Drazí řešitelé,

dostává se vám do rukou zadání již třetí série a s ním prožijete slavný okamžik uveřejnění vašich bodových výsledků po prvním kole. Tímto upozorňuji některé nedočkavce na to, že opravené úlohy s autorským řešením budete dostávat vskutku o dvě série zpět z jednoduchého důvodu, že musíme mít také kdy vaše úlohy opravit. Samozřejmě že bychom mohli posílat autorské řešení již s další sérií, ale nečiníme tak, neboť autorská řešení obsahují často komentáře k bodování, diskutují nejrůznější chyby, jichž jste se ve svých řešení dopouštěli, nebo shrnují vámi obdržené výsledky (např. v experimentálních úlohách).

Vzhledem k vysokému počtu řešitelů (za který jsme samozřejmě vděčni, těší nás, když tolik středoškoláků projevuje vážný zájem o fyziku) budeme hodnotit vaše výsledky ve čtyřech kategoriích podle ročníků. Proto jsme také přiřadili každému z vás číslo ročníku nezávisle na latinských názvech tříd; student navštěvující sextu šestiletého gymnázia potom patří do kategorie čtvrtých ročníků. U každé úlohy může opravující udělit bodovou prémii – bonus za řešení, které se vymyká standartu a to maximálně do poloviny počtu bodů udělených za příklad. Nejlépe hodnoceny jsou experimentální úlohy (zpravidla 8 bodů), můžete tak dostat až 12 bodů (to už ale musí být jak článek do *Physics Today*).

Pokud zjistíte, že některá z úloh, které jste posílali, chybí mezi opravenými úlohami uvedenými v pořadí, ozvěte se a věci budou uvedeny na pravou míru. I my jsme jenom lidi a udržovat databázi tří a půl sta lidí v naprostém pořádku je prostě nemožné. Do toho se nám míchají pozdě došlá řešení (díky mé dobré vůli nekončí v koši, i když znamenají hodně práce navíc), nestandartní formáty (třeba papírek 4 krát 3 cm) se snadno ztrácejí, mnohdy u řešení chybí podpis, prostě to nemáme jednoduché. Korespondujeme s vámi ale rádi a alespoň drobný pokus o pochopení nás potěší.

Za organizátory FKS

Halef

Zadání 3. série

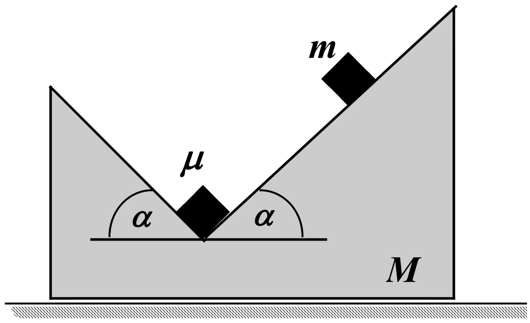
Termín odeslání: 15 . leden 1996

Úloha III . 1 ... ***vyhlodaný hranol***

Na vodorovné rovině je položen vyhlodaný hranol o hmotnosti $\boldsymbol{M}$ (viz obr. 1), který se po ní může bez tření pohybovat. V nejnižším místě leží krychlička o hmotnosti $\boldsymbol{\mu}$. Na nakloněné části hranolu leží krychlička o hmotnosti $\boldsymbol{m}$. I malé krychličky se mohou pohybovat po vyhlodaném hranolu bez tření.

Jaká musí být splněna podmínka mezi hmotnostmi M, m, μ a úhlem α, aby se po uvolnění krychličky m krychlička μ začala vůči hranolu M pohybovat?

Obr. A



Úloha III . 2 ***... dálkový průzkum***

Zjistit přesné údaje o Merkuru bylo pro astronomy vždy velkým problémem. Není jednoduché změřit pomocí dalekohledu jeho zdánlivý průměr, který nepřesahuje 13″, a protože na povrchu Merkuru není vidět mnoho podrobností, zůstávala rychlost jeho rotace dlouho neznáma. Od konce minulého století se předpokládalo, že Merkur má takzvanou vázanou rotaci, to znamená, že jedna jeho otočka kolem osy je stejně dlouhá jako doba oběhu kolem Slunce, tedy 88 dní. Tento omyl vyvrátilo teprve v 60. letech radarové pozorování.

Dejme tomu, že radioastronomové vyslali v čase $t_0 = 0$ s signál směrem k Merkuru a jeho odraz pozorují od doby $t_1 = 1070{,}15624$ s do $t_2 = 1070{,}18879$ s. Při dalším měření se soustředili na rudý posuv přijaté vlny. Původní signál měl frekvenci 100 MHz a frekvence jednotlivých složek ozvěny se pohybovala od $f_1 = 99{,}97739700$ MHz do $f_2 = 99{,}97740506$ MHz. Vypočtěte z těchto údajů (za předpokladu, že sklon rotační osy této planety vůči ekliptice je malý) vzdálenost a rychlost vzdalování Merkuru od observatoře, jeho poloměr, úhlovou rychlost rotace a dobu jedné otočky kolem osy.

Úloha III . 3 ***... Pinocciova čepička***

Papa Karlo zhotovil pro Pinoccia čepičku z tenkého plechu ve tvaru kužele o výšce 20 cm a s vrcholovým úhlem 60°. Bude ale takováto ozdoba držet na jeho hlavě, která má tvar koule o poloměru 15 cm a je dokonale hladká?

Úloha III . 4 ***... lednička***

V místnosti stojí otevřená lednička zapojená do zásuvky a mrazí. Po jedné hodině provozu necháme teplotu v místnosti ustálit. Jak se tato teplota liší od počáteční teploty v místnosti, pokládáme-li místnost za tepelně izolovanou?

Úloha III . 5 ***... vodní kyvadlo***

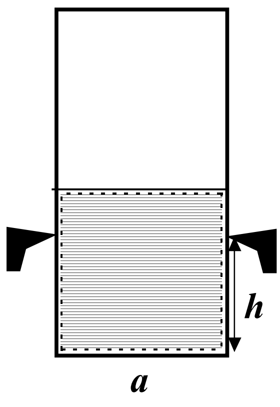
Mějme nádobu tvaru kvádru zanedbatelné hmotnosti o čtvercové podstavě strany a a výšce $2a$. V této nádobě se nachází krychlové vodní těleso. V jaké maximální výšce h ode dna můžeme naši nádobu zavěsit, aby se po zmrznutí vody převrátila? (Viz obr. 2, který znázorňuje řez nádoby vertikální rovinou procházející těžištěm.)

Uvažujte dva případy:

a) nádoba je dokonale tuhá a voda zamrzá ode dna,

b) voda si během zamrzání uchovává stále svůj krychlový tvar, nádoba je tedy dostatečně pružná. Přitom podél stěn led klouže, tedy výška závěsu nad podstavou zůstává konstantní.

Obr. B



Úloha III . 6 ***... gravitační zrychlení***

Pokuste se změřit gravitační zrychlení co největším počtem metod. U každé metody proveďte 10–20 měření, porovnejte výsledky a přesnost různých metod.

Nápověda: Můžete využít matematického nebo fyzikálního kyvadla (těžký předmět na nehmotném závěsu). Při přímém měření, tedy zrychlení volného pádu, nepoužívejte lehké předměty (pírko), neházejte nic na hlavy chodců (špatně měřitelná výška). Ani vrhat své tělo vám nedoporučujeme (opakovatelnost pokusu). Při kutálení čehokoli po nakloněné rovině nezapomeňte uvážit, že těleso má i nějaký moment setrvačnosti. Lze použít i Adwoodův padostroj, rychlost výtoku kapaliny z nádoby nebo cokoliv jiného, co budete umět změřit.

Řešení 1. série

Úloha I . 1 ... ***loď ve vaně*** *(maximum počtu bodů 3, řešilo 301 studentů)*

Loď těžká 100 tun musí podle Archimedova zákona vytlačit 100 m^3 vody ($mg = \rho V g$), aby plavala. Ve vaně je však jen 1 m^3 vody, a proto nemůže vytlačit 100 m^3 vody (1<100) a tudíž nemůže ani plavat. Tak to tedy **NE!!!**, i když takováto řešení zaslala nezanedbatelná část řešitelů.

Nejdříve se domluvíme na tom, co znamená plavat. To je asi takový stav lodi, kdy loď je v klidu a může tak zůstat libovolnou dobu ve styku pouze s vodou a se vzduchem, to znamená, že se nedotýká žádného břehu, dna ani ji nad hladinou nedrží žádný jeřáb či vrtulník. Celková výslednice sil působících na loď musí být nulová, aby se loď nezačala někam pohybovat a nenarazila nám na stěnu vany. Na loď působí jen dvě síly: tíhová a vztlaková. Obě působí ve vertikálním (svislém) směru, první nahoru, druhá dolů. V horizontálním (vodorovném) směru žádná síla nepůsobí. Velikost vztlakové síly se tedy rovná velikosti tíhové síly.

A teď nastupuje onen Archimedův zákon. Ten povídá něco o **objemu ponořené části tělesa** a nějaké síle. Vtip spočívá v tom, že ta síla je právě úměrná ponořené části tělesa. Nezáleží už na ničem jiném, tedy ani na tom, kolik kapaliny (vody) je kolem, jak je tu hluboko atd. Pokud si povrch lodi rozdělíte na malé plošky, žádná z nich nepozná, jestli je kolem ní 1 mm (jako ve vaně) nebo 11 km vody (jako v Mariánském příkopě). Stále do ní tlačí ta stejná hydrostatická síla. Ta má na svědomí vznik vztlakové síly, která vystupuje v Archimedově zákoně. Hydrostatická síla závisí na hloubce. Její vodorovné složky se vykompenzují a zbyde jen svislá složka, úměrná výšce kvádru krát ploše podstav, což je objem kvádru. Celé těleso můžeme složit z úzkých svislých kvádříků o malých podstavách, pro které platí úměrnost síly a objemu.

Archimedův zákon netvrdí, že by ve vaně muselo být tolik vody, aby byla stejně těžká jako loď. Je jen potřeba, aby celá část lodi, která byla ponořena ve vodě při plavbě na moři, byla ponořena i ve vaně. Objem ponořené části na moři je 100 m^3 ($mg = V\rho g \Rightarrow V = m/\rho = 100.10^3/10^3 = 100\ m^3$). Množství vody klade na vanu jisté nároky – musí mít velice podobný tvar jako kýl lodi. To proto, aby mezera mezi lodí a vanou neměla objem větší než 1 m^3. Také musí být vana dostatečně veliká (tzn. asi 101 m^3), aby se do ní vešla loď s trochou vody. Potom loď plave.

Někteří z vás uvažovali o tom, že pokud by byla mezera mezi lodí a vanou dostatečně malá, mohly by se uplatnit i kapilární jevy, které by celý výsledek mohly změnit. Pokud si aproximujete loď krychlí o objemu 100 m^3, vyjde vám vrstvička tlustá asi 9 mm a tady se ještě kapilární jevy neprojevují příliš silně.

Jestli stále nevěříte tomu, že loď může plavat, tak se vás pokusím ještě dvakrát přesvědčit, že to opravdu lze (viz obr. 3).

Představte si bitevní loď plovoucí na moři (a). Kolem ní natáhneme pomyslnou plochu, která ji obepíná, odděluje ji od okolní vody a objem vody který tato plocha uzavírá kolem lodi je 1 m^3 (b). Pak necháme veškerou vodu kolem této plochy zamrznout (c). Z vytvořeného ledu vyřízneme něco tvarem připomínající vanu (d). Zcela evidentně cítíme, že v žádném kroku 1→2→3→4 jsme nenarušili „silové poměry". Plovoucí loď ve vaně (4) je tedy stejně dobře možná jako loď vznášející se v moři.

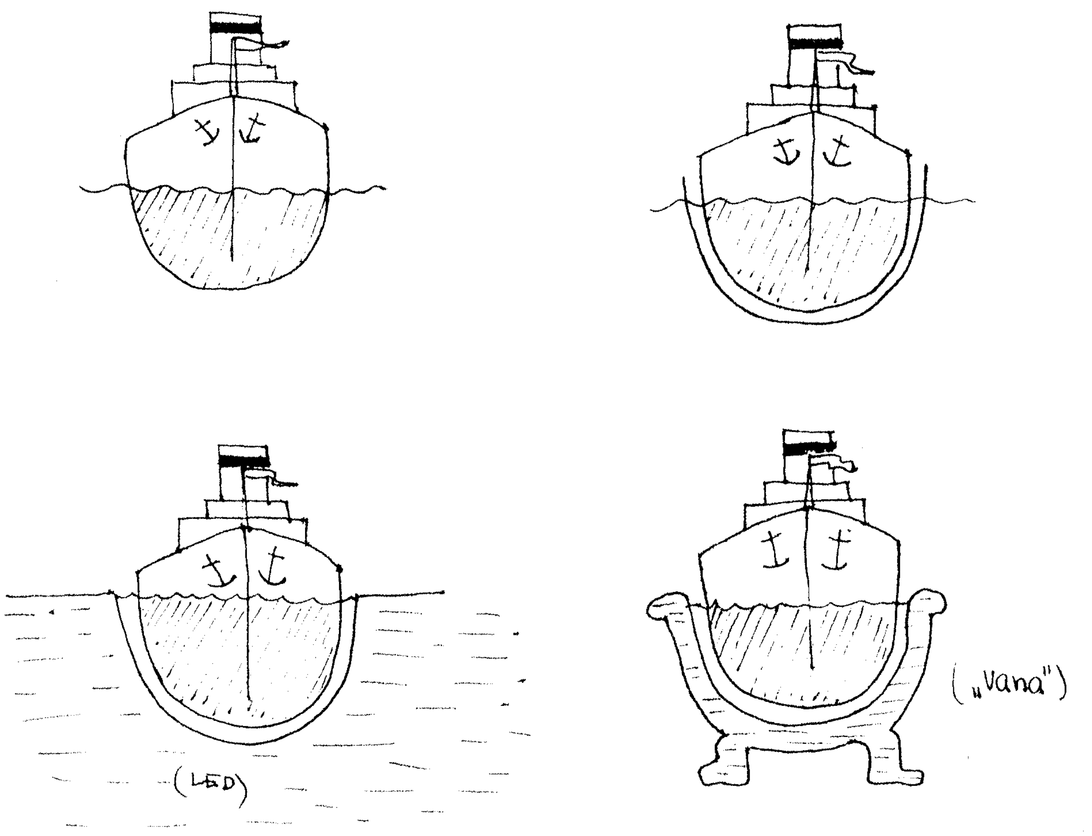
Koho ani tento myšlenkový pokus nepřesvědčil, může si udělat malý pokus. Potřebuje na to dva kelímky od jogurtu. Jeden bude sloužit jako „vana" a druhý jako „bitevní loď". Ten druhý se může vyzbrojit děly a výzbrojí do celkové hmotnosti asi 150 g (u 200 ml kelímku). Pak se do „vany" nalije trocha vody a ponoří se „loď".

Regulováním zátěže křižníku se dá dosáhnout toho, že ve „vaně“ bude jen velmi málo vody. Její hmotnost bude určitě menší než hmotnost „lodi“.

Pokud jsem vás ještě dostatečně nepřesvědčil, tak mi klidně napište a já se s tím pokusím něco udělat.

Jan Hradil

Obr. C



Úloha I . 2 ... *polopropustná zrcadla* *(maximum počtu bodů 4, řešilo 294 studentů)*

Označíme-li koeficient propustnosti zrcadla K, odráží se vždy $(1-K)$-násobek intenzity dopadajícího světla a K-násobek prochází. Světlo má více možností, jak se dostat na druhou stranu soustavy zrcadel. Buď projde rovnou a bude mít intenzitu $K^2 I_0$, nebo se mezi zrcadly dvakrát odrazí a přispějě intenzitou $(1-K)^2 K^2 I_0$, anebo může dojít i k více odrazům (musí jich být ale sudý počet) a příslušný příspěvek bude $(1-K)^{2n} K^2 I_0$, kde n je počet odrazů od jednoho zrcadla. Výsledná intenzita je tedy součtem nekonečné geometrické řady

$$I = K^2 I_0 + (1-K)^2 K^2 I_0 + (1-K)^4 K^2 I_0 + \ldots + (1-K)^{2n} K^2 I_0 + \ldots$$

Geometrická řada s prvním členem a_1 a kvocientem q ($|q| < 1$) má součet

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Takže výsledek můžeme zapsat ve tvaru: $$I = \frac{K^2 I_0}{1-(1-K)^2} = \frac{K I_0}{2-K}.$$

Pro zadanou hodnotu $K = {}^1/_5$ je $I = {}^1/_9$. Méně přesné výsledky (např. numerické sečítání řady uvedené výše) byly pochopitelně ohodnoceny menším počtem bodů.

Michal Fabinger

Úloha I . 3 ... *deskový kondenzátor* *(maximum počtu bodů 5, řešilo 156 studentů)*

Příklad lze nejelegantněji vyřešit pomocí zákona zachování energie. Práce vykonaná na kondenzátoru je rovna rozdílu konečné a počáteční energie kondenzátoru.(Veličiny na počátku děje mají index 1, veličiny na konci index 2.)

a) Vykonaná práce je

$$W_a = E_2 - E_1 ,$$

přičemž energii kondenzátoru spočítáme jako

$$E_i = \frac{1}{2} C_i U_i^{\,2} = \frac{Q_i^{\,2}}{2C_i} .$$

Uvážením, že $Q_1 = Q_2$ a $Q = C_1 U_b$, kde

$$C_i = \varepsilon \frac{S}{l_i} ,$$

dostáváme

$$W_a = \frac{Q^2}{2C_2} - \frac{Q^2}{2C_1} = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(\frac{C_1}{C_2} - 1 \right) = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right) .$$

b) Do zákona zachování energie musíme započítat i energii, kterou dodáváme baterii (v případě $l_1 > l_2$ se kapacita kondenzátoru snižuje a tedy i náboj na něm – ten vlastní prací „přenášíme“ do baterie):

$$W_{bat} = -U_b^2 \left(C_2 - C_1 \right) , \qquad \text{tedy} \qquad W_b = W_{bat} + E_2 - E_1 .$$

Uvědomíme-li si, že $U_1 = U_2 = U_b$, dostaneme

$$W_b = U_b^2 \left(C_1 - C_2 \right) + \frac{1}{2} U_b^2 C_2 - \frac{1}{2} U_b^2 C_1 = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(1 - \frac{C_2}{C_1} \right) = \frac{1}{2} U_b^2 C_1 \left(1 - \frac{l_1}{l_2} \right) .$$

Práce se tedy liší. Je to způsobeno tím, že v případě *b)* ubývá na deskách kondenzátoru náboj, čímž klesá síla vzájemného přitahování desek, kterou musíme překonávat.

Řada z vás řešila problém právě přes síly. Je třeba si uvědomit, že mechanická síla má opačné znaménko než síla elektrická, která má velikost

$$F_e = \frac{E}{2} Q ,$$

(deska nepůsobí sama na sebe; jedna deska vytváří pole pouze $E/2$, součtem polí z obou desek vzniká pole E). Potom je ovšem složitější popsat vliv baterie. Další chybou bylo zapomínání právě vlivu baterie na výměnu energií.

Překvapilo mě, že řada z vás nezná správně vztah pro energii kondenzátoru

$$E = \frac{1}{2} C U^2$$

a píše ho bez $\frac{1}{2}$. Podívejte se proto do příslušné učebnice fyziky, kde je tento faktor patřičně oddůvodňován.

Hvězdík

Úloha I . 4 ... *tlak plynu* *(maximum počtu bodů 4, řešilo 266 studentů)*

Problém této úlohy spočíval již v nejasně formulovaném zadání – nebylo zřejmé, zda *a)* držím konstantní teplotu plynu T a prudce ohřívám či ochlazuji nádobu nebo *b)* do nádoby o teplotě T_C vkládám stejné množství plynu o různých teplotách. V druhém případě se totiž řešení redukuje na prostý problém souvislosti tlaku plynu a teploty, kterou stanovuje rovnice ideálního plynu $pV = nRT$, pro vyšší teplotu je vyšší tlak!

V případě *a)* se musíme zaobírat interakcí mezi plynem a stěnou nádoby. Jelikož jsou teploty T a T_C různé, dochází k výměně tepla (jde tedy o nerovnovážný děj). Je zřejmé, že aby k tomu došlo, částice plynu musí odlétat s jinou rychlostí, než dopadla. Zajímáme-li se však o tlak plynu v daný moment, nelze argumentovat tím, že se plyn u stěny ohřeje a tím se zvýší jeho tlak (jak psali mnozí z vás), je potřeba jistý čas, aby se změněný impuls odražených částic předal ostatním uvnitř plynu, které se pohybují opačnými směry. Změnu tlaku lze zdůvodnit pouze tím, že v průměru je změna hybnosti dopadající částice větší nebo menší než v rovnováze. Protože dochází k přenosu energie, je zřejmé, že střední energie částic (a tedy střední kvadratická rychlost) odražených částic je větší resp. menší než dopadajících. Přesto z toho neplyne, že by se musela změnit střední „ne kvadratická“ rychlost – spektrum částic po odrazu může být jiné než před ním. Toto **zdůvodnění** řešení úlohy jsme však brali jako **dostatečné**, pokud jste se nepokusili o detailnější výpočty. Následující kvantitativní zdůvodnění by mělo přesvědčit i ty největší zatvrzelce.

Zkusme popsat tuto úlohu prostým modelem. Pro naše potřeby se omezíme na jednu komponentu rychlostí kolmou na uvažovanou stěnu – o dalších dvou lze předpokládat, že se příliš nezmění. Pak lze celou situaci (prozatím) zjednodušit na pružný ráz dvou koulí, částice plynu s hmotností m a rychlostí v a částice stěny, která má hmotnost M a rychlost V. Ta podle představ o tuhé látce kmitá kolem rovnovážné polohy s amplitudou X_0, tedy $V = V_0 \cos \omega t$, kde $V_0 = X_0 \omega$. Zavedeme-li parametr $\xi = m/M$, dostáváme pro rychlost v' plynu po srážce (ze zákona zachování hybnosti a energie)

$$v' = -\frac{1-\xi}{1+\xi} v + \frac{2}{1+\xi} V \quad (1).$$

Když by částice stěny nekmitaly, byla by velikost rychlosti částice plynu po odrazu menší než před ním. Chceme-li stanovit tlak plynu, tedy sílu, jakou molekuly působí v daném okamžiku na část stěny o jednotkovém obsahu, je třeba stanovit střední změnu hybnosti částic při nárazu na stěnu, tedy

$$F = -\frac{\langle \Delta p \rangle}{\Delta t} = \frac{N\left(\langle v \rangle - \langle v' \rangle\right)}{\Delta t} \qquad (2),$$

kde N je počet částic, který za dobu Δt (jdoucí v limitě k 0) narazí na danou plochu, N závisí na teplotě plynu a nikoli na vlastnostech stěny, tedy je konstantní. Středování $\langle v' \rangle$ musíme provést nejen přes všechny počáteční rychlosti, ale i přes všechny fáze oscilujících částic stěny. Počet částic N je zřejmě dostatečný, abychom při středování místo sum mohli uvažovat integrály. Na první pohled by se zdálo, že vlivem středování přes symetrický interval se druhý člen na pravé straně vztahu (1) anuluje a dostaneme případ stejný jako při nekmitající stěně. Pravdu ale měli ti řešitelé, kteří usoudili, že situace není zcela symetrická: Bude-li se částice stěny pohybovat „ven“ z nádoby, pomalejší částice plynu ji vůbec nedoženou. Jak lze ukázat (v zájmu stručnosti to zde dělat nebudeme), při rovnoměrném dopadu částic plynu je pravděpodobost srážky úměrná vzájemné rychlosti $v - V_0 \cos \omega t$. V jistém zanedbání oblastí, kde tato pravděpodobnost vychází záporná (částice se zde nemůže srazit), lze středováním vzorce (1) dospět k tomuto výsledku:

$$\langle v' \rangle = -\frac{1-\xi}{1+\xi} v - \frac{1}{1+\xi} \frac{V_0^2}{v} \qquad (3).$$

Aniž bychom se pokoušeli definovat teplotu stěny, je zřejmé, že čím bude vyšší, tím větší bude V_0^2 (částice stěny kmitající s větší energií). Tím pádem i rozdíl středních rychlostí ve vzorci (2) a následkem toho i tlak na stěnu bude zřejmě větší v případě $T_C > T$ než $T_C < T$.

Zůstává otázka, jakou hodnotu má faktor ξ. Protože je částice ve stěně držena vazbami, nelze tvrdit, že se při rázu (který není okamžitý) chová jako volná – hmotnost M bude tedy spíše než hmotnosti molekuly či jádra atomu v krystalové mříži odpovídat efektivní hmotnosti více sousedních center. Nicméně se zase zřejmě nejedná o hmotnost celé stěny, pro běžné látky tedy může mít tento poměr hodnotu desetin až setin.

Existuje jedno experimentální potvrzení odvozeného jevu. Mnozí z vás znají světelný mlýnek: kolečko s plochými lopatkami rovnoběžnými s osou otáčení, jejichž jedna strana je postříbřená a druhá černá. Je-li tento předmět vystaven světlu ve vakuované trubici, začne se otáčet ve směru černých plošek – světlo, které se od lesklých stran odrazí, předá mlýnku větší impuls než to, které se pohltí na protilehlé černé plošce. Nacházi-li se ovšem v nádobě zbytkový plyn, začne se mlýnek točit překvapivě opačným směrem. Vysvětlení spočívá v tom, že se černé stěny zahřejí a převládne pohyb způsobený kinetikou plynu. Protože je plyn dost řídký a lopatky se pohybují, nelze předpokládat, že by se u teplejších černých stěn vytvořila vrstvička teplého plynu s větším tlakem – ten je neustále nahrazován plynem novým. Vysvětlení tedy dává až diskutovaný jev, že střední rychlost odražených molekul bude u teplejší plošky větší než u chladnější.

Pár poznámek k bodování.

Pokud řešitel uvedl alespoň jeden pravdivý fakt (ve tvaru rovnice), získal 1/2 bodu. Řešil-li úlohu při konstantní teplotě stěn (případ *b*), získal 1 bod. Pokud dvě varianty zadání rozlišil a vyřešil správně výše zmíněnou variantu, získal 1,5 bodu. Řešil-li úlohu pro variantu *a)* se správným výsledkem, získal 3 body; za obě varianty dostal 4 body. Prémie 1–2 bodu byla za hlubší zamyšlení (popsané v řešení) nad mikroskopickými jevy odehrávajícími se v okolí stěny.

Bylo by vhodné uvést pár slov k argumentům, které jste ve svých řešeních uváděli, drazí kolegové. Slovní argumenty typu „plyn se rozpíná, proto víc tlačí“, jsem zavrhl, i když v jádru byly správné – k fyzikálnímu popisu je třeba používat přesné výrazy podepřené platnými rovnicemi. Úloha se zabývala nerovnovážným stavem v daném okamžiku, nikoli izochorickým dějem – řešení uvádějící tento proces byly zákonitě odměněny 0 body. Argumenty, které se opíraly o tepelné stahování a rozpínání nádoby, jsem také zavrhl – kromě toho, že pro všechny známé látky je tento efekt podstatně menší než výše popsané jevy, závisí i samotný směr změny objemu nádoby na materiálu: pro gumu, která se teplem stahuje, je jiný než pro kovy.

Jakékoli připomínky k opravení vaší úlohy nám můžete poslat s další sérií – k vašemu řešení připište svoje námitky a my je rádi posoudíme. Chci zdůraznit, že se skutečně nemusíte bát napsat, mně osobně objasňování některých pochybností zabralo jistý nezanedbatelný čas a některé nejasnosti v této úloze přetrvaly. Za podnětnou diskusi při řešení tohoto problému proto děkuji především Sašovi Kupčovi, Filipu Münzovi a dr. Velickému. Děkuji také Halefovi, doc. Obdržálkovi a dr. Dolejšímu.

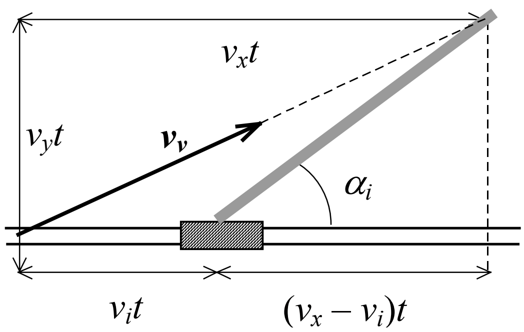
Tomáš Sýkora

Úloha I . 5 ... *lokomotivy* *(maximum počtu bodů 5, řešilo 263 studentů)*

Nejprve bych vás chtěl upozornit na jednu maličkost, co se týče obrázku. Jedná se o letecký snímek, tedy pohled shora a nikoliv ze strany, což pochopilo jen málo řešitelů. Je pravda, že obrázek není příliš šťastný, ale i tak se dalo přijít na to, že odklon kouře od kolejí způsobuje boční vítr. Přestože kouř je teplejší než okolní vzduch, nestoupal by totiž rovnoměrně, ale spíš by se zpomaloval, poněvadž se postupně ochlazuje. Nepředpokládáme samozřejmě vzestupný vítr (tornádo u nás těžko potkáte). Navíc pokud úlohu opravdu vyřešíme, zjistíme složku rychlosti kolmou na koleje asi 44 km/h, což je na stoupání trochu moc. Protože se však tato okolnost neprojeví na výsledku a neovlivní řešení, neodrazilo se nesprávné pochopení obrázku na bodování.

Samotná úloha pak skrývala jen dvě nebezpečná místa. Jednak jste si museli uvědomit, že fouká vítr, a to směrem nahoru doprava (při pohledu na obrázek), a dále pak zvolit vhodně souřadnou soustavu, aby se neudělala chyba ve znaménku. Je zde také několik předpokladů, které musí být splněny, aby úloha byla řešitelná. Vítr musí vát ve všech místech stejným směrem a stejnou rychlostí. To je sice idealizace, ale bez ní bychom úlohu těžko řešili. Lehké částečky kouře jsou navíc po vypuštění z komína téměř okamžitě zastaveny a dále jsou unášeny pouze větrem. Přijmeme-li tyto předpoklady, můžeme přejít k řešení.

Obr. D

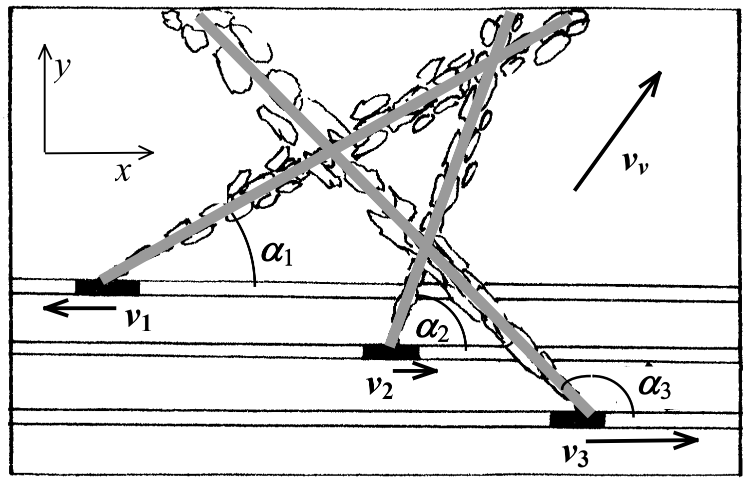


Úvahou zjistíme směr větru. Směr kolmé složky ke kolejím je jasný. A že fouká proti směru jízdy první lokomotivy, nahlédneme např. porovnáním úhlů mezi kouřem a kolejemi u první a třetí lokomotivy. První lokomotiva má ostřejší úhel, přestože je její rychlost menší, odtud směr větru. Zvolme si nyní kladné směry rychlostí: nejpřirozenější jsou směry zleva doprava a odspodu nahoru. Úhel budeme měřit proti směru hodinových ručiček (viz obr. 5). V takto zvolené soustavě můžeme psát:

$v_1 = -50$ km/h,
$v_3 = 70$ km/h,
$v_2 = ?,\ v_x = ?,\ v_y = ?,$

$\alpha_1 = 30°,$
$\alpha_3 = 135°,$
$\alpha_2 = 70°,$

Obr. E



kde v_x a v_y jsou složky rychlosti větru. Za čas t urazí obláček kouře dráhu $v_y t$ ve směru kolmém ke kolejím a dráhu $v_x t$ ve směru rovnoběžném. Vlak za stajný čas urazí v témž směru dráhu $v_i t$, jak je vidět z obr. 4. Můžeme tak psát

$$\mathrm{tg}\,\alpha_i = \frac{v_y t}{(v_x - v_i)t} = \frac{v_y}{v_x - v_i}.$$

Tento vztah platí díky vhodně zvolené soustavě souřadnic pro všechny vlaky. Platí tedy

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{v_y}{v_x - v_1}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{v_y}{v_x - v_2}, \quad \mathrm{tg}\,\alpha_3 = \frac{v_y}{v_x - v_3}.$$

Z těchto rovnic můžeme určit neznámé složky větru

$$v_x = \frac{v_1 \operatorname{tg}\alpha_1 - v_3 \operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_3}, \qquad v_y = \frac{v_3 - v_1}{\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\alpha_3}$$

a rychlost druhého vlaku

$$v_2 = v_x - v_y \operatorname{cotg}\alpha_2 = \frac{v_1 \operatorname{tg}\alpha_1(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3) - v_3 \operatorname{tg}\alpha_3(\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1)}{\operatorname{tg}\alpha_2(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_3)}.$$

Číselně pak dostaneme $\boldsymbol{v_2}$ **= 10 km/h**, v_x = 26 km/h, v_y = 44 km/h.

Odpověď tedy zní: druhá lokomotiva se pohybuje rychlostí 10 km/h doprava, tedy ve směru jízdy třetí lokomotivy. Kouř přitom lokomotivu předbíhá, neboť vane silný vítr.

Karel Houfek

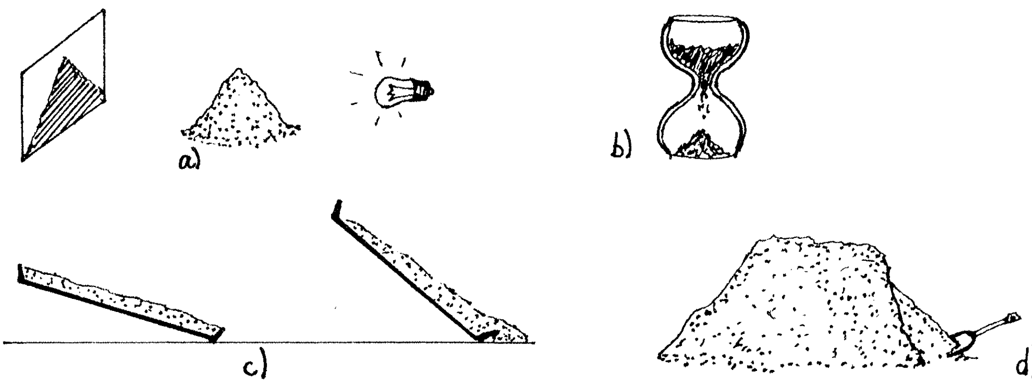
Úloha I . 6 ... ***mohyla z písku*** *(maximum počtu bodů 8, řešilo 216 studentů)*

Šlo o experimentální úlohu !!! – tedy o měření a zpracování výsledků. Tvoření nějaké teorie bylo pouze druhořadou záležitostí, spousta řešitelů se však zaměřila spíš na teorii a samotné měření a zpracování dat velice podcenila.

Základem každého experimentu je navrhnutí vhodné metody měření a sestavení aparatury potřebné pro měření. Předpokládám, že každý, kdo něco měřil, se pokusil nějakou vhodnou metodu nalézt a také nějakou našel, ale většina řešitelů se s popisem metody příliš neobtěžovala, bohužel. Uvedeme zde metody měření, které jste vynalezli s cílem co nejlépe naměřit vrcholový úhel kužele sypané látky.

Některé z metod měření jsou naznačeny na obr. 6. Většina řešitelů měřila parametry sypaného kužele, někteří však tento problém obešli tím, že měřili úhel, při kterém se začne sesouvat sypká látka z nakláněného tácku (viz bod c) na obrázku). Vyskytlo se i řešení, kdy experimentátor umístil sypkou látku do krabice, a uvolnil otvor uprosřed dna, čímž se v krabici vytvořila kuželová prohlubeň, jejíž parametry pak měřil.

Obr. F



Zásady metody sypání

- sypat na vodorovnou podložku (jinak by byl kužel dole šikmo seříznutý)
- sypat z malé výšky
- sypat do jednoho bodu (např. pomocí úzkého trychtýře, ustřiženého kornoutku, které jsou upevněné)

Metody měření

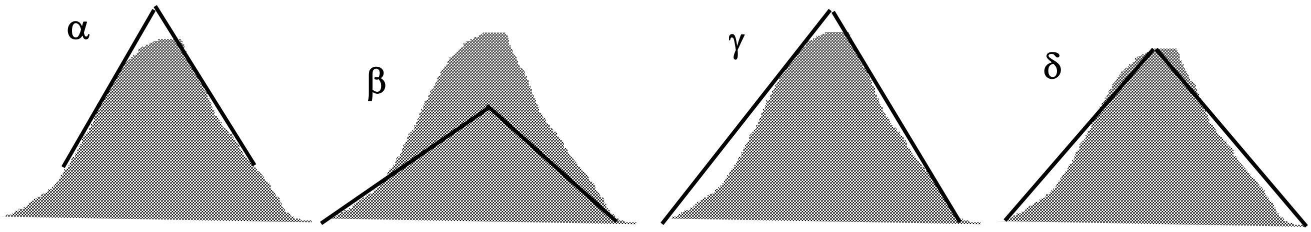
1. Přímé měření úhlů:
   a) Přiložíme špejli nebo papírové pruhy zajištěné v místě křížení (lze použít i kružítko). Tento úhel přeneseme a změříme úhloměrem. Musíme však přiložit

proužky kolmo k podložce (kolmost jste asi odhadovali, málokdo kontroloval svůj odhad olovnicí).

Výhody: Touto metodou můžeme měřit jak vrcholový úhel α, i úhel γ (viz obr. 7)

Nevýhody: Úhel se může při přenášení zkreslit nebo může snadno dojít k

Obr. G



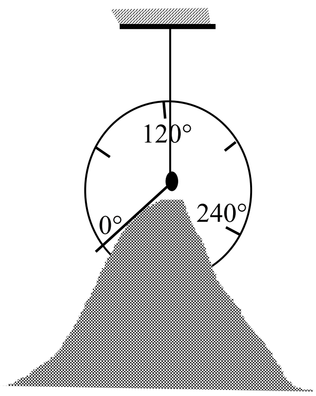
vrcholový úhel | úhel při základně | nepravý vrcholový úhel | střední úhel

požkození kužele a tím k větší nepřesnosti měření.

b) Zavěsíme olovničku nad vrchol a přiložíme úhloměr podle obr. 8.

Nevýhody: Přikládání úhloměru je poměrně nesnadné, metoda bude zatížená velkou chybou, neboť úhloměr nemůžeme přikládat přímo k olovničce.

Obr. H



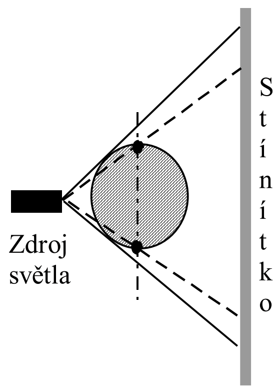
c) Přisypáváme ke kolmé desce, na kterou tento kužel obkreslíme a poté změříme úhloměrem jeho vrcholový úhel.

Výhody: Měření je nenáročné a snadno realizovatelné.

Nevýhody: Deska může zkreslit výsledky měření. Vrchol kužele se nám při nejlepší vůli nepodaří udělat přímo u desky.

d) Měříme vrcholový úhel stínu kužele nebo jeho obrazu v zrcadle, popřípadě se na kužel díváme přes sklo a obkreslíme jeho obrys. Zdroj světla je třeba umístit dostatečně daleko, aby nedocházelo k co nejmenšímu zkreslení, jak je to vidět na obr. 9. Při osvitu bodovým zdrojem nepromítáme naši hromádku přes kolmý průřez, ale s rostoucí vzdáleností zdroje stává se tato chyba zanedbatelnou.

Obr. I



e) Přiložíme alobal k okraji základny kužele a ohneme jej podle tvaru kužele, takto přeneseme úhel při základně nebo nepravý vrcholový úhel, což závisí na délce proužku alobalu. Pro úhel při vrcholu by pak (pokud by to byl přesný kužel) mělo platit $\alpha = 2\beta - 90°$.

Nevýhody: Úhel se může při přenášení zkreslit nebo může snadno dojít k požkození kužele jako v bodu a)

2. Nepřímé měření úhlů:

Změříme dva rozměry kužele (např. výšku + průměr základny nebo výšku + obvod).

Výhody: Je to jednoduché a nic nepoškozujeme.

Nevýhody: Měříme tak pouze střední vrcholový úhel δ. Promítnou se nám do měření také nejrůznější nepravidelnosti hromádky, především to, že u podložky se kužel *rozplývá*.

3. Netradiční měření:

Jakékoliv netradiční nápady při řešení úloh vítáme a jsou samozřejmě příslušně bodově oceňovány, proto se nebojte vymýšlet co nejefektivnější metody.

a) Táčková metoda

Je třeba zajistit, aby tření mezi táckem a látkou bylo větší než tření mezi částečkami látky, neboť pokud bude toto tření příliš malé, bude nám látka po tácku sjíždět pod mnohem menším úhlem než je úhel sypný.

b) Krabicová metoda

U této metody zůstává problémem měření úhlu, který jsme diskutovali v bodu 1.

Měření pro cukr krystal různými metodami

Každou metodou jsme změřili pět zvlášť nasypaných kuželů, přičemž pro každý kužel jsme provedli tři měření námi zjišťovaného úhlu a u metody d) délkových parametrů kužele. Výsledky měření jsou psány vedle tabulky, kde uváděné absolutní a relativní chyby jsou směrodatnou odchylkou aritmetického průměru, do které je započítaná i chyba metody (v průměru jsme ji odhadli asi na 2°)

a) přiložení proužků

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	105°	110°	118°	107°	112°
2	107°	109,5°	119°	107°	108°
3	108,5°	110,5°	118,5°	109°	113°

$\alpha = 111° \pm 6°$
$\delta\alpha = 5{,}4\%$

b) přiložení dvakrát přeloženého tuhého papíru

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	112°	104°	111°	104°	114°
2	111°	104°	109°	104°	114°
3	106°	109°	108°	104°	108°

$\alpha = 108° \pm 6°$
$\delta\alpha = 5{,}6\%$

c) překreslení na sklo

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
1	106,5°	108°	118°	114°	117°
2	110°	111,5°	115°	118,5°	118°
3	105°	109,5°	112°	112°	120°

$\alpha = 113° \pm 5°$
$\delta\alpha = 4{,}4\%$

d) měření délkových parametrů kužele

č. kužele	č. měření	o[cm]	v[cm]	d[cm]
1	1	48,0	4,6	14,7
	2	47,2	4,6	14,9
	3	48,4	4,5	15,2
2	1	59,8	6,2	19,1
	2	59,4	6,1	19,5
	3	60,8	6,25	19,3
3	1	49,5	4,9	15,6
	2	49,2	4,8	15,9
	3	49,5	5,0	16,0
4	1	61,7	5,8	19,6
	2	63,0	5,7	19,8
	3	62,0	5,8	20,0
5	1	49,4	4,8	16,1
	2	50,0	4,7	15,7
	3	50,2	4,75	16,0

Výpočet vrcholového úhlu z průměru a výšky i z obvodu a výšky vyšel po zaokrouhlení stejně:

$\alpha = 117° \pm 4°$
$\delta\alpha = 3{,}4\%$

Měření pro různé látky metodou překreslení na sklo

Metodou překreslení na sklo jsme změřili čtyři zvlášť nasypané kužely, přičemž pro každý kužel jsme provedli tři měření námi zjišťovaného úhlu.

a) mletá káva (*malá zrna, velmi nepravidelný tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	80°	88°	87°	83,5°
2	80,5°	89°	87°	86°
3	86°	86,5°	84°	78,5°

$\alpha = 87° \pm 4°$
$\delta\alpha = 4{,}6\%$

b) strouhanka (*střední zrna, zcela nepravidelný tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	85°	86°	85,5°	91°
2	86°	83,5°	86°	90,5°
3	85°	86,5°	85,5°	90°

$\alpha = 99° \pm 5°$
$\delta\alpha = 5{,}1\%$

c) rýže loupaná značky EMARKO (*velká zrna, doutníkový tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	100°	97°	95°	104°
2	101°	98°	99°	95°
3	105°	95°	96°	102°

$\alpha = 112° \pm 6°$
$\delta\alpha = 5{,}4\%$

d) sůl mořská s jódem SEL (*střední zrna, krystalky*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	114°	110°	114°	117°
2	110°	110°	122°	109°
3	107°	111°	113,5°	108°

$\alpha = 74° \pm 5°$
$\delta\alpha = 6{,}8\%$

e) hladká mouka AHEMA (*velmi malá zrna, nepravidelný tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	72°	70°	73,5°	73°
2	77°	79°	74°	80°
3	74°	71°	70,5°	79°

$\alpha = 94° \pm 4°$
$\delta\alpha = 4{,}3\%$

f) polohrubá mouka AHEMA (*dosti malá zrna, nepravidelný tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	93,5°	93°	98°	98°
2	94,5°	94°	95°	96°
3	91°	94°	94°	89°

$\alpha = 100° \pm 7°$
$\delta\alpha = 7{,}0\%$

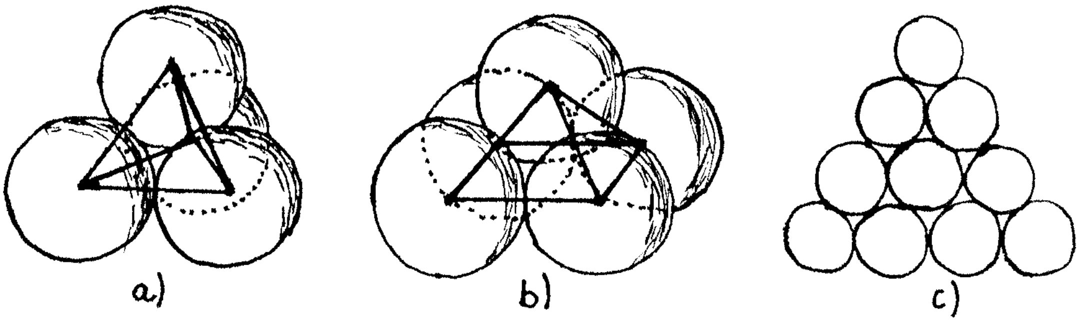
g) hrubá mouka AHEMA (*malá zrna, nepravidelný tvar*)

č. měření	α_1	α_2	α_3	α_4
1	104°	93,5°	102,5°	101°
2	109°	95°	99°	100°
3	106,5°	98°	94,5°	98,5°

$\alpha = 85° \pm 5°$
$\delta\alpha = 5{,}9\%$

Teorie a diskuse výsledků
Hned v úvodu musím poznamenat, že teorie je společným dílem nás všech, tedy i

Obr. J



vaším.

1. Někteří z vás se pokoušeli vysvětlit pozorovaný jev pomocí pravidelnosti zrn a pravidelnosti uspořádání (viz obr. 10). Tento model sice vysvětluje, že úhel v dobrém přiblížení nezavisí na velikosti kužele, **nevysvětluje** však, **proč vzniká právě kužel** (jehlan by přece odpovídal pravidelnému uspořádání částeček mnohem lépe!). Dále **není jasné, jak** takto uspořádaná **zrna drží pohromadě** a zda jsou třecí síly dostatečně velké. Uspořádání *a), c)* dávají velký nesouhlas s experimenty.
2. Někteří se snažili dokázat, že vrcholový úhel je pro všechny materiály stejný. Tato teorie je však **v rozporu s experimenty**!
3. Našla se i řešení přirovnávající sypké materiály k silně viskozním kapalinám. **Viskozní kapalina se** však narozdíl od sypané látky **po dostatečně dlouhé době rozteče**. Krom toho tento model objasňuje pouze rovnocennost směrů sesypávání.
4. Nejvýhodnějším modelem se ukázalo být přirovnání pohybu přisypávaných zrnek (pohybovala se převážně po povrchu) k pohybu zrnek **po nakloněné rovině**, tento model vysvětluje velikost sypného úhlu **třením**. Předpokládáme náhodné rozložení zrnek do směrů (což je reálný předpoklad). Potom jsou směry jsou rovnocenné a vzniká osově symetrická kupka. Tento model také dobře zdůvodňuje, proč úhel s velkou přesností nezávisí na velikosti kupky, při pohybu po nakloněné rovině totiž nezáleží na množství na sypaných zrn.

Vrcholový úhel tedy závisí na tření. Projevují se zde oba druhy tření: smykové tření o velikosti $F_{smyk} = F_n f$, kde f je koeficient smykového tření, a valivé tření o velikosti $F_{val} = F_n \mu/R$, kde μ je koeficient valivého tření a R je poloměr zrna. Které tření se více projeví, závisí na tvaru a velikosti (čím větší a pravidelnější zrna, tím je menší valivé tření a částečky se spíše valí než sesouvají, krásným příkladem je hrách).Valivého tření si povšimli pouze dva (!) řešitelé. Pro menší zrna je μ/R větší. To by vysvětlovalo závislost vrcholového úhlu α na velikosti částeček pro zrna, která mají valivé tření menší nebo srovnatelné se smykovým.

Dále můžeme z naměřených hodnot a dle vlastního úsudku odhadovat, na čem závisí vrcholový úhel. Drsnější povrch zrn způsobuje větší tření částic, proto bude α menší. Částečky mající členitější tvar do sebe lépe zapadají, α bude tedy menší. Menší zrna budou znamenat menší α, neboť jednak je pro menší zrna menší valivé tření, jednak mají menší zrna větší přilnavost (zde velmi záleží na tom, jak je materiál vlhký).

V našem měření se však projeví i výška, ze které sypeme (snažili jsme se o co nejmenší). Během letu se mění polohová energie na kinetickou, která se po dopadu musí spotřebovat třením (zachycení zrnka odpovídá zastavení). Sypeme-li z větší výšky, bude vrcholový úhel větší. Vrcholový úhel závisí i na pružnosti – zrnka sypeme z určité výšky a dochází k nárazům – zrnka mohou odskakovat (bortí hromadu a nezachycují se). Dále se projevují nepříjemnosti vzniklé třením s podložkou – při nedostatečném tření s podložkou by se hromada mohla rozjíždět; vnější vlivy, otřesy, vítr narušují měření a v neposlední řadě elektromagnetické a chemické charakteristiky zrn mohou podstatně zkreslit výsledky měření.

Závěr

Z naměřených výsledků za použití našich fyzikálních znalostí můžeme říci: Drsnější povrch zrn (větší povrchové tření), členitější tvar zrn (lépe do sebe zapadají), menší zrna (větší valivé tření), přilnavost či vlhkost (drží víc pohromadě), velikost, hmotnost, hustota (nedají se krátit všude, neb zde vystupují zde síly různého charakteru), to vše způsobuje ostřejší tvar kužele neboli menší vrcholový úhel α.

Chyby měření

Při každém měření se dopouštíme jisté chyby:

a) chyby hrubé – „ustřelený“ výsledek, chyba, která vznikla z nepozornosti nebo omylu experimentátora. Takové chyby je třeba ze souboru měření vyloučit (viz dále).

b) chyby náhodné – ovlivnění výsledků „náhodnými“ jevy, např. změna polohy oka, změna vlhkosti, proudění vzduchu. Takových jevů je velmi mnoho a jejich vliv je těžko postižitelný, proto chybu můžeme vidět skutečně v náhodě. Při velkém počtu měření (minimálně 10, ale čím víc, tím líp) se dá tato chyba zmírnit (viz dále).

c) chyby systematické – chyba metody (např. při měření vrcholového úhlu obrazu kužele v zrcadle naměříme vždy větší úhel než je skutečný, viz komentář k této metodě), chyba měřidla (např. dílky pravítka jsou vzdáleny více jak 1 mm), některé chyby experimentátora (někdo zaokrouhluje výsledek mezi dílky měřidla stále nahoru, někdo stále dolů). **Tyto chyby nelze zmírnit velkým počtem měření**, dají se částečně omezit používáním různých metod měření, tím, že měření provede více lidí apod.

Vzhledem k tomu,že teorie zpracovávání chyb je poměrně složitá uvádíme zde pouze návod, jak zpracovat výsledky měření, koho zajímá, jak se k těmto vzorcům došlo, nechť si přečte příslušné kapitoly v [1], [2].

Následující lze použít ***pouze pro dostatečný počet měření*** *(10 a více) a týká se pouze chyb* ***náhodných*** *(chybu systematickou nelze snížit velkým počtem měření)!!!*

1) Určíme střední hodnotu (aritmetický průměr) z naměřených vysledků:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

a standartní odchylku (= směrodatnou odchylku jednoho měření)

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \ .$$

2) Vyloučíme hrubé chyby. Zpravidla se užívá tzv. 3s-kritérium, to jest vyloučíme naměřené hodnoty, které se odchylují od průměru o více jak 3s.

3) Určíme směrodatnou odchylku aritmetického průměru

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \ ,$$

kde N je počet naměřených hodnot po vyloučení hrubých chyb.

4) Chybu zaokrouhlíme na jedno platné místa. Střední hodnotu zaokrouhlíme na číslici stejného řádu jako nejnižší platné místo chyby.

Výsledek pak uvádíme ve tvaru: $x = \bar{x} \pm (3 \cdot s(\bar{x}) + \textit{chyba systematická})$

Pro zjednodušení se někdy místo směrodatné odchylky počítá tzv. průměrná odchylka $\Delta x'$(rozdíl mezi nimi se výrazněli projeví až při velmi vysokém počtu měření):

$$\Delta x' = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N}.$$

[1] Jar. Brož a kol. – *Základy fyzikálních měření*, SPN, kapitola *Chyby měření;*

[2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands – *Feynmanove prednášky z fyziky*, Alfa Bratislava, 1986, kapitola *Pravděpodobnost*.

Marta Bednářová & Martin Krsek

Seriál na pokračování

Nejprve se vrátíme k řešení úlohy **S . 2**.

Úloha byla pro řadu z vás zřejmě jednoduchá. Pro izochorický děj platí $V = konst.$, což znamená, že $\delta V = 0$, tedy $\delta W = pdV = 0$. První větu termodynamickou napíšeme ve tvaru $dU = \delta Q'$.

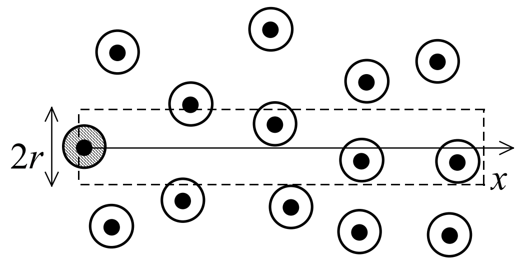
Výraz $\frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ je definicí molární tepelné kapacity pro izochorický děj, $c_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$. Stačí jen nalézt správný vztah, do kterého dosadíme a máme $c_p = c_V + R_m$ (Mayerův vztah).

Další věci, které si řekneme, budou již z kinetické teorie látek. Mějme N molekul plynu v objemu V. Jejich objemovou hustotu definujeme

$$N_V = N/V. \qquad (1)$$

Předpokládejme, že molekuly mají kulový tvar o stejném poloměru r a jsou v klidu, až na jednu. Podívejme se na obr. 11.

Obr. K



Zavedeme účinný srážkový průřez molekuly

$$\sigma_c = \pi(2r)^2. \qquad (2)$$

Nachází-li se ve válci o podstavě σ_c a výšce (spíše délce) Δl nějaká jiná částice než ta, která se pohybuje, narazí na sebe.

Srážkovou frekvenci definujeme jako počet srážek molekul, které se vyskytují ve válci o objemu $\sigma_c\, \Delta l$ za čas Δt. Označíme ji $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \sigma_c \frac{\Delta l}{\Delta t} = \sigma_c \bar{v}, \qquad (3)$$

kde $\bar{v}$ je nějaká střední rychlost letící molekuly (např. střední kvadratická rychlost).Vynásobíme-li dráhu mezi dvěma srážkami srážkovou frekvencí, dostaneme rychlost $\bar{v}$. Tedy

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sigma_c N_V}. \qquad (4).$$

Veličinu $\bar{l}$ nazýváme *střední volnou dráhou* molekuly a značíme ji většinou λ.

Další odstavce budou pro ty, kteří umějí alespoň trošičku derivovat a integrovat, nebo alespoň mají ponětí o tom, o co jde:

Hustota pravděpodobnosti $\rho'(v)$ nechť je pravděpodobnost dělená objemkem ΔV v určitém elementárním místečku prostoru, který má místo souřadnicových os vyneseny rychlosti v_x, v_y, v_z. Předpokládejme, že tuto funkci vektoru rychlosti lze vyjádřit jako součin funkcí jednotlivých jeho složek

$$\rho'(\vec{v}) = \rho(v_x)\rho(v_y)\rho(v_z)\,. \qquad (5)$$

Zlogaritmujeme na

$$\ln\rho'(\vec{v}) = \ln\rho(v_x) + \ln\rho(v_y) + \ln\rho(v_z)\,. \qquad (6)$$

Budeme-li počítat derivaci funkce $\ln\rho(\vec{v})$ postupně podle složky rychlosti v_x, máme

$$\frac{\partial \ln\rho'(\vec{v})}{\partial v_x} = \frac{d\ln\rho(\vec{v})}{dv}\frac{\partial v}{\partial v_x} = \frac{d\ln\rho(\vec{v})}{dv}\frac{v_x}{v}\,, \qquad (7)$$

jelikož $\dfrac{\partial v}{\partial v_x} = \dfrac{\partial\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}{\partial v_x} = \dfrac{v_x}{v}\,.$ (8)

Odtud dostaneme vztah

$$\frac{1}{v}\frac{d\ln\rho'(\vec{v})}{dv} = \frac{1}{v_x}\frac{d\ln\rho(v_x)}{dv_x}\,. \qquad (9)$$

Jelikož tento výpočet můžeme provést pro každou složku a poslední vztah nám vyjde s nezměněnou levou stranou i pro složky v_y a v_z, lze napsat např.

$$\frac{1}{v_y}\frac{d\ln\rho(v_y)}{dv_y} = \frac{1}{v_x}\frac{d\ln\rho(v_x)}{dv_x}\,. \qquad (10)$$

Protože obě strany rovnice jsou funkce dvou nezávislých proměnných, musí se rovnat konstantě, aby se vůbec mohly rovnat pro libovolná v_y a v_x. To znamená

$$\frac{1}{v_x}\frac{d\ln\rho(v_x)}{dv_x} = -\sigma^2\,. \qquad (11)$$

Vyřešeme-li tuto diferenciální rovnici, zjistíme, že rozložení hustoty pravděpodobnosti pro složku rychlosti v_x je

$$\rho(v_x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) \mathrm{e}^{-v_x^2/2\sigma^2}\,, \qquad (12)$$

kde člen v závorce je jakási integrační konstanta, kterou obdržíme z podmínky, že pravděpodobnost nalezení libovolné rychlosti částice je jistotou, tedy jedničkou.

Pro celkovou hustotu pravděpodobnosti tedy platí

$$\rho'(\vec{v}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)/2\sigma^2}\,. \qquad (13)$$

Chceme-li dostat závislost na velikosti vektoru rychlosti, musíme si uvědomit, že v prostoru souřadných os v_x, v_y, v_z je rychlost velikosti v zastopena povrchem koule. Pak

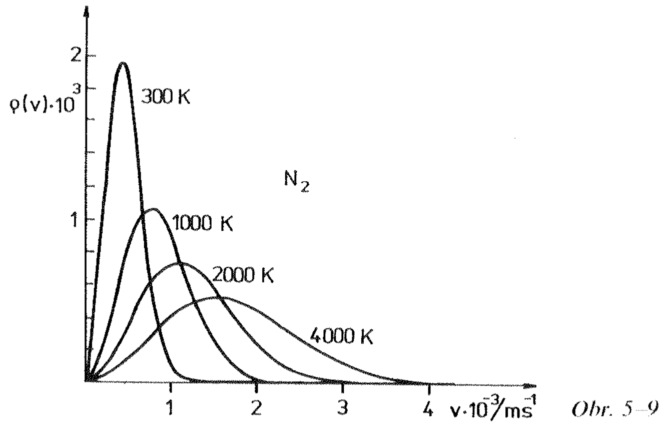
$$\rho(v) = 4\pi\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{3/2} v^2\,\mathbf{e}^{-v^2/2\sigma^2}\,, \qquad (14)$$

což je Maxwellovo-Boltzmanovo rozdělení rychlosti molekul, které už někteří znáte ze hodin fyziky. V poslední řadě lze říci, že $\sigma^2 = \frac{kT}{m_0}$, kde k je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota plynu a m_0 hmotnost jedné molekuly v plynu. Na obr. 12 je zakresleno rozdělení rychlostí pro molekulu dusíku při různých teplotách plynu. Všimněte si, že exponent ve vzorci (13) je bezrozměrný a má tvar

$$\frac{\frac{1}{2}m_0 v^2}{kT},$$

tedy podíl kinetické energie částice plynu a jakéhosi energetického faktoru. Právě součin kT má důležitý význam ve statistické i kvantové fyzice.

Obr. L



Úloha S . III

Vypočtěte střední volnou dráhu molekuly dusíku při normálním tlaku a pokojové teplotě $t' = 20^o C$. Poloměr molekuly dusíku $r = 1{,}5.10^{-10} m$.

<u>Naše adresa:</u> FKS, KTF MFF UK
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha