathbf{u} \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u}) + a(\mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v}).$$

Tato technika výpočtu vyžaduje jistou zkušenost, která se získá pouze počítáním. Často se při úpravách používají triky, jako tomu třeba bylo v předešlém příkladě. Odměnou vám bude rychlejší výpočet, než kdybyste to museli dělat ve složkách. Ačkoliv byl poslední příklad poměrně obtížný, byl stále zvládnutelný. Nedovedu si představit, jak by se počítal ve složkách a jak by se sestavoval z hromady různých členů výsledek.

Úloha V. S ... nabliáda

- Uvažujte potenciál elektrického pole, pro který platí $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je konstantní vektor. Spočítejte vektor elektrické indukce, když víte, že $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.
- Spočítejte vektor magnetické indukce \mathbf{B} , pokud pro vektorový potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r},$$

kde \mathbf{G} je konstantní vektor. Magnetickou indukci můžeme spočítat ze znalosti vektorového potenciálu pomocí vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

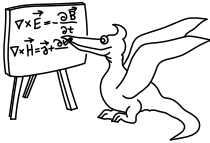
- Určete, co je výsledkem působení Laplaceova operátoru na polohový vektor \mathbf{r} . Laplaceův operátor působící na vektor definujeme podle vztahu

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

Úloha VI. S ... metoda zrcadlového náboje

Bodový náboj o velikosti Q přibližíme do vzdálenosti r od středu uzemněné vodivé sféry o poloměru R .

- a) Jak bude vypadat pole uvnitř sféry?
- b) Dokažte tvrzení, že množinou bodů majících konstantní poměr vzdáleností od dvou bodů je sféra.
- c) Najděte náboje, jejichž polem lze nahradit pole vně sféry.
- d) *Bonus*: Jaký celkový náboj se indukuje na sféře?



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... elektromagnetické pole (5 bodů; průměr 2,74; řešilo 39 studentů)

- a) V prostoru je homogenní magnetické a elektrické pole (homogenní pole má svou veličinu všude stejnou co do velikosti i směru). Je dána velikost \mathbf{E} i \mathbf{B} a tyto vektory jsou na sebe kolmé. Jak se musí pohybovat elektron, aby na něj nepůsobila žádná síla? Jak je to v případě, že \mathbf{E} a \mathbf{B} svírají úhel 60° ?
- b) Jak bylo řečeno v seriálu, při přemístění jednoho náboje se nezmění síla působící na jiné náboje hned. Pokuste se na základě tohoto faktu vysvětlit, proč má elektromagnetické pole hybnost.

Úlohy vymyslel autor seriálu Honza Houštěk.

- a) Vyjdeme ze známého Lorentzova vztahu pro sílu působící na elektrický náboj o velikosti q pohybující se rychlostí \mathbf{v} v elektrickém a magnetickém poli. A sice

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Zadání požaduje, aby výslednice byla nulová, tedy $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Potom jistě platí

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}.$$

Dle zadání jsou vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} na sebe kolmé. Jelikož je ale výsledek vektorového součinu $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ kolmý na oba vektory, musí být nutně vektor \mathbf{v} kolmý na \mathbf{E} , čili ležet v jedné rovině s \mathbf{B} , jejímž normálovým vektorem je právě \mathbf{E} . Nechť tedy \mathbf{v} svírá s \mathbf{B} nenulový úhel α , přičemž systém \mathbf{B} , \mathbf{v} , \mathbf{E} je pravotočivý. Kdyby nastal případ $\alpha = 0$, byl by vektorový součin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ roven nule. V tomto případě by výsledná síla působící na náboj byla dána jen elektrickým polem, tedy její velikost by nemohla být pro nenulový vektor \mathbf{E} nulová. Za tohoto předpokladu bude tedy platit

$$|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}| |\mathbf{v}| \sin \alpha.$$

Řešením je tedy vektor rychlosti \mathbf{v} , který leží v rovině kolmé na \mathbf{E} . Úhel mezi \mathbf{v} a \mathbf{B} je α (systém \mathbf{B} , \mathbf{v} , \mathbf{E} je pravotočivý). Velikost rychlosti \mathbf{v} je

$$|\mathbf{v}| = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}| \sin \alpha}.$$

Nejčastější chyba byla ta, že někteří řešitelé uvažovali, že rychlost musí být kolmá jak na \mathbf{E} , tak na \mathbf{B} .

V případě, že \mathbf{E} a \mathbf{B} svírají úhel 60° , stačí nahlédnout, že pro libovolný vektor rychlosti bude výsledek vektorového součinu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kolmý na vektor \mathbf{B} . Tedy nebude rovnoběžný s \mathbf{E} . To ale znamená, že nemůže vliv \mathbf{E} vykompenzovat. Výslednice sil působící na náboj bude potom pro nenulový náboj nenulová.

- b) Jako modelovou situaci si vezměme pokusný osamocený náboj. Někam ho umístíme a v dostatečně velké vzdálenosti od něj vezmeme na pomoc druhý náboj, s kterým nějakým způsobem zahýbeme a vzápětí ho odstraníme. Jestliže se v tomto okamžiku podíváme na soustavu, zjistíme, že je pokusný náboj v klidu. Tedy celková hybnost soustavy tvořená tímto nábojem je nulová. Po „chvilí“ (dané konečnou rychlostí světla) ale budeme pozorovat, že se pokusný náboj začne jistým způsobem pohybovat, tedy se změní jeho hybnost. Jelikož by se nám ale hodilo, aby platil zákon zachování hybnosti i v takovýchto obecných případech, musíme připustit existenci jakéhosi pole a přisoudit mu hybnost.

Míra Šulc
mira@fykos.mff.cuni.cz

Úloha II. S ... elektrostatika (5 bodů; průměr 4,21; řešilo 29 studentů)

- a) Spočítejte intenzitu elektrického pole v okolí dlouhého rovnoměrně nabitého drátu.
b) Dokažte, že rovnoměrně nabitou kouli lze nahradit bodovým nábojem v jejím středu. Lze tento výsledek aplikovat i na gravitační pole (vysvětlete proč ano, resp. proč ne)?

Vymyslel autor seriálu Honza Houštek

- a) Za Gaussovou plochu si zvolíme válec, jehož osu tvoří drát. Protože je drát velmi dlouhý, můžeme jevy na jeho okrajích zanedbat. Ze symetrie vidíme, že velikost intenzity elektrického pole je ve všech bodech pláště tohoto válce stejná. Podle Gaussovy věty můžeme psát

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Protože velikost E je na této ploše konstantní a vektor \mathbf{E} je všude kolmý na plochu,

$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ E \cdot 2\pi r l &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ E &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \end{aligned}$$

kde τ je délková hustota náboje.

- b) V tomto případě bude Gaussovou plochou soustředná kulová sféra o poloměru r . Díky symetrii obdobně jako v prvním případě platí

$$\begin{aligned} ES &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ E \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \\ E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Ke stejnému výsledku se dostaneme též použitím Gaussovy věty pro bodový náboj nebo použitím Coulombova zákona. Gravitační pole tenké kulové slupky lze obdobným způsobem

nahradit gravitačním polem hmotného bodu, protože Newtonův gravitační a Coulombův zákon elektrostatiky mají stejný tvar. Gaussova věta pro gravitační pole vypadá

$$\oint \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \kappa M.$$

Pokud má koule hustotu rozloženou symetricky podle středu, můžeme ji složit z kulových slupek. Tento výsledek však můžeme na gravitační pole aplikovat pouze pro $r > R$, uvnitř homogenní koule klesá intenzita lineárně.

Jirka Lipovský
jirka@fykos.mff.cuni.cz

Úloha III.S ... dipóly (5 bodů; průměr 2,63; řešilo 8 studentů)

Spočítejte sílu působící mezi dvěma dalekými elektrickými dipóly o momentech \mathbf{p}_1 a \mathbf{p}_2 ve vzdálenosti r , pokud

- leží v jedné přímce a jsou souhlasně orientovány,
- jsou souhlasně orientovány ve směru kolmém na spojnici,
- dipól \mathbf{p}_1 je orientován kolmo ke spojnici, \mathbf{p}_2 rovnoběžně s ní směrem k prvnímu.

Víme, že intenzita elektrického pole je pro první dipól

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3}. \quad (69)$$

Síla působící na druhý elektrický dipól potom je

$$\mathbf{F} = \mathbf{p}_2 \cdot \nabla E_1(\mathbf{r}).$$

Rozdělme nyní jednotlivé případy.

- Zvolme si ať dipóly leží na ose x , potom

$$\mathbf{p}_1 = (p_1, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (p_2, 0, 0),$$

potom lehkým dosazením do (69) dostáváme

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{r^5} (3p_1x^2 - p_1r^2, 3p_1xy, 3p_1xz) \quad (70)$$

a výsledná síla je

$$\mathbf{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_1 = \frac{3p_1p_2}{r^7} (3xr^2 - 5x^3, y(r^2 - 5x^2), z(r^2 - 5x^2)),$$

to v případě $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$ dává

$$\mathbf{F} = -6 \frac{p_1p_2}{r^4} (1, 0, 0).$$

b) Při stejné poloze dipólů jako v předcházejícím případě máme

$$\mathbf{p}_1 = (0, p_1, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (0, p_2, 0).$$

Intenzita v tomto případě je

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{p_1}{r^5}(3yx, 3y^2 - r^2, 3zy).$$

Výsledná síla

$$\mathbf{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_1.$$

To po zderivování a dosazení $r = (x, 0, 0)$ dá

$$F = 3 \frac{p_1 p_2}{r^4} (1, 0, 0).$$

c) Opět volíme polohu dipólů na ose x , tedy

$$\mathbf{p}_1 = (p_1, 0, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (0, p_2, 0).$$

Intenzita bude mít tvar (70) a sílu spočítáme jako

$$\mathbf{F} = p_2 \frac{\partial}{\partial y} E_1.$$

Derivování si dovolíme zase vynechat a uvedeme jen výsledek po dosazení $r = (r, 0, 0)$

$$\mathbf{F} = 3 \frac{p_1 p_2}{r^4} (0, 1, 0).$$

Miro Kladiva
miro@fykos.mff.cuni.cz

Úloha IV. S ... magnetické pole ve vakuu (5 bodů; průměr 2,45; řešilo 11 studentů)

- a) Určete velikost a směr vektorů magnetické indukce \mathbf{B} a vektorového potenciálu \mathbf{A} ve vzdálenosti a od přímého vodiče délky l , pokud jím prochází proud I .
- b) Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru a , na němž se nachází náboj Q , který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí ω kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočítejte indukci \mathbf{B} jeho magnetické složky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti x od jejího středu. Případně (za bonus) můžete také určit intenzitu \mathbf{E} elektrické složky pole ve stejném bodě.

a) Řešení vychází z Biotova-Savartova zákona, ovšem je dobré si úlohu vhodně parametrizovat, například dle obr. 31. Zde φ_1 resp. φ_2 značí úhel sevřený mezi průvodičem a spojnicí prvního resp. druhého konce vodiče s bodem pozorování, a kolmou vzdálenost bodu, kde

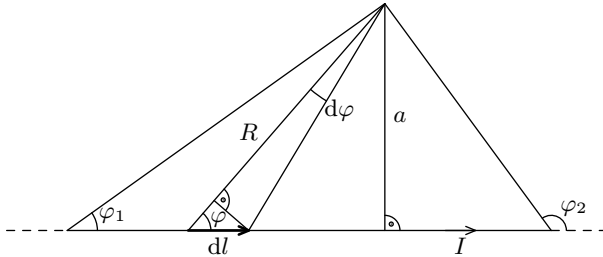
zjišťujeme pole, od proudovodiče a l délku vodiče. Polohu elementu vodiče o délce dl si vyjádříme pomocí úhlu φ , jak je znázorněno na obrázku. Jestliže \mathbf{R} bude vyjadřovat polohový vektor místa pozorování vůči zmiňovanému elementu, bude pro velikost jeho příspěvku $|d\mathbf{B}|$ k celkovému poli dle Biotova-Savartova zákona platit

$$|d\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{4\pi} \left| \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{R}}{R^3} \right| = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{dl \sin \varphi}{R^2} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\varphi}{R} = \frac{\mu I}{4a\pi} \sin \varphi d\varphi,$$

neboť z obrázku lze nahlédnout, že platí $R \sin \varphi = a$ a $dl \sin \varphi = R d\varphi$. Velikost magnetické indukce v požadovaném bodě zjistíme potom integrací přes celý vodič, tedy v rozmezí od φ_1 do φ_2 . Čili

$$|\mathbf{B}| = \frac{\mu I}{4a\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu I}{4a\pi} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1).$$

Směr vektoru magnetické indukce lze pak snadno dourčit například ze známého pravidla pravé ruky. V situaci na obrázku bude \mathbf{B} mířit z nákresny.



Obr. 31

Dále se požaduje určit vektorový potenciál. Vyjdeme ze vztahu pro vektorový potenciál ve speciálním případě lineárního proudovodiče. A sice

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\text{vodič}} \frac{d\mathbf{l}}{R}.$$

Jelikož v našem případě řešíme úlohu pro přímkový vodič, jsou všechny proudové elementy rovnoběžné, takže i výsledný vektorový potenciál bude mít směr protékajícího proudu. Stačí nám tedy určit jenom jeho velikost $|\mathbf{A}|$. Máme

$$|\mathbf{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\text{vodič}} \frac{dl}{R} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Tento integrál můžeme vyřešit například substitucí $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, potom

$$|\mathbf{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \right| \right).$$

Celá úloha je ovšem zadána poněkud pochybně. Na jedné straně se předpokládá stacionární případ, tj. že proudy jsou s časem konstantní, zanedbáváme Maxwellovy posuvné

proudy. Na druhé straně ale pro konečný vodič jistě není splněna rovnice kontinuity, což je v přímém rozporu. Situace by se dala tak trochu zachránit tím, že bychom si konce vodiče spojili dalšími přímkovými vodiči s místem pozorování. Tyto by k výsledné magnetické indukci v daném místě nepřispívaly, neboť ve vektorovém součinu v Biot-Savartově zákonu vystupují dva rovnoběžné vektory.

- b) Pro výpočet magnetické indukce si představíme nabitý kruh rozdělený na infinitezimální mezikruží o vnitřím poloměru r a šířce dr . Takové mezikruží se bude díky rotaci disku chovat vlastně jako proudová smyčka. Náboj dQ soustředěný na smyčce ve výseči o středovém úhlu $d\varphi$ se bude díky konstantní nábojové hustotě rovnat $dQ = r\sigma d\varphi dr$. O úhel $d\varphi$ se ale smyčka pootočí za čas $dt = d\varphi/\omega$, kde ω značí úhlovou rychlost rotace disku. Proud protékající elementární smyčkou dI potom bude roven $dI = dQ/dt = \omega\sigma r dr$. Výsledné magnetické pole, pro které lze ze symetrie úlohy opět nahlédnout, že v bodě ležícím na ose disku bude mít jen složku rovnoběžnou s osou, potom bude dáno díky principu superpozice jako součet všech příspěvků od jednotlivých proudových smyček. Požadovaný vztah proto získáme integrací přes celý kruh, tj. podle poloměru r v intervalu od 0 do a , s využitím vztahu uvedeného v textu seriálu pro magnetické pole elementární proudové smyčky. A sice

$$\begin{aligned} B &= \int_{B(0)}^{B(a)} dB(r) = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \int_0^a \frac{r^3 dr}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \left[\frac{r^2 + 2x^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 2|x| \right). \end{aligned}$$

Nakonec vypočteme elektrickou intenzitu pole vybuzeného takovýmto kruhem na jeho ose opět ve vzdálenosti x od středu. Poslouží nám analogická představa rozdělení kruhu na elementární mezikruží. Vzdálenost všech bodů mezikruží od osového bodu, kde nás pole zajímá, je pro dané mezikruží konstantní. Proto lze mezikruží o poloměru r a šířce dr považovat z hlediska velikosti intenzity ve zkoumaném bodě za bodový náboj o velikosti $dQ = 2\pi r\sigma dr$ umístěný ve vzdálenosti $\sqrt{x^2 + r^2}$. Výsledný vztah obdržíme opět prointegrovaním přes celý disk podle poloměru, konkrétně

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{E(0)}^{E(a)} dE(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi\omega\sigma \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \\ &= \frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\omega\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - |x| \right). \end{aligned}$$

Z obdobných důvodů jako výše bude mít pole jen složku ve směru osy.

Míra Šulc

mira@fykos.mff.cuni.cz

Úloha V.S ... nabliáda (5 bodů; průměr 3,00; řešilo 6 studentů)

- a) Uvažujte potenciál elektrického pole, pro který platí $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je konstantní vektor. Spočítejte vektor elektrické indukce, když víte, že $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$.
- b) Spočítejte vektor magnetické indukce \mathbf{B} , pokud pro vektorový potenciál platí

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r},$$

kde \mathbf{G} je konstantní vektor. Magnetickou indukci můžeme spočítat ze znalosti vektorového potenciálu pomocí vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.

- c) Určete, co je výsledkem působení Laplaceova operátoru na polohový vektor \mathbf{r} . Laplaceův operátor působící na vektor definujeme podle vztahu

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

- a) Vztah pro $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi(r)$ si rozepíšeme tak, jak je ukázáno v seriálu.

$$\mathbf{E} = -\nabla(r_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A}) - \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{D}}).$$

Kolem tečky můžeme prohazovat vektory, tudíž můžeme psát

$$\mathbf{E} = -\nabla r_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{A} - \nabla \mathbf{A}_{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{r}.$$

Jelikož je $\nabla \mathbf{r} = \mathbb{I}$ a $\nabla \mathbf{A} = 0$, protože \mathbf{A} je konstantní vektor, dostáváme

$$\mathbf{E} = -\mathbb{I} \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{A}.$$

- b) K řešení lze použít výsledek úlohy spočtené v seriálu

$$\nabla \times (a\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}) \cdot \nabla a + a(\mathbf{u}\nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{u}) + a(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}).$$

Pokud položíme $a = 1/r$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}$ a $\mathbf{v} = \mathbf{G}$, vyjde po dosazení a úpravách

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{G}}{r} \right) = (\mathbf{r}\mathbf{G} - \mathbf{r}\mathbf{G}) \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{r}(\mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r}(\mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{G}).$$

Pokud si uvědomíme, že $\nabla \frac{1}{r} = -\mathbf{r}/r^3$, $\nabla \mathbf{r} = \mathbb{I}$, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ a jakékoliv derivace \mathbf{G} jsou nula, protože se jedná o konstantní vektor, dostaneme

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{r} &= (\mathbf{r}\mathbf{G} - \mathbf{r}\mathbf{G}) \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) + \frac{1}{r}(\mathbf{r}\nabla \cdot \mathbf{G} - \mathbf{G}\nabla \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{r}(\mathbf{G} \cdot \nabla \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{G}), \\ &= -\frac{\mathbf{r}\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{G}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \frac{3\mathbf{G}}{r} + \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbb{I}}{r}, \\ &= -\frac{\mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}}{r^3} - \frac{\mathbf{G}\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili vztahu $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ a toho, že kolem tečky můžeme prohazovat.

- c) Stačilo pouze dosadit do připraveného vztahu

$$\Delta \mathbf{r} = \text{grad div } \mathbf{r} - \text{rot rot } \mathbf{r}.$$

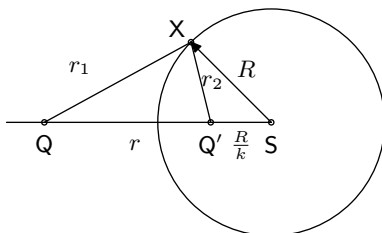
Protože $\text{rot } \mathbf{r} = 0$, $\text{div } \mathbf{r} = 3$ a gradient konstanty je nula, dostáváme

$$\Delta \mathbf{r} = 0.$$

Úloha VI. S ... metoda zrcadlového náboje (5 bodů; průměr 3,75; řešili 4 studenti)

Bodový náboj o velikosti Q přibližíme do vzdálenosti r od středu uzemněné vodivé sféry o poloměru R .

- Jak bude vypadat pole uvnitř sféry?
 - Dokažte tvrzení, že množinou bodů majících konstantní poměr vzdáleností od dvou bodů je sféra.
 - Najděte náboje, jejichž polem lze nahradit pole vně sféry.
 - Bonus: Jaký celkový náboj se indukuje na sféře?
- a) Kulová sféra je Faradayova klec a tedy elektrické pole uvnitř je nulové. Protože je sféra vodivá, má ve všech svých bodech stejný potenciál, pak pro 2 body na sféře a cestu procházející sférou platí



Obr. 32

$$\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Elektrostatické pole je potenciálové, proto zvolíme-li libovolnou uzavřenou křivku l , platí

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Proto také je

$$\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

kde l je ale libovolná křivka, a proto $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.

- b) Mějme dva body Q a Q' . Jejich souřadnice jsou

$$Q = [0, 0, 0], Q' = [v, 0, 0].$$

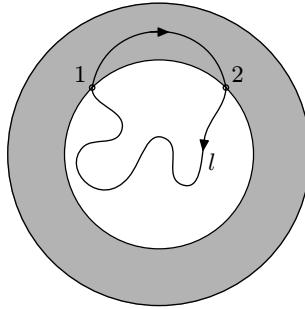
Bod X o souřadnicích $[x, y, z]$ je stále vzdálen od bodů Q a Q' v poměru

$$k^2 = \frac{(x-v)^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Roznásobením a další úpravou dostáváme

$$\left(x + \frac{v}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{kv}{k^2 - 1}\right)^2.$$

Toto je rovnice popisující kulovou sféru o středě v bodě $[-v/(k^2 - 1), 0, 0]$ a poloměru $(kv)/(k^2 - 1)$.



Obr. 33

Protože má kulová sféra poloměr R , je vzdálenost bodu Q' od středu kulové sféry rovna R/k . Navíc můžeme dle obrázku určit, čemu je rovno k

$$\frac{r - R}{R - \frac{R}{k}} = k,$$

$$\frac{r}{R} = k.$$

c) Protože je sféra vodivá a uzemněná, je její potenciál roven nule. Dle obrázku proto platí

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_1} + \frac{Q'}{r_2} \right) = 0,$$

$$-\frac{Q}{Q'} = \frac{r_1}{r_2} = k = \frac{r}{R}.$$

Tedy náboj Q' bude umístěn ve vzdálenosti $R/k = R^2/r$ od středu koule a bude mít velikost $Q' = -QR/r$. Okrajové podmínky náboje a nabitě sféry jsou stejné jako v případě dvou nábojů. Potenciál v prostoru vně sféry určíme z Laplaceovy rovnice. Z jednoznačnosti jejího řešení plyne, že v obou případech bude potenciál stejný.

Povšimněte si, že náboje Q a Q' splňují podmínku kulové inverze, tedy že součin vzdáleností nábojů od středu koule je roven čtverci poloměru koule

$$\frac{R^2}{r} \cdot r = R^2.$$

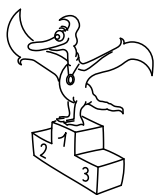
d) Zvolíme si plochu S , která bude obsahovat celou sféru, ale ne náboj Q . Pak dle Gaussova zákona je tok přes celou plochu indukován jen nábojem Q' a platí

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0}.$$

Na druhou stranu pokud vezmeme náboje na sféře, musí tyto náboje (a náboj Q) vytvářet vně sféry stejné elektrické pole jako dvojice nábojů Q a Q' . Pro tuto situaci bude levá

strana Gaussova zákona ekvivalentní s výše uvedeným a tedy i náboj indukovaný na sféře bude roven $Q' = -QR/r$.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz



Výsledková listina XVII. ročníku

Kategorie 4. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Matouš Ringel	G Broumov	157
2. Róbert Sedlák	G Prešov	92
3. Peter Zalom	G D. Tatarku, Poprad	70
4. Tomáš Mánik	G Lučenec	55
5. Jan Fazekáš	ISS Sokolov	49
6. Pavel Daniel	G Zborovská, Praha	32
7. Štěpán Uxa	GSG Jilemnice	31

Kategorie 3. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Anton Repko	G Sv. Mikuláša, Prešov	150
2. Stanislav Vosolobě	G U Balvanu Jablonec nN	76
3. Michal Humpula	G Uherský Brod	57
4. Martin Takáč	G Nové Zámky	52
5. Peter Greškovič	G Svidník	45
6. Roman Fiala	VOŠ a SPŠE Plzeň	38
7. Petr Houštěk	G Pelhřimov	36
8. Daniel Božík	G Jura Hronca	33
9. Pavlína Böhmová	G Komenského Havířov	31
10. Pavel Kocourek	SPŠ Panská	28
11. Lukáš Gříšek	G Františka Hajdy, Ostrava	25

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Slavomír Takáč	G Nové Zámky	90
2. Tomáš Bednárik	G Vsetín	88
3.–4. Martin Konečný	G Boskovice	62
<i>Aleš Podolník</i>	G Kapitána Jaroše, Brno	62
5. Monika Josieková	G Český Těšín	61
6. Tereza Klimošová	G Lanškroun	52
7. Jenda Valášek	G Broumov	50
8. Petr Smítal	G Kapitána Jaroše, Brno	49
9. Marek Scholz	G Neratovice	48
10. Lukáš Severa	G Benešov	40
11. Peter Perešíni	G J. G. Tajovského	38
12. Petra Malá	G Moravský Krumlov	31
13.–15. Ondřej Bílka	G Lesní čtvrť, Zlín	28
<i>Michal Sivák</i>	G Ludovíta Štúra	28
<i>Jana Vrábelová</i>	G Ludovíta Štúra	28
16. Vladimír Sivák	G Ludovíta Štúra	27

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. Pavel Motloch	G Petra Bezruče	86
2. Jakub Benda	G Jana Nerudy Praha	48
3. Ondřej Bogár	G Ludovíta Štúra	34
4. Katarína Bazová	G Ludovíta Štúra	18
5. Miroslav Kaděra	G Frýdek-Místek	11

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.