15. ročník, úloha III . 3 ... *rampouch* *(4 body; průměr ?; řešilo 44 studentů)*

Zimní sezóna se blíží, ale než vyrazíte lyžovat, zamyslete se nad tím, jaký tvar mají rampouchy rostoucí na otáčejícím se kole lyžařského vleku. Rovina kola svírá s vodorovnou rovinou úhel α, kolo se otáčí úhlovou rychlostí ω a rampouch roste ve vzdálenosti r od osy otáčení.

Úlohu vymyslel Pavel Augustinský.

Stěžejní věcí, kterou musíme zjistit, abychom mohli popsat tvar rampouchu, je směr, do kterého v daném okamžiku rampouch roste. Zaveďme kartézskou souřadnou soustavu spojenou s rotujícím kotoučem. Rovina koutouče splývá s rovinou $z = 0$, střed kotouče leží v počátku a osa z míří nahoru. Špička rampouchu se nachází v bodě $[r, 0, z]$.

Rampouch jistě poroste ve směru síly, která působí na kapičku vody na jeho konci. Na tuto kapičku působí síla tíhová a odstředivá. Napišme obě tyto síly ve složkách v zavedené souřadné soustavě.

$$F_{Gz} = -mg\cos\alpha, \quad F_{Gy} = mg\sin\alpha\sin\omega t, \quad F_{Gx} = mg\sin\alpha\cos\omega t,$$
$$F_{oz} = 0, \quad F_{oy} = 0, \quad F_{ox} = m\omega^2 r,$$

kde ω je úhlová rychlost otáčení kola. Uvědomme si, že rampouch a kolo se otáčí, proto se v soustavě spojené s kolem mění směr síly $\boldsymbol{F}_G$. Ze zkušenosti očekáváme, že se kolo bude otáčet mnohem rychleji, než poroste rampouch, tedy stačí tuto sílu vystředovat v čase. Střední hodnota funkcí $\sin\omega t$ a $\cos\omega t$ je ovšem nulová. Směrnice tečny k rampouchu ve vzdálenosti r do osy z je tedy

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2 r}. \tag{1}$$

Ptejme se nyní, jaký tvar tedy bude mít rampouch. Diferenciálního počtu znalí již jistě ve vztahu (1) vidí separovatelnou diferenciální rovnici, kterou snadno vyřeší,

$$z = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2}\ln\frac{r}{r_0},$$

kde r_0 je vzdálenost od středu kotouče, ve které rampouch začal růst. Rampouchy mají tedy tvar logaritmické křivky.